

УДК 533.6

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ФОЛКНЕРА – СКЭН

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, А. А. РОМАНЕНКО  
Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Задача о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае описывается уравнением Фолкнера – Скэн [1, с. 160; 2, с. 177]

$$f''' + a f f'' + b(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

где  $f' = df(\eta)/d\eta$ ,  $a = (m+1)/2$ ,  $b = m$ ;  $m$  – параметр, характеризующий скорость  $U(x) = U_0 x^m$  внешнего течения, при этом, согласно [1, 2],  $0 \leq m \leq 1$ .

Уравнение (1) с граничными условиями (2) используется для расчета аэродинамического сопротивления и теплообмена в различных технических устройствах, где важны эффекты сжимаемости и нагрева. Точное решение задачи (1), (2) получить принципиально невозможно. Величина  $\lambda = f''(0, m)$  является важной физической характеристикой пограничного слоя, несущей информацию о касательном напряжении на обтекаемой поверхности и связанной с расчетом коэффициента теплоотдачи. Нахождение этой величины сопутствует всем приближенным методам (аналитическим и численным) решения задачи (1), (2). Ввиду очевидной важности аналитических приближений разработка конструктивных подходов к этой задаче является актуальной. В [3] изложена аналитическая методика построения ее решения, развитию которой посвящен цикл [4] исследований авторов данной работы, в которой предлагается метод нахождения величины  $\lambda$ , основанный на физическом смысле  $f'(\eta)$  – безразмерный профиль скорости в пограничном слое. На стенке ( $\eta = 0$ )  $f'(0) = 0$  – прилипание, на внешней границе ( $\eta \rightarrow \infty$ )  $f'(\eta) \rightarrow 1$  – скорость внутри слоя стремится к скорости внешнего потока. На практике пользуются понятием пограничного слоя конечной толщины [1, 2], при этом  $f'(\infty) \cong f'(\eta^* = 10) = 0,99(9)$ , где  $\eta^*$  определяет безразмерную толщину динамического пограничного слоя, а количество девяток – точность, с которой его следует определить.

Решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$f(\eta) = \eta - \int_0^\eta e^{-\int_0^\tau \varphi(\xi) d\xi} d\tau; \quad (3)$$

оно подчинено граничным условиям (2), а вспомогательная функция  $\varphi(\eta)$  определяется соответствующим степенным рядом по степеням  $\eta$ , в частности полиномом третьей степени

$$\varphi(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3, \quad (4)$$

коэффициенты которого подлежат нахождению.

Последовательное дифференцирование (3) с учетом граничных условий (2), а также значений функции  $\varphi(\eta)$  и ее производных приводит к системе алгебраических уравнений, из которой определяются коэффициенты полинома (4):

$$\alpha = f''(0) = \lambda, \quad \beta = \lambda^2 - m, \quad \gamma = \frac{\lambda}{2}(2\lambda^2 - 3m), \quad \delta = \lambda^4 - \lambda^2 \frac{21m+1}{12} + \frac{m^2}{2}.$$

Значения  $\lambda$  вычисляются из уравнения

$$\tilde{\varphi}(\eta^*, \lambda) - 3 \ln 10 = 0, \quad (5)$$

где  $\tilde{\varphi}(\eta^*, \lambda) = \alpha \eta^* + \beta \eta^{*2}/2 + \gamma \eta^{*3}/3 + \delta \eta^{*4}/4$ .

В табл. 1 приведены значения  $\lambda$ , полученные из уравнения (5), а также точные значения  $\lambda$ , найденные численным методом для дискретных  $m = \theta/(2\pi - \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), где  $\theta$  – угол атаки набегающего потока.

Табл. 1. Значения  $\lambda = f''(0, m)$

$\theta$	Точные	Из уравнения (5)
0,0 $\pi$	0,33205730	0,33229546
0,1 $\pi$	0,42588011	0,42109731
0,2 $\pi$	0,51184206	0,50559732
0,3 $\pi$	0,59420964	0,58759730
0,4 $\pi$	0,67547929	0,66879547
0,5 $\pi$	0,75744758	0,75070940
0,6 $\pi$	0,84163541	0,83475675
0,7 $\pi$	0,92951291	0,92236664
0,8 $\pi$	1,02265978	1,01509886
0,9 $\pi$	1,12291942	1,11478148
1,0 $\pi$	1,23258766	1,22369172

Относительная погрешность значений  $\lambda$ , полученных из уравнения (5), не превышает 1,2 % при  $0 \leq m \leq 1$ . Они почти на порядок точнее значений, полученных классическими методами [1, 2], и более современных [3, 4].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
2. Теория теплообмена: учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожин, В. И. Кофанов [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – М.: Высш. шк., 1979. – 495 с.
3. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72–93.
4. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе построения решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Актуальные проблемы науки и техники : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Сарепул, 19–21 мая 2022 г. – Сарепул: СПИ, 2022. – С. 55–59.