

КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
olya.makzi@gmail.com

Аннотация. Получены конструктивные достаточные условия существования и единственности решения периодической краевой задачи для обобщения матричного дифференциального уравнения Риккати, разработан алгоритм итерационного типа построения решения в классе допустимых функций.

Ключевые слова: матричное уравнение Риккати, периодическая краевая задача.

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = \lambda(A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X)), \quad (1)$$

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \quad (2)$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n}$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что $Q(t) \not\equiv 0$, матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t, 0) \not\equiv 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), выраженные через ее исходные данные. Эта задача при $Q(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$ конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5] и др.; в этом случае с помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n \times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [1, 2, 7–9]. Задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [10].

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho\}, \quad M = \int_0^\omega A(\tau) d\tau, \quad N = - \int_0^\omega B(\tau) d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\delta = \max_t \|Q(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q(\rho, \varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \quad \varphi(\rho, \varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)[\alpha + \beta + L + 2\delta\rho]\omega^2, \quad q_2(\rho) = \gamma\omega(2\delta\rho + L),$$

$$\varphi_1(\rho) = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta + L)\rho + \delta\rho^2 + h]\omega^2, \quad \varphi_2(\rho) = \gamma\omega(\delta\rho^2 + L\rho + h),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 - q_2(\rho)}{q_1(\rho)}, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ , Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho, \varepsilon)$.

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой в классе допустимых функций, т.е. функций класса $C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, удовлетворяющих условию (2)

$$\begin{aligned}
 & X_{k+1}(t, \lambda) = \\
 & = \Phi^{-1} \left\{ \lambda \left[\int_0^\omega A(\tau) d\tau \int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma, \lambda) + X_k(\sigma, \lambda)B(\sigma) + X_{k-1}(\sigma, \lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma, \lambda) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + F(\sigma, X_{k-1}(\sigma, \lambda))] d\sigma + \int_0^\omega \left(\int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma, \lambda) + X_k(\sigma, \lambda)B(\sigma) + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + X_{k-1}(\sigma, \lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma, \lambda) + F(\sigma, X_{k-1}(\sigma, \lambda))] d\sigma \right) B(\tau) d\tau \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^\omega [X_k(\tau, \lambda)Q(\tau)X_k(\tau, \lambda) + F(\tau, X_k(\tau, \lambda))] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\Phi^{-1} \int_0^\omega F(\tau, 0) d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_C \leq \frac{q\|X_{k+1} - X_k\|_C + \tilde{q}_2\|X_k - X_{k-1}\|_C}{1 - q}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\tilde{q}_2 = \varepsilon\gamma(\alpha + \beta)(2\delta\rho + L)\omega^2/2$.

Оценки

$$\|X_1 - X_0\|_C \leq \gamma\omega h, \quad \|X_2 - X_1\|_C \leq \frac{\varepsilon}{2}\gamma(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)\rho + h]\omega^2 + \gamma\omega(\delta\rho^2 + L\rho)$$

дополняют оценку (4) и позволяют выразить ее через исходные данные задачи.

Библиографические ссылки

1. *Маковецкая О.А.* Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43–50.
2. *Лаптинский В.Н., Маковецкая О.А.* Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнения Ляпунова и Риккати // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54 № 7. С. 937–946.
3. *Лаптинский В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларусі, 1998.
4. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2012.
5. *Лаптинский В.Н.* О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
6. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness // J. of Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

7. *Маковецкая О.А.* К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром // Матер. междунар. науч. конф. «Ерунгинские чтения–2019». Мн., 2019. Т. 1. С. 83–84.

8. *Маковецкая О.А.* Периодическая краевая задача для обобщенного матричного уравнения Риккати с параметром // XIV Белорус. мат. конф., посвящ. 65-летию Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2024. Ч. 2. С. 55–56.

9. *Маковецкая О.А.* К периодической краевой задаче для обобщения матричного уравнения Риккати с параметром // Теория управления и математическое моделирование: Матер. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова. В 2-х ч. Ижевск, 16–20 июня 2025 г. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 2025. С. 109–112.

10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.