

Министерство образования Республики Беларусь  
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет»

А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич

# **РАСЧЕТ И НОРМИРОВАНИЕ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ**

Могилев  
«Белорусско-Российский университет»  
2026

УДК 621.83

Рекомендовано к изданию ученым советом Белорусско-Российского университета  
«20» декабря 2025 г., протокол № 6

**Р е ц е н з е н т ы :**

д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой технологии и оборудования  
машиностроительного производства Полоцкого государственного университета  
имени Евфросинии Полоцкой

*Н. Н. Попок;*

д-р техн. наук, доц., директор Института технологии металлов  
Национальной академии наук Беларуси

*А. Н. Жигалов*

**Капитонов, А. В.**

Расчет и нормирование точности механических передач :  
[монография] / А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич. – Могилев :  
Белорусско-Российский университет, 2026. – 304 с. : ил.  
ISBN 978-985-492-323-9.

В работе представлены исследования кинематической точности механических передач с целью повышения их технического уровня и качества изготовления. Рассматриваются малогабаритные планетарные передачи и редукторы с промежуточными телами качения, зубчатые передачи. Разработаны математические модели, методы расчета и контроля точности изготовления деталей и кинематической погрешности для планетарных передач с промежуточными телами качения, которые можно применять и для других типов механических передач. Разработана общая система нормирования точности механических передач в сборе.

**УДК 621.83**

**ISBN 978-985-492-323-9**

© Капитонов А. В., Пашкевич В. М., 2026  
© Межгосударственное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский  
университет», 2026

## Введение

Объектами исследования являются механические передачи и построенные на их основе редукторы, включающие малогабаритные планетарные передачи с промежуточными телами качения (шариковые и роликовые) и различные типы зубчатых передач. Механизмы, построенные на основе зубчатого зацепления, широко используются в промышленности. Современное производство требует новых подходов к технологическим процессам для повышения качества изготовления как зубчатых, так и других механизмов. Качество любой механической передачи связано с точностью изготовления ее деталей и кинематической точностью при ее работе. Отечественные стандарты на допуски зубчатых передач основаны на методах и технологиях, которые не могут учитывать возможности современного производства, многоцелевого автоматизированного технологического оборудования, современных методов и средств исследования и контроля точности передач. Международные стандарты не устанавливают допуски на показатели точности механической передачи в сборе. Они рассматривают точность отдельных элементов зацепления. Для повышения качества изготовления зубчатых и других механизмов необходим контроль по многим показателям не только зубчатых колес, но и собранной передачи. Поэтому актуальной проблемой является задача создания системы норм точности для механических передач.

Известны планетарные передачи с промежуточными телами качения. Некоторые их типы разработаны и продолжают совершенствоваться в Белорусско-Российском университете [1–8]. Их преимущества заключаются в невысокой стоимости, небольших массогабаритных характеристиках, соосном расположении валов, больших передаточных отношениях, модульном принципе сборки, позволяющем создавать конструкции многоступенчатых механизмов с передаточными отношениями более 10000. Конструкции этих передач подтверждены патентами [9–15] и доведены до практической реализации. Они используются в приводах машин, механизмов и технологического оборудования, например в приводе станка монтажа автомобильных шин, в механизме подъема кабины лифта, в лебедке для ручного подъема крышки шахтной печи, для размыкания контактов железнодорожной электролинии, в механизмах для усиления крутящих моментов, в приводах высокоточных технологических приспособлений. Учитывая малогабаритные конструкции и высокие кинематические и силовые характеристики, планетарные шариковые и роликовые передачи могут эффективно использоваться в мехатронных устройствах автоматизированного производства. Разработаны новые конструкции планетарных передач с промежуточными телами качения, имеющие более высокие кинематические и динамические характеристики [16–20]. Для

повышения точности и надежности этих передач необходимо разработать допуски на изготовление и систематизировать методы контроля.

Контроль качества изготовления редуцирующих механизмов выполняют на универсальных и специализированных стендах. В настоящее время известны испытательные стенды для силовых установок, трансмиссионных компонентов, оснащенные датчиками крутящего момента и скорости, гистерезисными и магнитными порошковыми тормозными устройствами, преобразователями частоты и другим оборудованием [21, 22]. Известны стенды для испытания редукторов и трансмиссий, оснащенные различным оборудованием, включая динамометры с малой инерцией нагрузки, высокоскоростные приводные двигатели, преобразователи частоты, климатические камеры, системы охлаждения, высокоточные датчики, системы мониторинга и оповещения о вибрации, системы управления и другие устройства. Испытательные стенды этих производителей являются универсальными и многофункциональными и используются для контроля, диагностики и мониторинга различных механизмов (редукторов, трансмиссий, двигателей) по большому количеству кинематических, динамических параметров, температурных и других характеристик. В этих стендах используются дорогостоящие аппаратные и программные системы для устранения шумовых помех при получении и обработке сигналов с датчиков на основе известных математических методов фильтрации, которые могут не полностью устранять случайные сигналы с энкодеров. Кроме того, использование универсальных многофункциональных испытательных стендов только в области контроля точности представляется неэффективным. Для этого применяют конструкции специализированных стендов и устройств. Авторами разработаны стенды и устройства для контроля показателей точности после изготовления зубчатых и других типов передач и редукторов. Для большей информативности, испытания механизмов на стендах проводятся с разной частотой вращения электродвигателя, соединенного с ведущим валом редуктора. В этом случае к электродвигателю подключают преобразователь частоты. Если не использовать фильтры по устранению шума, источником которого является преобразователь частоты, то полученный сигнал с энкодеров искажается и зашумляется, при этом получают недостоверные значения показателей точности передач. Поэтому одной из основных проблем при измерениях кинематических параметров редуцирующих механизмов на специализированных стендах является устранение шумовых помех, идущих от преобразователей частоты при изменении скорости вращения электродвигателя.

В работе представлены результаты исследований по решению актуальных задач, связанных с повышением точности, качества контроля и установлением показателей и допусков на изготовление механических передач с целью улучшения их технического уровня.

Авторы выражают признательность рецензентам Попку Николаю Николаевичу, заведующему кафедрой технологии и оборудования машиностроительного производства, доктору технических наук, профессору, и Жигалову Анатолию Николаевичу, директору Института технологии металлов НАН Беларуси, доктору технических наук, доценту, за ценные замечания в процессе рецензирования и редактирования рукописи.

Авторы выражают признательность Капитонову Олегу Александровичу за участие в исследованиях, изложенных в работе.

# 1 Методы расчета точности изготовления деталей с беговыми многопериодными дорожками планетарных передач с промежуточными телами качения

## 1.1 Разработка теории и методов расчета суммарной погрешности обработки деталей с многопериодными дорожками

Актуальность исследований заключается в следующем. Точность изготовления поверхности многопериодной дорожки значительно влияет на плавность работы передачи, ее нагрузочную способность и ресурс работы. Для управления точностью при проектировании планетарных шариковых и роликовых передач необходимо определить погрешности деталей, возникающие при изготовлении. Для этих передач не разработаны стандартные допуски на изготовление наиболее ответственной детали – колеса с многопериодной дорожкой. Поэтому актуальной задачей является разработка методов, позволяющих рассчитывать точность изготовления многопериодной дорожки при проектировании технологических процессов.

Целью исследования является разработка метода расчета погрешностей изготовления колес с многопериодными дорожками планетарных шариковых и роликовых передач с определением случайных и систематических погрешностей, а также методики расчета, основанной на применении матричного метода, учитывающей смещения и повороты деталей с многопериодными дорожками при обработке на станке.

На основе математических зависимостей, представленных в [23, 24], разработан метод расчета погрешностей изготовления наиболее ответственной детали передачи – колеса с многопериодной дорожкой. Метод заключается в определении случайных и систематических погрешностей, связанных с различными технологическими факторами, возникающими при изготовлении деталей, расчете и суммировании этих погрешностей с использованием законов распределения случайных величин теории вероятности и разработанных компьютерных программ в среде VBA Excel.

Точность параметра (размера, отклонения формы, расположения поверхностей) при изготовлении любой детали можно определить суммированием факторов, учитываемых при анализе исследуемого параметра.

Исследуемый параметр детали  $Y$  можно представить в виде функции нескольких переменных  $X_n$ :

$$Y = f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n). \quad (1.1)$$

После изготовления деталей реальные значения параметров отличаются от идеальных (номинальных) на абсолютную погрешность

$$\Delta_i = (X_i - X_0), \quad (1.2)$$

где  $\Delta_i$  – абсолютная погрешность параметра после изготовления;

$X_i$  – реальное значение параметра;

$X_0$  – номинальное значение параметра.

При вероятностном методе расчета параметры  $Y$ ,  $\Delta_i$  являются случайными величинами.

Согласно [23, 24], если между погрешностями, рассматриваемыми попарно, существует вероятностная связь с коэффициентом корреляции  $R_{ij}$ , то суммарная погрешность обработки определяется по формуле

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^n (K_i S_i T_i)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{k=1}^n (K_i K_j S_i S_j T_i T_j R_{ij})}, \quad (1.3)$$

где  $K$  – коэффициент относительного рассеяния выходного параметра, корректирует суммарную погрешность для заданной гарантированной надежности;

$n$  – число параметров;

$i$  – индекс элементарной погрешности;

$i, j$  – индексы погрешностей с вероятностной связью, рассматриваемые попарно;

$K_i, K_j$  – коэффициенты относительного рассеяния входного параметра;

$S_i, S_j$  – абсолютная чувствительность функции цепи к изменению параметра или коэффициенты влияния, передаточные отношения;

$T_i, T_j$  – допуски параметров.

При этом коэффициент относительного рассеяния входного параметра  $K_i$  характеризует отношение поля рассеяния погрешности при нормальном законе распределения к действительному полю рассеяния. Если элементарные погрешности, изменяющиеся во времени  $t$ , являются случайными функциями времени (например, погрешность, связанная с износом инструмента), то суммарная погрешность обработки определяется по формуле

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^n (K_i(t) S_i T_i(t))^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n (K_i(t) K_j(t) S_i S_j T_i(t) T_j(t) R_{ij}(t))}. \quad (1.4)$$

Если принять независимость элементарных погрешностей и не учитывать их изменения во времени (оценивать конечное значение погрешностей), то при расчетах можно принять  $S_i = S_j = 1$ . Тогда суммарную погрешность обработки можно рассчитать по формуле

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^n (K_i T_i)^2}. \quad (1.5)$$

Приведенный метод расчета позволяет определять погрешности положения обрабатываемого профиля относительно базовой поверхности детали для линейных размеров. По рекомендации [23], формулу (1.5) можно использовать для обработки заготовок на металлорежущих станках в обычных производственных условиях.

На основе вышерассмотренного метода разработаны формулы расчета суммарной погрешности обработки колеса с многопериодной дорожкой, характеризующие смещение заготовки вдоль координатных осей станка. Формула расчета при независимых элементарных технологических погрешностях, без учета их изменения во времени,

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{1}{K} \sqrt{(K_i \Delta_{\phi})^2 + \sum_{i=1}^n (K_i \Delta_y)^2 + \sum_{i=1}^n (K_i \Delta_{\delta})^2 + (K_i \Delta_n)^2 + (K_i \Delta_u)^2 + \Delta_T}, \quad (1.6)$$

где  $\Delta_{\phi}$  – погрешность формы установочной поверхности заготовки;

$\Delta_y$  – погрешность установки, учитывающая точность базирования и закрепления заготовки, точность изготовления приспособления и его установки на станке;

$\Delta_{\delta}$  – погрешность от упругих деформаций, учитывающая деформации станка и инструмента;

$\Delta_n$  – погрешность настройки станка;

$\Delta_u$  – погрешность от износа режущего инструмента;

$\Delta_T$  – погрешность от температурной деформации технологической системы.

Формула расчета суммарной погрешности обработки при независимых элементарных погрешностях с изменением во времени отдельных параметров

$$\Delta_{\Sigma}(t) = \frac{1}{K} \sqrt{(K_i \Delta_{\phi})^2 + \sum_{i=1}^n (K_i \Delta_y)^2 + \sum_{i=1}^n (K_i \Delta_{\delta}(t))^2 + (K_i \Delta_n(t))^2 + (K_i \Delta_u(t))^2 + \Delta_T(t)}. \quad (1.7)$$

При обработке заготовки могут быть не только смещены, но и повернуты в системе координат станка. Для определения погрешностей от смещений и поворотов деталей с многопериодными дорожками разработана методика расчета, основанная на применении матричного метода.

Для определения точности положения деталей в пространстве необходимо рассмотреть смещения и повороты системы координат детали в неподвижной базовой системе координат станка [25–29]. Выберем системы координат:  $X_0 Y_0 Z_0$  – базовая система координат станка;  $x_{10} y_{10} z_{10}$  – базовая система координат, перенесенная в точку  $O_1$ . Система координат обрабатываемой детали  $x_{1i} y_{1i} z_{1i}$ , при поворотах на угол  $\alpha$  –  $x_{11} y_{11} z_{11}$ , на угол  $\beta$  –  $x_{12} y_{12} z_{12}$ , на угол  $\gamma$  –  $x_{13} y_{13} z_{13}$ .

На рисунке 1.1 показана схема положения колеса с многопериодной дорожкой планетарной передачи в заданных системах координат.

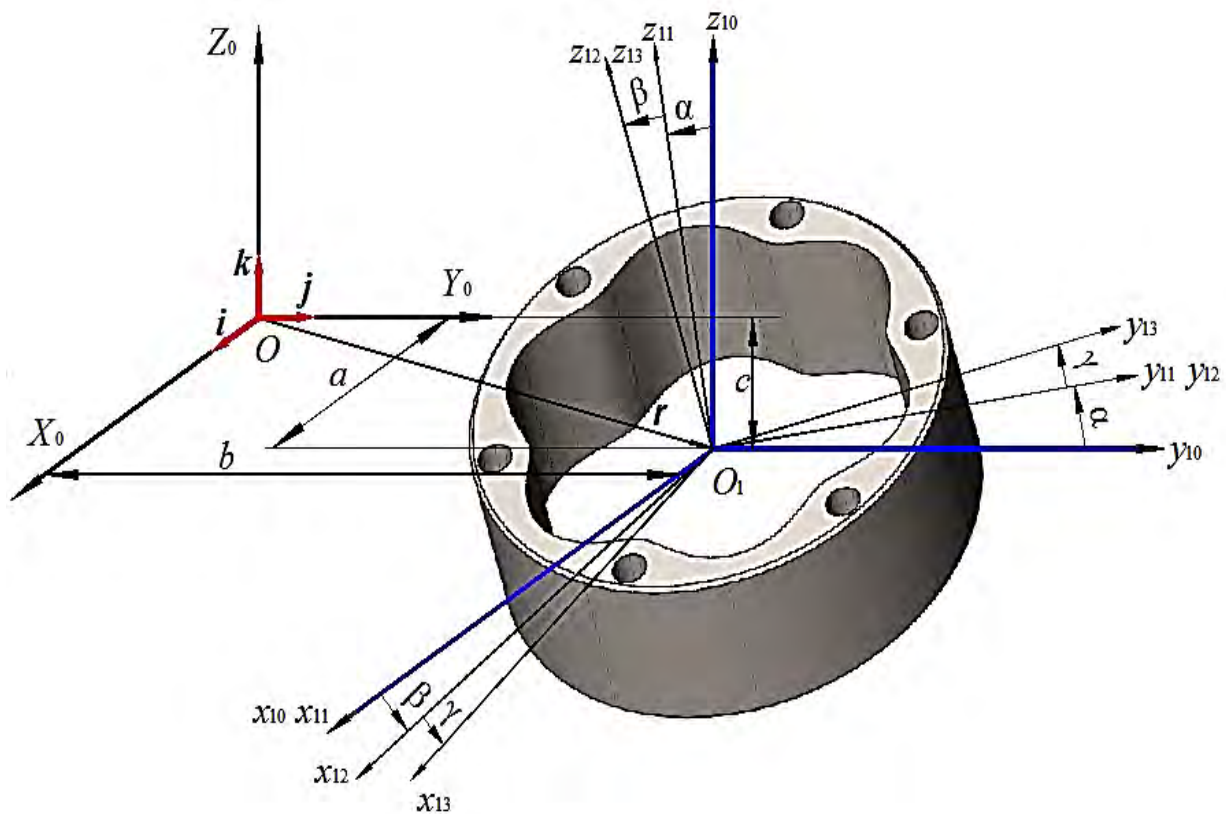


Рисунок 1.1 – Схема положения колеса с многопериодной дорожкой планетарной передачи

Если известны значения координат  $a, b, c$  вектора смещения  $\vec{r}$  и значения координат  $\alpha, \beta, \gamma$  (углов) вектора поворота  $\vec{\varphi}$  в системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$ , то можно определить координаты любой точки детали в системе координат  $x_{1i} y_{1i} z_{1i}$  по ее координатам в системе  $X_0 Y_0 Z_0$  и наоборот. Для этого нужно построить матрицу преобразования пространства.

При повороте системы координат  $x_{10} y_{10} z_{10}$  на угол  $\alpha$  относительно оси  $x_{10}$  в положительном направлении (против часовой стрелки) матрица  $A$  поворота будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Элементы этой матрицы представляют собой проекции единичных векторов  $i, j, k$  осей координат  $x_{10} y_{10} z_{10}$  на оси координат  $x_{11} y_{11} z_{11}$  (см. рисунок 1.1).

Если известны координаты  $x_{0N}, y_{0N}, z_{0N}$  некоторой точки  $N$  детали в системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$ , то в системе координат  $x_{1i} y_{1i} z_{1i}$  координаты этой точки  $x_{1N}, y_{1N}, z_{1N}$  можно определить, умножив координаты  $x_{0N}, y_{0N}, z_{0N}$  на элементы матрицы  $A$ , расположенные в соответствующих строках. С учетом координат начала  $a, b, c$  получим

$$x_{1N} = (x_{0N} - a)a_{11} + (y_{0N} - b)a_{12} + (z_{0N} - c)a_{13}; \quad (1.9)$$

$$y_{1N} = (x_{0N} - a)a_{21} + (y_{0N} - b)a_{22} + (z_{0N} - c)a_{23}; \quad (1.10)$$

$$z_{1N} = (x_{0N} - a)a_{31} + (y_{0N} - b)a_{32} + (z_{0N} - c)a_{33} \quad (1.11)$$

или, используя матричную запись,

$$\begin{pmatrix} x_{1N} \\ y_{1N} \\ z_{1N} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{0N} - a \\ y_{0N} - b \\ z_{0N} - c \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Координаты  $x_{0N}, y_{0N}, z_{0N}$  точки  $N$  в системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$  по ее координатам  $x_{1N}, y_{1N}, z_{1N}$  определяются по формуле

$$\begin{pmatrix} x_{0N} \\ y_{0N} \\ z_{0N} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_{1N} \\ y_{1N} \\ z_{1N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

где  $A^T$  – транспонированная матрица.

Можно получить матрицы  $B$  и  $C$ , если система координат  $x_{10} y_{10} z_{10}$  повернута на угол  $\beta$  относительно оси  $y_{10}$  и на угол  $\gamma$  вокруг оси  $z_{10}$  в положительном направлении.

Если система координат  $x_{10} y_{10} z_{10}$  повернута на углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , то матрица  $K$  результирующего преобразования может быть представлена произведением матриц  $A, B, C$ :

$$K = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Полученные матрицы преобразования пространства позволяют определить координаты любой точки  $N$  детали передачи.

Рассмотренный матричный метод можно использовать для расчета погрешностей обработки, возникающих вследствие поворотов заготовки относительно системы координат станка при ее базировании, закреплении, а также из-за геометрических неточностей приспособлений и станков.

Если система координат детали  $x_{10} y_{10} z_{10}$  смещена и повернута относительно базовой системы координат  $X_0 Y_0 Z_0$ , то погрешности положения детали  $\Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0$  относительно осей  $X_0, Y_0, Z_0$  после преобразования могут быть определены по формуле, учитывая (1.13) и (1.14),

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} = K^T \begin{pmatrix} x_{1zag} \\ y_{1zag} \\ z_{1zag} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{1zag} - a \\ y_{1zag} - b \\ z_{1zag} - c \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

где  $x_{1zag}, y_{1zag}, z_{1zag}$  – координаты точек обрабатываемой поверхности заготовки;  
 $K^T$  – транспонированная матрица.

Координаты точек профиля обрабатываемой криволинейной поверхности многопериодной дорожки определяются по формулам смещенной окружности [3, 4]

$$\begin{cases} x_{1zag} = \left( \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2(z\varphi)} + A \cos(z\varphi) \right) \cos \varphi; \\ y_{1zag} = \left( \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2(z\varphi)} + A \cos(z\varphi) \right) \sin \varphi; \\ z_{1zag} = H_{zag}, \end{cases} \quad (1.16)$$

где  $R$  – радиус окружности;

$A$  – величина смещения окружности, амплитуда многопериодной кривой;

$z$  – число периодов кривой;

$\varphi$  – полярный угол;

$H_{заг}$  – толщина обрабатываемой детали.

Суммарная погрешность обработки в торцовой плоскости детали

$$\Delta_{\Sigma}^{XY} = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2}. \quad (1.17)$$

Суммарная погрешность обработки детали, с учетом ее расположения в пространстве,

$$\Delta_{\Sigma}^{XYZ} = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + \Delta z_0^2}. \quad (1.18)$$

В таблице 1.1 приведены исходные данные для расчета суммарной погрешности чистовой обработки фрезерованием многопериодной дорожки колеса планетарной шариковой передачи с числом периодов  $z_2 = 6$ .

Таблица 1.1 – Исходные данные для расчета суммарной погрешности обработки фрезерованием многопериодной дорожки

Название параметра	Обозначение	Значение
Погрешность формы базовой поверхности заготовки	$\Delta\phi$	0,016 мм
Погрешность установки заготовки	$\Delta_y$	0,05 мм
Погрешность от упругих деформаций станка и инструмента	$\Delta_\delta$	0,042 мм
Погрешность настройки станка	$\Delta_n$	0,01 мм
Погрешность от износа инструмента	$\Delta_u$	0,021 мм
Погрешность от температурных деформаций технологической системы	$\Delta_T$	$0,15\Delta_\Sigma$
Средний радиус дорожки	$R$	41,5 мм
Амплитуда дорожки	$A$	3,75 мм
Число периодов дорожки	$z_2$	6
Радиус шара-сателлита	$r_{ш}$	7,5 мм
Суммарный угол поворота вокруг оси $X_0$	$\alpha$	0,00103 рад
Суммарный угол поворота вокруг оси $Y_0$	$\beta$	0,00103 рад
Суммарный угол поворота вокруг оси $Z_0$	$\gamma$	0

На рисунке 1.2 показана диаграмма наибольших значений суммарной погрешности, учитывающей смещение и повороты заготовки при обработке на станке, рассчитанной по вышеприведенным формулам.

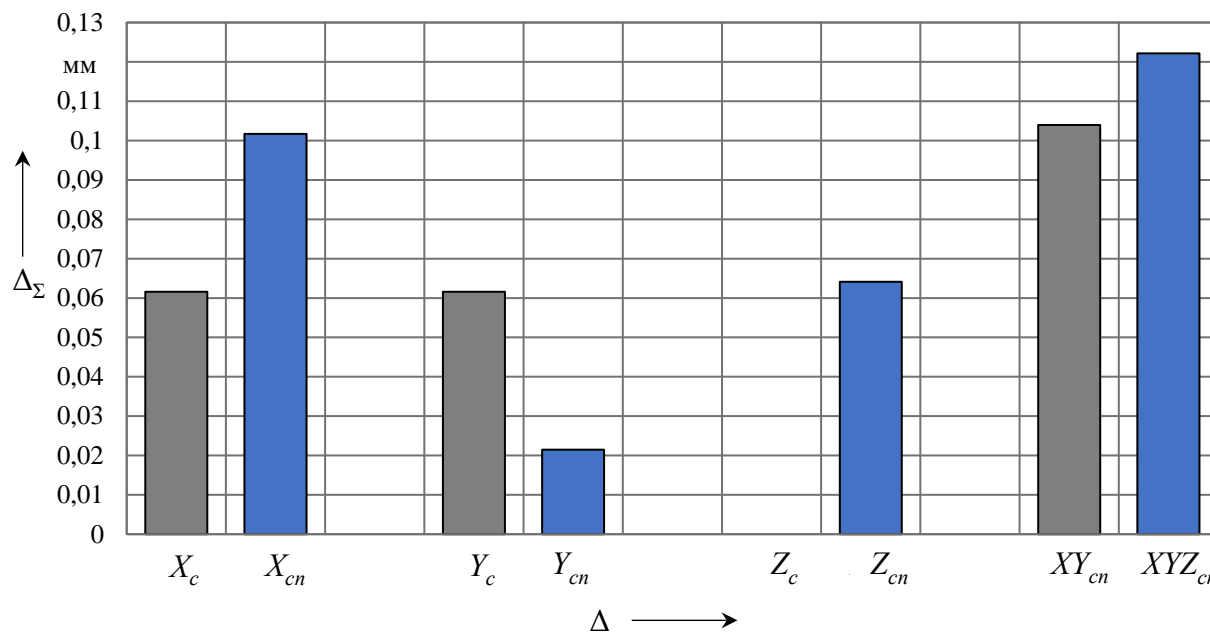


Рисунок 1.2 – Диаграмма значений суммарной погрешности обработки

На рисунке 1.2 обозначены следующие параметры:  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $Z_c$  – наибольшие суммарные погрешности обработки, учитывающие смещение заготовки вдоль координатных осей станка  $X_0 Y_0 Z_0$ ;  $X_{cn}$ ,  $Y_{cn}$ ,  $Z_{cn}$  – наибольшие суммарные погрешности обработки, учитывающие смещение и повороты заготовки вдоль координатных осей станка  $X_0 Y_0 Z_0$ ;  $XY_{cn}$ ,  $XYZ_{cn}$  – наибольшие суммарные погрешности обработки, учитывающие смещение и повороты заготовки в плоскости  $X_0 Y_0$  и в пространстве  $X_0 Y_0 Z_0$ . Погрешности на диаграмме можно рассматривать как отклонения формы и расположения заданного профиля дорожки на плоскости и в пространстве в системе координат станка.

При фрезеровании многопериодной дорожки заготовка колеса базируется в приспособлении на станке по наружной цилиндрической поверхности и торцу. Погрешность формы базовой цилиндрической поверхности заготовки (отклонение от круглости), полученная на предыдущей технологической операции, имеет соотношение с допуском на размер в соответствии с установленными уровнями геометрической точности [23, 30]. После черновой обработки этот допуск может превышать все остальные технологические погрешности. На рисунке 1.3 показаны графики, характеризующие влияние погрешности формы  $\Delta_\phi$  цилиндрической поверхности заготовки на суммарную погрешность  $\Delta_\Sigma$  обработки многопериодной дорожки.

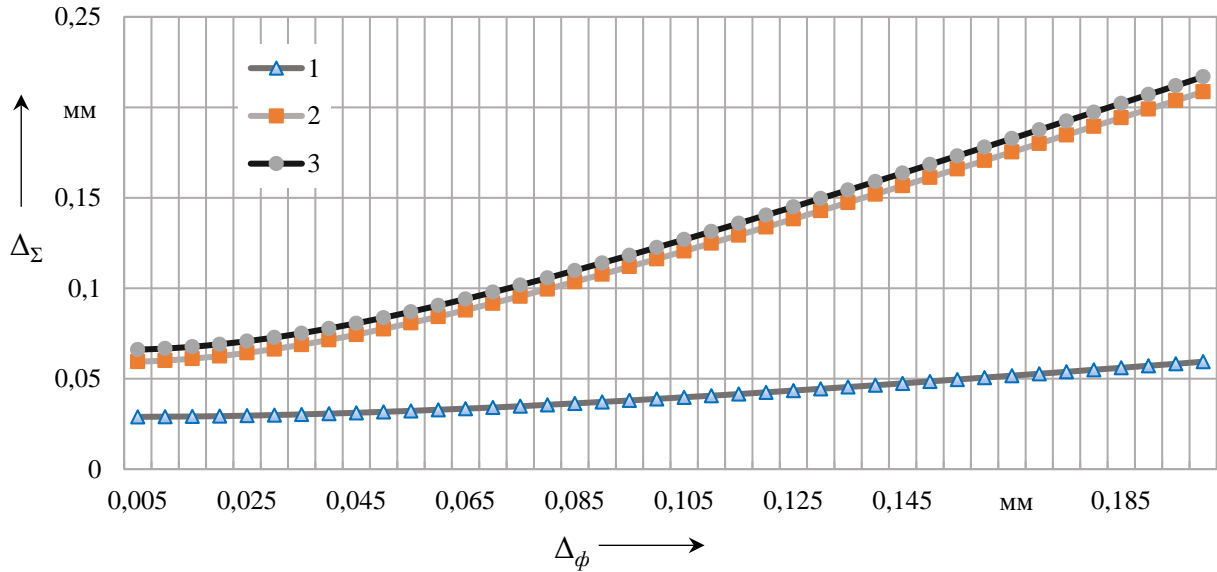


Рисунок 1.3 – Графики зависимостей суммарных погрешностей обработки многопериодной дорожки от погрешности формы заготовки

График 1 (см. рисунок 1.3) характеризует тангенциальную погрешность, связанную только со смещением профиля многопериодной дорожки колеса при фрезеровании; график 2 характеризует погрешность радиального смещения дорожки из-за неточной установки заготовки; график 3 показывает суммарную (радиальную и тангенциальную) погрешность обработки многопериодной дорожки при разных значениях погрешности формы базовой поверхности заготовки.

