ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Д.В. Роголев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
d-rogolev@tut.by

Аннотация. Для системы матричных уравнений Риккати с помощью конструктивного метода регуляризации исследуется периодическая краевая задача. По исходным данным

задачи получены достаточные условия ее однозначной разрешимости. Предложен итерационный алгоритм построения решения. Дана оценка, характеризующая скорость сходимости итерационной последовательности к решению, а также оценка области локализации решения.

Ключевые слова: матричное уравнение Риккати; периодическая краевая задача; построение решения.

Рассматривается задача типа [1]

$$dX/dt = G_1(t,X,Y), \tag{1}$$

$$dY/dt = G_2(t,X,Y), \tag{2}$$

$$X(0)=X(\omega), \quad Y(0)=Y(\omega), \tag{3}$$

где

$$G_1(t,X,Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + C_1(t)YC_2(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t),$$

$$G_2(t,X,Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + D_1(t)XD_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t),$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}\,(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $(t,X,Y)\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$.

Система (1), (2), как и уравнения Риккати [2–5 и др.], играет важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений (дифференциальные игры, механика, экономика и т.д.) [2, 6–8]. Задача типа (1)–(3), по-видимому, впервые поставлена, в [9].

Обозначения:

$$D=\{(t,X,Y)\colon t\in I,\ \|X\|\leqslant\rho_1,\quad \|Y\|\leqslant\rho_2\},\quad \tilde{A}_i(\omega)=\int\limits_0^\omega A_i(\tau)\,d\tau,\quad \gamma_i=\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\|,$$

$$\alpha_i=\max_{t\in I}\|A_i(t)\|,\quad \beta_i=\max_{t\in I}\|B_i(t)\|,\quad c_i=\max_{t\in I}\|C_i(t)\|,\quad d_i=\max_{t\in I}\|D_i(t)\|,$$

$$s_i=\max_{t\in I}\|S_i(t)\|,\quad p_i=\max_{t\in I}\|P_i(t)\|,\quad h_i=\max_{t\in I}\|F_i(t)\|,\quad i=1,2,$$

$$\varphi_{11}=\gamma_1\{0{,}5\alpha_1\omega^2[\alpha_1+\beta_1+2s_1\rho_1+s_2\rho_2]+\omega[\beta_1+2s_1\rho_1+s_2\rho_2]\},$$

$$\varphi_{12}=\gamma_1\omega(0{,}5\alpha_1\omega+1)(c_1c_2+s_2\rho_1),\quad \varphi_{21}=\gamma_2\omega(0{,}5\alpha_2\omega+1)(d_1d_2+p_1\rho_2+2p_2\rho_2),$$

$$\varphi_{22}=\gamma_2\{0{,}5\alpha_2\omega^2[\alpha_2+\beta_2+p_1\rho_1+2p_2\rho_2]+\omega[\beta_2+p_1\rho_1+2p_2\rho_2]\},$$

$$\varphi_1(\rho_1,\rho_2)=0{,}5\gamma_1\alpha_1\omega^2[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+c_1c_2\rho_2+s_1\rho_1^2+s_2\rho_1\rho_2+h_1]+$$

$$+\gamma_1\omega[\beta_1\rho_1+c_1c_2\rho_2+s_1\rho_1^2+s_2\rho_1\rho_2+h_1],$$

$$\varphi_2(\rho_1,\rho_2)=0{,}5\gamma_2\alpha_2\omega^2[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+d_1d_2\rho_1+p_1\rho_1\rho_2+p_2\rho_2^2+h_2]+$$

$$+\gamma_2\omega[\beta_2\rho_2 + d_1 d_2\rho_1 + p_1\rho_1\rho_2 + p_2\rho_2^2 + h_2],$$

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}, \quad \Phi = (\varphi_{ij}),$$

где $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\Phi = \partial\varphi/\partial\rho$ – матрица Якоби для φ.

С помощью метода [10, гл. 3] задача (1)–(3) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|T\|_C = \max\limits_{t\in I}\|T(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, $T \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предлагаемая работа является дополнением и развитием [1, 11–13]. В отличие от [1] в правые части (1), (2) добавлены слагаемые $C_1(t)YC_2(t)$, $D_1(t)XD_2(t)$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{A}_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$,

2) $\varphi(\rho) \leqslant \rho$,

3) $\varphi_{11} < 1$, $\det(E - \Phi) > 0$, *где* $E = \mathrm{diag}\,(1, 1)$.

