

DOI: 10.24412/2077-8481-2026-2-64-71

УДК 629.114.2

Э. И. ЯСЮКОВИЧ, канд. техн. наук, доц.

Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕСПИЛОТНОГО КУРСОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА С ПРИЦЕПОМ

Аннотация

Разработана имитационная математическая модель курсового движения колесного трактора с прицепом и программное обеспечение для оценки его мобильности и показателей курсовой устойчивости.

Ключевые слова:

колесный трактор с прицепом, имитационная математическая модель, курсовое движение, мобильность, вертикальная динамика, курсовая устойчивость, управляемость.

Для цитирования:

Ясюкович, Э. И. Моделирование беспилотного курсового движения колесного трактора с прицепом / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2026. – № 2 (91). – С. 64–71.

Введение

Управляемое курсовое движение колесных машин по реальным дорогам, а также обгон ими движущихся в том же направлении транспортных средств, требует совершения маневров курсового движения. Для сокращения сроков проектирования таких транспортных средств необходимы теоретические исследования их курсового движения, которые целесообразно выполнять с использованием имитационного моделирования, позволяющего оценить их траекторную устойчивость.

В настоящее время разрабатываются и внедряются технологии беспилотного управляемого курсового движения колесных машин, в том числе колесных тракторов и тракторных поездов [1].

Исследование траекторной устойчивости беспилотного курсового движения колесных тракторных поездов наиболее целесообразно начинать с моделирования их управляемого нейросетевого движения, в котором используются различные самообучаемые нейронные сети с камерами видеонаблюдения. Програм-

мные средства названных сетей формируют сигналы для управления движением и обеспечения курсовой устойчивости [2].

В данной работе представлены разработанные математическая модель и программное обеспечение, позволяющее выполнять имитационное моделирование беспилотного управляемого курсового движения колесного тракторного поезда по дорогам с микро- и макропрофилем.

Основная часть

Современные колесные тракторные поезда должны обладать такими свойствами, как мобильность, маневренность, курсовая устойчивость и управляемость их беспилотного курсового движения. Существенное влияние на указанные свойства названных транспортных средств оказывают их массо-геометрические параметры, а также характеристики подвески и шин [3].

Общий вид исследуемого тракторного поезда представлен на рис. 1.

Разработанная имитационная математическая модель беспилотного управляемого движения тракторного поезда

содержит динамические уравнения его курсового движения и вертикальной динамики. На рис. 2 представлена разработанная расчетная схема, используемая

для вывода уравнений указанной математической модели.



Рис. 1. Общий вид колесного трактора с прицепом

В расчетной схеме указаны используемые в математической модели независимые обобщенные координаты ведущего звена тракторного поезда: $x_c, y_c, z_c, \varphi, \psi, \Phi$, а также прицепа: x_{cp}, y_{cp}, z_{cp} – продольное, поперечное и вертикальное перемещение центра масс прицепа; $\varphi_p, \psi_p, \Phi_p$ – угловые координаты перемещения центра масс прицепа вокруг его вертикальной, продольной и поперечной осей.

Имитационная математическая модель содержит также четыре дифференциальных уравнения расчета углов $\delta_1... \delta_4$ увода шин колес трактора и четыре угла $\delta_5... \delta_8$ увода переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес прицепа.

В расчетной схеме управляемого курсового движения колесного трактора с прицепом используются следующие геометрические параметры: l_1, l_2, l_{mc} – расстояния от центра масс трактора до его передней и задней осей и до линии мгновенных центров поворота; l_{p1}, l_{p2}, l_p – расстояния от центра масс прицепа

до его передней и задней осей и от передней оси до точки крепления прицепа с трактором; $d_{k1}...d_{k4}$ – половины передней левой, передней правой, задней левой и задней правой осей трактора; $x_1...x_4$ – координаты проекций на ось OX центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; $x_5...x_8$ – координаты проекций на ось OX центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес прицепа; $y_1...y_4$ – координаты проекций на ось OY центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; $y_5...y_8$ – координаты проекций на ось OY центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес прицепа; $\dot{x}_1... \dot{x}_8$ – проекции на ось OX продольных скоростей перемещения центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора и прицепа; $\dot{y}_1... \dot{y}_8$ – проекции на ось OY поперечных скоростей перемещения центров переднего левого,

переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора и прицепа; φ, φ_p – курсовые углы остова трактора и остова прицепа; $v_1...v_8$ – продольные скорости перемещения центров переднего левого, переднего правого, заднего

левого и заднего правого колес трактора и прицепа; θ_1, θ_2 – углы поворота левого и правого передних управляемых колес трактора относительно их вертикальных осей.