При обработке многопериодной дорожки возникают значительные погрешности от упругих деформаций станка и инструмента. Это связано со снятием неравномерного припуска при фрезеровании криволинейной поверхности. Заготовка колеса имеет предварительно обработанное центральное отверстие. Фреза при формообразовании дорожки, находясь в отверстии, углубляется в тело заготовки и снимает неравномерный припуск, перемещаясь вдоль профиля обрабатываемой поверхности. С увеличением припуска увеличиваются глубина и сила резания, а соответственно, и смещения заготовки от упругих деформаций. Стабилизировать силу резания можно оптимизацией режимов обработки. Предложено уменьшать подачу на зуб фрезы с увеличением глубины резания при обработке многопериодной дорожки. Это можно достичь программированием режимов резания на станках с ЧПУ. На рисунке 1.4 показаны графики погрешностей обработки с оптимизированными режимами резания.

На графиках видно, что при оптимизированных значениях глубины резания и подачи упругие деформации мало изменяются, следовательно, погрешность от упругих деформаций значительно уменьшилась. При этом

суммарная погрешность обработки также уменьшилась в сравнении со значениями на диаграмме (см. рисунок 1.2).

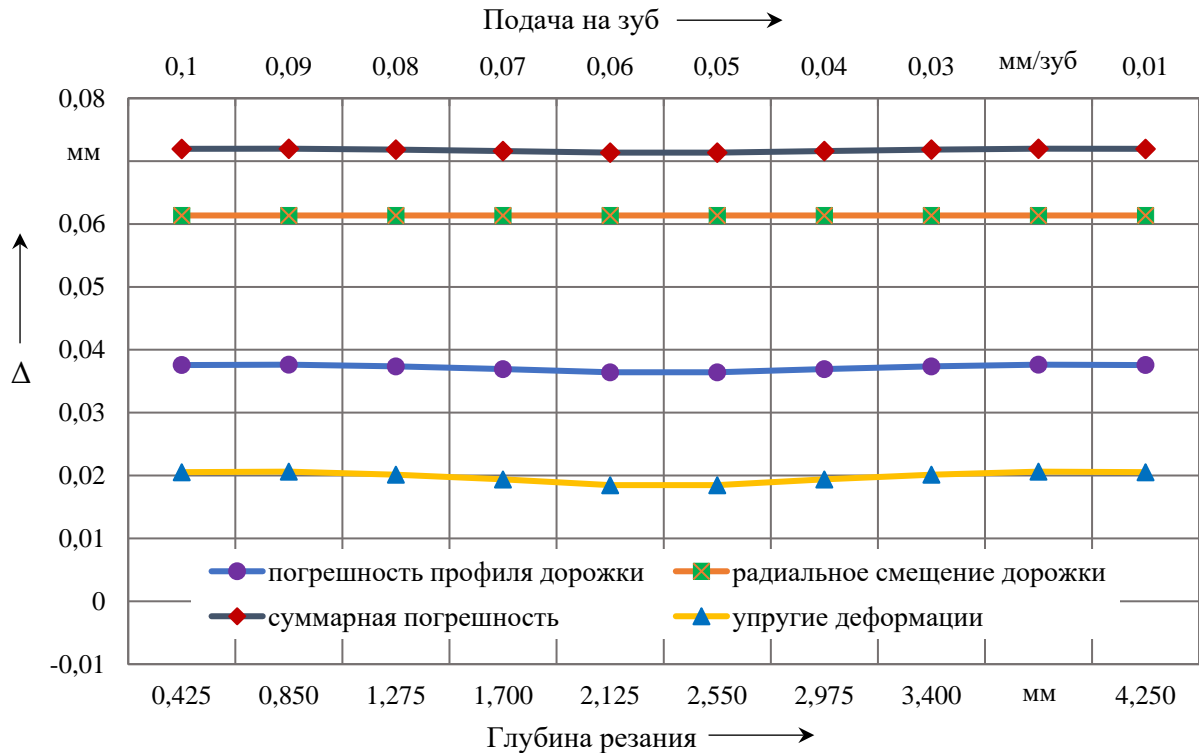


Рисунок 1.4 – Графики погрешностей обработки с оптимизированными режимами резания

## 1.2 Расчет суммарной погрешности обработки и ее спектральный анализ деталей с многопериодными дорожками

Аналитическое представление реальной поверхности позволяет более четко выявить законы суммирования отклонений размеров и формы этой поверхности. Образующим профилем рабочих поверхностей беговых дорожек планетарных передач с телами качения являются следующие периодические кривые: синусоида, циклоида, смещенная окружность и спираль Архимеда. Можно также использовать любой профиль кривых, например кривые второго порядка. Общий вид уравнения таких кривых [27]

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1.19)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  – любые действительные значения;

$x, y$  – переменные.

Наиболее технологичным является профиль беговой дорожки, построенный по уравнению окружности [3, 4]

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (1.20)$$

где  $a, b$  – смещение центра окружности вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  
 $R$  – радиус окружности.

Уравнение (1.20) в развернутом виде

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) соответствует уравнению (1.19) при  $B = 0$ , т. к. относится к уравнениям второго порядка.

В качестве примера проведены расчет суммарной погрешности обработки и спектральный анализ погрешностей, полученных при моделировании и рассмотренных в подразд. 1.1, беговой многопериодной дорожки колеса планетарной шариковой передачи. Ось дорожки представляет собой периодическую кривую, построенную по уравнению смещенной окружности в полярных координатах [3, 4]

$$\rho_2 = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z_2 \varphi} \pm A \cos z_2 \varphi, \quad (1.22)$$

где  $\rho_2$  – радиус-вектор периодической кривой профиля беговой дорожки колеса;

$R$  – средний радиус периодической кривой профиля беговой дорожки;

$A$  – амплитуда периодической кривой профиля беговой дорожки;

$z_2$  – число периодов беговой дорожки;

$\varphi$  – угол положения точек периодической кривой профиля беговой дорожки.

Для выполнения спектрального анализа рассчитаны значения погрешностей беговых дорожек, которые могут возникать при изготовлении. Эти значения изменяются в зависимости от углов подъема беговых дорожек. Их можно рассматривать как область значений функции для углов от 0 до  $\pi$  положения радиус-вектора, описывающего профиль кривой беговой дорожки.

На основе уравнения (1.6) выведено уравнение расчета суммарной погрешности обработки многопериодной беговой дорожки  $z_2$  для планетарных шариковых передач

$$\Delta_{\Sigma_{ш}}^{z_2} = 1,176 \sqrt{\Delta_{\phi}^2 + \Delta_y^2 + \Delta_{\delta}^2 + \Delta_n^2 + \Delta_u^2 + \Delta_l^2 + \Delta_n^2}, \quad (1.23)$$

где  $\Delta_{\phi}$  – погрешность формы базовой поверхности заготовки;

$\Delta_y$  – погрешность установки заготовки, включает погрешности базирования, закрепления и приспособления;

$\Delta_d$  – суммарная погрешность от упругих деформаций станка, инструмента и заготовки;

$\Delta_n$  – погрешность настройки технологической системы;

$\Delta_u$  – наибольшая погрешность от размерного износа инструмента (фрезы) по всему профилю криволинейной поверхности беговой дорожки;

$\Delta_l$  – суммарная погрешность, связанная с люфтами в станках и станочных приспособлениях;

$\Delta_n$  – погрешность позиционирования станка с ЧПУ, на котором обрабатывается беговая дорожка.

Суммарная погрешность  $\Delta_{\Sigma u}^z$  включает тангенциальные и радиальные погрешности, возникающие при обработке криволинейной поверхности многопериодной беговой дорожки. Тангенциальные погрешности связаны с погрешностями обработки профиля, измеряемого по нормальям к касательным в точках кривой. Они формируются в разных направлениях координатных осей. Суммарная погрешность, включающая только тангенциальные погрешности обработки,

$$\Delta_{\Sigma u}^t = 1,176 \sqrt{\Delta_d^2 + \Delta_u^2 + \Delta_l^2 + \Delta_n^2}. \quad (1.24)$$

Радиальные погрешности связаны со смещением в радиальном направлении. Суммарная погрешность, включающая только радиальные погрешности обработки,

$$\Delta_{\Sigma u}^r = \sqrt{\Delta_\phi^2 + \Delta_y^2 + \Delta_n^2}. \quad (1.25)$$

Погрешности  $\Delta_{\Sigma u}^t$  и  $\Delta_{\Sigma u}^r$ , рассчитанные по формулам (1.24) и (1.25), учитывают только смещение заготовки и инструмента при обработке относительно неподвижной системы координат станка. Погрешности, возникающие от возможного поворота заготовки вокруг координатных осей станка, определяются по уравнениям (1.12)–(1.16). При этом углы поворота определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = \beta = \arctg \left( \frac{\Delta_p + \Delta_{np} + \Delta_{c1} + \Delta_{c2}}{R_{\max}} \right); \\ \gamma = 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

где  $\Delta_p$  – погрешность расположения, связанная с отклонением от перпендикулярности торца детали с многопериодной дорожкой относительно ее оси;

$\Delta_{np}$  – погрешность, связанная с разновысотностью опорных поверхностей станочного приспособления;

$\Delta_{c1}$  – погрешность из-за геометрических неточностей станка, учитывающая отклонение от параллельности стола направлению подачи;

$\Delta_{c2}$  – погрешность из-за геометрических неточностей станка, учитывающая отклонение от перпендикулярности оси шпинделя направлению подачи;

$R_{max}$  – максимальный радиус беговой дорожки.

В таблице 1.2 представлены исходные данные для расчета тангенциальных и радиальных погрешностей, возникающих при обработке беговых дорожек.

Таблица 1.2 – Исходные данные для расчета тангенциальных и радиальных погрешностей

Название параметра	Обозначение	Значение
1	2	3
Погрешность формы базовой поверхности заготовки	$\Delta\phi$	0,016 мм
Погрешность установки заготовки, включает погрешности базирования, закрепления и приспособления	$\Delta_y$	0,05 мм
Суммарная погрешность от упругих деформаций станка, инструмента и заготовки	$\Delta\delta$	0,042 мм
Погрешность настройки технологической системы	$\Delta_n$	0,01 мм
Наибольшая погрешность от размерного износа инструмента (фрезы) по всему профилю криволинейной поверхности беговой дорожки	$\Delta_u$	0,021 мм
Суммарная погрешность, связанная с люфтами в станках и станочных приспособлениях	$\Delta_l$	0,02 мм
Погрешность позиционирования станка с ЧПУ, на котором обрабатывается беговая дорожка	$\Delta_n$	0,005 мм
Погрешность от температурных деформаций технологической системы	$\Delta_T$	$0,15\Delta\Sigma$
Погрешность расположения, связанная с отклонением от перпендикулярности торца детали с многопериодной дорожкой относительно ее оси	$\Delta_p$	0,03 мм
Погрешность, связанная с разновысотностью опорных поверхностей станочного приспособления	$\Delta_{np}$	0,05 мм
Погрешность из-за геометрических неточностей станка, учитывающая отклонение от параллельности стола направлению подачи	$\Delta_{c1}$	0,012 мм
Погрешность из-за геометрических неточностей станка, учитывающая отклонение от перпендикулярности оси шпинделя направлению подачи	$\Delta_{c2}$	0,016 мм
Максимальный радиус беговой дорожки	$R_{max}$	105 мм

## Окончание таблицы 1.2

1	2	3
Средний радиус дорожки	$R$	41,5 мм
Амплитуда дорожки	$A$	3,75 мм
Число периодов дорожки	$z_2$	6
Радиус шара-сателлита	$r_{ш}$	7,5 мм
Суммарный угол поворота вокруг оси $X_0$	$\alpha$	0,00103 рад
Суммарный угол поворота вокруг оси $Y_0$	$\beta$	0,00103 рад
Суммарный угол поворота вокруг оси $Z_0$	$\gamma$	0

Величина тангенциальных и радиальных погрешностей в каждой точке кривой зависит от углов подъема беговой дорожки  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В соответствии с [3, 4]

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arctg \frac{A \sin \varphi}{\sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 \varphi}}; \\ \alpha_2 = \arctg(\operatorname{tg} \alpha_1 z_2). \end{cases} \quad (1.27)$$

Тангенциальную погрешность обработки беговой дорожки  $h_i^t = h$  можно определить из схемы, приведенной на рисунке 1.5.

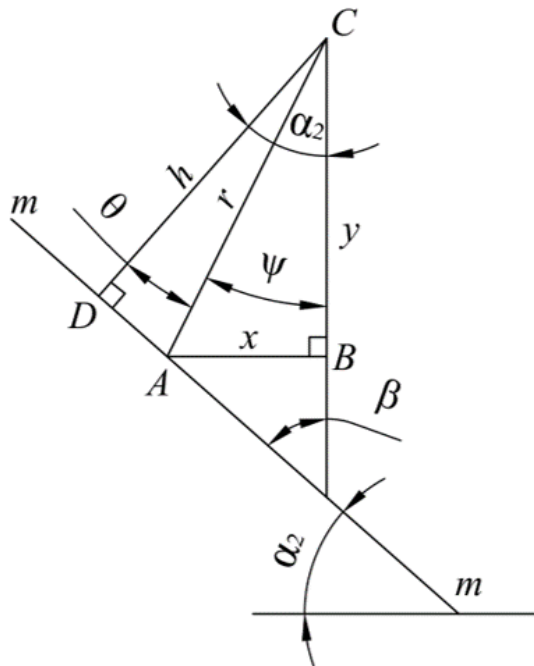


Рисунок 1.5 – Схема для расчета тангенциальной погрешности обработки беговой дорожки

На схеме (см. рисунок 1.5) показана точка  $A$ , принадлежащая номинальной кривой многопериодной беговой дорожки. При изготовлении дорожки возникают погрешности, которые приводят к смещению кривой на величины  $x$  (отрезок  $AB$ ) и  $y$  (отрезок  $BC$ ) из точки  $A$  в точку  $C$  на расстояние  $r$ . К точке  $A$  проведена касательная  $mt$ , определяющая угол подъема  $\alpha_2$  беговой дорожки в этой точке. Нормаль к касательной  $h$  (отрезок  $DC$ ) составляет тангенциальную погрешность обработки  $h_i^t$ .

Значения  $r$ ,  $x$  и  $y$  на схеме (см. рисунок 1.5) используются для расчета тангенциальной составляющей суммарной погрешности обработки беговой дорожки. Они учитывают смещения  $\Delta_{\Sigma_{uu}}^t$  и повороты на углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  вдоль и вокруг координатных осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  в соответствии с расчетами по уравнениям (1.24), (1.26), (1.12)–(1.16) и с использованием таблицы 1.2. При этом  $r = 0,081$  мм. Если принять величины  $x$  и  $y$  равными, то  $x = y = r / \sqrt{2} = 0,057$  мм.

Тангенциальная погрешность  $h_i^t = h$  определяется на основе схемы (см. рисунок 1.5) по зависимостям

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \psi = \arcsin \frac{x}{r}; \\ \theta = \alpha_{2i} - \psi; \\ h_i^t = r \cos \theta_i. \end{cases} \quad (1.28)$$

Радиальная погрешность, приведенная к нормали  $h$  для суммирования с тангенциальной погрешностью и расчета суммарной погрешности обработки, определяется также в соответствии со схемой (см. рисунок 1.5) по зависимостям (1.28), уравнениям (1.25), (1.26), (1.12)–(1.16) и с использованием таблицы 1.2. При этом  $r = 0,066$  мм,  $x = y = 0,047$  мм. При определении радиальной погрешности  $h_i^r$  величину смещения по нормали  $h$  точек многопериодной кривой нужно рассматривать в зависимости от угла их положения  $\varphi_i$ :

$$h_i^r = \frac{h}{\sqrt{2}} \sin \varphi_i. \quad (1.29)$$

В таблице 1.3 представлены значения тангенциальных погрешностей обработки беговых дорожек с разными геометрическими параметрами.

Таблица 1.3 – Тангенциальные погрешности обработки беговых дорожек и геометрические параметры планетарных шариковых передач

Параметры	Передаточное отношение $i$				
	$i = 7$	$i = 10$	$i = 15$	$i = 20$	$i = 25$
	Число периодов беговой дорожки				
	$z_2 = 6$	$z_2 = 9$	$z_2 = 14$	$z_2 = 19$	$z_2 = 24$
Средний радиус $R$ , мм	41,5	41,5	60	86	110
Амплитуда беговой дорожки $A$ , мм	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75
Наибольший угол подъема беговой дорожки $\alpha_{2\max}$ , град	28,6	39,2	41,2	39,7	39,3
Смещение $\Delta h^t$ , мм	0,055	0,072	0,075	0,073	0,072

Смещение  $\Delta h^t$  (см. таблицу 1.3) определяется как разность наибольших и наименьших рассчитанных значений тангенциальных погрешностей обработки  $h_i^t$  на всей кривой беговой дорожки с угловым шагом расположения точек на кривой, равным 1 град. Как видно из таблицы, смещение  $h_i^t$  зависит от угла подъема беговой дорожки. Из таблицы 1.3 видно увеличение параметра  $h_i^t$  при возрастании  $\alpha_{2\max}$ .

На рисунке 1.6 показаны графики значений тангенциальных погрешностей обработки  $h^t$  в пределах одного периода кривой для беговых дорожек с разным числом периодов. Погрешности  $h^t$  рассчитаны в зависимости от углов подъема  $\alpha_{2i}$  беговой дорожки в каждой точке периода кривой по уравнениям (1.28) с исходными данными, приведенными в таблице 1.3. На графиках (см. рисунок 1.6) видно, что большие значения погрешностей  $h^t$  относятся к беговым дорожкам с большими углами подъема  $\alpha_2$  в соответствии с таблицей 1.3.

На рисунке 1.7 представлен график радиальной погрешности обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$ , рассчитанной по формулам (1.28) и (1.29) и с учетом таблицы 1.3, для всех периодов кривой дорожки в пределах 360 град. Расчет проводился по 2160 точкам кривой, представляющей ось беговой дорожки.

На рисунке 1.8 показаны теоретические графики тангенциальной и радиальной погрешностей, которые могут быть получены при обработке беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  для всех периодов кривой дорожки в пределах 360 град.

На рисунке 1.8 обозначено: 1 – график тангенциальной погрешности; 2 – график радиальной погрешности, расположенный симметрично относительно горизонтальной оси начала координат.

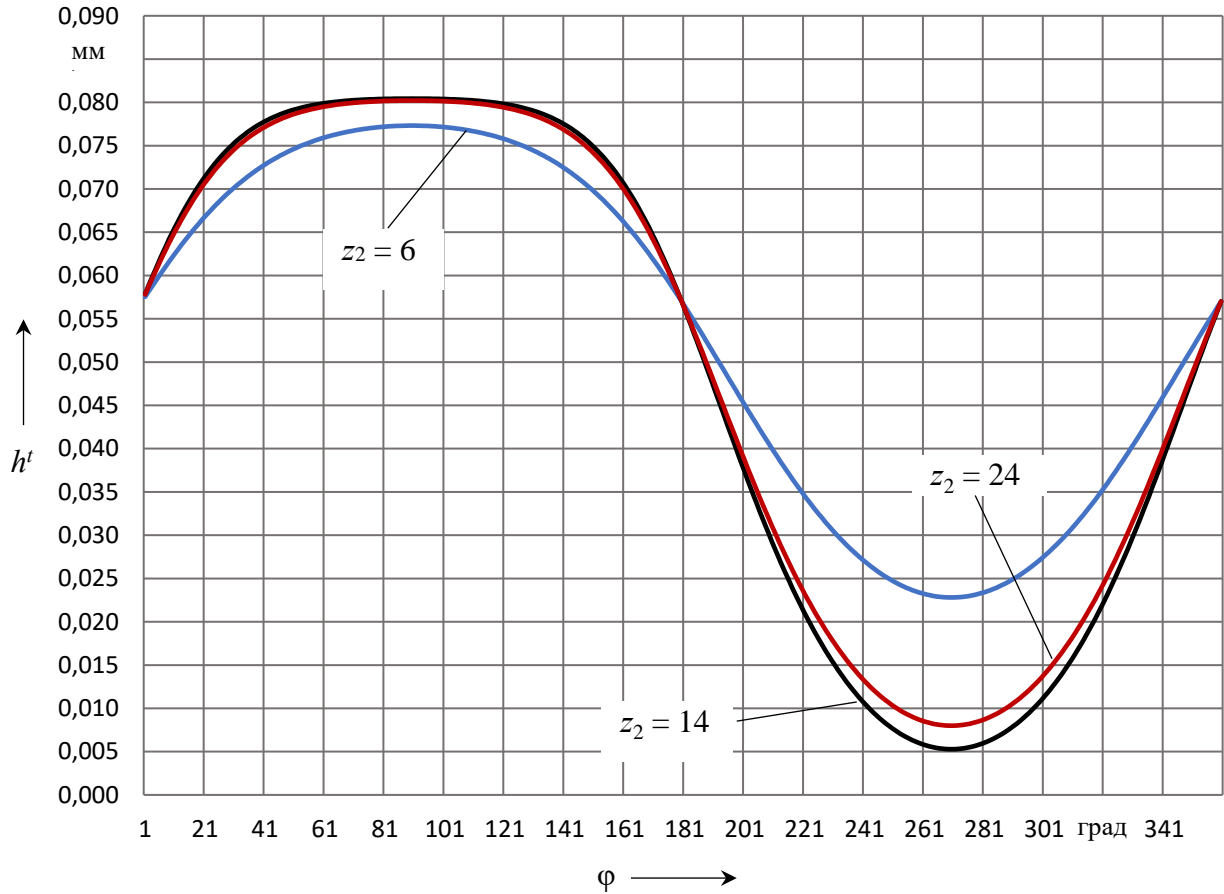


Рисунок 1.6 – Графики значений тангенциальной погрешности обработки беговых дорожек в зависимости от их углов подъема

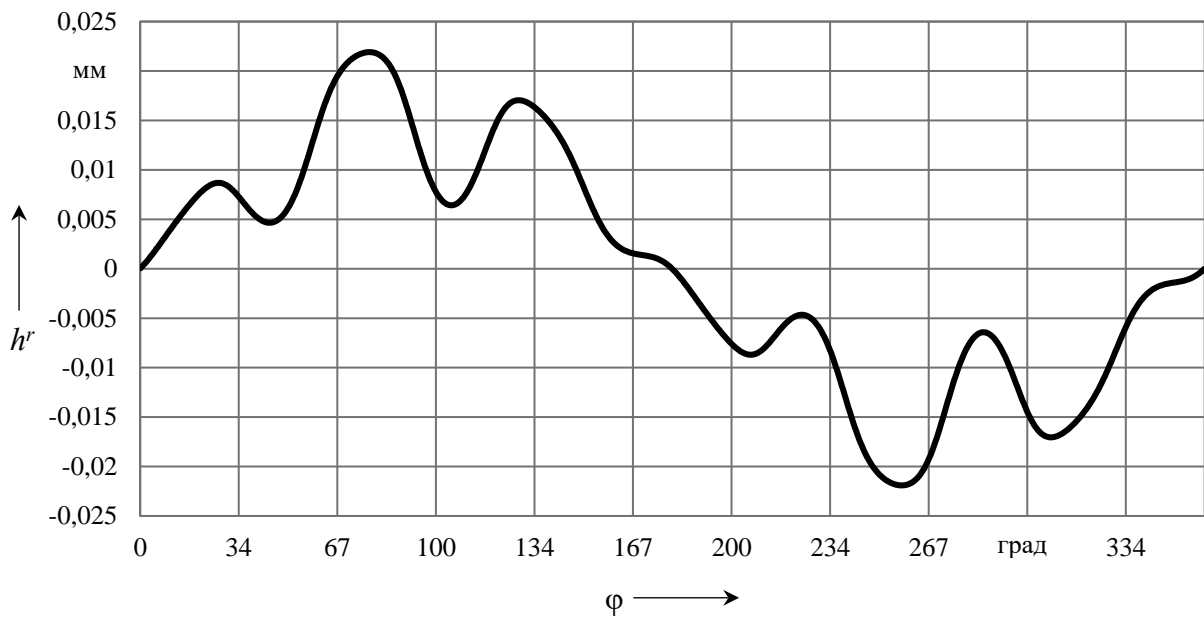


Рисунок 1.7 – График значений радиальной погрешности обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  в зависимости от углов подъема дорожки

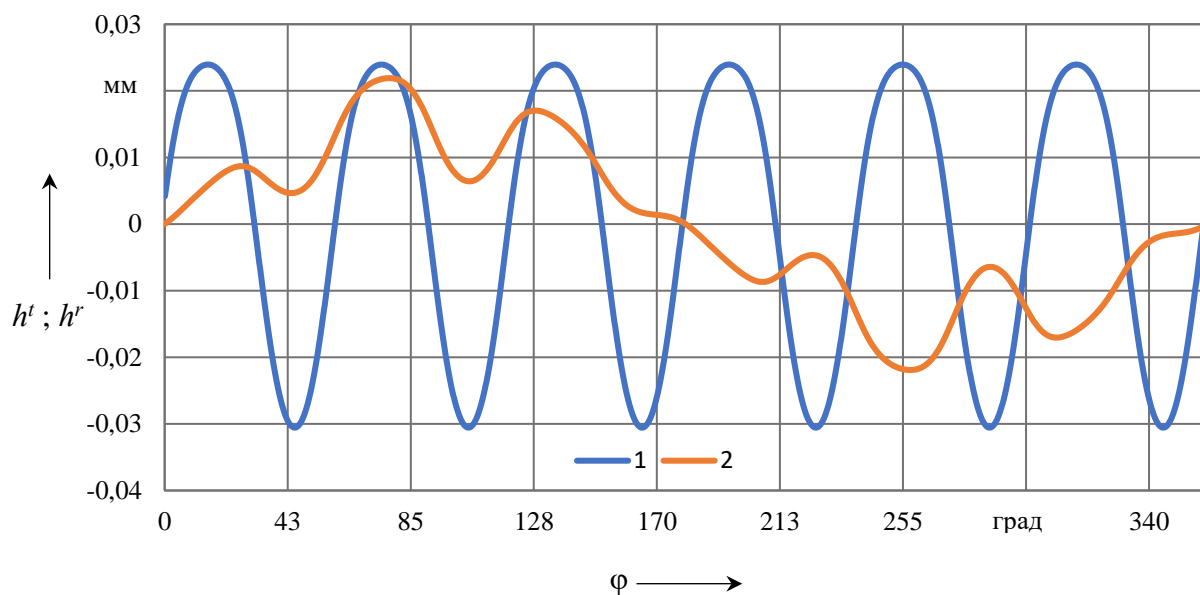


Рисунок 1.8 – Графики тангенциальной и радиальной погрешностей обработки беговой дорожки

На рисунке 1.9 показан теоретический график суммарной погрешности  $\Delta_{\Sigma} = \Delta_{\Sigma u}^{z_2}$ , которая может проявляться при обработке беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  для всех периодов кривой дорожки в пределах 360 град. График получен арифметическим суммированием значений тангенциальной и радиальной погрешностей, представленных на рисунке 1.8, т. к. эти значения получены при расчетах, когда погрешности приведены к нормали касательной, проведенной к каждой точке многопериодной кривой, т. е. погрешности рассматриваются в одной плоскости.

