

УДК 681.7.068

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БОЛЬШИХ ПОРЯДКОВ В ТЕОРИИ ИЗГИБОВ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДОВ

Л. И. СОТСКАЯ<sup>1</sup>, М. А. МАТКОВ<sup>1</sup>, Д. Е. ПРОЧУХАНОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусско-Российский университет

<sup>2</sup>Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова  
Могилев, Беларусь

В электродинамике открытых волноводов имеется проблема вытекания излучения на участках изгибов волноводов. Особенно остро она стоит в терагерцовом диапазоне частот, где приемлемое затухание передаваемого сигнала достигается за счет значительной площади, занимаемой полем моды. Поэтому оптимизация оптических волноводных элементов требует учёта изгибных потерь энергии мод.

Поскольку механизм вытекания энергии из изгибов открытых трехмерных и двумерных волноводов имеет одну и ту же природу, то характеристики данного вытекания могут быть оценены в рамках теории планарных волноводов. Для таких волноводов поля на участках изгибов могут быть проанализированы методом разделения переменных.

Для ТЕ-мод этот метод использует представление  $E = R(r) \exp(-iv\phi)$ , где  $E$  – компонента электрического поля данных мод,  $r$  и  $\phi$  – цилиндрические координаты,  $v = \beta k_0 r_0$ ,  $\beta$  – безразмерная постоянная распространения моды,  $k_0 = 2\pi / \lambda$  – волновое число вакуума,  $r_0$  – радиус изгиба оси волновода. Функция  $R(r)$  подчиняется уравнению

$$\nabla_r^2 R + \frac{\nabla_r R}{r} + [k_0^2 \varepsilon(r) - \frac{v^2}{r^2}] R = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon(r)$  – диэлектрическая проницаемость слоистой среды.

Вне волновода толщины  $d$  имеем  $\varepsilon = \varepsilon_s = \text{const}$  и уравнение (1) переходит в уравнение Бесселя. Решение уравнения должно быть конечным при  $r \rightarrow 0$  и описывать при  $r \rightarrow \infty$  уходящую волну. Поэтому

$$R = a J_\nu(z) \quad \text{при} \quad r \leq r_0 - d/2, \quad R = b H_\nu^{(2)}(z) \quad \text{при} \quad r \geq r_0 + d/2, \quad (2)$$

где  $z = k_0 \sqrt{\varepsilon_s} r$ ,  $a$  и  $b$  – некоторые константы.

Уравнение (1) решается при условиях непрерывности  $R$  и  $\nabla_r R$  на границах раздела сред. При этом возможные значения  $\beta$  находятся из характеристического уравнения

$$\nabla_r R(r_0 + d/2) / R(r_0 + d/2) = k_0 \sqrt{\varepsilon_s} H_\nu^{(2)'}(z_+) / H_\nu^{(2)}(z_+), \quad (3)$$

где  $H_\nu^{(2)'}(z) = \nabla_z H_\nu^{(2)}(z)$ ,  $z_+ = k_0 \sqrt{\varepsilon_s} (r_0 + d/2)$ , а  $\nabla_r R$  и  $R$  находят путем численного решения уравнения (1) при начальных условиях

$$R(r_0 - d/2) = 1, \quad \nabla_r R(r_0 - d/2) = k_0 \sqrt{\varepsilon_s} [-v / z_- + J_{\nu-1}(z_-) / J_\nu(z_-)], \quad (4)$$

где  $z_- = k_0 \sqrt{\varepsilon_s} (r_0 - d/2)$ .

В случае ТМ-мод уравнения (1), (3), (4) принимают вид

$$\varepsilon(r)\nabla_r \frac{1}{\varepsilon(r)} \nabla_r R + \frac{\nabla_r R}{r} + [k_0^2 \varepsilon(r) - \frac{\nu^2}{r^2}]R = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_s \nabla_r R(r_0 + d/2) / R(r_0 + d/2) = \varepsilon(r_0 + d/2 - 0) k_0 \sqrt{\varepsilon_s} H_\nu^{(2)'}(z_+) / H_\nu^{(2)}(z_+), \quad (6)$$

$$R(r_0 - d/2) = 1, \quad \nabla_r R(r_0 - d/2 + 0) = \frac{k_0 \varepsilon(r_0 - d/2 + 0)}{\sqrt{\varepsilon_s}} [-\nu / z_- + J_{\nu-1}(z_-) / J_\nu(z_-)]. \quad (7)$$

Для практически используемых волноводов характерны условия  $k_0 r_0 \gg 1$ ,  $|z_\pm| \gg 1$ , т. е. в задачах (1), (3), (4) и (5)–(7) фигурируют цилиндрические функции  $J_\nu(z)$  и  $H_\nu^{(2)}(z)$  комплексного порядка  $\nu$  и аргумента  $z$ , удовлетворяющих условиям  $|\nu| \gg 1$ ,  $|z| \gg 1$ . Это затрудняет использование стандартных алгоритмов вычисления цилиндрических функций. Решение проблемы было найдено на пути вычисления отношения  $J_{\nu-1}(z) / J_\nu(z)$  через цепные дроби, а отношение  $H_\nu^{(2)'}(z) / H_\nu^{(2)}(z)$ , записанное в представлении Пуассона

$$H_\nu^{(2)'}(z) / H_\nu^{(2)}(z) = \int_0^\infty d\tau (\nu / z - i - \tau) \exp[f(\tau)] / \int_0^\infty d\tau \exp[f(\tau)],$$

$$f(\tau) = z\{-\tau + \zeta[\ln \tau + \ln(1 - i0,5\tau)]\}, \quad \zeta = (\nu - 0,5) / z,$$

рассчитывалось путем деформации исходного контура интегрирования (вещественная ось) в прямолинейный контур, проходящий через начало координат и седловую точку функции  $f(\tau)$ . Такой прием позволил устранить проблему быстрых колебаний подынтегральных функций.

Результаты расчётов представлены на рис. 1.

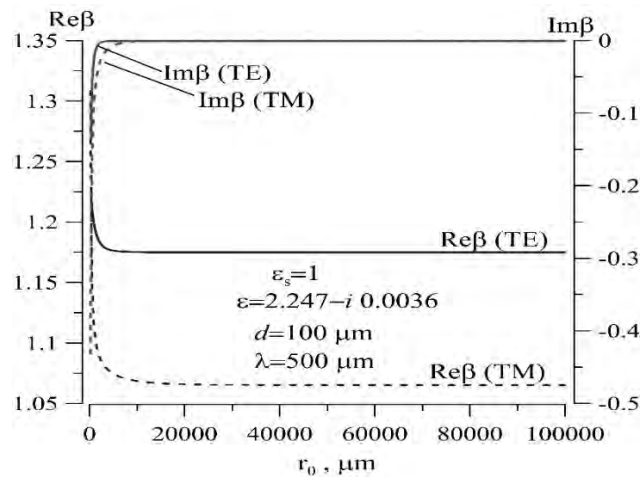


Рис. 1. Зависимости постоянных распространения мод полипропиленового планарного волновода, окруженного воздухом, от радиуса его изгиба

*Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований РБ «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».*