

УДК 517.925

ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

Д. В. РОГОЛЕВ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача типа [1]

$$dX/dt = A_1(t)X + C_1(t)XB_1(t) + D_1(t)YK_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t), \quad (1)$$

$$dY/dt = A_2(t)Y + C_2(t)YB_2(t) + D_2(t)XK_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \quad (3)$$

где X, Y – $n \times n$ -матрицы, коэффициенты в (1), (2) определены и непрерывны при $t \in I = [0, \omega]$; $\omega > 0$.

Система (1), (2), как и уравнения Риккати, играет важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений.

С помощью метода регуляризации [2] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3) и разработан алгоритм построения решения в классе допустимых функций – функций из $C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, удовлетворяющих условиям (3).

Этот алгоритм представляет собой рекуррентные интегральные соотношения

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = & \tilde{A}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_1(\sigma) d\sigma \right) \left(A_1(\tau)X_k(\tau) + C_1(\tau)X_{k-1}(\tau)B_1(\tau) + \right. \right. \\ & + D_1(\tau)Y_{k-1}(\tau)K_1(\tau) + X_{k-1}(\tau)(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau) \Big) d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma) d\sigma \right) \left(A_1(\tau)X_k(\tau) + C_1(\tau)X_{k-1}(\tau)B_1(\tau) + \right. \\ & + D_1(\tau)Y_{k-1}(\tau)K_1(\tau) + X_{k-1}(\tau)(S_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau) \Big) d\tau - \\ & \left. - \int_0^\omega \left[C_1(\tau)X_k(\tau)B_1(\tau) + D_1(\tau)Y_k(\tau)K_1(\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + X_k(\tau)(S_1(\tau)X_k(\tau) + S_2(\tau)Y_k(\tau)) + F_1(\tau) \right] d\tau \right\}, \\ Y_{k+1}(t) = & \tilde{A}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_2(\sigma) d\sigma \right) \left(A_2(\tau)Y_k(\tau) + C_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)B_2(\tau) + \right. \right. \\ & + D_2(\tau)X_{k-1}(\tau)K_2(\tau) + Y_{k-1}(\tau)(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)) + F_2(\tau) \Big) d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \right) \left(A_2(\tau)Y_k(\tau) + C_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)B_2(\tau) + \right. \\ & + D_2(\tau)X_{k-1}(\tau)K_2(\tau) + Y_{k-1}(\tau)(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau)) + F_2(\tau) \Big) d\tau - \\ & \left. - \int_0^\omega \left[C_2(\tau)Y_k(\tau)B_2(\tau) + D_2(\tau)X_k(\tau)K_2(\tau) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+Y_k(\tau)(P_1(\tau)X_k(\tau)+P_2(\tau)Y_k(\tau))+F_2(\tau)]d\tau\}, k=1,2,\dots,$$

при этом

$$X_0=0, Y_0=0, X_1=-A_1^{-1}(\omega)\int_0^\omega F_1(\tau)d\tau, Y_1=-A_2^{-1}(\omega)\int_0^\omega F_2(\tau)d\tau.$$

Исследование выполнено в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n < \infty)$ непрерывных $n \times n$ -матричнозначных функций.

Обозначения:

$$D = \{(t, X, Y) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2\}, \tilde{A}_i(\omega) = \int_0^\omega A_i(\tau)d\tau, \gamma_i = \|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\|,$$

$$\alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|, \beta_i = \max_t \|B_i(t)\|, \sigma_i = \max_t \|C_i(t)\|, d_i = \max_t \|D_i(t)\|, k_i = \max_t \|K_i(t)\|,$$

$$\delta_i = \max_t \|S_i(t)\|, \mu_i = \max_t \|P_i(t)\|, h_i = \max_t \|F_i(t)\|, t \in I, \rho_1, \rho_2 > 0,$$

$$\varphi_{11} = \gamma_1 \left[\frac{1}{2} \alpha_1 (\alpha_1 + \sigma_1 \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega^2 + (\sigma_1 \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega \right],$$

$$\varphi_{12} = \gamma_1 \omega (\delta_2 \rho_1 + d_1 k_1) \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), \varphi_{21} = \gamma_2 \omega (\mu_1 \rho_2 + d_2 k_2) \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right),$$

$$\varphi_{22} = \gamma_2 \left[\frac{1}{2} \alpha_2 (\alpha_2 + \sigma_2 \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega^2 + (\sigma_2 \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega \right],$$

$$\varphi_1(\rho_1, \rho_2) = \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 [(\alpha_1 + \sigma_1 \beta_1) \rho_1 + d_1 k_1 \rho_2 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] \omega^2 + \right.$$

$$\left. + [\sigma_1 \beta_1 \rho_1 + d_1 k_1 \rho_2 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] \omega \right\},$$

$$\varphi_2(\rho_1, \rho_2) = \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 [d_2 k_2 \rho_1 + (\alpha_2 + \sigma_2 \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] \omega^2 + \right.$$

$$\left. + [d_2 k_2 \rho_1 + \sigma_2 \beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] \omega \right\}, \quad \varphi = colon(\varphi_1, \varphi_2), \quad \rho = colon(\rho_1, \rho_2),$$

$$\Phi = (\varphi_{ij}), \quad \Phi = \partial \varphi / \partial \rho \text{ — матрица Якоби для } \varphi.$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: $\det \tilde{A}_i \neq 0$ ($i=1,2$); $\varphi(\rho) \leq \rho$; $\varphi_{11} < 1$, $\det(E - \Phi) > 0$, где $E = diag(1,1)$.

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D , при этом последовательность $\{X_i(t), Y_i(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптинский, В. Н. Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

2. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.