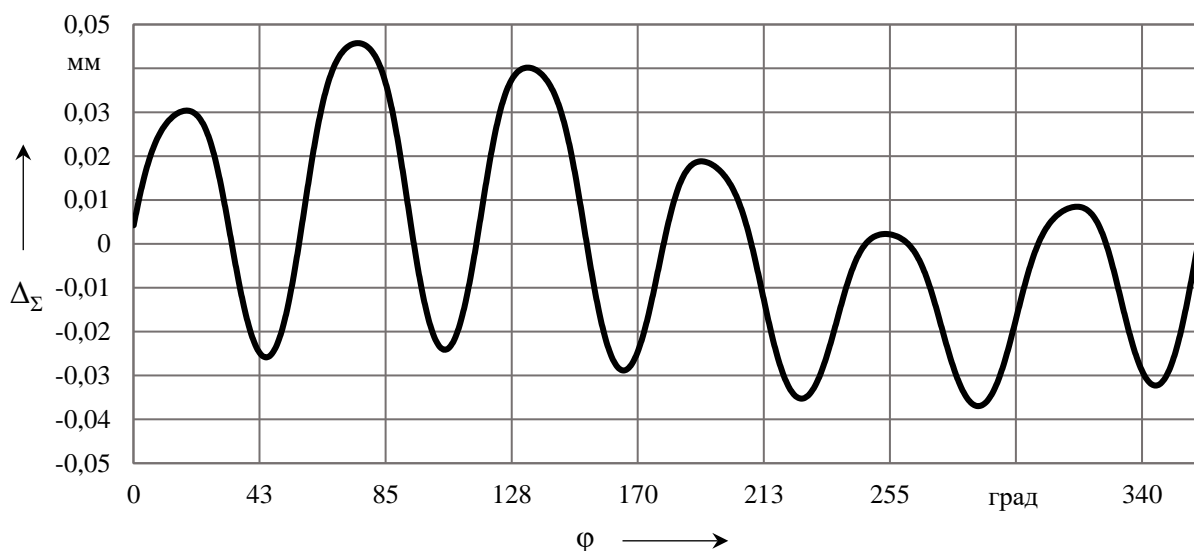


Рисунок 1.9 – График суммарной погрешности обработки беговой дорожки

На графике (см. рисунок 1.9) значения  $\Delta_{\Sigma}$  соответствуют значениям  $\Delta_{\Sigma_{III}}^{z_2}$ . Наибольшее значение на графике, учитывая наибольший размах кривой, составляет 0,083 мм. Суммарные погрешности обработки  $\Delta_{\Sigma}$  получены для беговых дорожек с разным числом периодов. При этом возрастание углов подъема увеличивает суммарную погрешность.

При исследовании точности обработки поверхностей деталей сложной геометрической формы использованы методы спектральной теории для определения погрешностей геометрических параметров [31–36]. Функцию погрешности размера, сечения или профиля поверхности детали можно представить в виде ряда Фурье с конечным числом членов  $k = n$ :

$$F(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (1.30)$$

или

$$F(\varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k (\cos k\varphi + \varphi_k), \quad (1.31)$$

где  $a_0, c_0$  – нулевые члены, каждая из величин  $a_0/2$  и  $c_0/2$  равна среднему значению функции за период  $T = 2\pi$ ;

$a_k, b_k, c_k$  – коэффициенты ряда Фурье;

$k$  – порядковый номер составляющей гармоник;

$\varphi$  – угловая координата точки профиля детали.

Коэффициенты ряда Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos k\varphi d\varphi; \quad (1.32)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin k\varphi d\varphi. \quad (1.33)$$

Для  $k$ -й гармоники между амплитудой  $c_k$  и коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$ , а также начальной фазой  $\varphi_k$  существуют зависимости

$$a_k = c_k \cos \varphi_k; \quad (1.34)$$

$$b_k = c_k \sin \varphi_k; \quad (1.35)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad (1.36)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}. \quad (1.37)$$

Нулевой член ряда определяется по формуле

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi. \quad (1.38)$$

Члены разложения имеют физический смысл. Величины  $a_0/2$  и  $c_0/2$  характеризуют отклонение реального размера детали от номинального, являясь постоянными (независимыми от угловой координаты  $\varphi$ ). Первый член разложения  $c_1 \cos(\varphi + \varphi_1)$  характеризует отклонение реального размера (расположения реального профиля) от номинального и представляет собой однопериодную косинусоиду с амплитудой  $c_1$ , фазой  $\varphi_1$  и гармоникой с номером 1 амплитудно-частотного спектра. Следующие члены ряда Фурье:  $c_2 \cos(2\varphi + \varphi_2)$ ,  $c_3 \cos(3\varphi + \varphi_3)$ , ...,  $c_k \cos(k\varphi + \varphi_k)$  также характеризуют отклонение реального размера (расположения реального профиля) от номинального и представляют собой косинусоиды с частотой изменения  $k$ , амплитудами  $c_2, c_3, \dots, c_k$  и фазами  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_k$ .

Беговые дорожки деталей планетарных механизмов с телами качения построены по периодическим кривым, описываемым радиус-вектором  $\rho(\varphi)$ . Длина радиус-вектора изменяется в зависимости от угла  $\varphi$ . Величина погрешностей, возникающих при изготовлении дорожки (формообразовании кривой), зависит от частоты изменения приращения радиус-вектора и характеризуется номером гармоники и ее амплитудой. Таким образом, номер гармоники характеризует погрешности размера (профиля) кривой беговой дорожки. Эти погрешности соответствуют частоте изменения приращения радиус-вектора точки кривой в амплитудно-частотном спектре. Гармоники с этими же номерами проявляются и при спектральном анализе кинематических погрешностей исследуемых передач в силу технологической наследственности.

На рисунке 1.10 приведен амплитудно-частотный спектр тангенциальной погрешности обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  для одного периода кривой. График тангенциальной погрешности показан на рисунках 1.6 и 1.8. Спектр рассчитан по уравнениям (1.30)–(1.38) с помощью разработанной компьютерной программы в среде Excel VBA. На графике  $n$  – это номер гармонической составляющей (гармоники).

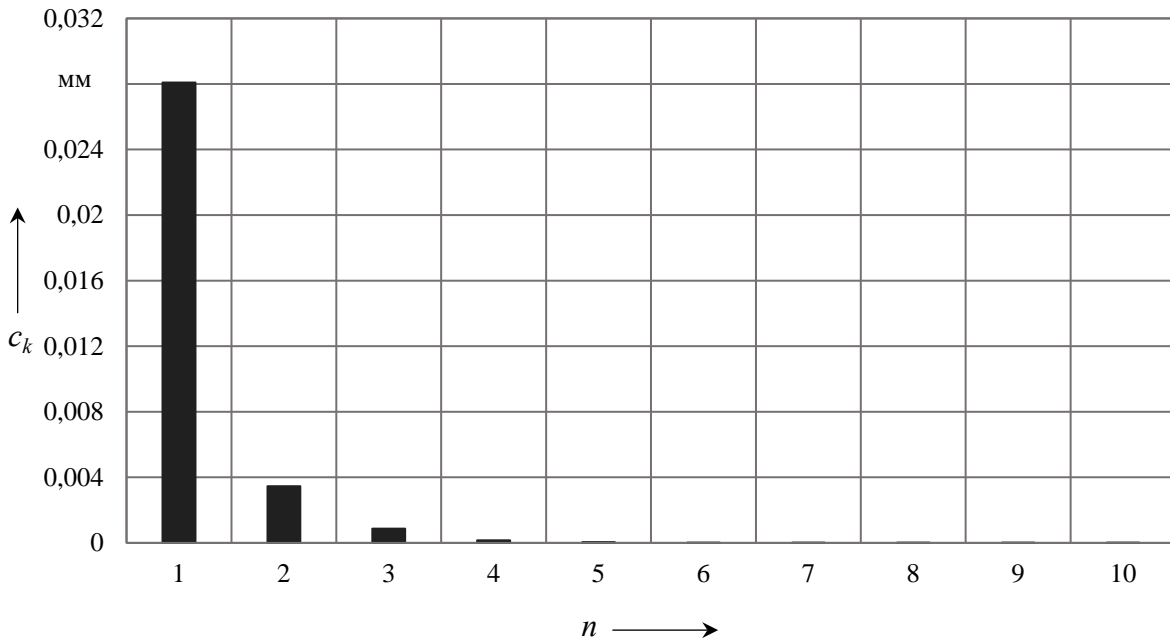


Рисунок 1.10 – Амплитудно-частотный спектр тангенциальной погрешности обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  для одного периода кривой

На амплитудно-частотном спектре (см. рисунок 1.10) наибольшее значение амплитуды  $c_1$  имеет гармоника с номером 1. Также выделяются гармоники с номерами 2 и 3. Учитывая, что погрешности, представленные на рисунках 1.6, 1.8 и 1.10, при расчетах определялись только для одного периода кривой, поэтому номера гармоник (см. рисунок 1.10) нужно умножить на полное число периодов кривой беговой дорожки, равное шести ( $z_2 = 6$ ). Таким образом, наиболее значимыми гармониками в амплитудно-частотном спектре тангенциальных погрешностей для кривой с числом периодов  $z_2 = 6$  будут гармоники 6, 12 и 18.

На рисунке 1.11 показан амплитудно-частотный спектр радиальных погрешностей обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  для всех шести периодов кривой. График радиальной погрешности представлен на рисунках 1.7 и 1.8.

На амплитудно-частотном спектре (см. рисунок 1.11) наибольшие значения амплитуд  $c_k$  имеют гармоники с номерами 1, 5 и 7.

На рисунке 1.12 показан амплитудно-частотный спектр суммарной погрешности обработки беговой дорожки, учитывающий тангенциальные и радиальные погрешности обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$  для всех шести периодов кривой. График суммарной погрешности приведен на рисунке 1.9.

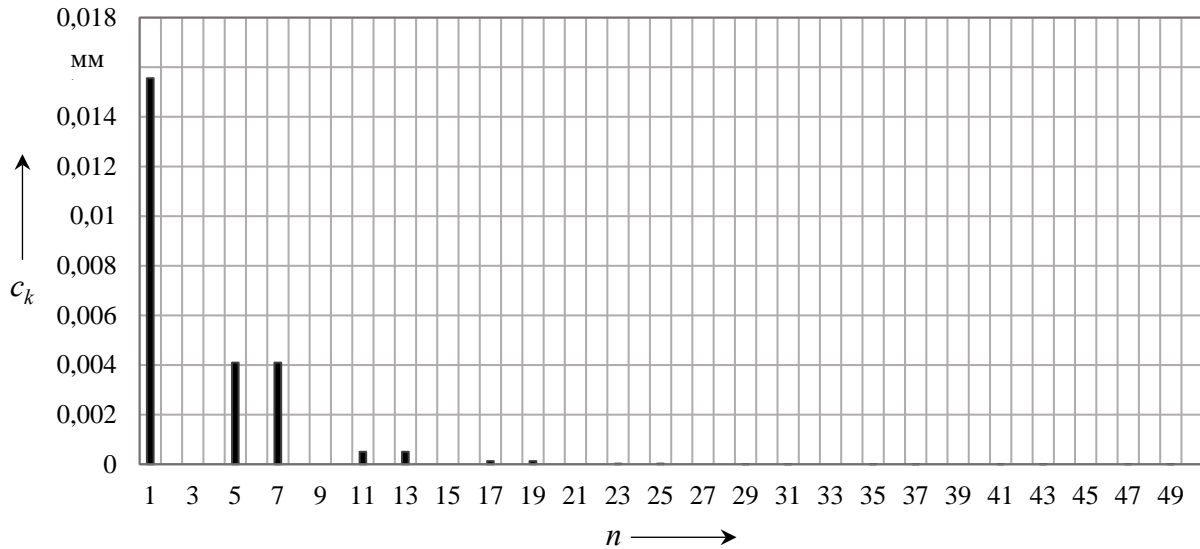


Рисунок 1.11 – Амплитудно-частотный спектр радиальных погрешностей обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$

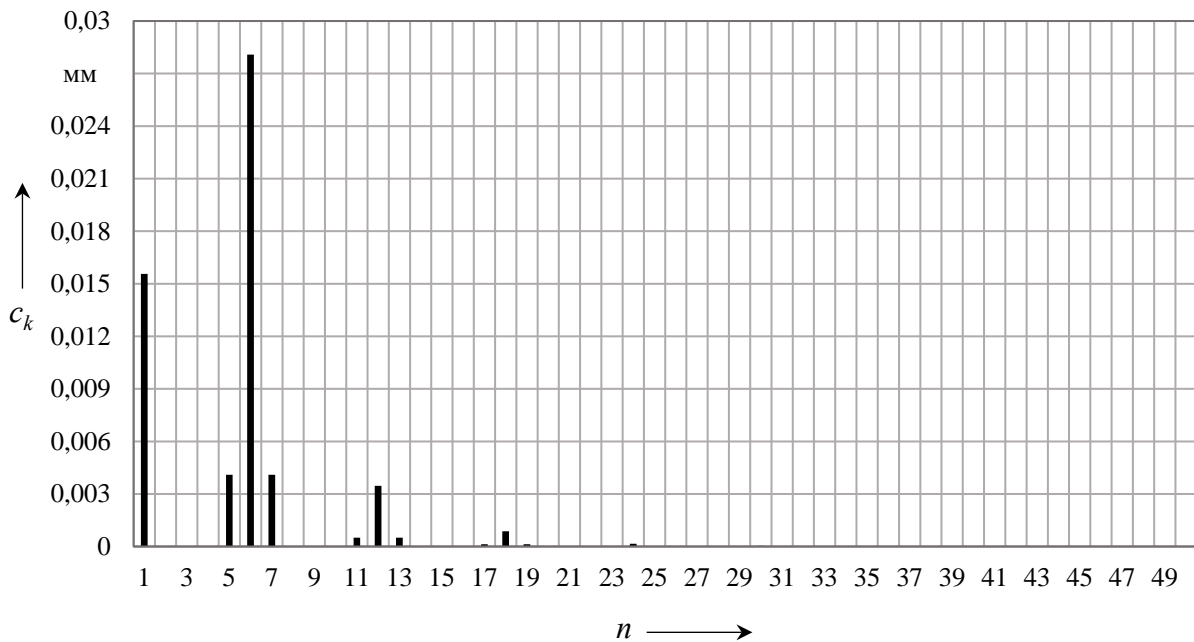


Рисунок 1.12 – Амплитудно-частотный спектр суммарной погрешности обработки беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$

На графике (см. рисунок 1.12) проявляются гармоники с номерами, соответствующими гармоникам амплитудно-частотных спектров тангенциальных и радиальных погрешностей обработки (см. рисунки 1.10 и 1.11) беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$ . Гармоники с номерами 1, 5 и 7 характеризуют радиальные погрешности (смещение), которые могут возникать при изготовлении. Они связаны с погрешностями формы базовой поверхности заготовки, погрешностями ее установки на станке и погреш-

ностями настройки технологической системы на обработку заготовки. Номер гармоники 7 при наличии погрешностей соответствует передаточному отношению передачи  $i = 7$ , в которой используется колесо с беговой дорожкой с числом периодов  $z_2 = 6$ . Гармоника 5 является неосновной и проявляется при заданных геометрических параметрах беговой дорожки при наличии погрешностей. Гармоники с номерами 6 и кратные им 12 и 18 связаны с числом периодов кривой беговой дорожки  $z_2$ ,  $2z_2$ ,  $3z_2$  и относятся к тангенциальным погрешностям. Они появляются вследствие погрешностей от упругих деформаций технологической системы, износа режущего инструмента, неточностей обрабатывающего станка, погрешностей формы и расположения поверхностей заготовки и технологического приспособления, приводящих к поворотам заготовки при установке на станке относительно неподвижной системы координат.

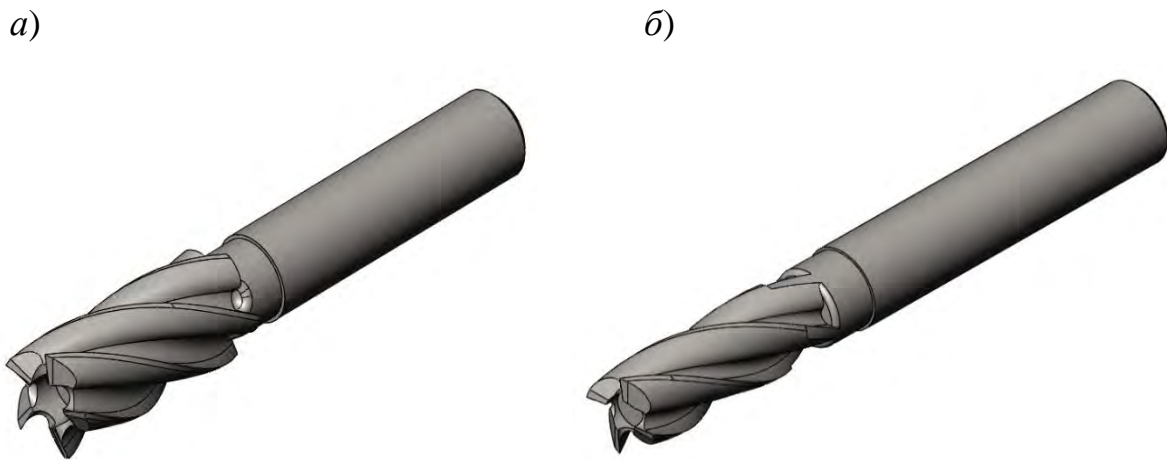
В результате расчетов получены амплитудно-частотные спектры тангенциальных, радиальных и суммарных погрешностей обработки беговых дорожек с различным числом периодов. Установлена зависимость гармонических составляющих от погрешностей обработки и геометрических параметров планетарной передачи. Установлено, что для беговых дорожек с любым числом периодов при наличии погрешностей обработки в амплитудно-частотном спектре появляются основные гармоники с номером 1 и номерами, равными и кратными числу периодов беговой дорожки и передаточному отношению механизма, а также неосновные гармоники с номерами, близкими к основным.

### ***1.3 Компьютерное моделирование упругих деформаций при проектировании способов обработки деталей с беговыми дорожками***

Расчеты, проведенные в подразд. 1.1 и 1.2, показали, что значительную долю суммарной погрешности обработки беговых дорожек составляют упругие деформации технологической системы. Так, погрешности от влияния упругих деформаций станка и станочного приспособления определялись по методике, приведенной в [23, 37]. Погрешности, возникающие вследствие упругих деформаций обрабатывающего инструмента и деталей с беговыми дорожками ввиду их сложной геометрии, наиболее точно можно определить, применяя методы конечных элементов. Для этого использовались технологии компьютерного 3D-моделирования в программной среде SolidWorks со встроенными модулями CAD/CAE, позволяющими создавать трехмерные твердотельные модели и проводить статический анализ напряжений и перемещений.

Построены 3D CAD-модели режущего инструмента – фрез, которые используются для обработки беговых дорожек и модели деталей с беговыми

дорожками. На рисунке 1.13 показаны модели концевых фрез для черновой и чистовой обработки открытых и закрытых многопериодных беговых дорожек планетарных шариковых и роликовых передач.



*a* – концевая фреза диаметром 15 мм; *б* – концевая фреза диаметром 8 мм

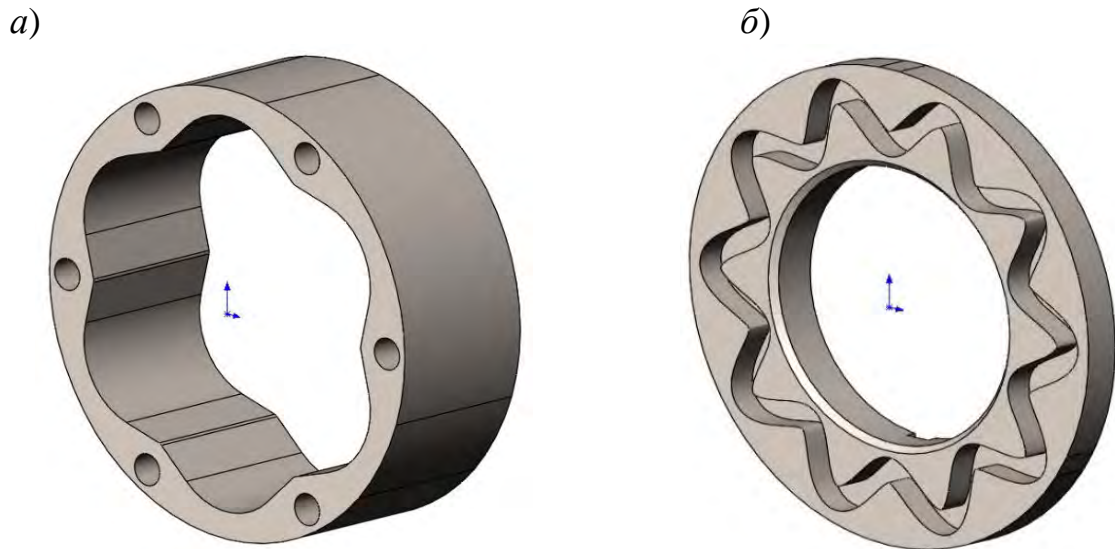
Рисунок 1.13 – Модели концевых фрез для черновой и чистовой обработки открытых и закрытых многопериодных беговых дорожек

Фреза диаметром 15 мм используется для обработки колес с открытыми беговыми дорожками с числом периодов  $z_2 = 6$ ; фреза диаметром 8 мм используется для обработки дисков с закрытыми беговыми дорожками с числом периодов  $z_2 = 10$ .

На рисунке 1.14 показаны 3D CAD-модели деталей с многопериодными беговыми дорожками.

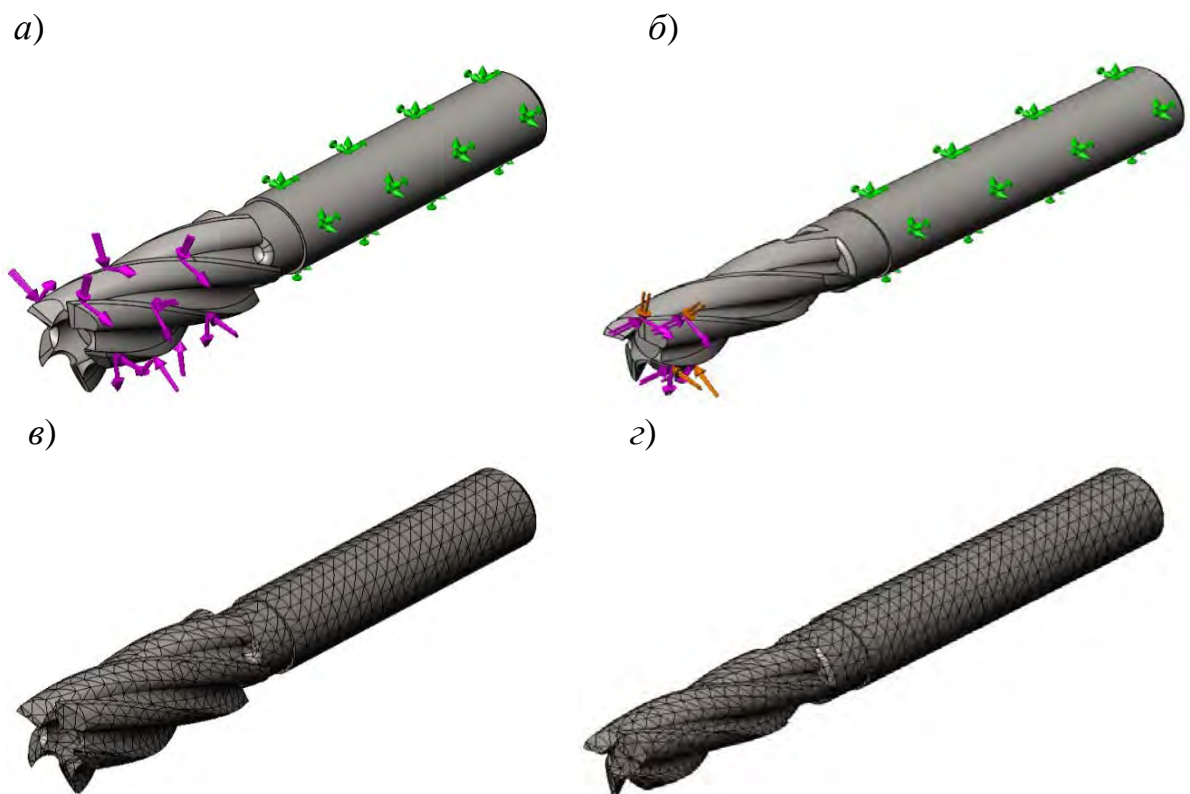
На рисунке 1.14, *a* изображено колесо с открытой внутренней поверхностью беговой дорожки с числом периодов  $z_2 = 6$ ; на рисунке 1.14, *б* показан диск с закрытой беговой дорожкой, выполненной на торце с числом периодов  $z_2 = 10$ . По беговым дорожкам могут перемещаться как шариковые, так и роликовые сателлиты.

В расчетном модуле SolidWorks Simulation (CAE) проведен статический анализ напряженно-деформированного состояния моделей, представленных на рисунках 1.13 и 1.14. Инструмент и детали с многопериодными дорожками нагружались силами резания, соответствующими виду обработки. Задавались материал моделей – инструментальная и легированная сталь, его физические свойства, крепление, сетка и все необходимые параметры для расчета в модуле методом конечных элементов. На рисунке 1.15 показаны модели инструмента – концевых фрез с заданными параметрами крепления, сил резания и сетки для статического анализа.



*a* – колесо с многопериодной беговой дорожкой; *б* – диск с многопериодной беговой дорожкой

Рисунок 1.14 – Модели деталей с многопериодными беговыми дорожками

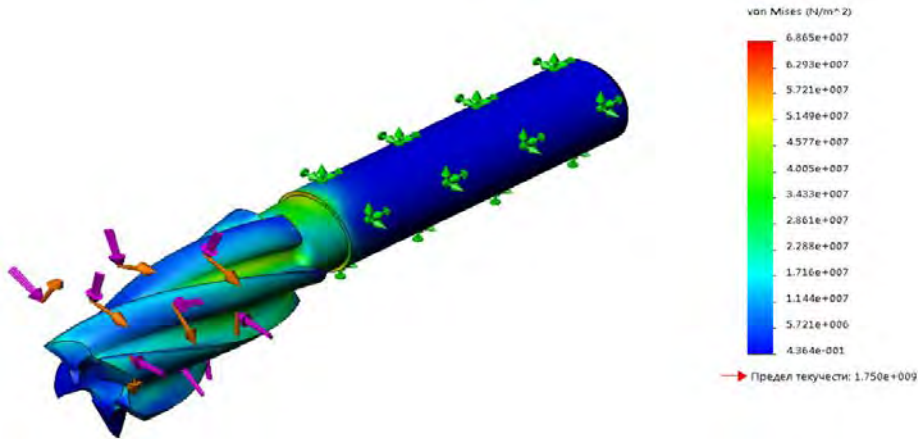


*a* – фреза диаметром 15 мм с заданными креплением и силами резания; *б* – фреза диаметром 8 мм с заданными креплением и силами резания; *в* – фреза диаметром 15 мм с заданной сеткой; *г* – фреза диаметром 8 мм с заданной сеткой

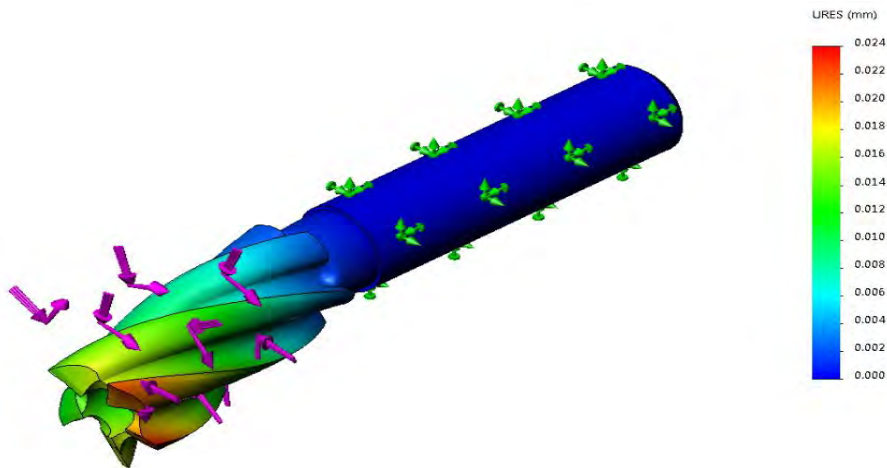
Рисунок 1.15 – Модели концевых фрез с заданными параметрами крепления, сил резания и сетки

На рисунке 1.16 показаны результаты моделирования напряженно-деформированного состояния фрез диаметром 15 мм при нагружении их силами резания: эпюры напряжения, перемещения и деформации.