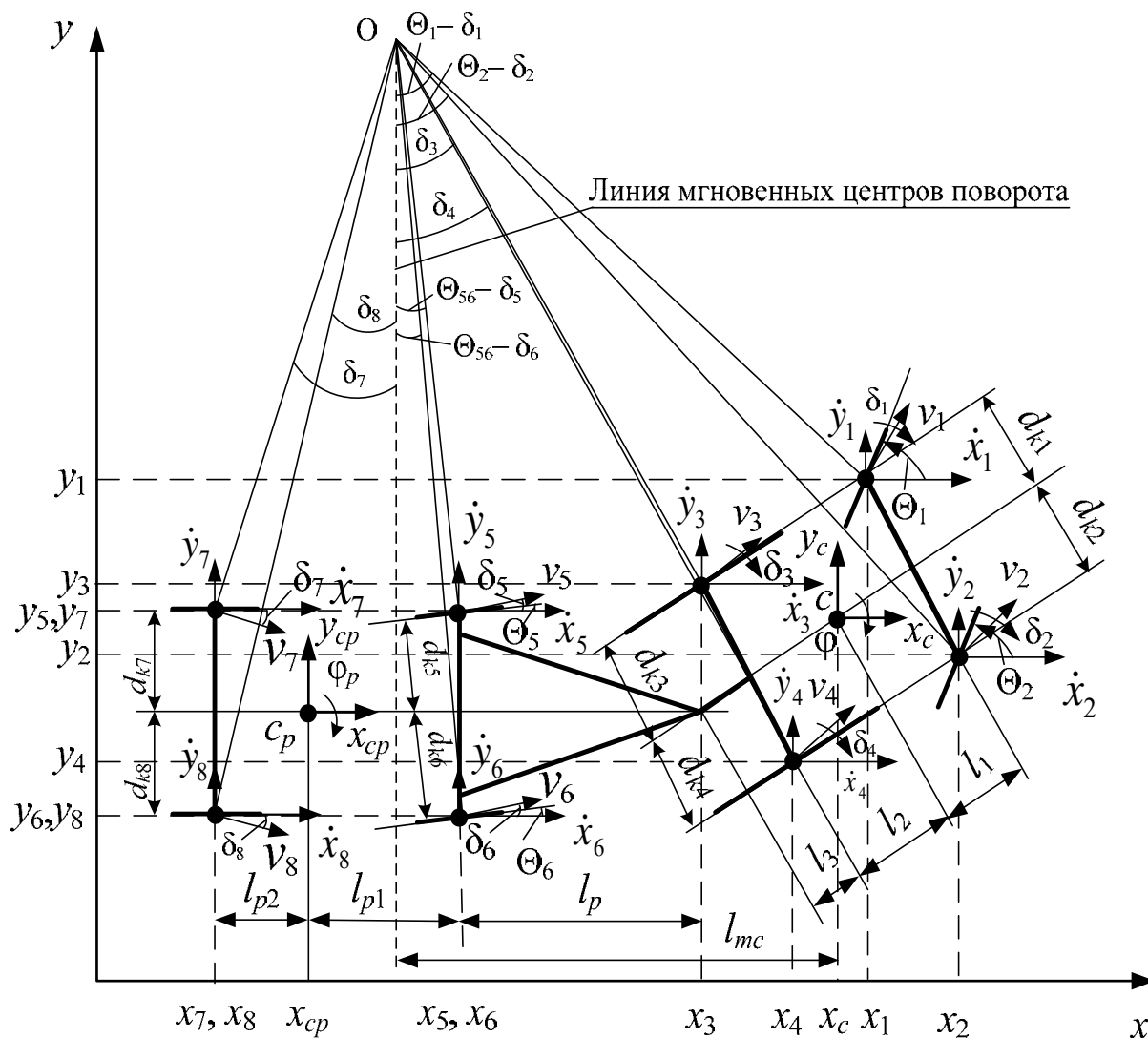


Рис. 2. Расчетная схема управляемого курсового движения тракторного поезда

Для исследования беспилотного управляемого курсового движения тракторного поезда разработана имитационная математическая модель его курсового движения по опорной поверхности, содержащая 12 обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В процессе курсового движения тракторного поезда по дорогам с микропрофилем происходят продольно-поперечные, угловые и вертикальные колебания элементов его подрессоренных и нерессоренных масс, в результате чего изменяются силы сцепления шин его колес с опорной поверхностью.

