К РЕШЕНИЮ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

И.И. Маковецкий

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
imi.makzi@gmail.com

Аннотация. Получены конструктивные достаточные условия существования и единственности решения двухточечной краевой задачи для возмущенного матричного уравнения Риккати, предложен итерационный алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решения

Ключевые слова: краевая задача, матричное уравнение Риккати.

Рассматривается задача типа [1]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + Q_1(t)X^2 + XQ_2(t)X + X^2Q_3(t) + F(t, X), \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B, Q_i \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ $(i = 1, 2, 3)$, $F \in C(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X) : t \in \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица относительно X (локально), M и N – вещественные $n \times n$-матрицы. В работе [2] эта задача изучалась только при $Q_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\tilde\rho = \infty$.

Получены в терминах задачи достаточные условия ее однозначной разрешимости. Разработан алгоритм с неявной вычислительной схемой построения решений в классе допустимых функций, т.е. функций класса $C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, которые подчинены условию (2). В работе [3] разработан аналогичный алгоритм в случае $Q_1(t) \equiv 0$, $Q_2(t) \equiv 0$.

Данная задача изучается, как и в [3], в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – какая-либо норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$\tilde{H}(\omega) = \int\limits_0^\omega H(\tau)\,d\tau, \quad H \in \{A, B\}, \quad D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \ \ \|X\| \leqslant \rho < \tilde{\rho}\},$$

$$R = M^{-1}(M\tilde{A}(\omega) - M - N), \quad S = -\tilde{B}(\omega), \quad \Psi(t)X = A(t)X + XB(t), \quad \Phi X = RX - XS,$$

$$m = \|M^{-1}(M+N)\|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \quad \beta = \max_{t\in I}\|B(t)\|,$$

$$\delta_i = \max_{t\in I}\|Q_i(t)| \quad (i = 1, 2, 3), \quad h = \max_{t\in I}\|F(t, 0)|,$$

$$q = q(\rho) = \gamma\omega[(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L)(m + 2^{-1}(\alpha + \beta)\omega) + 2\delta\rho + L],$$

$$p = \gamma\omega h(m + 2^{-1}(\alpha + \beta)\omega + 1), \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

где $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица функции $F(t, X)$ в области D_ρ, при этом оператор Φ и при каждом $t \in I$ оператор $\Psi(t)$ – линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Данная работа дополняет результаты статей [1, 3] и развивает исследования [4, 5] в рамках условия $\det M \neq 0$ в задаче (1), (2).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $\det M \neq 0$, *матрицы* R *и* S *не имеют общих характеристических чисел,* $q < 1$, $p/(1 - q) \leqslant \rho$.

Тогда в области D_ρ *решение* $X = X(t)$ *задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке* I *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка* $\|X\|_C \leqslant p/(1 - q)$.

Доказательство. По аналогии с [4] введен оператор

$$\mathcal{L}(X(t), Y(t)) =$$

$$= M^{-1}(M + N)\int\limits_t^\omega (\Psi(\tau)X(\tau) + Q_1(\tau)Y^2 + YQ_2(\tau)Y + Y^2Q_3(\tau) + F(\tau, Y(\tau)))\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\omega [K_A(t, \tau)(\Psi(\tau, X(\tau) + Q_1(\tau)Y^2(\tau) + Y(\tau)Q_2(\tau)Y(\tau) + Y^2(\tau)Q_3(\tau) + F(\tau, Y(\tau))) +$$

$$+ (\Psi(\tau)X(\tau) + Q_1(\tau)Y^2(\tau) + Y(\tau)Q_2(\tau)Y(\tau) + Y^2(\tau)Q_3(\tau) + F(\tau, Y(\tau)))K_B(t, \tau)]\,d\tau -$$

$$- \int\limits_0^\omega F(\tau, Y(\tau))\,d\tau,$$

где

$$K_H(t,\tau) = \begin{cases} \int\limits_0^{\tau} H(\sigma)\,d\sigma, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ \int\limits_{\tau}^{\omega} H(\sigma)\,d\sigma, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega, \end{cases} \qquad \mathcal{L} : C(I, \mathbb{R}^{n\times n}) \to C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n}).$$

Поскольку, по условию матрицы R и S не имеют общих характеристических чисел, то на основании [6] линейный оператор Φ однозначно обратим. Тогда можно установить, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$X(t) = \Phi^{-1}\mathcal{L}(X(t), X(t)). \tag{3}$$

Для построения решения разработан алгоритм типа [1, 4].

$$X_k(t) = \Phi^{-1}\mathcal{L}(X_k(t), X_{k-1}(t)), \tag{3}$$

где в качестве начальной функции X_0 может быть взята любая функция из пространства $C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ такая, что $\|X_0\|_C \leqslant \rho$.

Установлено, что приближения $\{X_k(t)\}_0^\infty$ являются допустимыми, а также доказано, что все члены последовательности $\{X_k(t)\}_0^\infty$ однозначно определяются алгоритмом (3) и принадлежат шару $\|X\|_C \leqslant \rho$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма, при этом получены оценки

$$\|X - X_m\|_C \leqslant \frac{\tilde{q}^m \|X_1 - X_0\|_C}{1 - \tilde{q}}, \quad \|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1 - \tilde{q}}, \tag{4}$$

в которых

$$\tilde{q} = \frac{q - \tilde{q}_1}{1 - \tilde{q}_1} < q, \quad \tilde{q}_1 = \gamma(\alpha+\beta)\omega[m + 2^{-1}(\alpha+\beta)\omega] < q.$$

Как и в работе [3], при $X_0 = 0$ оценка (4) существенно упрощается:

$$\|X - X_m\|_C \leqslant \frac{\tilde{q}^m}{1-\tilde{q}} \frac{p}{1-\tilde{q}_1}, \quad \|X\|_C \leqslant \frac{p}{1-q}.$$

Библиографические ссылки

1. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И.* К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 137–141.

2. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness // J. of Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

3. *Маковецкий И.И.* К построению решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения ляпуновского типа // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61. № 3. С. 429–432.

4. *Маковецкий И.И.* Решение двухточечной краевой задачи для возмущенного матричного уравнения Риккати // Теория управления и математическое моделирование: Матер. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова. В 2-х ч. Ижевск, 16–20 июня 2025 г. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский ун-т», 2025. С. 112–115.

5. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: Белорусско-Российский ун-т, 2012.

6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.