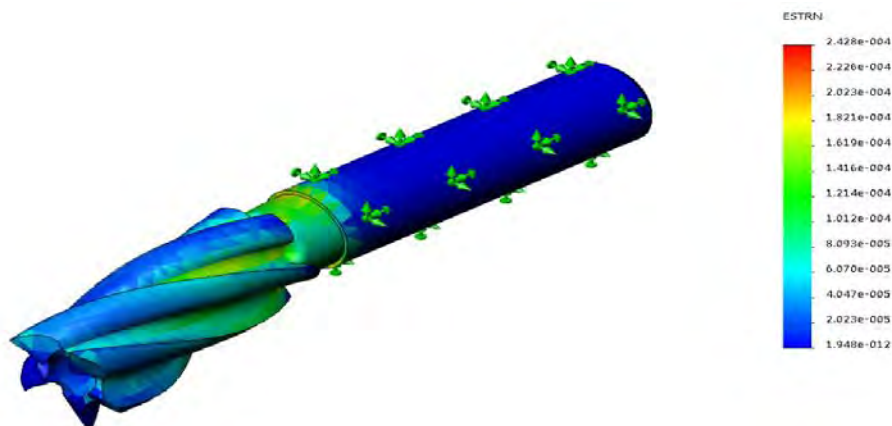
а)



б)



в)

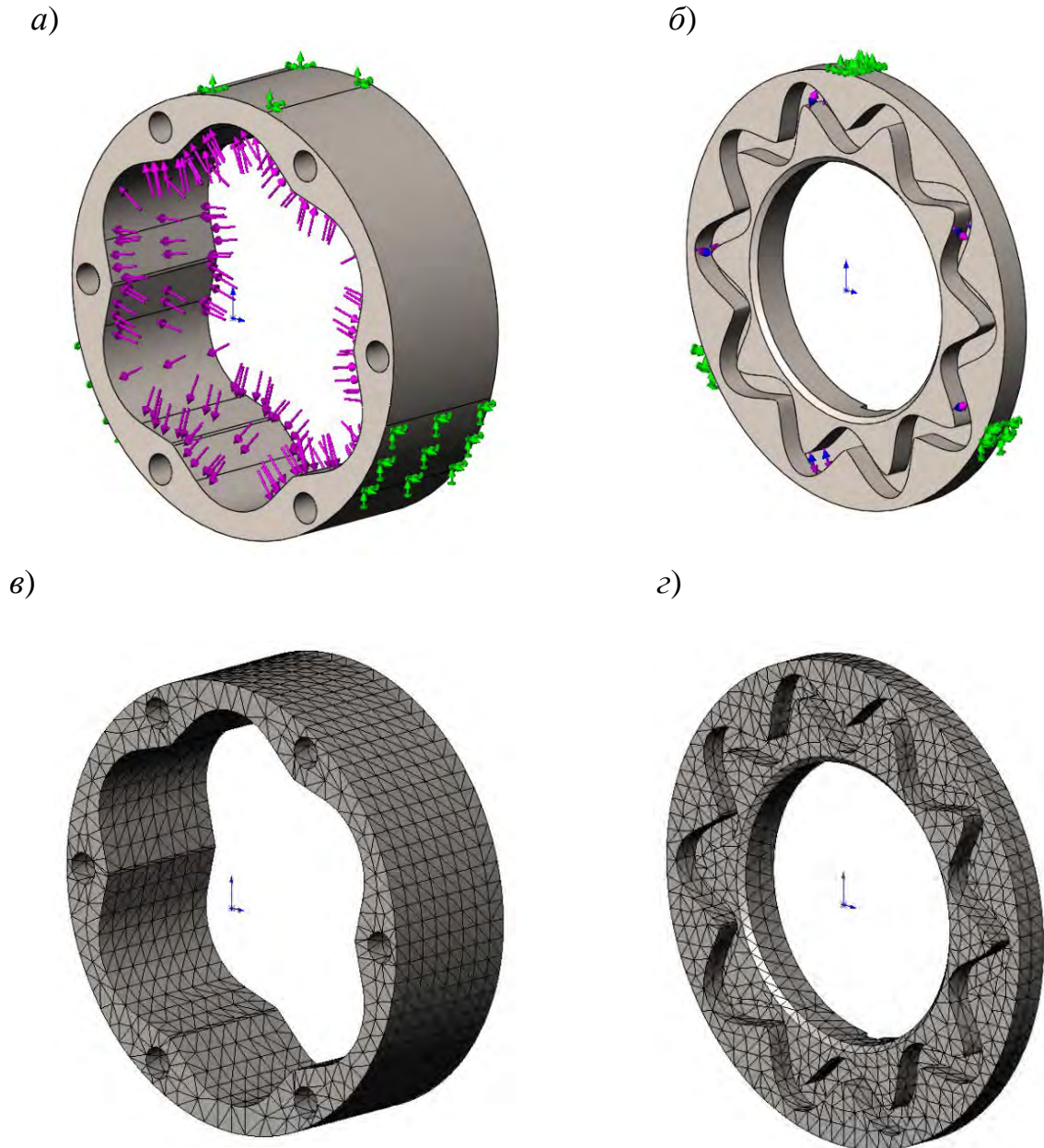


а – эпюра напряжений; б – эпюра перемещений; в – эпюра деформаций

Рисунок 1.16 – Результаты моделирования напряженно-деформированного состояния фрез

Аналогичные эпюры получены для концевых фрез диаметром 8 мм.

На рисунке 1.17 показаны модели деталей с многопериодными дорожками с заданными параметрами крепления, сил резания и сетки для статического анализа.



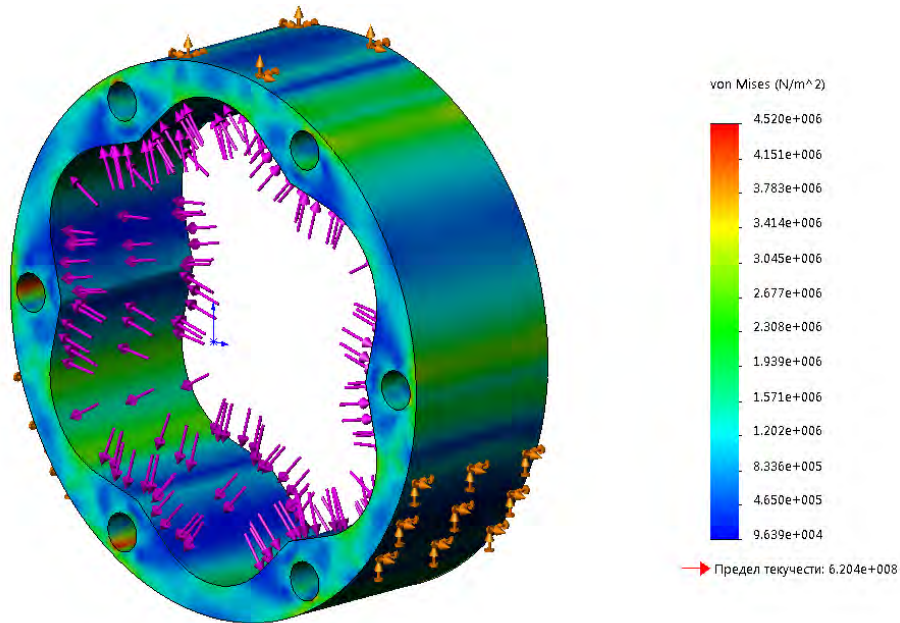
*a* – колесо с многопериодной дорожкой; *б* – диск с многопериодной дорожкой;  
*в* – колесо с заданной сеткой; *г* – диск с заданной сеткой

Рисунок 1.17 – Модели деталей с многопериодными дорожками с заданными параметрами крепления, сил резания и сетки

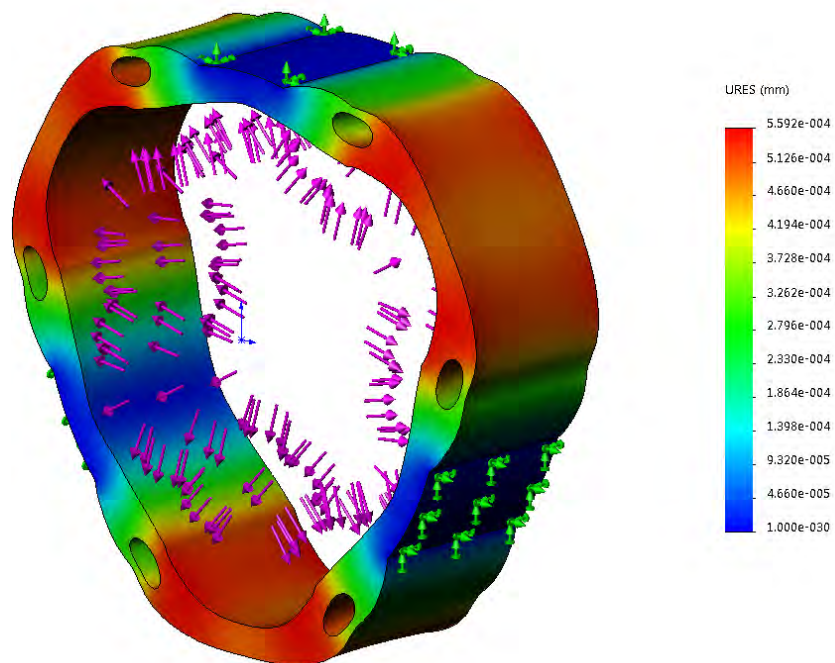
На рисунке 1.18 показаны результаты моделирования напряженно-деформированного состояния деталей с многопериодными дорожками при

нагрузении их силами резания: эпюры напряжения, перемещения и деформации.

*a)*



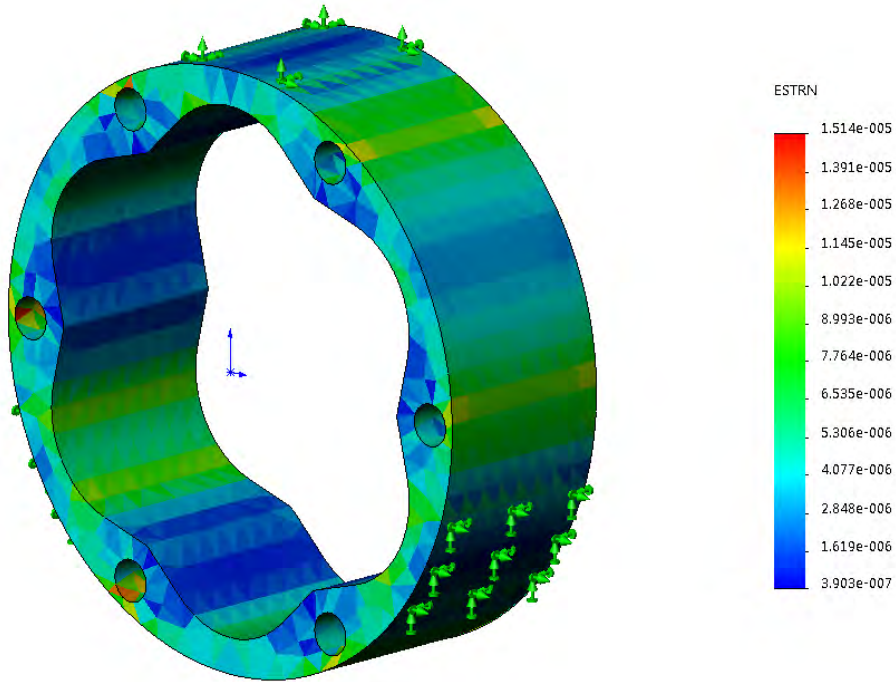
*б)*



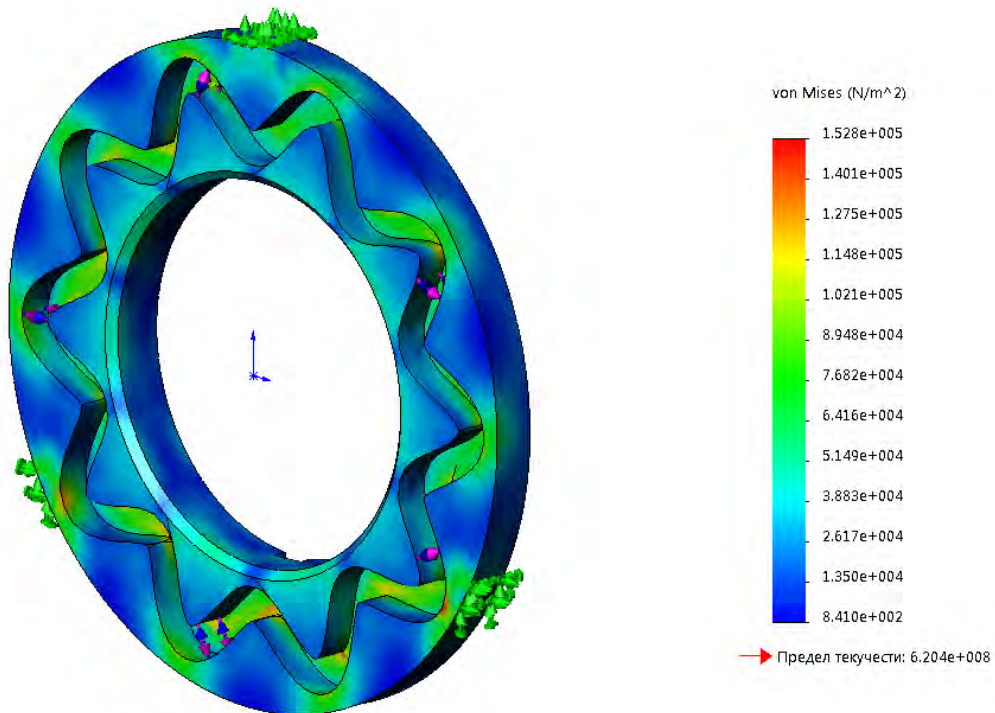
*a* – эпюра напряжений колеса; *б* – эпюра перемещений колеса; *в* – эпюра деформаций колеса; *г* – эпюра напряжений диска; *д* – эпюра перемещений диска; *е* – эпюра деформаций диска

Рисунок 1.18 – Результаты моделирования напряженно-деформированного состояния деталей с многопериодными дорожками

в)

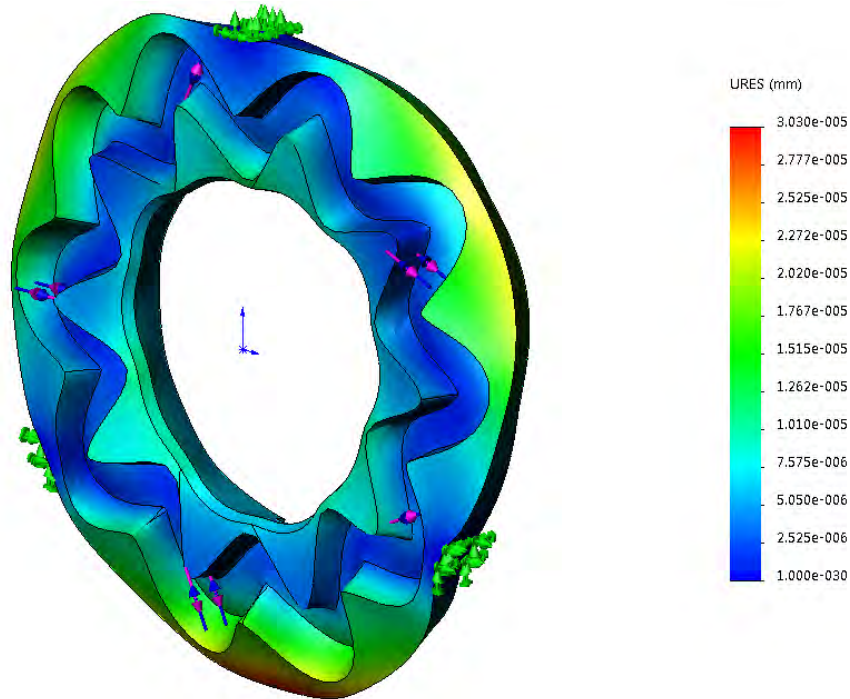


з)

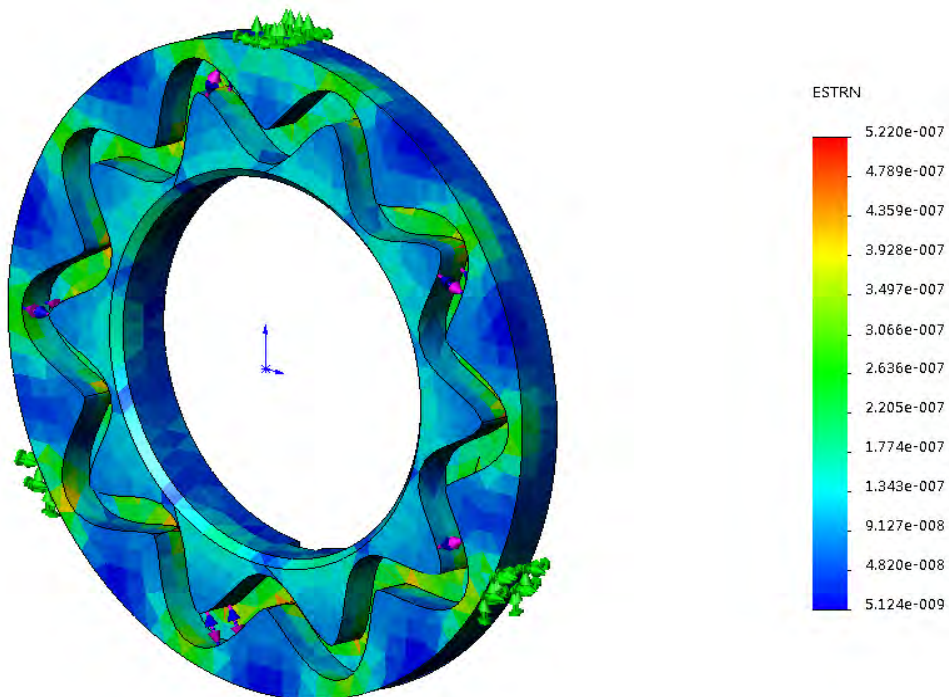


Продолжение рисунка 1.18

d)



e)



Окончание рисунка 1.18

Суммарную погрешность от упругих деформаций технологической системы при обработке (фрезеровании) многопериодных дорожек, в соответствии с методами расчета суммарной погрешности обработки, приведенными в подразд. 1.1 и 1.2, можно определить по формуле

$$\Delta_{\partial} = \sqrt{\Delta_{ст}^2 + (\Delta_{инс} - \Delta_{заг})^2 + \Delta_{прис}^2}, \quad (1.39)$$

где  $\Delta_{ст}$  – упругие деформации станка;

$\Delta_{инс}$  – упругие деформации инструмента;

$\Delta_{заг}$  – упругие деформации заготовки при обработке;

$\Delta_{прис}$  – упругие деформации станочного приспособления.

Силы резания при обработке многопериодных дорожек концевыми фрезами определялись по известным эмпирическим зависимостям [25].

В таблице 1.4 представлены результаты расчетов силовых и точностных характеристик при обработке беговых многопериодных дорожек концевыми фрезами.

Таблица 1.4 – Результаты расчетов силовых и точностных характеристик при обработке беговых многопериодных дорожек концевыми фрезами

Сила и погрешность обработки	Открытая дорожка	Закрытая дорожка
1	2	3
$P_z^{чис}$	121,1 Н	55,7 Н
$P_z^{чер}$	2802,3 Н	995,2 Н
$P_y^{чис}$	42,4 Н	19,5 Н
$P_y^{чер}$	980,8 Н	348,3 Н
$P_x^{чис}$	–	27,9 Н
$P_x^{чер}$	–	497,6 Н
$P_{\Sigma}^{чис}$	128,3 Н	65,3 Н
$P_{\Sigma}^{чер}$	2969,0 Н	1165,9 Н
$\Delta_{ст}^{чис}$	0,005 мм	0,003 мм
$\Delta_{ст}^{чер}$	0,119 мм	0,047 мм
$\Delta_{прис}^{чис}$	0,035 мм	
$\Delta_{прис}^{чер}$	0,054 мм	
$\Delta_{инс}^{чис}$	0,024 мм	0,035 мм
$\Delta_{инс}^{чер}$	0,514 мм	0,629 мм
$\Delta_{заг}^{чис}$	0,0006 мм	0,00003 мм

Окончание таблицы 1.4

1	2	3
$\Delta_{заг}^{чер}$	0,0045 мм	0,00054 мм
$\Delta_{\Sigma\delta}^{чис}$	0,0424 мм	0,0495 мм
$\Delta_{\Sigma\delta}^{чер}$	0,526 мм	0,629 мм

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что упругие деформации (перемещение материала заготовки) при заданных силах резания чистовой обработки для деталей с многопериодными дорожками незначительны и не превышают 0,0006 мм. Упругие перемещения обрабатываемого инструмента под действием сил резания составляют 0,024 мм и более для фрез меньшего диаметра, что, например, при диаметре многопериодной беговой дорожки 105 мм соответствует 7-му качеству точности.

Так как на точность обработки деталей с многопериодными дорожками влияют и другие погрешности, кроме упругих деформаций, то в процессе изготовления точность расположения дорожки относительно ее номинального положения может уменьшаться на 1–3 качества по отношению к 7-му качеству точности, что соответствует средней точности изготовления и приведет к уменьшению кинематической точности шариковых и роликовых передач. Поэтому для данного типа передач, проектируемых с высокой точностью, необходимо выполнять отделочные операции обработки многопериодных дорожек. Проведенные исследования позволяют прогнозировать точность изготовления деталей с многопериодными беговыми дорожками для планетарных шариковых и роликовых передач.

## 2 Разработка математических моделей и методов кинематического расчета погрешностей механических передач

### 2.1 Метод кинематического расчета механических передач с использованием матриц преобразований

Кинематическая погрешность любой механической передачи образуется в результате смещений, поворотов деталей зацепления из-за погрешностей их изготовления и сборки, упругих деформаций звеньев при работе под нагрузкой.

Координаты точек любого звена передачи можно определить через матрицы преобразования пространства (матрицы поворотов), которые при повороте подвижной системы координат  $X_1 Y_1 Z_1$  вокруг осей  $X_0, Y_0, Z_0$  неподвижной системы координат соответственно на углы  $\alpha, \beta, \gamma$  имеют вид [25, 27]

$$\begin{aligned}
 M_{x_0y_0z_0}(\alpha, \beta, \gamma) &= A_{x_0}(\alpha) \times B_{y_0}(\beta) \times C_{z_0}(\gamma) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Исключив из матрицы (2.1) произведения углов как малые величины высших порядков малости и учитывая малые углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно записать

$$M_{x_0y_0z_0}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Если учитывать не только повороты звеньев, но и их смещения вдоль осей неподвижной системы координат  $X_0 Y_0 Z_0$ , то вектор смещения

$$R_{x_0y_0z_0}(a_0, b_0, c_0) = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $a_0$  – смещение координаты звена вдоль оси  $X_0$ ;

$b_0$  – смещение координаты звена вдоль оси  $Y_0$ ;

$c_0$  – смещение координаты звена вдоль оси  $Z_0$ .

Тогда, с учетом формул (2.2) и (2.3), координаты  $x_0, y_0, z_0$  запишем уравнением в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = M_{x_0y_0z_0}(\alpha, \beta, \gamma) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

В однородных координатах смещения и повороты можно представить в виде следующей матрицы размерностью  $4 \times 4$ :

$$M_{x_0y_0z_0}(a_0, b_0, c_0, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta & a_0 \\ \gamma & 1 & -\alpha & b_0 \\ -\beta & \alpha & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Получим уравнения, описывающие координаты  $x_0, y_0, z_0$  любой точки детали передачи в подвижной системе координат  $X_1 Y_1 Z_1$  с учетом смещений и поворотов относительно неподвижной  $X_0, Y_0, Z_0$  в однородных координатах, представленные в матричном виде

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta & a_0 \\ \gamma & 1 & -\alpha & b_0 \\ -\beta & \alpha & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (-y_1)\gamma + z_1\beta + a_0 \\ x_1\gamma + y_1 + (-z_1)\alpha + b_0 \\ -x_1\beta + y_1\alpha + z_1 + c_0 \\ 0 + 0 + 0 + S \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $S$  – масштабирующий множитель.

Параметр  $S$  можно использовать как коэффициент, изменяющий величину кинематического (точностного) параметра.

Выражения (2.4) и (2.6) дают одинаковую систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - y_1\gamma + z_1\beta + a_0; \\ y_0 = x_1\gamma + y_1 - z_1\alpha + b_0; \\ z_0 = -x_1\beta + y_1\alpha + z_1 + c_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

В краткой форме формулы (2.4) и (2.6) соответственно имеют вид

$$p_{x_0y_0z_0} = T_{3 \times 3} p_{x_1y_1z_1} + R; \quad (2.8)$$

$$p_{x_0y_0z_0S} = T_{4 \times 4} p_{x_1y_1z_1S}, \quad (2.9)$$

где  $p_{x_0y_0z_0}$ ,  $p_{x_0y_0z_0S}$  – координаты точки детали  $p(x_0, y_0, z_0)$  и  $p(x_0, y_0, z_0, S)$ ;

$p_{x_1y_1z_1}$ ,  $p_{x_1y_1z_1S}$  – координаты точки детали  $p(x_1, y_1, z_1)$  и  $p(x_1, y_1, z_1, S)$ ;

$T_{3 \times 3}$ ,  $T_{4 \times 4}$  – матрицы, определяемые по формулам (2.2) и (2.5) соответственно.

Если подвижная система координат звеньев передачи  $X_1 Y_1 Z_1$  только смещена относительно неподвижной  $X_0 Y_0 Z_0$  и не повернута, то координаты точек звеньев относительно  $X_0 Y_0 Z_0$  можно определить по формуле

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = E_3 \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где  $E_3$  – единичная матрица третьего порядка.

Формулу (2.10) можно записать в однородных координатах, используя матрицу четвертого порядка, в виде

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ S \end{bmatrix} = E_4 \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ S \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $E_4$  – единичная матрица четвертого порядка.

Найдем погрешности положения звеньев передачи, возникающие в результате погрешностей изготовления и упругих деформаций, как разность смещенных и повернутых координат точек деталей и их номинальных координат.

Погрешности  $\Delta p$  ( $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ ) от смещений и поворотов в направлении осей  $X_0, Y_0, Z_0$  в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} = M_{x_0 y_0 z_0}(\alpha, \beta, \gamma) \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

При расчете погрешностей положения звеньев в передаче, возникающих при последовательных поворотах и смещениях, например от упругих деформаций, удобнее использовать уравнения в однородных координатах.

Запишем формулу (2.12) в матричном виде в однородных координатах с полной записью матрицы преобразования пространства  $M_{x_0 y_0 z_0}(\alpha, \beta, \gamma)$  и смещения  $R_{x_0 y_0 z_0}(a_0, b_0, c_0)$ :

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta & a_0 \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta & b_0 \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ S \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Учитывая малые углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , формула (2.12) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta & a_0 \\ \gamma & 1 & -\alpha & b_0 \\ -\beta & \alpha & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

или

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & + & (-y_1)\gamma & + & z_1\beta & + & a_0 \\ x_1\gamma & + & y_1 & + & (-z_1)\alpha & + & b_0 \\ -x_1\beta & + & y_1\alpha & + & z_1 & + & c_0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Координаты  $p_{x_1, y_1, z_1}$  подвижного звена механической передачи можно описать зависимостью

$$p_{x_1, y_1, z_1} = f(\rho, \theta, \psi, \varphi, h), \quad (2.16)$$

где  $f(\rho, \theta, \psi, \varphi, h)$  – функция от угла поворота, определяющая закон движения точки детали механической передачи;

$\rho$  – радиус-вектор точки контакта деталей зацепления;

$\theta$  – угол поворота звена передачи при его вращении вокруг оси  $Z_0$ ;

$\psi$  – угол поворота звена передачи при его вращении вокруг оси  $Y_0$ ;

$\varphi$  – угол поворота звена передачи при его вращении вокруг оси  $X_0$ ;

$h$  – перемещение вдоль координатной оси.