Поэтому разработанная система динамических уравнений управляемого курсового движения тракторного поезда по опорным поверхностям с микро- и макропрофилем дополнена динамическими уравнениями вертикальной динамики.

Для определения изменяющихся при криволинейном движении тракторного поезда углов увода шин его колес разработаны дифференциальные уравнения кинематических связей шин его колес с опорной поверхностью, которые используются также для моделирования процессов обгона транспортных средств, движущихся с меньшей скоростью в том же направлении.

Направления курсового движения

беспилотных колесных тракторов с прицепом формируются на основе данных, получаемых из установленных на дорогах видеокамер, с помощью разработанного блока обгона, который определяет для ведущего звена ускорение угла поворота его рулевого колеса. После завершения обгона транспортного средства рулевому колесу обгоняющей колесной машины задаются значения, возвращающие ее в дальнейшее курсовое движение.

Вывод обыкновенных дифференциальных уравнений продольных, поперечных и вертикальных колебаний трактора и прицепа был выполнен на основе разработанной расчетной схемы (рис. 3).

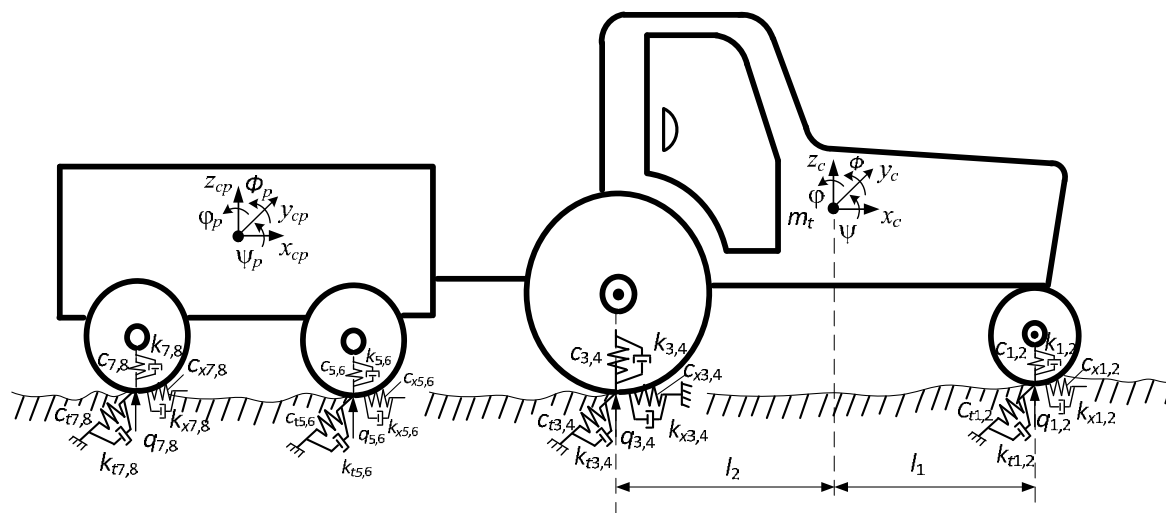


Рис. 3. Расчетная схема вертикальных, продольных и поперечных колебаний колесного трактора с прицепом

На рис. 3 указаны используемые в математической модели упруго-диссипативные характеристики шин колес трактора и прицепа, где индексы 1...4 относятся к колесам трактора, а 5...8 – к колесам прицепа.

Таким образом, приведенные на рис. 2 и 3 расчетные схемы использовались для вывода дифференциальных уравнений беспилотного управляемого курсового движения и вертикальной динамики колесного трактора с прицепом.

