

УДК 517.977.57

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ,  
ОПИСЫВАЕМЫМ ЗАДАЧЕЙ ВЫПУКЛОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В. Г. ЗАМУРАЕВ

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Рассмотрим задачу оптимального управления, в которой управляемый процесс описывается некоторой задачей выпуклой минимизации в банаховом пространстве, а управляющим воздействием является изменение целевой функции и допустимой области этой задачи выпуклой минимизации.

Пусть  $C$  – метрическое пространство допустимых управлений,  $F$  – вещественное рефлексивное банахово пространство,  $\{S(c)\}_{c \in C}$  – семейство непустых замкнутых выпуклых неограниченных множеств в пространстве  $F$ ,  $\{\Phi(c, u)\}_{c \in C}$  – семейство собственных функционалов на  $F$ , конечных на  $S(c)$ .

Пусть управляемый процесс описывается решением задачи минимизации функционала  $\Phi(c, u)$  на множестве  $S(c)$ :  $u^*(c) = \arg \min_{u \in S(c)} \Phi(c, u)$ .

Для того чтобы гарантировать существование и единственность минимизатора  $u^*(c)$ , потребуем от функционала  $\Phi(c, u)$  для каждого  $c \in C$  строгой выпуклости, полунепрерывности снизу и коэрцитивности на  $S(c)$  [1, с. 44]:

$$\forall c \in C, u \neq v \in S(c) \text{ и } \lambda \in (0, 1)$$

$$\Phi(c, \lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda \Phi(c, u) + (1 - \lambda)\Phi(c, v);$$

$\forall c \in C$  и  $u \in S(c)$   $\Phi(c, u) \leq \liminf_{v \rightarrow u} \Phi(c, v)$ ;  $\forall c \in C$   $\Phi(c, u) \rightarrow +\infty$ ,  
если  $u \in S(c)$ ,  $\|u\| \rightarrow +\infty$ .

Пусть функционал  $J(c, u): C \times F \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассматриваемая задача оптимального управления состоит в нахождении управления  $c^* \in C$  такого, что

$$c^* = \arg \min_{c \in C} J(c, u^*(c)),$$

где  $u^*(c) = \arg \min_{u \in S(c)} \Phi(c, u)$ .

Примем ряд предположений. Пусть:

$$1) \bigcap_{c \in C} S(c) \neq \emptyset;$$

$$2) \text{ существует } u_0 \in \bigcap_{c \in C} S(c), \text{ для которого } \sup_{c \in C} \Phi(c, u_0) \leq M < +\infty, M > 0.$$

Предположим, что функционал  $\Phi(c, u)$  является строго равномерно выпуклым на  $S(c)$  и коэрцитивным по  $u$  равномерно относительно  $c \in C$ ;

3) существует неотрицательная возрастающая функция  $\delta(t)$ ,  $\delta(0) = 0$ ,  $\delta(t) > 0$  при  $t > 0$  такая, что для всех  $c \in C$ ,  $u, v \in S(c)$  и  $\lambda \in [0, 1]$

$$\Phi(c, \lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \Phi(c, u) + (1 - \lambda)\Phi(c, v) - \lambda(1 - \lambda)\delta(|u - v|);$$

4) существует функция  $\alpha(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , не зависящая от  $c \in C$ , такая, что  $\alpha(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $\Phi(c, u) \geq \alpha(|u|)$  для всех  $c \in C$ ,  $u \in S(c)$ .

Предположение 3 усиливает условие строгой выпуклости функционала  $\Phi(c, u)$ , предположение 4 является усилением условия коэрцитивности.

Рассмотрим многозначное отображение  $S(c) : C \rightarrow 2^F$ ,  $S(c) : c \mapsto S(c)$ . График этого отображения  $G(S) = \{(c, u) \in C \times F : u \in S(c)\}$ .

Предположим, что отображение  $S(c)$  секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на  $C$  [2, с. 24];

5) для всех  $c \in C$  и для любой последовательности  $(c_n, u_n) \in G(S)$ , удовлетворяющей условиям  $c_n \rightarrow c$ ,  $u_n \rightharpoonup u$  слабо в  $F$ , выполняется  $u \in S(c)$ ;

6) для всех  $c \in C$ , для любого  $u \in S(c)$  и для любой последовательности  $c_n$ , сходящейся к  $c$ , существует последовательность  $u_n \in S(c_n)$  такая, что  $u_n \rightarrow u$ .

Предположим, что функционал  $\Phi(c, u)$  является секвенциально слабо полунепрерывным снизу и полунепрерывным сверху на графике  $G(S)$ ;

7) для любой последовательности  $(c_n, u_n) \in G(S)$ , удовлетворяющей условиям  $c_n \rightarrow c$ ,  $u_n \rightharpoonup u \in S(c)$  слабо в  $F$ , выполняется  $\Phi(c, u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(c_n, u_n)$ ;

8) для любой последовательности  $(c_n, u_n) \in G(S)$ , удовлетворяющей условиям  $c_n \rightarrow c$ ,  $u_n \rightarrow u \in S(c)$ , выполняется  $\Phi(c, u) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi(c_n, u_n)$ .

Из предположения 7 следует полунепрерывность функционала снизу.

Предположим, что функционал  $J(c, u)$  полунепрерывен снизу на графике  $G(S)$ ;

9) для любой последовательности  $(c_n, u_n) \in G(S)$ , удовлетворяющей условиям  $c_n \rightarrow c$ ,  $u_n \rightarrow u \in S(c)$ , имеет место неравенство  $J(c, u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(c_n, u_n)$ ;

10) пусть также пространство  $C$  компактно.

**Теорема.** Пусть для рассматриваемой задачи оптимального управления выполнены предположения 1–10. Тогда эта задача имеет решение.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Экланд, И.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М. : Мир, 1979. – 400 с.

2. **Burachik, R. S.** Set-valued mappings and enlargements of monotone operators / R. S. Burachik, A. N. Iusem. – New York : Springer, 2008. – 293 p.