Если вращение звена передачи происходит в плоскости  $Y_0 Z_0$  вокруг оси  $X_0$ , то координаты точек контакта сопрягаемых деталей зацепления определяются по формулам

$$\begin{cases} x_1 = f(h); \\ y_1 = f(\rho, \theta) \cos \theta; \\ z_1 = f(\rho, \theta) \sin \theta. \end{cases} \quad (2.17)$$

Подставив координаты системы уравнений (2.17) в уравнение (2.15), получим преобразованное уравнение в плоскости  $Y_0 Z_0$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(h) & - & f(\rho, \theta) \cdot \cos \theta \cdot \gamma & + & f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta \cdot \beta & + & a_0 \\ f(h) \cdot \gamma & + & f(\rho, \theta) \cdot \cos \theta & - & f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta \cdot \alpha & + & b_0 \\ -f(h) \cdot \beta & + & f(\rho, \theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \alpha & + & f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta & + & c_0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(h) \\ f(\rho, \theta) \cdot \cos \theta \\ f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Из уравнения (2.18) выведем формулы для расчета погрешностей, характеризующих смещения и повороты деталей механической передачи в направлении трех координатных осей в плоскости  $Y_0 Z_0$ :

$$\Delta x_0 = -f(\rho, \theta) \cdot \cos \theta \cdot \gamma + f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta \cdot \beta + a_0; \quad (2.19)$$

$$\Delta y_0 = f(h) \cdot \gamma - f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta \cdot \alpha + b_0; \quad (2.20)$$

$$\Delta z_0 = -f(h) \cdot \beta + f(\rho, \theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \alpha + c_0. \quad (2.21)$$

Если вращение звена передачи происходит в плоскости  $X_0 Z_0$  вокруг оси  $Y_0$ , то координаты точек контакта сопрягаемых деталей зацепления определяются по формулам

$$\begin{cases} x_1 = f(\rho, \psi) \cos \psi; \\ y_1 = f(h); \\ z_1 = f(\rho, \psi) \sin \psi. \end{cases} \quad (2.22)$$

Подставив координаты системы уравнений (2.22) в уравнение (2.15), получим преобразованное уравнение в плоскости  $X_0 Z_0$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi & - & f(h) \cdot \gamma & + & f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \beta & + & a_0 \\ f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi \cdot \gamma & + & f(h) & - & f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \alpha & + & b_0 \\ -f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi \cdot \beta & + & f(h) \cdot \alpha & + & f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi & + & c_0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi \\ f(h) \\ f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Из уравнения (2.23) выведем формулы для расчета погрешностей, характеризующих смещения и повороты деталей механической передачи в направлении трех координатных осей в плоскости  $X_0 Z_0$ :

$$\Delta x_0 = -f(h) \cdot \gamma + f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \beta + a_0; \quad (2.24)$$

$$\Delta y_0 = f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi \cdot \gamma - f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \alpha + b_0; \quad (2.25)$$

$$\Delta z_0 = -f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi \cdot \beta + f(h) \cdot \alpha + c_0. \quad (2.26)$$

Если вращение звена передачи происходит в плоскости  $X_0 Y_0$  вокруг оси  $Z_0$ , то координаты точек контакта сопрягаемых деталей зацепления определяются по формулам

$$\begin{cases} x_1 = f(\rho, \varphi) \cos \varphi; \\ y_1 = f(\rho, \varphi) \sin \varphi; \\ z_1 = f(h). \end{cases} \quad (2.27)$$

Подставив координаты системы уравнений (2.27) в уравнение (2.15), получим преобразованное уравнение в плоскости  $X_0 Y_0$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi & - & f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \gamma & + & f(h) \cdot \beta & + & a_0 \\ f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \gamma & + & f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi & - & f(h) \cdot \alpha & + & b_0 \\ -f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \beta & + & f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \alpha & + & f(h) & + & c_0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi \\ f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi \\ f(h) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Из уравнения (2.28) выведем формулы для расчета погрешностей, характеризующих смещения и повороты деталей механической передачи в направлении трех координатных осей в плоскости  $X_0 Y_0$ :

$$\Delta x_0 = -f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \gamma + f(h) \cdot \beta + a_0; \quad (2.29)$$

$$\Delta y_0 = f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \gamma - f(h) \cdot \alpha + b_0; \quad (2.30)$$

$$\Delta z_0 = -f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \beta + f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \alpha + c_0. \quad (2.31)$$

При сборке механических передач возникают погрешности, выражающиеся в последовательных смещениях и поворотах системы координат соединяемых деталей  $X_1 Y_1 Z_1$  относительно выбранной неподвижной системы координат  $X_0 Y_0 Z_0$ . Эти погрешности приводят к отклонению положения собранных деталей в передаче от их номинального положения и проявляются как кинематические погрешности при вращении. Используя рассмотренные матричные методы, можно определить координаты деталей при последовательном изменении их положения в передаче при сборке, а также погрешности от смещений и поворотов этих деталей. При этом можно применить матрицы преобразования пространства третьего и четвертого порядков. Рассмотрим изменение положения некоторой детали передачи в следующей последовательности: деталь повернута вокруг оси  $X_0$ , смещена вдоль оси  $X_0$ , смещена вдоль оси  $Z_0$ , повернута вокруг оси  $Z_0$ . Найдем координаты заданного преобразования, используя матрицы  $3 \times 3$  и  $3 \times 1$ . Тогда

$$p'_{x_0 y_0 z_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{bmatrix}; \quad (2.32)$$

$$p_{x_0 y_0 z_0} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times p'_{x_0 y_0 z_0}. \quad (2.33)$$

Решив уравнения (2.32) и (2.33), получим следующие координаты точек детали:

$$x_0 = x_1 \cos \gamma + a_0 \cos \gamma - y_1 \sin \gamma \cos \alpha + z_1 \sin \gamma \sin \alpha; \quad (2.34)$$

$$y_0 = x_1 \sin \gamma + a_0 \sin \gamma + y_1 \cos \gamma \cos \alpha - z_1 \cos \gamma \sin \alpha; \quad (2.35)$$

$$z_0 = y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha + c_0. \quad (2.36)$$

Найдем координаты детали при вышезаданных условиях, используя матрицы  $4 \times 4$  и  $4 \times 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 M_{x_0 y_0 z_0} &= M_{z_0, \gamma} R_{z_0, c_0} R_{x_0, \alpha} M_{x_0, \alpha} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \alpha & a_0 \cos \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \gamma & a_0 \sin \gamma \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

$$p_{x_0 y_0 z_0} = M_{x_0 y_0 z_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Решив уравнение (2.28), получим те же формулы (2.34)–(2.36).

Кинематическую погрешность механической передачи (погрешность угла поворота ведомого звена) можно определить исходя из вышеполученных формул.

Тогда в плоскости  $Y_0 Z_0$  при вращении звеньев передачи вокруг оси  $X_0$  и повороте на угол  $\theta$ , исходя из формул (2.7) и (2.18), кинематическую погрешность передачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi_{X_0, \theta}^{Y_0 Z_0} &= \theta_{cn} - \theta_n = \operatorname{arctg} \frac{z_0}{y_0} - f(\rho) = \\
 &= \operatorname{arctg} \frac{-f(h) \cdot \beta + f(\rho, \theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \alpha + f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta + c_0}{f(h) \cdot \gamma + f(\rho, \theta) \cdot \cos \theta - f(\rho, \theta) \cdot \sin \theta \cdot \alpha + b_0} - f(\rho), \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

где  $\theta_{cn}$  – угол поворота ведомого звена передачи, учитывающий смещения и повороты ее основных деталей при вращении вокруг оси  $X_0$  в плоскости  $Y_0 Z_0$ ;

$\theta_n$  – номинальный угол поворота ведомого звена передачи при его вращении вокруг оси  $X_0$  в плоскости  $Y_0 Z_0$ ;

$f(\rho)$  – функция номинального угла поворота  $\theta_n$  звена передачи от радиус-вектора  $\rho$ ,  $\theta_n = f(\rho)$ .

В плоскости  $X_0 Z_0$  при вращении звеньев передачи вокруг оси  $Y_0$  и повороте на угол  $\psi$ , исходя из формул (2.7) и (2.23), кинематическую погрешность передачи можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{Y_0, \psi}^{X_0 Z_0} &= \psi_{cn} - \psi_n = \arctg \frac{z_0}{x_0} - f(\rho) = \\ &= \arctg \frac{-f(\rho, \psi) \cdot \cos \psi \cdot \beta + f(h) \cdot \alpha + f(\rho, \psi) \sin \psi + c_0}{f(\rho, \psi) \cos \psi - f(h) \cdot \gamma + f(\rho, \psi) \cdot \sin \psi \cdot \beta + a_0} - f(\rho). \end{aligned} \quad (2.40)$$

В плоскости  $X_0 Y_0$  при вращении звеньев передачи вокруг оси  $Z_0$  и повороте на угол  $\varphi$ , исходя из формул (2.7) и (2.28), кинематическую погрешность передачи можно представить как

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{Z_0, \varphi}^{X_0 Y_0} &= \varphi_{cn} - \varphi_n = \arctg \frac{y_0}{x_0} - f(\rho) = \\ &= \arctg \frac{f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \gamma + f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi - f(h) \cdot \alpha + b_0}{f(\rho, \varphi) \cdot \cos \varphi - f(\rho, \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \gamma + f(h) \cdot \beta + a_0} - f(\rho). \end{aligned} \quad (2.41)$$

## ***2.2 Метод расчета и математическая модель кинематических погрешностей механических передач на основе спектрального анализа***

Кинематическую погрешность механической передачи можно представить периодической функцией с периодом  $T = 2\pi$  в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + \\ &+ a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned} \quad (2.42)$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, a_n, b_n$  – коэффициенты тригонометрического ряда.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad (2.43)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (2.44)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (2.45)$$

где  $n$  – принадлежит множеству натуральных чисел,  $n \in N$ ;

$x$  – любая переменная.

Если функция имеет период  $T = 2l$ , где  $l$  – произвольное положительное число, то ряд Фурье можно представить в следующем виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right); \quad (2.46)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad (2.47)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad (2.48)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.49)$$

В формулах (2.42) и (2.46) гармоники  $n$ -го порядка

$$\begin{cases} a_n \cos nx + b_n \sin nx; \\ a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Учитывая зависимости

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}; \quad \sin \varphi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad (2.51)$$

подставим формулы (2.51) в одну из формул (2.50) и получим  $n$ -ю гармонику в виде

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n = (\cos \varphi_n \cos nx - \sin \varphi_n \sin nx) = A_n \cos(nx + \varphi_n). \quad (2.52)$$

Исходя из соотношений (2.52), ряд Фурье можно записать в эквивалентной форме в виде суммы простых периодических функций-гармоник:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx + \varphi_n); \\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(nx + \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \quad (2.53)$$

где  $A_n$  – амплитуда  $n$ -й гармоники;

$\varphi_n$  – начальная фаза  $n$ -й гармоники;

$n$  – номер гармоники.

Учитывая формулы (2.53), математическую модель кинематической погрешности механической передачи можно представить в виде функции в системе уравнений с  $n$  числом гармоник, где каждая гармоника характеризует определенную кинематическую погрешность передачи. Система уравнений функций кинематических погрешностей с  $i$ -м числом значений и  $n$ -м числом гармоник

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = A_1 \cos(1\varphi_i + \Psi_1); \\ \Delta\varphi_2 = A_2 \cos(2\varphi_i + \Psi_2); \\ \Delta\varphi_3 = A_3 \cos(3\varphi_i + \Psi_3); \\ \dots \\ \Delta\varphi_n = A_n \cos(n\varphi_i + \Psi_n), \end{cases} \quad (2.54)$$

где  $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\varphi_n$  – кинематические погрешности передачи, характеризующиеся  $n$ -й функцией-гармоникой;

$A_1, A_2, A_3, A_n$  – средние амплитуды, соответствующие номерам гармоник;

1, 2, 3,  $n$  – номера гармоник;

$\varphi_i$  – угол поворота звена передачи;

$i$  – номер значения кинематической погрешности в зависимости от угла поворота;

$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_n$  – средние фазовые углы (начальные фазы), соответствующие номерам гармоник.

Чтобы определить  $i$  значений кинематической погрешности передачи, необходимо сложить соответствующие  $i$ -е номера значений  $\Delta\varphi_{in}$  системы уравнений (2.54). Зная значения  $A_n$ , можно построить амплитудно-частотный спектр; зная значения  $\varphi_n$ , можно построить фазочастотный спектр.

На основе уравнения (2.54) кинематическую погрешность, амплитуды гармоник и начальные фазы можно представить в матричном виде  $\Delta\varphi_{in}(A_n, \varphi_n) = M_{in}$ .

Матрица, составленная из значений кинематических погрешностей,

$$M(\Delta\varphi_{in}) = \begin{pmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} & \dots & \Delta\varphi_{1n} \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} & \dots & \Delta\varphi_{2n} \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} & \dots & \Delta\varphi_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\varphi_{i1} & \Delta\varphi_{i2} & \Delta\varphi_{i3} & \dots & \Delta\varphi_{in} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cos(\varphi_1 + \Psi_1) & A_2 \cos(2\varphi_1 + \Psi_2) & A_3 \cos(3\varphi_1 + \Psi_3) & \dots & A_n \cos(n\varphi_1 + \Psi_n) \\ A_1 \cos(\varphi_2 + \Psi_1) & A_2 \cos(2\varphi_2 + \Psi_2) & A_3 \cos(3\varphi_2 + \Psi_3) & \dots & A_n \cos(n\varphi_2 + \Psi_n) \\ A_1 \cos(\varphi_3 + \Psi_1) & A_2 \cos(2\varphi_3 + \Psi_2) & A_3 \cos(3\varphi_3 + \Psi_3) & \dots & A_n \cos(n\varphi_3 + \Psi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 \cos(\varphi_i + \Psi_1) & A_2 \cos(2\varphi_i + \Psi_2) & A_3 \cos(3\varphi_i + \Psi_3) & \dots & A_n \cos(n\varphi_i + \Psi_n) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

В уравнении (2.55) строки  $i$ -й матрицы представляют значения кинематических погрешностей передачи от первой до  $n$ -й гармоники; столбцы  $n$ -й матрицы представляют  $i$ -е значения кинематических погрешностей для каждой гармоники.

Если принять  $c_n$  как текущее значение амплитуды  $i$ -го значения кинематической погрешности и рассчитывать  $c_n$  по формуле (2.51) так же, как  $A_n$ , то матрица, представляющая значения амплитуд гармоник, имеет вид

$$\begin{aligned}
M(c_{in}) &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2} & \sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2} & \sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2} & \dots & \sqrt{a_{1n}^2 + b_{1n}^2} \\ \sqrt{a_{21}^2 + b_{21}^2} & \sqrt{a_{22}^2 + b_{22}^2} & \sqrt{a_{23}^2 + b_{23}^2} & \dots & \sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2} \\ \sqrt{a_{31}^2 + b_{31}^2} & \sqrt{a_{32}^2 + b_{32}^2} & \sqrt{a_{33}^2 + b_{33}^2} & \dots & \sqrt{a_{3n}^2 + b_{3n}^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{a_{i1}^2 + b_{i1}^2} & \sqrt{a_{i2}^2 + b_{i2}^2} & \sqrt{a_{i3}^2 + b_{i3}^2} & \dots & \sqrt{a_{in}^2 + b_{in}^2} \end{pmatrix}. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Строки  $i$ -й матрицы (2.56) представляют значения текущих амплитуд от первой до  $n$ -й гармоники; столбцы  $n$ -й матрицы представляют  $i$ -е значения текущих амплитуд для каждой гармоники от первой до  $n$ -й.

Матрица начальных углов поворота  $\psi_{in}$ , характеризующих начальные фазы, с учетом формул (2.51), построена по аналогии матрицы (2.56), если принять  $\psi_{in}$  как текущее значение начального угла поворота для каждого  $i$ -го значения  $n$ -й гармоники кинематической погрешности:

$$\begin{aligned}
M(\psi_{in}) &= \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \dots & \Psi_{1n} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \dots & \Psi_{2n} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \dots & \Psi_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{i1} & \Psi_{i2} & \Psi_{i3} & \dots & \Psi_{in} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \arccos \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2}} & \arccos \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}} & \arccos \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2}} & \dots & \arccos \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{1n}^2 + b_{1n}^2}} \\ \arccos \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{21}^2 + b_{21}^2}} & \arccos \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + b_{22}^2}} & \arccos \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{23}^2 + b_{23}^2}} & \dots & \arccos \frac{a_{2n}}{\sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2}} \\ \arccos \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{31}^2 + b_{31}^2}} & \arccos \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{32}^2 + b_{32}^2}} & \arccos \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{33}^2 + b_{33}^2}} & \dots & \arccos \frac{a_{3n}}{\sqrt{a_{3n}^2 + b_{3n}^2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \arccos \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{i1}^2 + b_{i1}^2}} & \arccos \frac{a_{i2}}{\sqrt{a_{i2}^2 + b_{i2}^2}} & \arccos \frac{a_{i3}}{\sqrt{a_{i3}^2 + b_{i3}^2}} & \dots & \arccos \frac{a_{in}}{\sqrt{a_{in}^2 + b_{in}^2}} \end{pmatrix}. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Строки  $i$ -й матрицы (2.57) представляют значения текущих фазовых углов (начальных фаз) от первой до  $n$ -й гармоники; столбцы  $n$ -й матрицы представляют  $i$ -е значения текущих фазовых углов для каждой гармоники от первой до  $n$ -й.

Значения функции кинематических погрешностей передачи  $f(\varphi)$  получим умножением матрицы (2.55) на вектор-столбец (столбцовую матрицу)  $i \times 1$ , состоящий из коэффициентов  $k_i$ , позволяющих изменять текущие или фильтровать случайные  $i$ -е значения. Тогда

$$\begin{pmatrix} f(\varphi_1) \\ f(\varphi_2) \\ f(\varphi_3) \\ \dots \\ f(\varphi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} & \dots & \Delta\varphi_{1n} \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} & \dots & \Delta\varphi_{2n} \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} & \dots & \Delta\varphi_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\varphi_{i1} & \Delta\varphi_{i2} & \Delta\varphi_{i3} & \dots & \Delta\varphi_{in} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ k_i \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Получим математические зависимости из (2.55) и (2.58) для расчета кинематических погрешностей передач

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\varphi_1) = A_1 \cos(\varphi_1 + \Psi_1)k_1 + A_2 \cos(2\varphi_1 + \Psi_2)k_2 + \\ + A_3 \cos(\varphi_1 + \Psi_3)k_3 + \dots + A_n \cos(\varphi_1 + \Psi_n)k_n; \\ f(\varphi_2) = A_1 \cos(\varphi_2 + \Psi_1)k_1 + A_2 \cos(2\varphi_2 + \Psi_2)k_2 + \\ + A_3 \cos(\varphi_2 + \Psi_3)k_3 + \dots + A_n \cos(\varphi_2 + \Psi_n)k_n; \\ f(\varphi_3) = A_1 \cos(\varphi_3 + \Psi_1)k_1 + A_2 \cos(2\varphi_3 + \Psi_2)k_2 + \\ + A_3 \cos(\varphi_3 + \Psi_3)k_3 + \dots + A_n \cos(\varphi_3 + \Psi_n)k_n; \\ \dots \\ f(\varphi_i) = A_1 \cos(\varphi_i + \Psi_1)k_1 + A_2 \cos(2\varphi_i + \Psi_2)k_2 + \\ + A_3 \cos(\varphi_i + \Psi_3)k_3 + \dots + A_n \cos(\varphi_i + \Psi_n)k_n. \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Из системы уравнений (2.59) амплитуды  $A_n$  и начальные фазы  $\Psi_n$  определяются умножением вектора-столбца (строчной матрицы)  $1 \times n$  на матрицы (2.56) и (2.57). Вектор-столбец состоит из элементов  $2k_n/m$ , где  $m$  – общее количество  $i$ -х значений кинематической погрешности, а  $k_n$  – коэффициенты, изменяющие  $n$ -е значения или фильтрующие случайные значения амплитуд. Значения амплитуд гармоник определим из выражений

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2k_1}{m} & \frac{2k_2}{m} & \frac{2k_3}{m} & \dots & \frac{2k_n}{m} \end{pmatrix} \times M(c_{in}) = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2k_1}{m} & \frac{2k_2}{m} & \frac{2k_3}{m} & \dots & \frac{2k_n}{m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \end{pmatrix}; \quad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2k_1}{m} \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2} + \frac{2k_2}{m} \sqrt{a_{21}^2 + b_{21}^2} + \frac{2k_3}{m} \sqrt{a_{31}^2 + b_{31}^2} + \dots + \frac{2k_n}{m} \sqrt{a_{i1}^2 + b_{i1}^2}; \\ A_2 = \frac{2k_1}{m} \sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2} + \frac{2k_2}{m} \sqrt{a_{22}^2 + b_{22}^2} + \frac{2k_3}{m} \sqrt{a_{32}^2 + b_{32}^2} + \dots + \frac{2k_n}{m} \sqrt{a_{i2}^2 + b_{i2}^2}; \\ A_3 = \frac{2k_1}{m} \sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2} + \frac{2k_2}{m} \sqrt{a_{23}^2 + b_{23}^2} + \frac{2k_3}{m} \sqrt{a_{33}^2 + b_{33}^2} + \dots + \frac{2k_n}{m} \sqrt{a_{i3}^2 + b_{i3}^2}; \\ \dots \\ A_n = \frac{2k_1}{m} \sqrt{a_{1n}^2 + b_{1n}^2} + \frac{2k_2}{m} \sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2} + \frac{2k_3}{m} \sqrt{a_{3n}^2 + b_{3n}^2} + \dots + \frac{2k_n}{m} \sqrt{a_{in}^2 + b_{in}^2}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Значения начальных фаз гармоник определим из выражений

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \dots \\ \Psi_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2k_1}{m} & \frac{2k_2}{m} & \frac{2k_3}{m} & \dots & \frac{2k_n}{m} \end{pmatrix} \times M(\psi_{in}) = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2k_1}{m} & \frac{2k_2}{m} & \frac{2k_3}{m} & \dots & \frac{2k_n}{m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \dots & \Psi_{1n} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \dots & \Psi_{2n} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \dots & \Psi_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{i1} & \Psi_{i2} & \Psi_{i3} & \dots & \Psi_{in} \end{pmatrix}; \quad (2.62)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Psi_1 = \frac{2k_1}{m} \arccos \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2}} + \frac{2k_2}{m} \arccos \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{21}^2 + b_{21}^2}} + \\
 + \frac{2k_3}{m} \arccos \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{31}^2 + b_{31}^2}} + \dots + \frac{2k_n}{m} \arccos \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{i1}^2 + b_{i1}^2}}; \\
 \Psi_2 = \frac{2k_1}{m} \arccos \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}} + \frac{2k_2}{m} \arccos \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + b_{22}^2}} + \\
 + \frac{2k_3}{m} \arccos \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{32}^2 + b_{32}^2}} + \dots + \frac{2k_n}{m} \arccos \frac{a_{i2}}{\sqrt{a_{i2}^2 + b_{i2}^2}}; \\
 \Psi_3 = \frac{2k_1}{m} \arccos \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2}} + \frac{2k_2}{m} \arccos \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{23}^2 + b_{23}^2}} + \\
 + \frac{2k_3}{m} \arccos \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{33}^2 + b_{33}^2}} + \dots + \frac{2k_n}{m} \arccos \frac{a_{i3}}{\sqrt{a_{i3}^2 + b_{i3}^2}}; \\
 \dots \\
 \Psi_n = \frac{2k_1}{m} \arccos \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{1n}^2 + b_{1n}^2}} + \frac{2k_2}{m} \arccos \frac{a_{2n}}{\sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2}} + \\
 + \frac{2k_3}{m} \arccos \frac{a_{3n}}{\sqrt{a_{3n}^2 + b_{3n}^2}} + \dots + \frac{2k_n}{m} \arccos \frac{a_{in}}{\sqrt{a_{in}^2 + b_{in}^2}}.
 \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Формулы (2.54)–(2.63) описывают математическую модель кинематических погрешностей механических передач.

### ***2.3 Преобразование уравнений кривых для проектирования многопериодных дорожек***

В зацеплении планетарных передач с телами качения используются беговые дорожки, построенные на основе периодических кривых, по которым перемещаются оси вращения сателлитов. При проектировании дорожек могут использоваться любые кривые. Наиболее целесообразно и эффективно, на основе проведенных исследований, применять четыре вида известных кривых: смещенную окружность, синусоиду, циклоиду и спираль Архимеда [3, 4, 27]. На основе уравнений известных кривых получены математические зависимости, позволяющие получить замкнутые на плоскости периодические кривые с разным числом периодов.

### 2.3.1 Построение смещенной окружности для беговых дорожек.

Уравнение окружности с возможностью ее смещения в декартовых координатах имеет вид

$$(X - A)^2 + (Y - B)^2 = R^2, \quad (2.64)$$

где  $X, Y$  – координаты окружности;

$A$  – смещение вдоль оси  $X$ ;

$B$  – смещение вдоль оси  $Y$ .

Используя формулы перехода из декартовых координат в полярные [3, 4, 27] и решив квадратное уравнение, получим уравнение окружности в полярных координатах с возможностью смещения центра окружности и ее координат вдоль осей  $X$  и  $Y$

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 \varphi - B^2 \cos^2 \varphi \pm A \cdot B \sin 2\varphi \pm A \cos \varphi \pm B \sin \varphi}, \quad (2.65)$$

где  $\rho$  – радиус-вектор точки окружности;

$\varphi$  – полярный угол;

« $\pm$ » – знаки, определяющие смещение окружности вдоль координатных осей  $X$  и  $Y$ .

Формула периодической кривой, построенной на основе смещенной окружности,

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z\varphi - B^2 \cos^2 z\varphi \pm A \cdot B \sin 2z\varphi \pm A \cos z\varphi \pm B \sin z\varphi}, \quad (2.66)$$

где  $z$  – число периодов кривой.

Амплитуда кривой  $C$  определяется по формуле

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (2.67)$$

Если  $z = 1$ , то кривая имеет форму окружности, а расстояние от центра окружности  $O$  до центра вращения  $O_1$  равно амплитуде  $C$ .

Декартовы координаты кривой

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.68)$$

Окружность и ее периодическая кривая, рассчитываемые по формулам (2.65) и (2.66), при смещении в различных направлениях вдоль

осей  $X$  и  $Y$  могут быть описаны радиус-векторами  $\rho_i$  и представлены полученными математическими зависимостями.

Радиус-вектор точки кривой при смещении ее координат в положительных направлениях осей  $OX$  и  $OY$

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z\varphi - B^2 \cos^2 z\varphi + A \cdot B \sin 2z\varphi} + A \cos z\varphi + B \sin z\varphi. \quad (2.69)$$

Радиус-вектор точки кривой при смещении ее координат в положительном направлении оси  $OX$  и отрицательном оси  $OY$

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z\varphi - B^2 \cos^2 z\varphi - A \cdot B \sin 2z\varphi} + A \cos z\varphi - B \sin z\varphi. \quad (2.70)$$

Радиус-вектор точки кривой при смещении ее координат в отрицательном направлении оси  $OX$  и положительном оси  $OY$

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z\varphi - B^2 \cos^2 z\varphi - A \cdot B \sin 2z\varphi} - A \cos z\varphi + B \sin z\varphi. \quad (2.71)$$

Радиус-вектор точки кривой при смещении ее координат в отрицательных направлениях осей  $OX$  и  $OY$

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z\varphi - B^2 \cos^2 z\varphi + A \cdot B \sin 2z\varphi} - A \cos z\varphi - B \sin z\varphi. \quad (2.72)$$

Если нет смещения вдоль оси  $Y$  и  $B = 0$ , то уравнение периодической кривой смещенной окружности имеет вид

$$\rho = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z\varphi} \pm A \cos z\varphi, \quad (2.73)$$

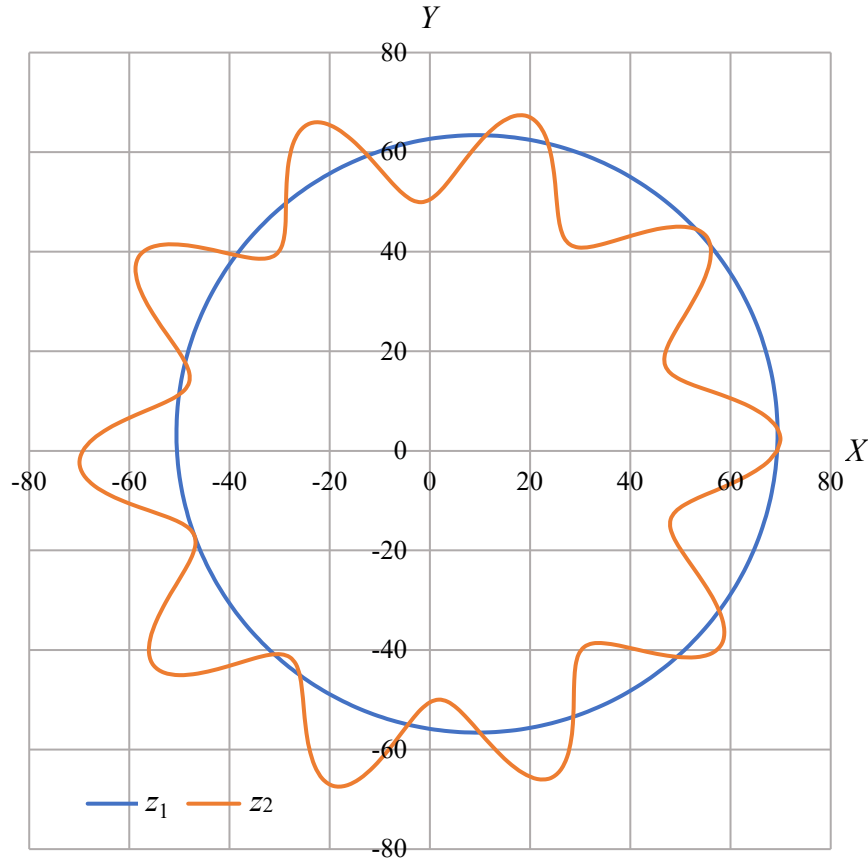
где « $\pm$ » – знаки направления смещения. Знак « $+$ » ставится при смещении в положительном направлении оси  $OX$ ; знак « $-$ » ставится при смещении в отрицательном направлении оси  $OX$ .