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{x}_c &= \left\{ -\sum_{i=1}^2 [Y_i \sin(\varphi + \Theta_i \mp \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \cos(\varphi + \Theta_i \mp \delta_i)] + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \sum_{i=3}^4 [Y_i \sin(\varphi \mp \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \cos(\varphi \mp \delta_i)] \right\} / m; \right. \\
 \ddot{y}_c &= \left\{ \sum_{i=1}^2 [Y_i \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i)] + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \sum_{i=3}^4 [Y_i \cos(\varphi \mp \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \sin(\varphi \mp \delta_i)] \right\} / m; \right. \\
 \ddot{\varphi} &= \sum_{i=1}^2 \{ Y_i [l_1 \cos(\Theta_i - \delta_i) \mp d_i \sin(\Theta_i - \delta_i)] + (P_{ki} + P_{ti}) \times \\
 &\quad \times [l_1 \sin(\Theta_i - \delta_i) \pm d_i \cos(\Theta_i - \delta_i)] \} - \sum_{i=3}^4 \{ Y_i [l_2 \cos \delta_i \pm d_i \sin \delta_i] - \\
 &\quad - (P_{ki} + P_{ti}) [l_2 \sin \delta_i \mp d_i \cos \delta_i] \} / J_z; \\
 \ddot{x}_{cp} &= \left\{ -\sum_{i=5}^8 [Y_{pi} \sin(\varphi_p \mp \delta_i) + (P_{pki} - P_{pti}) \cos(\varphi_p \mp \delta_i)] \right\} / m_p; \\
 \ddot{y}_{cp} &= \left\{ \sum_{i=5}^8 [Y_{pi} \cos(\varphi_p - \delta_i) + (P_{pki} - P_{pti}) \sin(\varphi_p - \delta_i)] \right\} / m_p; \\
 \ddot{\varphi}_p &= \sum_{i=1}^2 \{ Y_i [l_1 \cos \delta_i \mp d_i \sin \delta_i] + (P_{ki} + P_{ti}) [l_1 \sin \delta_i \pm d_i \cos \delta_i] \} - \\
 &\quad - \sum_{i=3}^4 \{ Y_i [l_2 \cos \delta_i \pm d_i \sin \delta_i] - (P_{ki} + P_{ti}) [l_2 \sin \delta_i \mp d_i \cos \delta_i] \} / J_z; \\
 \ddot{z}_c &= \sum_{i=1}^4 P_{ni} / m; \\
 \ddot{z}_{cp} &= \sum_{i=5}^8 P_{npi} / m_p; \\
 \ddot{\Psi} &= \sum_{i=1}^4 (\mp P_i d_{ki} - m v_c^2 h_c / r_{rr}) / j_x; \quad \ddot{\Phi} = \sum_{i=1}^2 (P_{i1} l_i + P_{i2} l_2) / J_y; \\
 \ddot{\Psi}_p &= \sum_{i=5}^8 (\mp P_i d_{ki} - m v_c^2 h_c / r_{rr}) / j_{xp}; \quad \ddot{\Phi}_p = \sum_{i=5}^6 (P_{i1} l_i + P_{i2} l_5) / J_{yp}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \dot{\delta}_i \{ \dot{x}_c \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \ddot{\phi} [l_1 \sin(\Theta_i - \delta_i) \mp \\
 & \pm d_{ki} \cos(\Theta_i - \delta_i)] \} = \ddot{x}_c \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i) - \ddot{y}_c \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) - \\
 & - \ddot{\phi} [l_1 \cos(\Theta_i - \delta_i) \pm d_{ki} \sin(\Theta_i - \delta_i)] - \dot{\phi}^2 [l_1 \sin(\Theta_i - \delta_i) \mp \\
 & \mp d_{ki} \cos(\Theta_i - \delta_i)] + (\dot{\phi} + \dot{\Theta}_i) [\dot{x}_c \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \\
 & + \dot{y}_c \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i)] + \ddot{\phi} [l_1 \sin(\Theta_i - \delta_i) \mp d_{ki} \cos(\Theta_i - \delta_i)], \quad i = 1, 2; \\
 & \dot{\delta}_i \{ \dot{x}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \ddot{\phi} [l_2 \sin \delta_i \mp d_{ki} \cos \delta_i] \} = \\
 & = \ddot{x}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \ddot{y}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \ddot{\phi} [l_2 \cos \delta_i \mp d_{ki} \sin \delta_i] + \\
 & + \dot{\phi}^2 [l_2 \sin \delta_i \pm d_{ki} \cos \delta_i] + \dot{\phi} [\dot{x}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi - \delta_i)] - \\
 & - \ddot{\phi} [l_2 \sin \delta_i \pm d_{ki} \cos \delta_i], \quad i = 3, 4; \\
 & \dot{\delta}_i \{ \dot{x}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \ddot{\phi} [l_2 \sin \delta_i \mp d_{ki} \cos \delta_i] \} = \\
 & = \ddot{x}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \ddot{y}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \ddot{\phi} [l_2 \cos \delta_i \mp d_{ki} \sin \delta_i] + \\
 & + \dot{\phi}^2 [l_2 \sin \delta_i \pm d_{ki} \cos \delta_i] + \dot{\phi} [\dot{x}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi - \delta_i)] - \\
 & - \ddot{\phi} [l_2 \sin \delta_i \pm d_{ki} \cos \delta_i], \quad i = 5 \dots 8.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для управления мобильным беспилотным управляемым курсовым движением тракторного поезда использовался задаваемый угол θ_1 поворота переднего левого управляемого колеса трактора вокруг его вертикальной оси.

