УДК 517.925

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. КАШПАР
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Объектом исследования является краевая задача типа [1]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}=\mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t)+\mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{C}_2(t)\mathbf{X}\mathbf{C}_3(t)+\mathbf{F}\left(t,\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{M},\quad \mathbf{X}(\omega)=\mathbf{N}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_k\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)\left(k=\overline{1,3}\right)$, $\mathbf{F}\in\mathbb{C}\left(D,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $D=\left\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):t\in I,\|\mathbf{X}\|<\tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\|<\tilde{\rho}_2\right\}$ $(\mathbf{Y}=d\mathbf{X}/dt)$; $0<\tilde{\rho}_i\le\infty$, $I=[0,\omega]$, $\omega>0$; $\mathbf{M},\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально); кроме того, считается, что $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ не содержит линейных относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ слагаемых.

На основе применения конструктивного метода [2] изучены вопросы однозначной разрешимости и построения решения задачи (1), (2) в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n<\infty)$ непрерывных $n\times n$-матричных функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C=\max\limits_{t\in I}\|\mathbf{X}(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения этой алгебры, например одна из норм, описанных в [3, с. 21]. Результаты дополняют, развивают и обобщают [1].

Здесь понадобятся обозначения и сведения, используемые при исследовании данной задачи: $\gamma=\|\Phi^{-1}\|$, $h_1=\max\limits_{t\in I}\|\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0})\|$, $h_2=\max\limits_{t\in I}\|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0})\|$,

$$\lambda_U=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|,\ \lambda_V=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\|,\ G=\left\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):t\in[0,\omega],\|\mathbf{X}\|\le\rho_1,\right.$$

$$\left.\|\mathbf{Y}\|\le\rho_2\right\},\ \tilde{G}=\left\{(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)):\|\mathbf{X}\|_C\le\rho_1,\ \|\mathbf{Y}\|_C\le\rho_2\right\},\ p_1=\frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3\left(2c_1c_2c_3\rho_1+L_1\right),$$

$$q_1=\frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3L_2,\ p_2=\frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2\left(2c_1c_2c_3\rho_1+L_1\right),\ q_2=\frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2L_2,\ c_k=\max_{t\in I}\|\mathbf{C}_k(t)\|,$$

$$\mathbf{Z}_C=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{Z}}_0=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}_0\|\\ \|\mathbf{Y}_0\|\end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{Z}}_m=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_m\|_C\\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_m\|_C\end{pmatrix},$$

где $0<\rho_i<\tilde{\rho}_i$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}(0)=\mathbf{E}$), $d\mathbf{V}/dt=\mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ ($\mathbf{V}(0)=\mathbf{E}$), $\mathbf{E}$ – единичная матрица;

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)=\int_0^t\mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)d\tau,\ \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(t);$$

$\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор, $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t)=\int_0^\omega\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\mathbf{Z}(t)=\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)$;

$L_i = L_i(\rho_1, \rho_2)$ $(i = 1,2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ в области G; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\big(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{C}_2(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{C}_3(s) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathbf{F}\big(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s)\big)\big)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\big(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{C}_2(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{C}_3(s) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathbf{F}\big(s, \mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s)\big)\big)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Вместо задачи (1), (2) рассматривается эквивалентная интегральная задача

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{3}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \tag{4}$$

Лемма. *Пусть выполнены условия*

$$p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \le \rho_1,\ p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \le \rho_2,\ p_1 + q_2 < 1. \tag{5}$$

Тогда задача (3), (4) *однозначно разрешима на множестве* $\tilde{G}$, *при этом справедлива оценка*

$$\mathbf{Z}_C \le (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены условия* (5). *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в области* G, *при этом справедлива оценка* (6).

Для построения решения задачи (1), (2) используется классический метод последовательных приближений применительно к эквивалентной системе интегральных уравнений (3), (4)

$$\mathbf{X}_m(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{Y}_{m-1})(t),\ \mathbf{Y}_m(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{Y}_{m-1})(t),\ m = 1,2,...,$$

где в качестве начального приближения принимаются произвольные матрицы-функции $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{C}\big(I, \mathbb{R}^{n\times n}\big)$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости приведенного алгоритма, при этом получены оценки

$$\mathbf{Z} \le \tilde{\mathbf{Z}}_0 + \big(\mathbf{E} - \mathbf{P}\big)^{-1}\mathbf{Z}_0,\ \tilde{\mathbf{Z}}_m \le \big(\mathbf{E} - \mathbf{P}\big)^{-1}\mathbf{P}^m\mathbf{Z}_0,$$

где $\mathbf{Z}_0 = colon\big(\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\|_C, \|\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_0\|_C\big)$. При $\mathbf{X}_0 = 0$, $\mathbf{Y}_0 = 0$ имеет место $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{H}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашпар, А. И.** Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 570–583.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

3. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.