Если нет смещения вдоль оси  $X$  и  $A = 0$ , то уравнение периодической кривой смещенной окружности

$$\rho = \sqrt{R^2 - B^2 \cos^2 z\varphi} \pm B \sin z\varphi, \quad (2.74)$$

где « $\pm$ » – знаки направления смещения. Знак « $+$ » ставится при смещении в положительном направлении оси  $OY$ ; знак « $-$ » ставится при смещении в отрицательном направлении оси  $OY$ .

На рисунках 2.1–2.3 показаны кривые смещенной окружности, построенные геометрически по вышепредставленным формулам (2.69)–(2.72). На рисунке 2.1 обозначено:  $z_1$  – окружность с одним периодом;  $z_2$  – окружность с числом периодов, равным десяти.



$z_1$  – однопериодная кривая;  $z_2$  – многопериодная кривая

Рисунок 2.1 – Периодические кривые смещенной окружности при смещении координат в положительных направлениях осей  $OX$  и  $OY$

### 2.3.2 Построение синусоиды для беговых дорожек.

Известно уравнение синусоиды в декартовых координатах

$$y = a + b \sin(cx + d), \quad (2.75)$$

где  $x$ ,  $y$  – координаты кривой;

$a$  – сдвиг кривой по оси  $OY$ ;

$b$  – амплитуда кривой, характеризуется значением по оси  $OY$ ;

$c$  – частота колебаний кривой;

$d$  – сдвиг кривой по оси  $OX$ , характеризует начальную фазу.

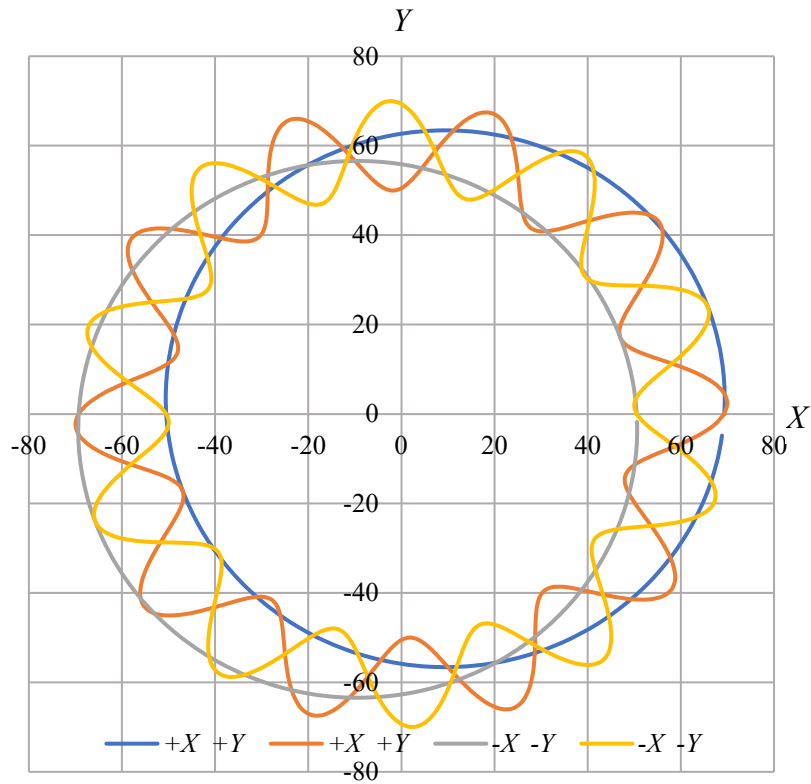


Рисунок 2.2 – Периодические кривые смещенной окружности при смещении координат в направлениях  $+X+Y$  и  $-X-Y$

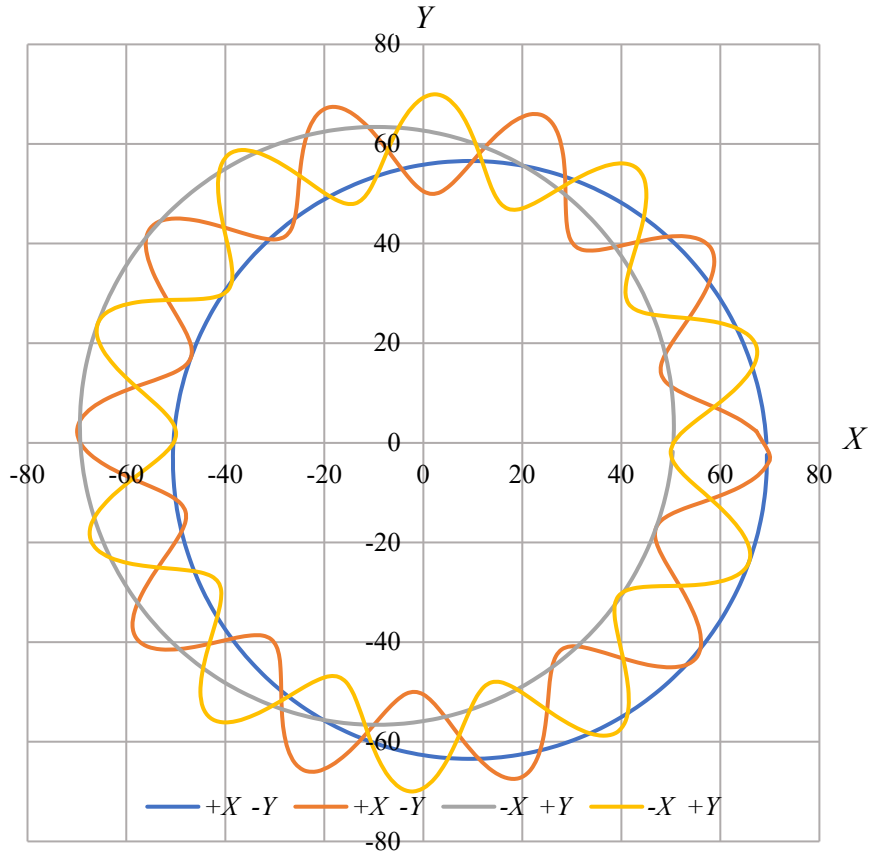


Рисунок 2.3 – Периодические кривые смещенной окружности при смещении координат в направлениях  $+X-Y$  и  $-X+Y$

В полярных координатах уравнение замкнутой на плоскости кривой в виде синусоиды со смещенным центром вдоль оси  $OY$  имеет вид

$$\rho = R + A \sin(z\varphi + \psi), \quad (2.76)$$

где  $\rho$  – радиус-вектор точки кривой синусоиды;

$R$  – средний радиус замкнутой на плоскости кривой синусоиды;

$A$  – амплитуда кривой синусоиды;

$\varphi$  – полярный угол;

$\psi$  – начальная фаза;

$z$  – число периодов кривой.

Из уравнения (2.76) получим полярное уравнение замкнутой на плоскости периодической кривой синусоиды с числом периодов  $z$  и возможностью смещения координат кривой вдоль осей  $OX$  и  $OY$

$$\rho = R_0 + A(1 \pm \sin z\varphi \pm \cos z\varphi), \quad (2.77)$$

где  $R_0$  – минимальный радиус замкнутой на плоскости кривой синусоиды;

« $\pm$ » – знаки направления смещения. Знак «+» ставится при смещении в положительном направлении осей  $OX$  и  $OY$ ; знак « $-$ » ставится при смещении в отрицательном направлении осей  $OX$  и  $OY$ .

Декартовы координаты  $x$  и  $y$  кривой определяются по формуле (2.68).

Радиус-вектор кривой синусоиды со смещениями  $A$  и  $B$  вдоль осей  $OX$  и  $OY$

$$\rho = R_0 + C + A \sin z\varphi + B \cos z\varphi; \quad (2.78)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad R = R_0 + C; \quad (2.79)$$

$$\rho = R + A \sin z\varphi + B \cos z\varphi. \quad (2.80)$$

На рисунках 2.4 и 2.5 представлены графики однопериодной и многопериодной кривых синусоиды с  $z_1 = 1$  и  $z_2 = 10$  со смещением координат в направлении осей  $OX$  и  $OY$ .

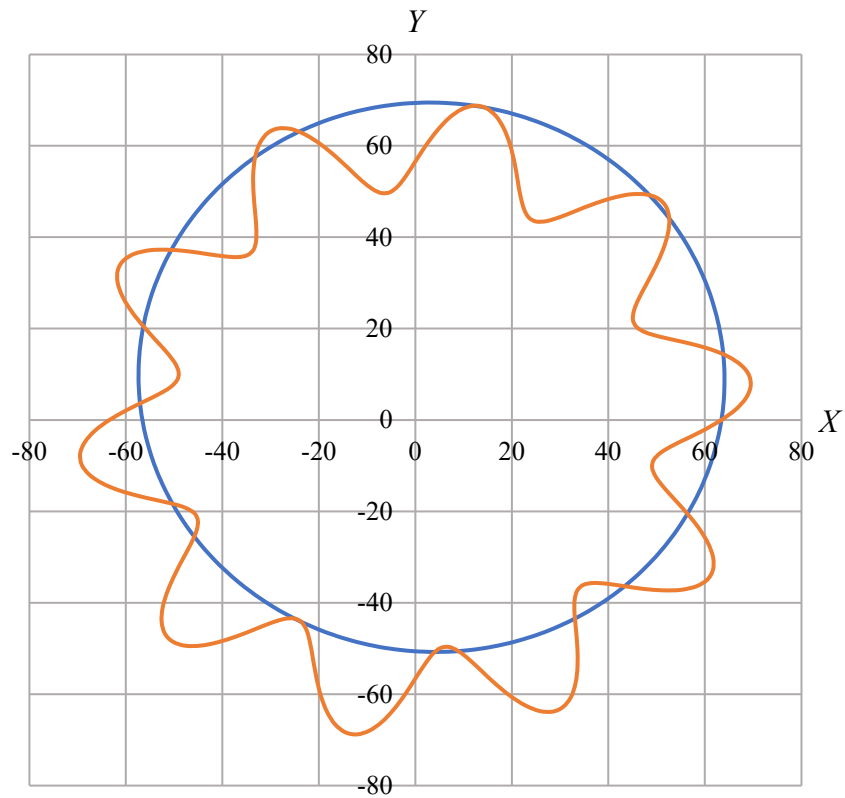


Рисунок 2.4 – Периодические кривые синусоиды при смещении координат в направлениях  $+X+Y$

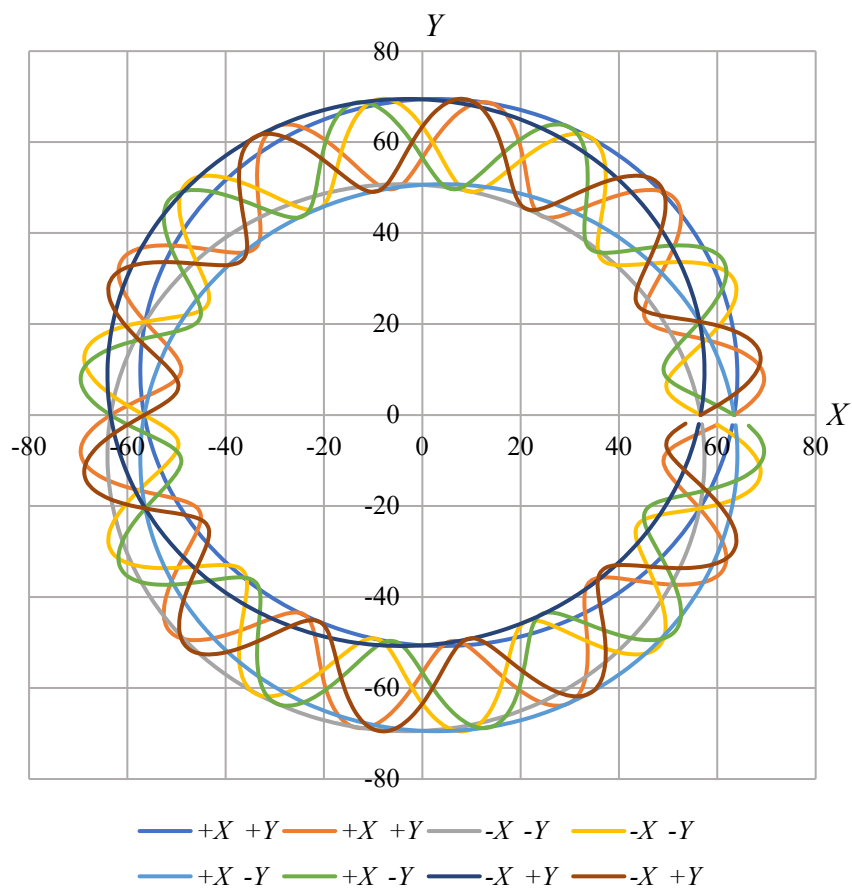


Рисунок 2.5 – Периодические кривые синусоиды при смещении координат в направлении осей  $OX$  и  $OY$

### 2.3.3 Построение циклоиды для беговых дорожек.

Уравнение восходящей ветви однопериодной кривой циклоиды в полярных координатах имеет вид [3]

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi} \varphi_i - \frac{A}{\pi} \sin 2\varphi_i, \quad (2.81)$$

где  $R_0$  – минимальный радиус замкнутой на плоскости кривой циклоиды;

$A$  – амплитуда кривой циклоиды.

Для построения замкнутой на плоскости восходящей ветви периодической кривой циклоиды по формуле (2.81) выведены зависимости

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 + \varphi_{i-1} + \Delta\varphi; \\ \varphi_0 = 0; \\ \Delta\varphi = \frac{\pi}{180q}; \\ 0 < \varphi_i \leq \pi; \\ 0 < \varphi_{i-1} \leq \pi, \end{cases} \quad (2.82)$$

где  $\varphi_i$  – текущее значение угла с накоплением;

$\varphi_0$  – начальный угол отсчета;

$\varphi_{i-1}$  – предыдущее значение угла с накоплением;

$\Delta\varphi$  – угловой шаг (угловое приращение);

$q$  – любое рациональное число.

Уравнение нисходящей ветви однопериодной кривой циклоиды в полярных координатах

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi} (2\pi - \varphi_i) - \frac{A}{\pi} \sin(2(2\pi - \varphi_i)). \quad (2.83)$$

Для построения нисходящей ветви циклоиды по формуле (2.83) выведены зависимости

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 + \varphi_{i-1} + \Delta\varphi; \\ \varphi_0 = \pi; \\ \Delta\varphi = \frac{\pi}{180q}; \\ \pi < \varphi_i \leq 2\pi; \\ 0 < \varphi_{i-1} \leq \pi. \end{cases} \quad (2.84)$$

Подставив значения (2.84) в уравнение (2.83), получим

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi}(\pi - \varphi_{i-1} - \Delta\varphi) - \frac{A}{\pi} \sin(2(\pi - \varphi_{i-1} - \Delta\varphi)). \quad (2.85)$$

Для восходящей и нисходящей ветвей декартовы координаты  $x$  и  $y$  замкнутой на плоскости периодической кривой циклоиды определяются по формуле (2.68).

Из уравнения (2.77) получены уравнение восходящей ветви многопериодной кривой циклоиды в полярных координатах и математические зависимости для ее построения.

Уравнение имеет вид

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi} z_2 \varphi_i - \frac{A}{\pi} \sin 2z_2 \theta_i, \quad (2.86)$$

где  $z_2$  – число периодов кривой,  $z_2 > 1$ .

Математические зависимости

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 + \varphi_{i-1} + \Delta\varphi; \\ \theta_i = \theta_0 + \theta_{i-1} + \Delta\theta; \\ \varphi_0 = 0; \quad \theta_0 = 0; \\ \Delta\varphi = \frac{\pi}{180q}; \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{180q}; \\ 0 < \varphi_i \leq \frac{\pi}{z_2}; \quad 0 < \varphi_{i-1} \leq \frac{\pi}{z_2}; \\ 0 < \theta_i \leq \pi; \quad 0 < \theta_{i-1} \leq \pi. \end{cases} \quad (2.87)$$

Координаты кривой  $x$  и  $y$  определяются по формулам

$$x = \rho \cos \alpha_\varepsilon; \quad y = \rho \sin \alpha_\varepsilon, \quad (2.88)$$

где  $\alpha_\varepsilon$  – полярный угол положения точки восходящей ветви кривой циклоиды.

Угол  $\alpha_\varepsilon$  принимается из ряда

$$\alpha_\varepsilon = z_2, 2z_2, 3z_2, \dots, \pi, 2\pi + z_2, 2\pi + 2z_2, 2\pi + 3z_2, \dots, 3\pi, \dots, 2\pi z_2 - \pi. \quad (2.89)$$

Значение  $z_2$ , равное углу в градусах, переводится в радианы в формуле (2.89). Углы  $\varphi_i$  и  $\theta_i$  периодически изменяются от 0 до  $\pi/z_2$  и от 0 до  $\pi$  соответственно при каждом цикле угла  $\alpha_\varepsilon$  через  $\pi/z_2$  радиан.

Из уравнения (2.83) получены уравнение нисходящей ветви многопериодной кривой циклоиды в полярных координатах и математические зависимости для ее построения.

Уравнение имеет вид

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi}(2\pi - z_2\varphi_i) - \frac{A}{\pi}\sin(2(2\pi - z_2\theta_i)). \quad (2.90)$$

Математические зависимости для построения кривой по уравнению (2.90)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i = \varphi_0 + \varphi_{i-1} + \Delta\varphi; \\ \theta_i = \theta_0 + \theta_{i-1} + \Delta\theta; \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{z_2}; \quad \theta_0 = \pi; \\ \Delta\varphi = \frac{\pi}{180q}; \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{180q}; \\ \frac{\pi}{z_2} < \varphi_i \leq \frac{2\pi}{z_2}; \quad \frac{\pi}{z_2} < \varphi_{i-1} \leq \frac{2\pi}{z_2}; \\ \pi < \theta_i \leq 2\pi; \quad \pi < \theta_{i-1} \leq 2\pi. \end{array} \right. \quad (2.91)$$

Подставим из системы уравнений (2.91)  $\varphi_i$  и  $\theta_i$  в уравнение (2.90).  
Получим

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi}(\pi - z_2\varphi_{i-1} - z_2\Delta\varphi) - \frac{A}{\pi}\sin(2(2\pi - z_2\pi - z_2\theta_{i-1} - z_2\Delta\theta)). \quad (2.92)$$

Координаты  $x$  и  $y$  кривой (2.92) определяются по формулам

$$x = \rho \cos \alpha_n; \quad y = \rho \sin \alpha_n, \quad (2.93)$$

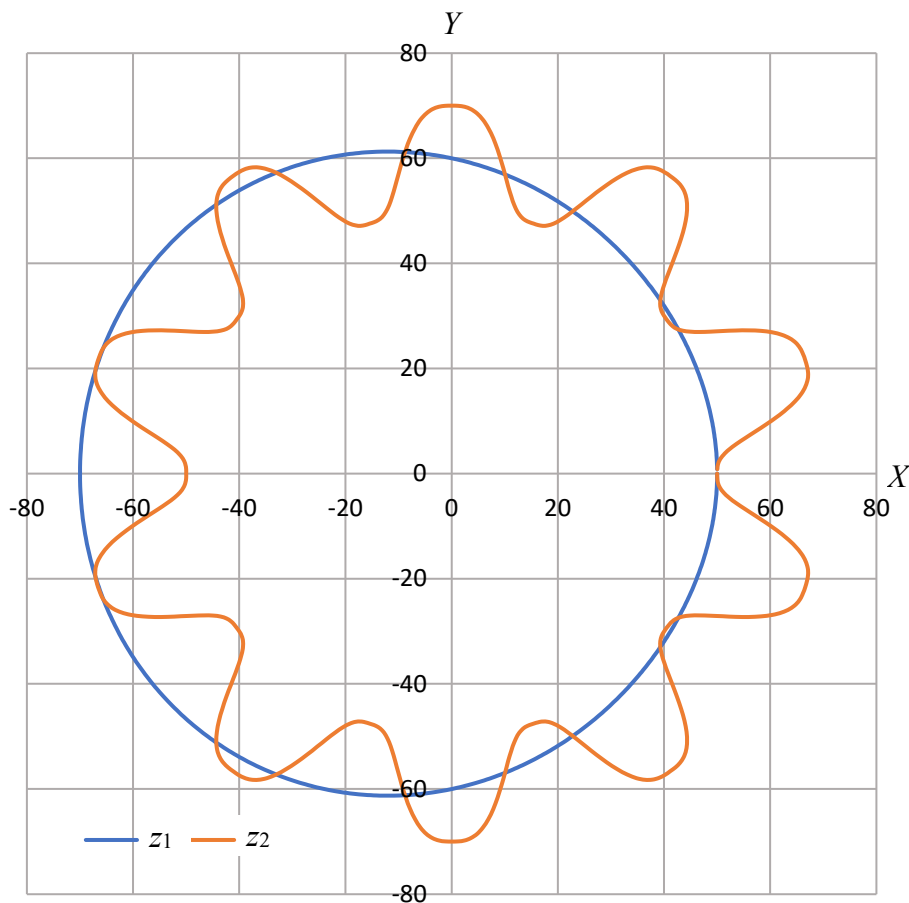
где  $\alpha_n$  – полярный угол положения точки нисходящей ветви кривой циклоиды.

Угол  $\alpha_n$  принимается из ряда

$$\alpha_n = \pi + z_2, \pi + 2z_2, \pi + 3z_2, \dots, 2\pi, 3\pi + z_2, 3\pi + 2z_2, 3\pi + 3z_2, \dots, 4\pi, \dots, 2\pi z_2. \quad (2.94)$$

Значение  $z_2$ , равное углу в градусах, переводится в радианы в формуле (2.94). Углы  $\varphi_i$  и  $\theta_i$  периодически изменяются от  $\pi/z_2$  до  $2\pi/z_2$  и от  $\pi$  до  $2\pi$  соответственно при каждом цикле угла  $\alpha_n$  через  $\pi$  радиан.

На рисунке 2.6 показаны графики однопериодной и многопериодной циклоидальных кривых, построенных на основе математических зависимостей (2.81)–(2.94).



$z_1$  – однопериодная кривая;  $z_2$  – многопериодная кривая

Рисунок 2.6 – Периодические кривые циклоиды

### 2.3.4 Построение спирали Архимеда для беговых дорожек.

Однопериодная замкнутая на плоскости кривая в виде спирали Архимеда, описываемая радиус-вектором в полярных координатах, имеет следующий вид:

– восходящая ветвь

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi}\varphi, \quad (2.95)$$

где  $R_0$  – минимальный радиус замкнутой на плоскости кривой спирали Архимеда;

$A$  – амплитуда кривой спирали Архимеда;

– нисходящая ветвь

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi}(2\pi - \varphi). \quad (2.96)$$

Значение текущего полярного угла

$$0 < \varphi \leq 2\pi. \quad (2.97)$$

Декартовы координаты кривой

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (2.98)$$

Многопериодную замкнутую на плоскости кривую в виде спирали Архимеда можно получить, добавив в уравнения (2.95) и (2.96) число периодов  $z_2 > 1$ . Тогда восходящая и нисходящая ветви имеют вид

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi} z_2 \varphi_i; \quad (2.99)$$

$$\rho = R_0 + \frac{2A}{\pi} (2\pi - z_2 \varphi_i). \quad (2.100)$$

Эту многопериодную кривую можно также получить, используя уравнения однопериодной кривой (2.95) и (2.96).

Для построения восходящей ветви замкнутой на плоскости многопериодной кривой спирали Архимеда на основе уравнения однопериодной кривой используются математические зависимости

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 + \varphi_{i-1} + \Delta\varphi; \\ \varphi_0 = 0; \\ \Delta\varphi = \frac{z_2\pi}{180}; \\ \frac{z_2\pi}{180} \leq \varphi_i \leq \pi. \end{cases} \quad (2.101)$$

Декартовы координаты кривой спирали Архимеда

$$x = \rho \cos\left(\frac{\alpha_\varepsilon}{z_2}\right); \quad y = \rho \sin\left(\frac{\alpha_\varepsilon}{z_2}\right), \quad (2.102)$$

где  $\alpha_\varepsilon$  – полярный угол положения точки восходящей ветви кривой спирали Архимеда при переходе из полярных в декартовы координаты.

Угол  $\alpha_\varepsilon$  определяется по выражению (2.89).

Для построения нисходящей ветви замкнутой на плоскости многопериодной кривой спирали Архимеда на основе уравнения однопериодной кривой используются математические зависимости

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 + \varphi_{i-1} + \Delta\varphi; \\ \varphi_0 = \pi; \\ \Delta\varphi = \frac{z_2\pi}{180}; \\ \pi + \frac{z_2\pi}{180} \leq \varphi_i \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.103)$$

Декартовы координаты кривой спирали Архимеда

$$x = \rho \cos\left(\frac{\alpha_n}{z_2}\right); \quad y = \rho \sin\left(\frac{\alpha_n}{z_2}\right), \quad (2.104)$$

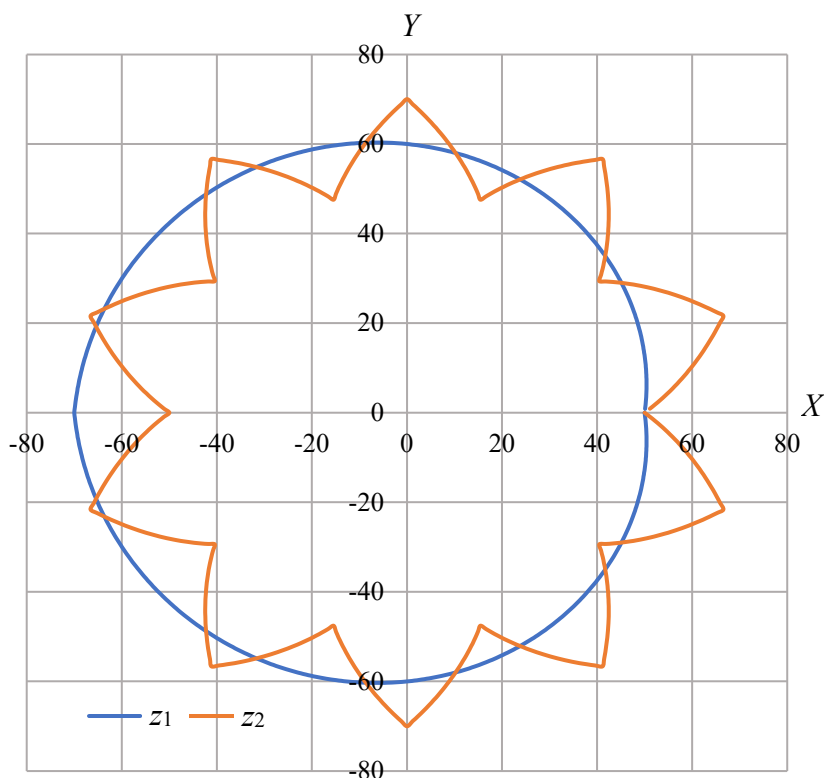
где  $\alpha_n$  – полярный угол положения точки нисходящей ветви кривой спирали Архимеда при переходе из полярных в декартовы координаты.

Угол  $\alpha_n$  определяется по выражению (2.94).

Для восходящей и нисходящей ветвей спирали Архимеда при построении многопериодной кривой углы  $\varphi_i$  и  $\varphi_{i-1}$  периодически изменяются при каждом изменении углов  $\alpha_\varepsilon$  и  $\alpha_n$  через  $\pi/z_2$  радиан.

На рисунке 2.7 показаны графики однопериодной и многопериодной кривых – соединенных восходящих и нисходящих витков спирали Архимеда, построенных на основе математических зависимостей (2.95)–(2.104).

Полученные математические зависимости позволяют геометрически строить и аналитически рассчитывать координаты точек замкнутых на плоскости кривых, задавать любое их положение вдоль координатных осей для кинематического анализа передач с периодическими беговыми дорожками.



$z_1$  – однопериодная кривая;  $z_2$  – многопериодная кривая

Рисунок 2.7 – Периодические кривые спирали Архимеда

## **2.4 Математическая модель кинематических погрешностей механизмов с телами качения с учетом погрешностей изготовления**

### **2.4.1 Обобщенная математическая модель кинематических погрешностей механизмов с телами качения.**

Рассмотрим кинематические погрешности звеньев планетарной передачи с промежуточными телами качения с беговыми дорожками, замкнутыми на плоскости [17, 19, 38]. Для любой такой передачи обозначим: звено 1 – ведущее звено с числом периодов беговой дорожки  $z_1$ ; звено 2 – звено с многопериодной дорожкой с числом периодов  $z_2$ ; звено 3 – водило-сепаратор;  $z_2 > z_1$ .

Кинематические погрешности передач удобно связать с геометрическими параметрами беговых дорожек, находящихся в зацеплении с сателлитами.