В результате получена имитационная математическая модель беспилотного управляемого курсового движения колесного тракторного поезда, содержащая 12 обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1) и восемь дифференциальных уравнений первого порядка кинематических связей шин его колес с опорной поверхностью (2).

В приведенной системе дифференциальных уравнений (1) первые шесть уравнений используются для моделирования курсового движения трактора и прицепа, седьмое и восьмое – для вертикальных перемещений центров масс трактора и прицепа, а четыре последних – для поперечно- и продольно-угловых колебаний подрессоренной массы трактора и прицепа. Дифференциальные уравнения (2) получены для вычисления производных углов увода шин трактора и прицепа.

Коэффициенты увода шин колес тракторного поезда при курсовом движении не являются постоянными, т. к. зависят от характеристик дорожной поверхности [3, 4].

В результате проведенных теоретических исследований получены две приведенные выше системы обыкновенных дифференциальных уравнений для моделирования беспилотного управляемого курсового движения тракторного поезда.

Моделирование процессов беспилотного управляемого курсового движения колесного трактора с прицепом по задаваемой траектории выполнялось с помощью разработанных алгоритма и программного обеспечения интегрирования системы дифференциальных уравнений (1) и (2), предусматривающих расчет параметров курсового движения в реальных условиях мобильности беспилотного движения,

Получаемые результаты имитационного моделирования сохраняются в файле, который в дальнейшем используется для формирования графических зависимостей и расчета необходимых показателей процессов управляемого

курсового движения.

На рис. 4 показаны результаты имитационного моделирования беспилотного управляемого курсового движения колесного трактора с прицепом

при совершении маневра смены полосы движения и дальнейшего прямолинейного движения по дороге с микропрофилем с постоянной скоростью.

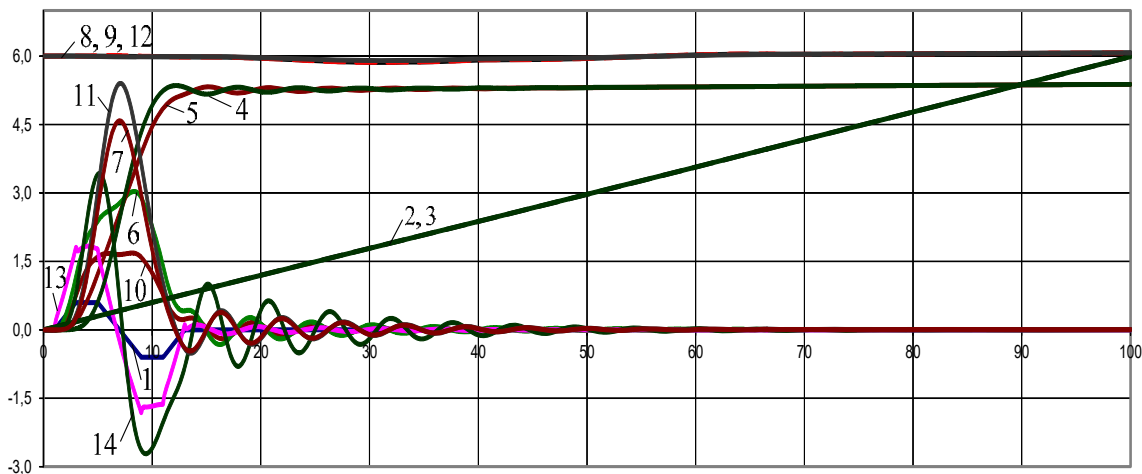


Рис. 4. Результаты моделирования курсового движения тракторного поезда с постоянной скоростью при совершении маневра «смена полосы движения»

