УДК 517.977.1

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НЕРАЗДЕЛЕННЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НА ФУНКЦИЮ СОСТОЯНИЙ

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача построения возможных управлений $u \in C(I, \mathbb{R}^r)$ и соответствующих функций состояний $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u, \tag{1}$$

$$x(\tau_s) = x_s, \quad s = \overline{0, m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = 0, \tag{3}$$

где $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times r})$, $I = [0, \omega]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n \leq \omega$, $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k \leq \omega$.

Задача состоит из двух частей, определяемых соотношениями (1)–(3). Соотношения (2) представляют собой условия [1], они относятся к разделенным краевым условиям; (3) – дискретный аналог изопериметрических ограничений на функцию состояний [2]. В более общем виде это условие может быть записано в виде [3, с. 41]

$$\int_0^{\omega} d\Phi(\tau) x(\tau) = b,$$

где $\Phi(t)$ – вещественная $(m \times n)$-матричная функция ограниченной вариации; b – вещественный m-вектор.

Целью работы является получение конструктивных достаточных условий разрешимости задачи (1)–(3) и алгоритма построения функций $u(t)$, $x(t)$.

Обозначим $H = \sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i)$. В [4, с. 71] установлено, что при выполнении условия

$$\det H \neq 0 \tag{4}$$

для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{5}$$

с условием (3) имеет место некритический случай, при этом решение задачи (3), (5) представимо в виде $x(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau) f(\tau) d\tau$, где $G(t, \tau)$ – соответствующая матрица Грина [4, с. 72].

На основании [4] при выполнении условия (4) совокупность соотношений (1), (3) приводит к выражению

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Используя условия (2), для отыскания функции $u(t)$ из (6) получена система связанных уравнений первого рода

$$\int_0^{\omega} G(\tau_s,\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = x_s, \quad s = \overline{0,m}. \tag{7}$$

Очевидно, задача (1)–(3) эквивалентна совокупности соотношений (6), (7).

Далее система (7) записывается в операторном виде

$$T_s u = x_s, \tag{8}$$

где T_s – линейные однородные интегральные операторы, определяемые левой частью (7).

Для анализа системы (8) используется методика [1], при этом вводятся вспомогательные функции $S_i \in C(I,\mathbb{R}^{r\times n})$. Согласно [1], при выполнении условий

$$\det\left(T_{l+1}M_l S_{l+1}\right) \neq 0, \quad l = \overline{0,m-1},$$

для функции $u(t)$ имеет место выражение

$$u(t) = M(t,y) + q(t), \tag{9}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция; $M(t,y)$, $q(t)$ – соответственно линейный однородный интегральный оператор из $C(I,\mathbb{R}^r)$ в $C(I,\mathbb{R}^r)$ и функция, построенные по алгоритмам

$$M_{r+1}(y_{r+1}) = M_r(y_{r+1}) - M_r S_{r+1}\left(T_{r+1}M_r S_{r+1}\right)^{-1} T_{r+1}M_r(y_{r+1}),$$

$$q_{r+1} = q_r + M_r S_{r+1}\left(T_{r+1}M_r S_{r+1}\right)^{-1}\left(x_{r+1} - T_{r+1}q_r\right), \quad r = \overline{0,m-1},$$

при этом $y_m = y$, $q_m = q$, $M_m(y_m) = M(t,y)$, $M_0 = J$ – тождественный оператор. Аргумент t в $M(t,y)$ означает явную зависимость M от t.

На основе (6), (9) может быть получена функция состояний.

Произвольность функции $y(t)$ может быть использована при учете различных ограничений на управления и функции состояний [2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Решение многоточечной задачи управления с интегральными ограничениями типа равенств / В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 10. – С. 1386–1393.
2. **Моисеев, Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1971. – 424 с.
3. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 496 с.
4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.