УДК 517.927.4

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Объектом исследования является краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = \lambda\left(A(t)X + XB(t) + Q_1(t)XQ_2(t)XQ_3(t) + F(t,X)\right), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,Q_i \in C\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)(i=1,2,3)$, $F \in C\left(D_{\tilde{\rho}},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Предполагается, что $Q_i(t) \not\equiv 0$ $(i=1,2,3)$, матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \left\{(t,X): t\in I, \|X\| < \tilde{\rho}\right\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально), $F(t,0) \not\equiv 0, I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эта задача без квадратичного члена при $\lambda = 1$ конструктивными методами [3] изучалась в [4]; при $\tilde{\rho} = \infty$ с помощью качественных методов она исследовалась в [5]. Предлагаемая работа является продолжением и обобщением [1]. Задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n<\infty)$ непрерывных $n\times n$-матричных функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например любая из норм, приведенных в [6].

Обозначения:

$$D_\rho = \left\{(t,X): 0\le t\le\omega, \|X\| < \rho\right\},\ M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,\ N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}(\omega)\right\|,\ \alpha = \max_t\|A(t)\|,\ \beta = \max_t\|B(t)\|,\ \delta_i = \max_t\|Q_i(t)\|\,(i=1,2,3),$$

$$h = \max_t\|F(t,0)\|,\ \varepsilon = |\lambda|,\ q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\left[\alpha+\beta+L+2\delta\rho\right]\omega^2,\ q_2(\rho) = \gamma\omega(2\delta\rho + L),$$

$$\varphi_1(\rho) = \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta+L)\rho + \delta\rho^2 + h\right]\omega^2,\ \varphi_2(\rho) = \gamma\omega\left(\delta\rho^2 + L\rho + h\right),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)},\ \varepsilon_2 = \frac{1 - q_2(\rho)}{q_1(\rho)},\ \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $\delta = \delta_1\delta_2\delta_3$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho)<\rho$, $q_2(\rho)<1$. Тогда при $|\lambda|<\varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le \varphi(\rho,\varepsilon)$.

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой в классе допустимых функций, т. е. функций класса $C^1\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, удовлетворяющих условию (2),

$$X_{k+1}(t,\lambda)=\Phi^{-1}\left\{\lambda\left[\int_0^\omega A(\tau)d\tau\int_\tau^t\Big[A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda)+X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma)+\right.\right.$$
$$+Q_1(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_2(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_3(\sigma)+$$
$$+F\left(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda)\right)\Big]d\sigma+\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\Big[A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda)+X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma)+\right.$$
$$\left.\left.+Q_1(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_2(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_3(\sigma)+F\left(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda)\right)\Big]d\sigma\right)B(\tau)d\tau\right]-$$
$$\left.-\int_0^\omega\Big[Q_1(\tau)X_k(\tau,\lambda)Q_2(\tau)X_k(\tau,\lambda)Q_3(\tau)+F\left(\tau,X_k(\tau,\lambda)\right)\Big]d\tau\right\},\ k=1,2,...,\qquad(3)$$

где $X_0=0$, $X_1=-\Phi^{-1}\int_0^\omega F(\tau,0)d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкая, О. А.** Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя: Фізіка-матэматычныя навукі. – 2014. – № 1.– С. 43–50.
2. **Лаптинский, В. Н.** Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 937–946.
3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
4. **Лаптинский, В. Н.** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.
5. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
6. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.