Ведущее звено имеет кинематические погрешности, связанные с погрешностями (допусками) изготовления среднего радиуса  $R$  и амплитуд  $A$  и  $B$  беговой дорожки с числом периодов  $z_1$ , при повороте на номинальный угол  $\varphi_{in}$ . Номинальный радиус-вектор (без погрешностей), описывающий положение точек кривой беговой дорожки ведущего звена для любой передачи,

$$\rho_{1n} = f(R, A, B, z_1, \varphi_n). \quad (2.105)$$

Введем погрешности изготовления для параметров  $R$ ,  $A$ ,  $B$  в зависимость (2.105). Тогда радиус-вектор  $\rho_{1n}$  для ведущего звена с погрешностями представляется выражением

$$\rho_{1n} = f((R + \delta_1), (A + \delta_2), (B + \delta_3), z_1, \varphi). \quad (2.106)$$

Из формулы (2.105) найдем угол  $\varphi = f(R, A, B, z_1, \rho_{1n})$ , с учетом радиус-вектора  $\rho_{1n}$  с погрешностями  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , и обозначим этот угол  $\varphi_{1n}$ . Угол  $\varphi_{1n}$  не равен номинальному углу  $\varphi_{in}$ . Радиус-векторы  $\rho_{1n}$  и  $\rho_{1n}$  описывают кривую беговой дорожки и при этом находятся в разных угловых положениях (имеют разные углы поворота). Кинематическую погрешность ведущего звена от погрешностей параметров  $R$ ,  $A$ ,  $B$  для  $i$ -го углового положения определим по формуле

$$\Delta\varphi(R, A, B)_{1i} = \varphi_{1ni} - \varphi_{1ni}. \quad (2.107)$$

На рисунке 2.8 представлена схема формирования кинематической погрешности передачи от погрешностей среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  ведущего звена.

На схеме (см. рисунок 2.8) радиус-вектор  $\rho_{1n}$ , описывающий кривую 3, с погрешностями  $\delta_1$  и  $\delta_2$  меньше номинального радиус-вектора  $\rho_{1n}$ , описывающего кривую 1, при одинаковом угловом положении  $\varphi = 0$ . Если повернуть конец радиус-вектора  $\rho_{1n}$  из точки  $m$  в точку  $n$ , то он займет такое ближайшее угловое положение, при котором  $\rho_{1n} = \rho_{1n}$ . При этом радиус-вектор  $\rho_{1n}$  повернется на угол  $\Delta\varphi_1$ . Перемещение сателлита без погрешностей осуществляется по номинальной кривой – смещенной окружности 1. Чтобы определить погрешность угла поворота сателлита, нужно найти такое угловое положение радиус-вектора  $\rho_{1n}$ , при котором  $\rho_{1n} = \rho_{1n}$ , т. е. радиус-вектор  $\rho_{1n}$ , так же как и радиус-вектор  $\rho_{1n}$ , должен находиться на номинальной кривой 1.



$$\varphi(r)_{2n} = \operatorname{arctg} \frac{y_{2n}}{x_{2n}}. \quad (2.109)$$

Кинематическая погрешность звена 2 от влияния радиальных погрешностей, полученных при изготовлении многопериодных дорожек и рассмотренных в разд. 1, рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi(r)_{2i} = \varphi(r)_{2ni} - \varphi_{2ni}, \quad (2.110)$$

где  $\varphi_{2ni}$  – номинальный  $i$ -й угол положения координаты точки кривой многопериодной дорожки с числом периодов  $z_2$ .

Тангенциальные погрешности изготовления многопериодной дорожки звена 2 удобно представить через изменение ее геометрических параметров, так же как и для звена 1. Погрешности изготовления приводят к изменению длины радиус-вектора  $\rho_2$  и искажению номинального профиля кривой с числом периодов  $z_2$ . При этом изменения параметров многопериодной кривой: среднего радиуса  $R$  и амплитуд  $A$  и  $B$  проявляются как кинематические погрешности передачи с частотой повторений, кратной числу периодов  $z_2$ .

Кинематическая погрешность звена 2 от влияния тангенциальных погрешностей, полученных при изготовлении многопериодных дорожек и рассмотренных в разд. 2, рассчитывается, с учетом зависимостей (3.105)–(3.107), в которых число периодов дорожки равно  $z_2$ , по формуле

$$\Delta\varphi(\tau)_{2i} = \varphi(\tau)_{2ni} - \varphi_{2ni}, \quad (2.111)$$

где  $\varphi(\tau)_{2ni}$  – угол положения координаты точки кривой многопериодной дорожки, учитывающий тангенциальные погрешности.

На рисунке 2.9 представлена схема формирования кинематической погрешности передачи от погрешностей среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  неподвижного звена (многопериодной дорожки).

На схеме (см. рисунок 2.9) обозначено: 1 – номинальная (без погрешностей) кривая многопериодной дорожки неподвижного звена; 2 – кривая многопериодной дорожки с погрешностями среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$ ; 3 – кривая однопериодной дорожки, сопрягаемая с многопериодной 2. Кривые являются смещенными окружностями, замкнутыми на плоскости. Радиус-векторы  $\rho_{2n}$ , концы которых находятся в точках  $m_1$  и  $m_2$ , описывают кривую 2 с погрешностями. Их ближайшее угловое положение, когда концы  $\rho_{2n}$  лежат на кривой 1 без погрешностей в точках  $n_1$  и  $n_2$ , определяется углами  $\Delta\varphi_{2n}$ , которые являются погрешностями углового положения  $\rho_{2n}$

и кинематическими погрешностями передачи от погрешностей радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  кривой многопериодной дорожки. При этом из схемы видно, что наибольшие углы  $\Delta\varphi_{2n}$  возникают в вершинах многопериодной кривой.

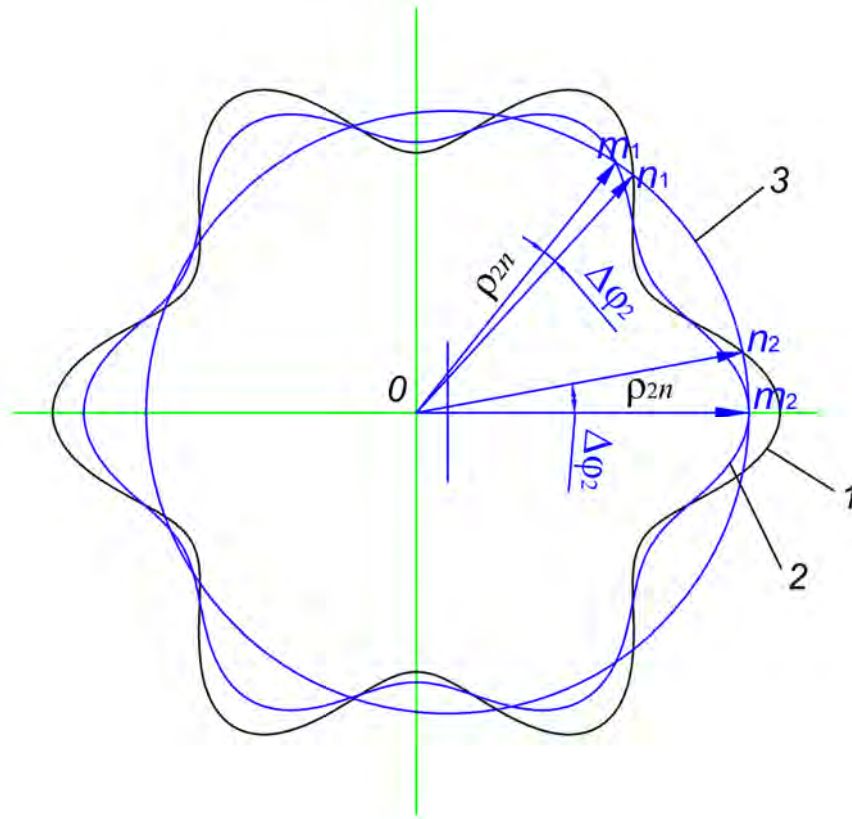


Рисунок 2.9 – Схема формирования кинематической погрешности передачи от погрешностей среднего радиуса и амплитуды неподвижного звена

Звенья 1, 2 и 3 находятся в зацеплении с сателлитами, которые передают вращение. Изменение диаметра сателлита приводит к изменению длины радиус-вектора кривой беговой дорожки. Радиус-вектор многопериодной кривой беговой дорожки с числом периодов  $z_2$ , угол этого радиус-вектора и кинематическую погрешность от влияния погрешности размера диаметра сателлита найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} \rho(d)_{2n} = f(R, A, B, z_2, \varphi) + \delta_d; \\ \varphi(d)_{2n} = f(R, A, B, z_1, \rho(d)_{2n}); \\ \Delta\varphi(d)_{2i} = \varphi(d)_{2ni} - \varphi_{2ni}, \end{cases} \quad (2.112)$$

где  $\rho(d)_{2n}$  – радиус-вектор многопериодной кривой беговой дорожки с числом периодов  $z_2$  с учетом погрешности размера диаметра сателлита;

$\delta_d$  – погрешности диаметра сателлита;

$\varphi(d)_{2n}$  – угол радиус-вектора  $\rho(d)_{2n}$ .

Угол  $\varphi(d)_{2n}$  определяется из формулы (2.105) с учетом радиус-вектора  $\rho(d)_{2n}$ . При этом угол  $\varphi(d)_{2n}$  не равен номинальному углу  $\varphi_{2n}$ . Методика определения значений формулы (2.112) аналогична методике, представленной зависимостями (2.105)–(2.107).

Для определения смещений и поворотов звеньев передачи, приводящих к кинематическим погрешностям, использовались математические зависимости из подразд. 2.1.

Координаты точек кривых беговых дорожек, определяющих контакт с сателлитами в зацеплении, находящихся в системе координат  $X_1 Y_1 Z_1$ , представлены зависимостями (2.17), (2.22) и (2.27). Система координат  $X_1 Y_1 Z_1$  связана с деталями передачи, передающими вращение. Координаты деталей в выбранной неподвижной системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$  с погрешностями, представляющими смещения и повороты этих деталей при сборке передачи, приведены к радиус-вектору кривой беговой дорожки и описываются выражением, в соответствии с математическими зависимостями, представленными в подразд. 2.1,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin \beta & a_0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & b_0 \\ \cos \alpha \cos \beta & c_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

Учитывая малые углы и выражение (2.2), а также масштабирующий множитель  $k_c$  – коэффициент, изменяющий значения погрешностей смещения, запишем выражение (2.113) в виде

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta & a_0 \\ \gamma & 1 & -\alpha & b_0 \\ -\beta & \alpha & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ k_c \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

Из выражения (2.114) получим координаты

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - y_1\gamma + z_1\beta + a_0k_c; \\ y_0 = x_1\gamma + y_1 - z_1\alpha + b_0k_c; \\ z_0 = -x_1\beta + y_1\alpha + z_1 + c_0k_c. \end{cases} \quad (2.115)$$

Используя элемент матрицы, изменяющий масштаб, получим матрицу преобразования пространства с коэффициентом  $k_n$ , увеличивающим или уменьшающим значения углов поворота,

$$R = \begin{bmatrix} 1/k_n & -\gamma & \beta & a_0 \\ \gamma & 1/k_n & -\alpha & b_0 \\ -\beta & \alpha & 1/k_n & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k_n\gamma & k_n\beta & a_0 \\ k_n\gamma & 1 & -k_n\alpha & b_0 \\ -k_n\beta & k_n\alpha & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

Матрицу (2.116) умножим на вектор с координатами  $x_1, y_1, z_1$ , относящимися к системе координат выбранной детали передачи. Получим координаты радиус-вектора, характеризующие положение сателлита в неподвижной системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$ , с учетом коэффициентов  $k_c$  и  $k_n$ ,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & a_0 \\ & R_{3 \times 3} & & b_0 \\ & & & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ k_c \end{bmatrix}. \quad (2.117)$$

Из уравнения (2.117) получим формулы расчета координат

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - y_1k_n\gamma + z_1k_n\beta + a_0k_c; \\ y_0 = x_1k_n\gamma + y_1 - z_1k_n\alpha + b_0k_c; \\ z_0 = -x_1k_n\beta + y_1k_n\alpha + z_1 + c_0k_c. \end{cases} \quad (2.118)$$

Коэффициенты  $k_c$  и  $k_n$  изменяют значения погрешностей: смещений и поворотов и позволяют принимать их различные значения в зависимости от конструктивных и технологических параметров передач.

Определив координаты  $x_0, y_0, z_0$ , получим формулы для действительного углового положения сателлита. Тогда в плоскости  $X_0 O Y_0$  угол, характеризующий положение сателлита (действительный угол поворота), с учетом

погрешностей, связанных со смещениями и поворотами звеньев передачи при сборке, определим по формуле

$$\varphi_{ni}^{СП} = \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} \quad (2.119)$$

или, с учетом формулы (2.118),

$$\varphi_{ni}^{СП} = \operatorname{arctg} \frac{x_1 k_n \gamma + y_1 - z_1 k_n \alpha + k_c b_0}{x_1 - y_1 k_n \gamma + z_1 k_n \beta + k_c a_0}. \quad (2.120)$$

Кинематическую погрешность звена или передачи для  $i$ -го углового положения сателлита от смещений и поворотов звеньев определим по формуле

$$\Delta\varphi_i^{СП} = \varphi_{ni}^{СП} - \varphi_{ni}. \quad (2.121)$$

На рисунке 2.10 показана схема для определения координат криволинейной поверхности, представляющей геометрическое место точек кривых на заданной ширине, каждая из которых образует ось многопериодной беговой дорожки, демонстрирующая геометрические параметры погрешностей смещения и поворотов. Эти координаты можно рассчитать по вышеприведенным математическим зависимостям.

На схеме (см. рисунок 2.10) показаны многопериодная криволинейная поверхность, профиль которой является кривой смещенной окружности с числом периодов, равным  $z_2$ , неподвижная система координат  $X_0 Y_0 Z_0$ , связанная с отверстием корпуса редуктора, подвижная система координат  $X_1 Y_1 Z_1$ , связанная с многопериодной криволинейной поверхностью. На схеме показаны возможные смещения криволинейной поверхности  $a, b, c$  вдоль осей  $X_0, Y_0, Z_0$  и последовательные повороты системы координат  $X_1 Y_1 Z_1$  на углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . При этом система координат  $X_1 Y_1 Z_1$  последовательно преобразуется в системы координат  $X_1 Y_2 Z_2, X_2 Y_2 Z_3$  и  $X_3 Y_3 Z_3$ . Радиус-вектор  $\rho_1$  в точке  $M$  характеризует положение центра сателлита, расположенного на криволинейной поверхности, координаты которого можно рассчитать после учета смещений и поворотов.

Кинематические погрешности звеньев передачи могут быть приведены к однопериодной и многопериодной кривым, представляющим оси беговых дорожек, по которым перемещаются центры сателлитов. Поэтому разработанные схемы (см. рисунки 2.8–2.10), выведенные и представленные математические зависимости (2.105)–(2.121) универсальны. Они представляют

математическую модель кинематических погрешностей звеньев и механизмов передач с телами качения любой известной конструкции с различными геометрическими параметрами с учетом погрешностей изготовления.

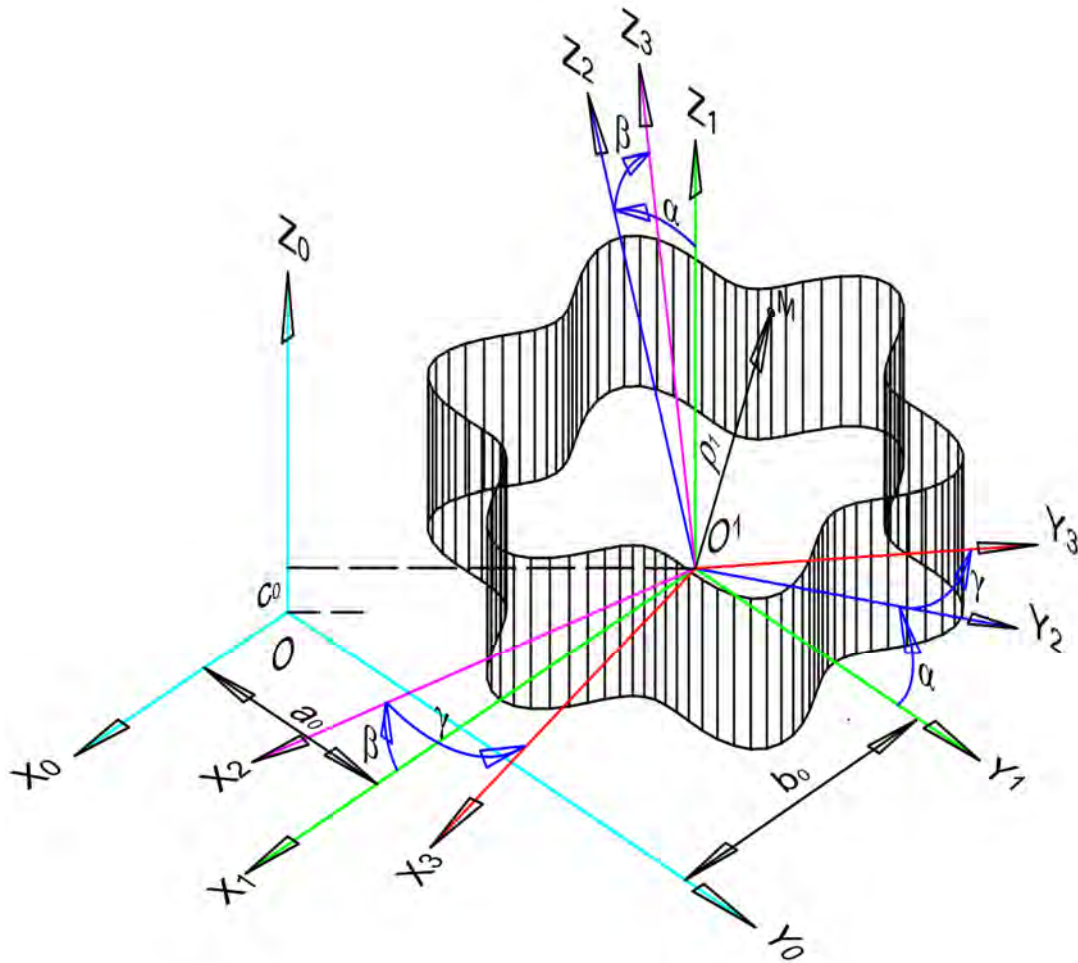


Рисунок 2.10 – Схема для определения координат криволинейной поверхности

#### 2.4.2 Применение математической модели для расчета и оценки кинематических погрешностей планетарных передач.

Применим математическую модель для расчета и оценки кинематических погрешностей планетарных передач первого класса шестой кинематической схемы [17, 19, 38], связанных с погрешностями изготовления и сборки ее деталей. Рассмотрим радиально-плунжерную передачу с шариковым зацеплением [19], в которой ведущее звено имеет однопериодную беговую дорожку  $z_1 = 1$ , неподвижное звено представляет собой колесо с многопериодной беговой дорожкой, число периодов которой  $z_2 = 6$ , ведомое звено выполнено в виде детали – выходного вала с фланцем, представляющим водило-сепаратор с числом отверстий под сателлиты-шарики, равным передаточному отношению  $i = 7$ . Число сателлитов-шариков  $n = 7$  также равно передаточному отношению. Оси симметрии беговых дорожек являются

периодическими кривыми, замкнутыми на плоскости, – смещенными окружностями. Средний радиус кривых  $R = 41,5$  мм, амплитуда кривых  $A = 3,75$  мм, диаметр шарика-сателлита  $d = 15$  мм.

Дифференцированные кинематические погрешности радиально-плунжерной передачи с шариковым зацеплением и многопериодной дорожкой, выполненной на основе кривой – смещенной окружности с числом периодов  $z_i$ , можно представить математическими зависимостями, учитывающими радиус-вектор точки центра сателлита и угол положения радиус-вектора.

*Отклонения среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  ведущего звена.* Радиус-вектор кривой – смещенной окружности без погрешностей, в соответствии с (2.73),

$$\rho_1 = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 \varphi} + A \cos \varphi. \quad (2.122)$$

В уравнении (2.122) число периодов кривой равно единице. Введем погрешности в виде отклонений  $\delta_1$  и  $\delta_2$  от номинальных значений среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  в уравнение (2.122) и получим радиус-вектор с погрешностями

$$\rho_{1n} = \sqrt{(R + \delta_1)^2 - (A + \delta_2)^2 \sin^2 \varphi} + (A + \delta_2) \cos \varphi. \quad (2.123)$$

Из уравнения (2.122) найдем угол  $\varphi = \varphi_{1n}^{R,A}$ , подставив в это уравнение вместо номинального радиус-вектора  $\rho_1$  радиус-вектор  $\rho_{1n}$  с погрешностями радиуса и амплитуды. При этом каждая точка радиус-вектора  $\rho_{1n}$  может принадлежать кривой, описываемой концом радиус-вектора  $\rho_1$ , но с другим его угловым положением, отличным от номинального  $\varphi_{1n}$ . Угол  $\varphi_{1n}$  определяет положение радиус-вектора  $\rho_{1n}$  и рассчитывается по зависимости

$$\varphi_{1n}^{R,A} = \arccos \frac{\rho_{1n}^2 - R^2 + A^2}{2A\rho_{1n}}. \quad (2.124)$$

Кинематическая погрешность ведущего звена от погрешностей среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$   $\delta_1$  и  $\delta_2$

$$\Delta\varphi_{1i}^{R,A} = \varphi_{1ni}^{R,A} - \varphi_{1ni}. \quad (2.125)$$

*Отклонения среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  неподвижного звена (тангенциальные погрешности).* Радиус-вектор кривой – смещенной окружности с числом периодов  $z_2$  без погрешностей, в соответствии с (2.73),

$$\rho_2 = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z_2 \varphi} + A \cos z_2 \varphi. \quad (2.126)$$

Уравнение (2.126) с погрешностями  $\delta_1$  и  $\delta_2$  среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$

$$\rho_{2n} = \sqrt{(R + \delta_1)^2 - (A + \delta_2)^2 \sin^2 \varphi} + (A + \delta_2) \cos \varphi. \quad (2.127)$$

Из уравнения (2.126) найдем угол  $\varphi = \varphi_{2n}^{R,A}$ , подставив в это уравнение вместо номинального радиус-вектора  $\rho_2$  радиус-вектор  $\rho_{2n}$  с погрешностями радиуса и амплитуды. При этом каждая точка радиус-вектора  $\rho_{2n}$  может принадлежать кривой, описываемой концом радиус-вектора  $\rho_2$ , но с другим его угловым положением, отличным от номинального  $\varphi_{2n}$ . Угол  $\varphi_{2n}$  определяет положение радиус-вектора  $\rho_{2n}$  и рассчитывается по зависимости

$$\varphi_{2n}^{R,A} = \left[ \arccos \frac{\rho_{2n}^2 - R^2 + A^2}{2A\rho_{2n}} \right] : z_2. \quad (2.128)$$

Кинематическая погрешность неподвижного звена от погрешностей среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$   $\delta_1$  и  $\delta_2$

$$\Delta\varphi_{2i}^{R,A} = \varphi_{2ni}^{R,A} - \varphi_{2ni}. \quad (2.129)$$

*Радиальное смещение кривой многопериодной дорожки.* Подставив в выражения (2.108) уравнение радиус-вектора смещенной окружности (2.126), получим формулы для расчета координат  $x_{2n}$  и  $y_{2n}$  радиус-вектора центра спутника со смещениями  $a_0$  и  $b_0$  вдоль координатных осей  $X_0$  и  $Y_0$

$$\begin{cases} x_{2n} = \left( \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z_2 \varphi} + A \cos z_2 \varphi \right) \cos \varphi + a_0; \\ y_{2n} = \left( \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z_2 \varphi} + A \cos z_2 \varphi \right) \sin \varphi + b_0. \end{cases} \quad (2.130)$$

Угловое положение радиус-вектора от его смещений  $a_0$  и  $b_0$  вдоль координатных осей  $X_0$  и  $Y_0$  из-за погрешностей изготовления многопериодной дорожки, учитывая уравнения (2.130), определяется по формуле

$$\varphi_{2n}^r = \operatorname{arctg} \frac{y_{2n}}{x_{2n}}. \quad (2.131)$$

Кинематическая погрешность неподвижного звена, учитывающая радиальное смещение кривой многопериодной дорожки,

$$\Delta\varphi_{2i}^r = \varphi_{2ni}^r - \varphi_{2ni}. \quad (2.132)$$

*Отклонение диаметра сателлита.* При уменьшении диаметра сателлита, в соответствии с допуском на изготовление, возникает погрешность  $\delta_d$ . Для ведомого звена радиус-вектор  $\rho_{2n}^d$ , угол его положения  $\varphi_{2n}^d$  и кинематическая погрешность  $\Delta\varphi_{3i}^d$ , учитывающая погрешность  $\delta_d$ , определяются по следующим зависимостям:

$$\begin{cases} \rho_{2n}^d = \sqrt{R^2 - A^2 \sin^2 z_2 \varphi + A \cos z_2 \varphi + \delta_d}; \\ \varphi_{2n}^d = \left[ \arccos \frac{(\rho_{2n}^d)^2 - R^2 + A^2}{2A\rho_{2n}^d} \right] : z_2; \\ \Delta\varphi_{3i}^d = \varphi_{2ni}^d - \varphi_{2ni}. \end{cases} \quad (2.133)$$

Погрешности от смещений и поворотов для рассматриваемой передачи определяются по зависимостям (2.113)–(2.121).

В таблице 2.1 представлены исходные погрешности изготовления звеньев планетарной радиально-плунжерной передачи с передаточным отношением  $i = 7$ , рассмотренные ранее, а также значения этих погрешностей.

Таблица 2.1 – Исходные погрешности изготовления звеньев планетарной радиально-плунжерной передачи

Наименование погрешности	Значение погрешности
1	2
Отклонение среднего радиуса $R$ ведущего звена	$\delta_1 = -0,0075$ мм
Отклонение амплитуды $A$ ведущего звена	$\delta_2 = -0,05$ мм
Смещения и повороты деталей ведущего звена относительно оси ведущего вала	$a_0 = 0,024$ мм $b_0 = 0,024$ мм $c_0 = 0,1$ мм $\alpha = 0,00428$ рад $\beta = 0,00428$ рад $\gamma = 0$
Смещения и повороты ведущего вала относительно оси отверстия корпуса	$a_0 = 0,0287$ мм $b_0 = 0,0287$ мм $c_0 = 0,1$ мм $\alpha = 0,00439$ рад $\beta = 0,00439$ рад $\gamma = 0$

Окончание таблицы 2.1

1	2
Отклонение среднего радиуса $R$ неподвижного звена (тангенциальные погрешности)	$\delta_1 = -0,0405$ мм
Отклонение амплитуды $A$ неподвижного звена (тангенциальные погрешности)	$\delta_2 = -0,0405$ мм
Радиальное смещение кривой многопериодной дорожки	$a_0 = 0,047$ мм $b_0 = 0,047$ мм $c_0 = 0$ мм
Смещения и повороты неподвижного колеса с многопериодной дорожкой относительно оси отверстия корпуса	$a_0 = 0,0315$ мм $b_0 = 0,0315$ мм $c_0 = 0,1$ мм $\alpha = 0,00151$ рад $\beta = 0,00151$ рад $\gamma = 0$
Отклонение диаметра сателлита	$\delta_d = -0,01$ мм
Смещения и повороты ведомого вала относительно оси отверстия корпуса	$a_0 = 0,0456$ мм $b_0 = 0,0456$ мм $c_0 = 0$ мм $\alpha = 0,00279$ рад $\beta = 0,00279$ рад $\gamma = 0$
Смещения и повороты водила-сепаратора относительно оси отверстия корпуса	$a_0 = 0,0233$ мм $b_0 = 0,0233$ мм $c_0 = 0$ мм $\alpha = 0,00048$ рад $\beta = 0,00048$ рад $\gamma = 0$

Отклонения среднего радиуса  $R$  кольца и амплитуды  $A$  эксцентрика ведущего звена (см. таблицу 2.1) соответствуют допускам на их изготовление. При изготовлении многопериодной дорожки неподвижного колеса возникают погрешности, которые можно разделить на технологические тангенциальные и радиальные. Они состоят из дифференцированных погрешностей, значения которых определены и представлены в разд. 1. Для определения кинематических погрешностей звеньев передачи тангенциальные технологические погрешности удобно связать с отклонениями среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  неподвижного звена, а технологические радиальные рассматривать как радиальное смещение кривой многопериодной дорожки. Значения (см. таблицу 2.1) смещений и поворотов звеньев при сборке включают допуски посадок сопрягаемых деталей, отклонения расположения их поверхностей после изготовления: отклонения от перпендикулярности, параллельности, соосности, радиального и торцового биения.