На данном рисунке представлены графические зависимости следующих параметров беспилотного курсового управляемого движения тракторного поезда: 1 – угол поворота левого управляемого колеса трактора, который задается водителем (масштаб 1); 2, 3 – координаты точек перемещения центров масс трактора и прицепа по продольной оси (2 – масштаб 0,01); 4, 5 – координаты точек перемещения центров масс трактора и прицепа по поперечной оси (по ширине) дороги (масштаб 0,5); 6, 7 – курсовые углы, отображающие угловые координаты перемещения остова трактора и остова прицепа вокруг их центральных вертикальных осей (масштаб 0,02); 8, 9 – скорости перемещения центров масс трактора и прицепа по продольной оси (масштаб 0,002); 10, 11 – скорости перемещения центров масс трактора и прицепа по поперечной оси (масштаб 0,5); 12 – скорость движения трактора; 13, 14 – углы увода шин передних левых колес трактора и прицепа

(масштаб 0,0025).

Траектория движения тракторного поезда задается углами поворота передних управляемых колес его ведущего звена: переднего левого колеса – водителем, а правого – системой рулевой трапеции передних управляемых колес. Поскольку движение тракторного поезда происходит с постоянной скоростью, графические зависимости перемещения центров масс трактора и прицепа по продольной оси отображаются прямыми линиями 2 и 3 – от точки (0 с, 0 м) до точки (100 с, 600 м).

Таким образом, приведенные на рис. 4 результаты подтверждают работоспособность разработанной математической модели имитационного моделирования беспилотного управляемого курсового движения тракторного поезда.

Выводы

В результате проведенных исследований разработаны математическая

модель и программное обеспечение для расчетных исследований беспилотного управляемого курсового движения тракторного поезда, которые позволяют имитировать его управляемое курсовое движение по опорным поверхностям с микро- и макропрофилем.

Полученные результаты имитационного моделирования подтверждают работоспособность разработанных математической модели и программного обеспечения и возможность использовать их для исследования влияния массогеометрических параметров и упругодиссипативных характеристик подвески и шин на курсовую устойчивость при движении тракторного поезда по различным категориям дорог.

Полученная имитационная математическая модель может успешно использоваться для моделирования беспилотного управляемого курсового движения тракторного поезда с учетом вертикальной динамики при движении по различным категориям дорог, а также для оценки мобильности его беспилотного управляемого курсового движения по реальным траекториям.

Разработанное на основе полученной математической модели программное обеспечение позволяет производить оценку маневренности беспилотного управляемого курсового движения колесного трактора с прицепом и влияния его массогеометрических и упругодиссипативных характеристик подвески и шин на мобильность, курсовую устойчивость и управляемость.

Список использованной литературы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ясюкович, Э. И. Имитационное моделирование мобильности беспилотного курсового движения колесного трактора / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2025. – № 3 (88). – С. 100–109.
2. Галушкин, А. И. Нейронные сети: основы теории / А. И. Галушкин. – М. : РиС, 2015. – 496 с.
3. Ясюкович, Э. И. Имитационное моделирование управляемого курсового движения трехосных колесных машин / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2024. – № 1. – С. 68–76.
4. Динамика колесных машин : монография / И. С. Сазонов, П. А. Амельченко, В. А. Ким [и др.]. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2006. – 462 с. : ил.

Статья сдана в редакцию 13 октября 2025 года

Контакты:

ed50m@mail.ru (Ясюкович Эдвард Игнатьевич).

E. I. YASYUKOVICH

SIMULATION OF UNMANNED PATH TRACKING FOR A WHEELED-TRACTOR-TRAILER SYSTEM

Abstract

A simulation mathematical model for path tracking of a wheeled tractor-trailer system and software for assessing its mobility and directional stability indicators have been developed.

Keywords:

unmanned wheeled tractor-trailer system, simulation mathematical model, path tracking, mobility, vertical dynamics, directional stability, controllability.

For citation:

Yasyukovich, E. I. Simulation of unmanned path tracking for a wheeled-tractor-trailer system / E. I. Yasyukovich // Belarusian-Russian University Bulletin. – 2026. – № 2 (91). – P. 64–71.