УДК 517.927.4

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+XB(t)+P_1(t)X^2Q_1(t)+P_2(t)XQ_2(t)XP_3(t)+P_4(t)X^2Q_3(t)+F(t,X), \quad (1)$$

$$MX(0)+NX(\omega)=0, \quad (2)$$

где $A, B, Q_i, P_j \in C\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ $\left(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}\right)$, $F\in C\left(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $I=[0,\omega]$, $D_{\tilde\rho}=\left\{(t,X): t\in I, \|X\|<\tilde\rho\right\}$, $\omega>0$, $0<\tilde\rho\le\infty$; функция $F(t,X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица относительно X (локально); $F(t,0)\not\equiv 0$, M и N – вещественные $n\times n$-матрицы. В [1] эта задача изучалась только при $Q_i(t)\equiv P_j(t)\equiv 0$ $\left(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}\right), \tilde\rho=\infty$.

Данная задача изучается, как и в [2], в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n<\infty)$ непрерывных $n\times n$-матричных функций с нормой $\|X\|_C=\max\limits_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – какая-либо норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$\tilde H(\omega)=\int_0^\omega H(\tau)d\tau,\ H\in\{A,B\},D_\rho=\left\{(t,X):t\in I,\|X\|\le\rho<\tilde\rho\right\},$$

$$R=M^{-1}\left(M\tilde A(\omega)-M-N\right),\ S=-\tilde B(\omega),\ \Psi(t)X=A(t)X+XB(t),$$

$$\Phi X=RX-XS,\ m=\left\|M^{-1}(M+N)\right\|,\ \gamma=\left\|\Phi^{-1}\right\|,\ \alpha=\max_t\|A(t)\|,\ \beta=\max_t\|B(t)\|,$$

$$\delta_i=\max_{t\in I}\|Q_i(t)\|\left(i=\overline{1,3}\right),\ p_j=\max_{t\in I}\|P_j(t)\|\left(j=\overline{1,4}\right),$$

$$q=q(\rho)=\gamma\omega\left[(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\left(m+\frac12(\alpha+\beta)\omega\right)+2\delta\rho+L\right],$$

$$p=\gamma\omega h\left(m+\frac12(\alpha+\beta)\omega+1\right),\ \delta=\delta_1p_1+\delta_2p_2p_3+\delta_3p_4,\ h=\max_{t\in I}\|F(t,0)\|,$$

где $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, при этом оператор Φ и при каждом $t\in I$ оператор $\Psi(t)$ – линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$.

Данная работа дополняет результаты [2] в рамках условия $\det M\ne 0$ в задаче (1), (2).

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: $\det M \neq 0$, матрицы R и S не имеют общих характеристических чисел, $q < 1$, $p / (1-q) \leq \rho$.

Тогда в области D_ρ решение $X = X(t)$ задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \dfrac{p}{1-q}$.

Для построения решения задачи (1), (2) разработан алгоритм

$$X_k(t) = M^{-1}(M+N)\int_t^\omega \Big(\Psi(\tau)X_k(\tau) + Q_1(\tau)X_{k-1}^2(\tau)P_1(\tau) +$$
$$+ P_2(\tau)X_{k-1}(\tau)Q_2(\tau)X_{k-1}(\tau)P_3(\tau) + P_4(\tau)X_{k-1}^2(\tau)Q_3(\tau) + F\big(\tau, X_{k-1}(\tau)\big)\Big)d\tau +$$
$$+\int_0^\omega \Big[K_A(t,\tau)\Big(\Psi(\tau)X_k(\tau) + Q_1(\tau)X_{k-1}^2(\tau)P_1(\tau) +$$
$$+ P_2(\tau)X_{k-1}(\tau)Q_2(\tau)X_{k-1}(\tau)P_3(\tau) + P_4(\tau)X_{k-1}^2(\tau)Q_3(\tau) + F\big(\tau, X_{k-1}(\tau)\big)\Big) +$$
$$+ \Big(\Psi(\tau)X_k(\tau) + Q_1(\tau)X_{k-1}^2(\tau)P_1(\tau) +$$
$$+ P_2(\tau)X_{k-1}(\tau)Q_2(\tau)X_{k-1}(\tau)P_3(\tau) + P_4(\tau)X_{k-1}^2(\tau)Q_3(\tau) + F\big(\tau, X_{k-1}(\tau)\big)\Big)\Big]K_B(t,\tau) -$$
$$- \int_0^\omega F\big(\tau, X_{k-1}(\tau)\big)d\tau, \; k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где

$$K_H(t,\tau) = \begin{cases} \int_0^\tau H(\sigma)d\sigma, \, 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\int_\tau^\omega H(\sigma)d\sigma, 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

В качестве начального приближения X_0 может быть взята любая функция из $C\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ такая, что $\|X_0\|_C \leq \rho$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

2. **Маковецкий, И. И.** К построению решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения ляпуновского типа / И. И. Маковецкий // Дифференциальные уравнения. – 2025. – Т. 61, № 3. – С. 422–432.