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D.

Для построения решения задачи разработан алгоритм в дифференциальной форме

$$dX_{k+1}/dt = G_1(t, X_k, Y_k), \tag{4}$$

$$dY_{k+1}/dt = G_2(t, X_k, Y_k), \tag{5}$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где в качестве начального приближения X_0, Y_0 приняты постоянные матрицы, определяемые на основе (4), (5) при $k = 0$ из соответствующих условий (6) для приближения $X_1(t), Y_1(t)$,

$$\int\limits_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0)\,d\tau = 0, \qquad \int\limits_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0)\,d\tau = 0.$$

На основе (4)–(6) получены рекуррентные интегральные соотношения

$$X_k(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega)\Bigg\{\int\limits_0^t\Bigg(\int\limits_0^\tau A_1(\sigma)\,d\sigma\Bigg)G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_t^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^\omega A_1(\sigma)\,d\sigma\Bigg)G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^\omega\left[G_1\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_1(\tau)X_k(\tau)\right]\,d\tau\Bigg\}, \tag{7}$$

$$Y_k(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega)\Bigg\{\int\limits_0^t\Bigg(\int\limits_0^\tau A_2(\sigma)\,d\sigma\Bigg)G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_t^\omega\Bigg(\int\limits_\tau^\omega A_2(\sigma)\,d\sigma\Bigg)G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right)\,d\tau -$$

$$- \int_0^{\omega} \left[G_2\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_2(\tau) Y_k(\tau)\right] d\tau \Bigg\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8), при этом получена оценка

$$\tilde{Z}_i \leqslant (E - H)^{-1} H^i Z_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{Z}_i = \begin{pmatrix} \|X - X_i\|_C \\ \|Y - Y_i\|_C \end{pmatrix}, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} \|X_1 - X_0\|_C \\ \|Y_1 - Y_0\|_C \end{pmatrix}, \quad H = \left(E - \tilde{\Phi}\right)^{-1} \left(\Phi - \tilde{\Phi}\right), \quad \tilde{\Phi} = \left(\tilde{\varphi}_{ij}\right);$$

$$\tilde{\varphi}_{11} = \gamma_1 \omega \left(\beta_1 + 2 s_1 \rho_1 + s_2 \rho_2\right), \quad \tilde{\varphi}_{12} = \gamma_1 \omega (c_1 c_2 + s_2 \rho_1),$$

$$\tilde{\varphi}_{21} = \gamma_2 \omega (d_1 d_2 + p_1 \rho_2), \quad \tilde{\varphi}_{22} = \gamma_2 \omega \left(\beta_2 + p_1 \rho_1 + 2 p_2 \rho_2\right).$$

Библиографические ссылки

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука, 1975.

3. Параев Ю. И. *Уравнения Ляпунова и Риккати.* Томск: Томск. гос. ун-т, 1989.

4. Егоров А. И. *Уравнения Риккати.* М.: Физматлит, 2001.

5. Ларин В. Б. *Управление шагающими аппаратами.* Киев: Наук. думка, 1980.

6. Jódar L. *Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games* // Appl. Math. Let. 1990. V. 3. № 4. P. 9–12.

7. Starr A. W., Ho Y. C. *Non-zero sum differential games* // J. Optim. Theory and Appl. 1969. V. 3. P. 179–197.

8. Cruz J. B., Chen C. I. *Series Nash solution of two-person nonzero-sum linear quadratic games* // J. Opt. Theory and Appl. 1971. V. 7. P. 240–257.

9. Анисович В. В., Крюков Б. И., Мадорский В. М. *Об одном подходе к решению задач оптимального управления* // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 265–268.

10. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

11. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2010. № 1(35). С. 12–23.

12. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилев: МГУ, 2011. С. 4–19.

13. Роголев Д. В. *Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщенной системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Теория управления и математическое моделирование: матер. Всерос. конф. с междунар. участием. Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет», 2022. С. 114–117.