### 2.4.3 Результаты моделирования кинематических погрешностей планетарной радиально-плунжерной передачи.

На основе формул (2.122)–(2.133) рассчитаны кинематические погрешности для каждой исходной погрешности, приведенные в таблице 2.1, а также для ведущего, неподвижного и ведомого звеньев рассматриваемой планетарной радиально-плунжерной передачи. При этом, используя метод расчета и математическую модель, представленные в подразд. 2.2, а также матричные уравнения (2.54), (2.58), (2.59), кинематические погрешности звеньев и суммарная кинематическая погрешность передачи определялись путем сложения дифференцированных кинематических погрешностей. Эти погрешности можно представить в виде матрицы

$$M(\Delta\varphi_{in}) = \begin{pmatrix} \Delta\varphi_{11} & \Delta\varphi_{12} & \Delta\varphi_{13} & \dots & \Delta\varphi_{1n} \\ \Delta\varphi_{21} & \Delta\varphi_{22} & \Delta\varphi_{23} & \dots & \Delta\varphi_{2n} \\ \Delta\varphi_{31} & \Delta\varphi_{32} & \Delta\varphi_{33} & \dots & \Delta\varphi_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\varphi_{m1} & \Delta\varphi_{m2} & \Delta\varphi_{m3} & \dots & \Delta\varphi_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

В формуле (2.134)  $\Delta\varphi_{mn}$  – значения кинематических погрешностей. Первый индекс  $m$ , соответствующий строкам матрицы, показывает количество значений каждой дифференцированной кинематической погрешности; второй индекс  $n$ , соответствующий столбцам матрицы, показывает количество дифференцируемых кинематических погрешностей. Элементы столбцов матрицы нужно арифметически сложить, чтобы получить суммарные значения для каждой строки, т. е. кинематическую погрешность передачи или ее звеньев:

$$F_{к.н} = \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \Delta\varphi_{ij}, \quad (2.135)$$

где  $i, j$  – текущие значения кинематических погрешностей.

На рисунках 2.11–2.13 представлены графики кинематических погрешностей ведущего, неподвижного и ведомого звеньев рассматриваемой планетарной радиально-плунжерной передачи с передаточным отношением  $i = 7$ , полученные по вышепредставленным зависимостям (2.122)–(2.135) за полный оборот выходного вала 360 град.

На графиках (см. рисунки 2.11–2.13) хорошо видны местные кинематические погрешности с частотой повторений, равной и кратной числу периодов дорожки неподвижного колеса  $z_2 = 6$ , характеризующие тангенциальные

погрешности звеньев передачи. На графиках (см. рисунки 2.12 и 2.13) прослеживаются однопериодные синусоидальные волны, характеризующие радиальные погрешности неподвижного и ведомого звеньев.

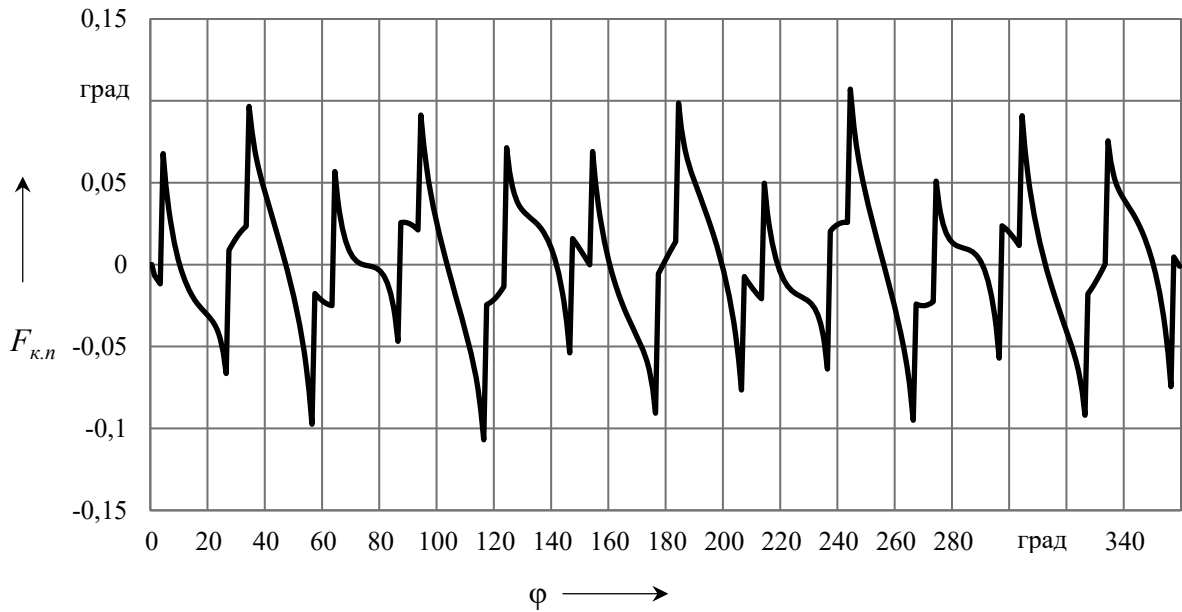


Рисунок 2.11 – Кинематическая погрешность ведущего звена

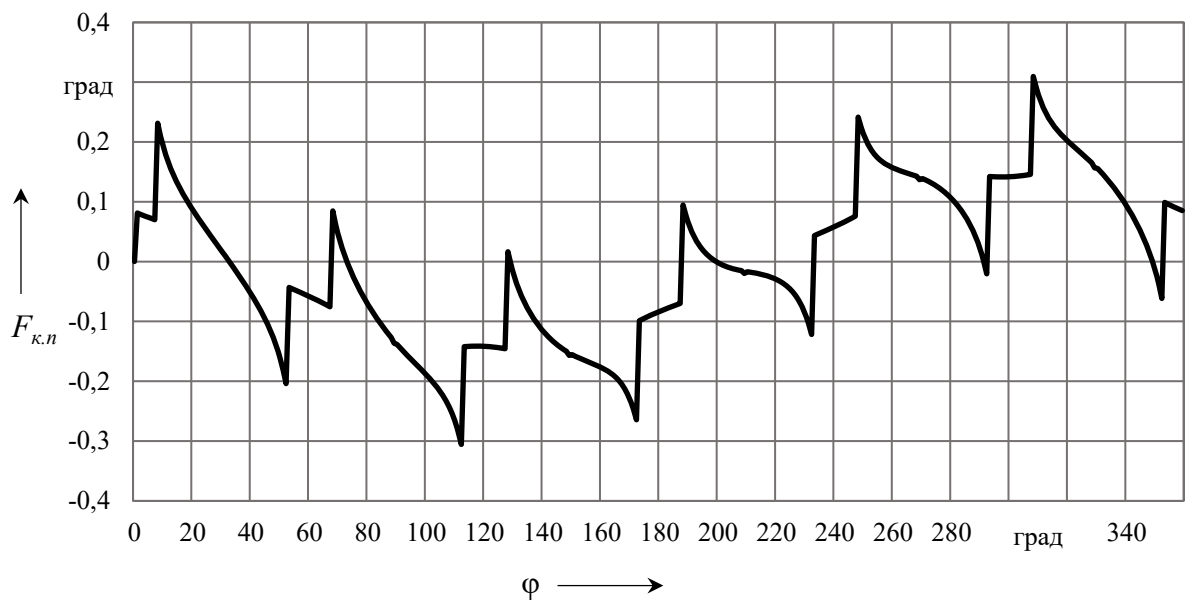


Рисунок 2.12 – Кинематическая погрешность неподвижного звена

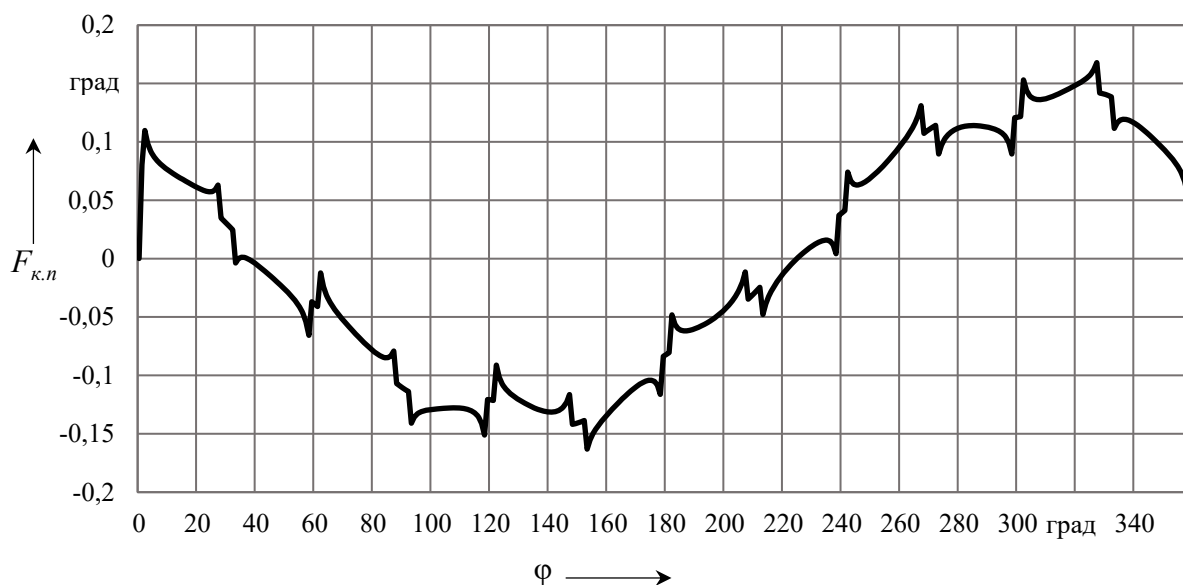


Рисунок 2.13 – Кинематическая погрешность ведомого звена

На рисунке 2.14 представлен график кинематической погрешности планетарной радиально-плунжерной передачи, включающий кинематические погрешности ведущего, неподвижного и ведомого звеньев (см. рисунки 2.11–2.13), с передаточным отношением  $i = 7$ , рассчитанный также с использованием зависимостей (2.122)–(2.135) за полный оборот выходного вала 360 град.



Рисунок 2.14 – Кинематическая погрешность передачи

На графике (см. рисунок 2.14), как и на графиках, представленных на рисунках 2.11–2.13, хорошо выделяются кинематическая радиальная погрешность с частотой изменения, равной единице за один оборот выходного вала, и кинематические тангенциальные погрешности с частотой измене-

ний, равной и кратной числу периодов неподвижной беговой дорожки – шести ( $z_2 = 6$ ).

Определить технологические причины образования кинематических погрешностей и оценить их значения позволяют методы расчета и математическая модель на основе спектрального анализа, представленные в подразд. 2.2. На их основе, используя математические зависимости (см. подразд. 2.2), получены амплитудно-частотные спектры кинематических погрешностей рассматриваемых звеньев и передачи.

На рисунках 2.15–2.19 показаны графики – амплитудно-частотные спектры кинематических погрешностей ведущего, неподвижного и ведомого звеньев, а также передачи с учетом всех звеньев.

На графиках амплитудно-частотных спектров наибольшие амплитуды имеют гармонические составляющие кинематических погрешностей звеньев и передачи с номерами 1, 5, 6, 7 и 12. При этом гармоника с номером 1, равная одному периоду изменения за полный оборот выходного вала, имеет наибольшее значение, т. к. отражает радиальные погрешности, которые при моделировании рассматривались и рассчитывались без сдвига, т. е. от одной начальной фазы.

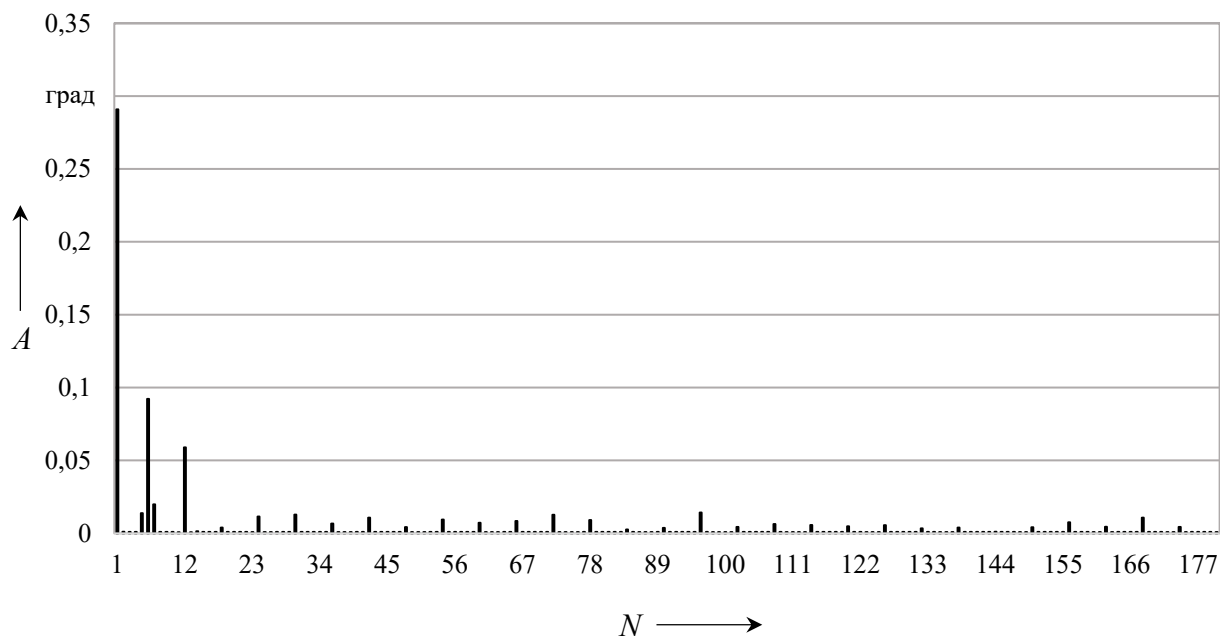


Рисунок 2.15 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности передачи с числом гармоник  $N$ , равным 180

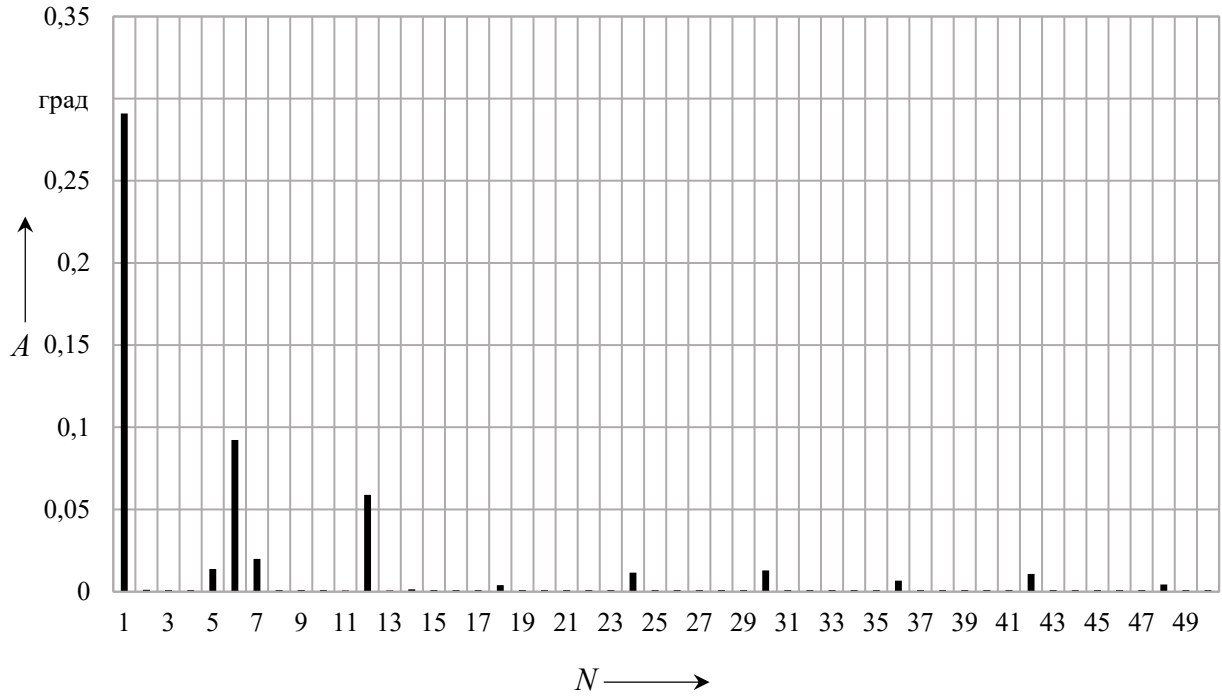


Рисунок 2.16 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности передачи с числом первых гармоник  $N$ , равным 50

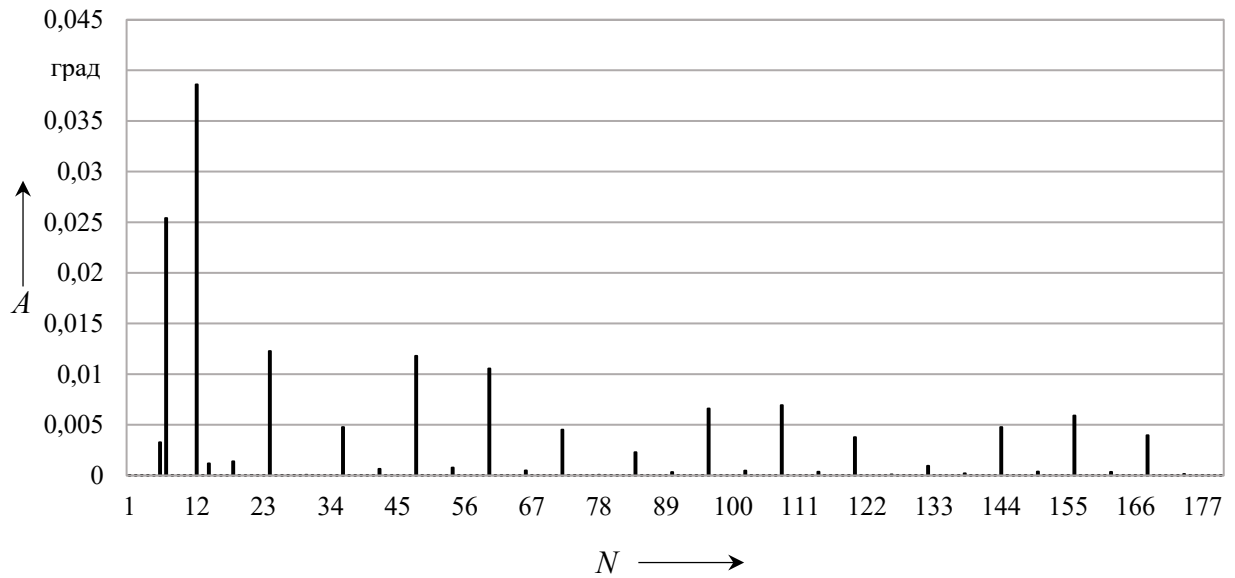


Рисунок 2.17 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности ведущего звена

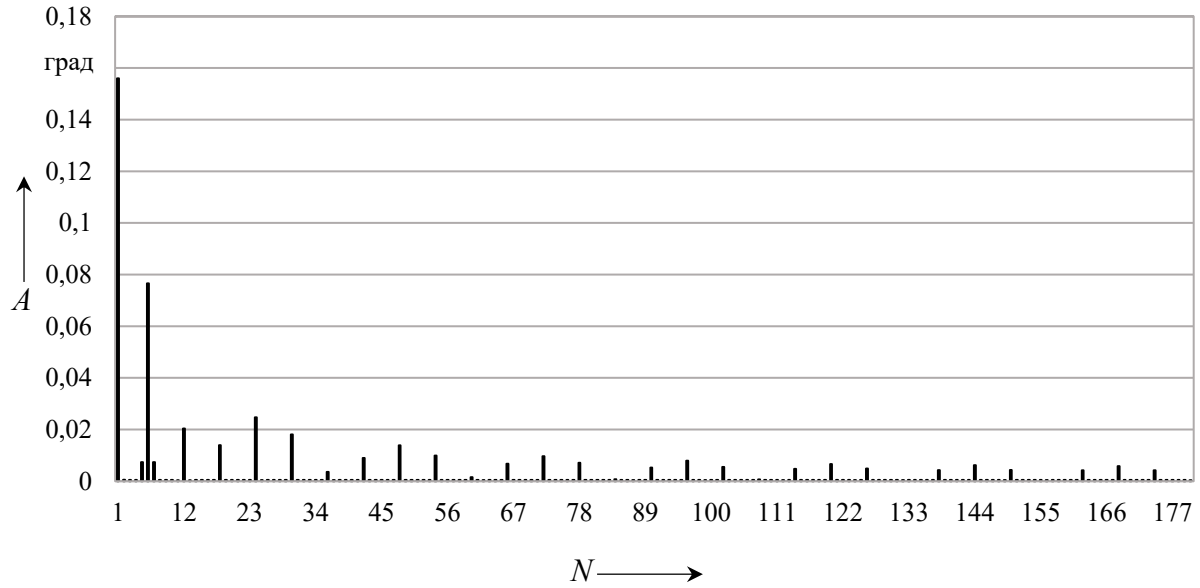


Рисунок 2.18 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности неподвижного звена

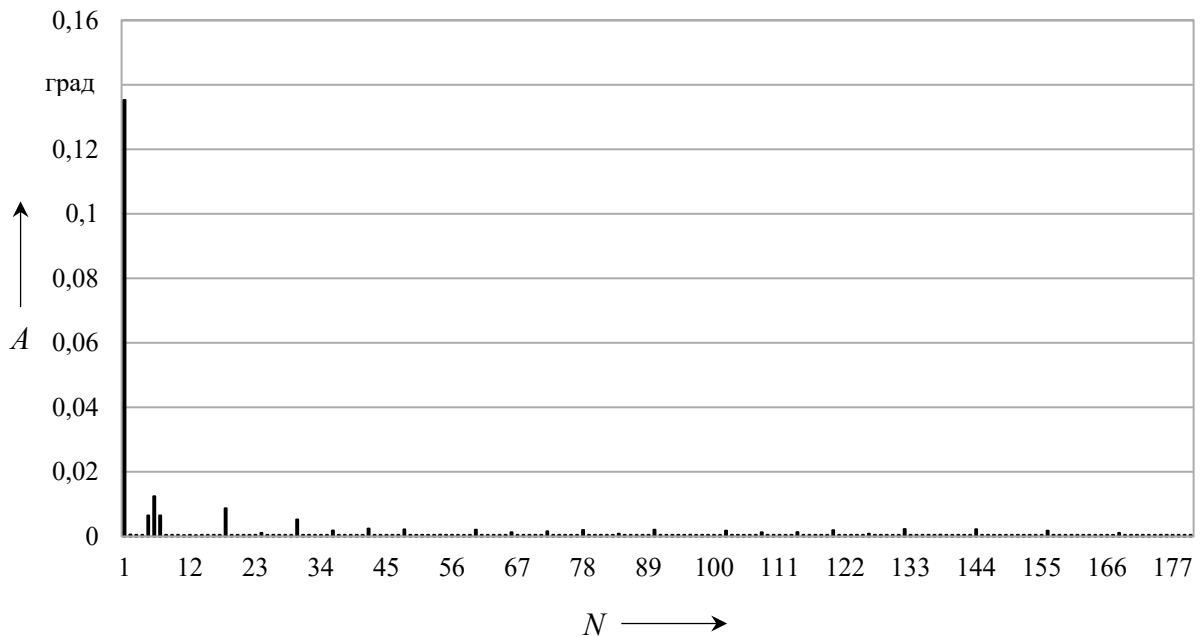


Рисунок 2.19 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности ведомого звена

Технологическими источниками этих погрешностей являются радиальное смещение кривой многопериодной дорожки неподвижного колеса, связанное с погрешностями ее изготовления, смещения и повороты относительно оси отверстия корпуса: неподвижного колеса, ведомого вала, водила-сепаратора, возникающие при сборке передачи, а также смещения и повороты при

изготовлении пазов сепаратора для размещения сателлитов. Гармоника с номером 7 характеризует смещения и повороты деталей ведущего звена относительно оси ведущего вала и смещения и повороты ведущего вала относительно оси отверстия корпуса, возникающие при сборке ведущего звена и корпуса редуктора. Гармоники с номерами 6 и 12 проявляются в амплитудно-частотном спектре из-за погрешностей изготовления, связанных с отклонением среднего радиуса  $R$  и амплитуды  $A$  ведущего и неподвижного звеньев и отклонением диаметра сателлита. Гармоника с номером 5 рассматривается как случайная величина, которая проявляется при данной геометрии зацепления. На графиках амплитудно-частотных спектров выделяются также гармонические составляющие кинематических погрешностей с номерами, кратными числу периодов неподвижной беговой дорожки  $z_2 = 6$ . Из них наибольшее значение амплитуды имеет гармоника с номером 18. При этом частота изменений кинематических погрешностей, равная 18, соответствует  $1/3$  периода неподвижной беговой дорожки. Гармоники с номерами, кратными шести и больше 18 на графиках (см. рисунки 2.15–2.19), характеризуют конструкторско-технологическую наследственность формы беговых дорожек и могут проявляться в реальной передаче, работающей под нагрузкой, в виде неравномерности вращения, связанной с вхождением сателлитов в зацепление при смене одних сателлитов другими.

Кинематическую погрешность можно выразить через угловые параметры перемещения, полученные интегрированием функций угловых значений скорости и ускорения, которые характеризуют плавность работы передачи:

$$\begin{cases} F_{к.н} = \int \omega_{\delta}(t)dt - \int \omega_{н}(t)dt; \\ F_{к.н} = \iint \omega_{\delta}(t)dtdt - \iint \omega_{н}(t)dtdt, \end{cases} \quad (2.136)$$

где  $\omega_{\delta}$ ,  $\omega_{н}$  – действительная и номинальная угловые скорости выходного вала.

При этом действительные угловые скорость и ускорение определялись по зависимостям

$$\omega_{\delta} = \frac{d(\varphi_i + \Delta\varphi_i)}{dt}; \quad (2.137)$$

$$\varepsilon_{\delta} = \frac{d(\omega + \Delta\omega)}{dt} = \frac{d^2(\varphi + \Delta\varphi)}{dt^2}, \quad (2.138)$$

где  $\varphi_i$  – текущее номинальное угловое перемещение (угол поворота) выходного вала;

$\Delta\varphi$  – погрешность угла поворота выходного вала;

$\Delta\omega$  – погрешность (непостоянство) угловой скорости.

Значения действительных угловых параметров скорости и ускорения определим численным интегрированием по полученным значениям кинематической погрешности, представленной на рисунке 2.14. Тогда угловая скорость

$$\omega_i = \frac{(\varphi_i + \Delta\varphi_i) - (\varphi_{i-1} + \Delta\varphi_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \quad (2.139)$$

Угловое ускорение, выраженное через угловую скорость и время,

$$\varepsilon_i = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \quad (2.140)$$

где  $\omega_i, \omega_{i-1}$  – значения угловых скоростей выходного вала.

Угловое ускорение, выраженное через угловое перемещение и время,

$$\varepsilon_i = \left( \frac{(\varphi_{i+1} + \Delta\varphi_{i+1}) - (\varphi_i + \Delta\varphi_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{(\varphi_i + \Delta\varphi_i) - (\varphi_{i-1} + \Delta\varphi_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right) : (t_{i+1} - t_i), \quad (2.141)$$

где  $\varphi_{i+1}, \varphi_i, \varphi_{i-1}$  – значения угловых перемещений (углов поворота) выходного вала;

$\Delta\varphi_{i+1}, \Delta\varphi_i, \Delta\varphi_{i-1}$  – значения погрешностей угловых перемещений (углов поворота) выходного вала;

$t_{i+1}, t_i, t_{i-1}$  – время, соответствующее угловым перемещениям и скоростям выходного вала;

$i$  – номер углового перемещения или мгновенной угловой скорости.

На рисунках 2.20–2.23 представлены графики угловых скоростей и ускорений и их амплитудно-частотных спектров.

На графиках угловых скоростей и ускорений (см. рисунки 2.20–2.23) выделяются всплески с частотой, кратной числу периодов неподвижной дорожки  $z_2 = 6$ , что подтверждают графики амплитудно-частотных спектров, на которых наибольшие значения амплитуд имеют гармоники с номерами, кратными шести.

Наибольшая погрешность угловой скорости выходного вала при моделировании кинематических погрешностей рассматриваемой планетарной радиально-плунжерной передачи с передаточным отношением  $i = 7$  составила  $\Delta\omega_{\max} = 4,4$  рад/с, при этом среднее угловое ускорение  $\varepsilon = 927$  рад/с<sup>2</sup>, а наибольшая кинематическая погрешность передачи  $F_{\kappa.n} = 0,0169$  рад.

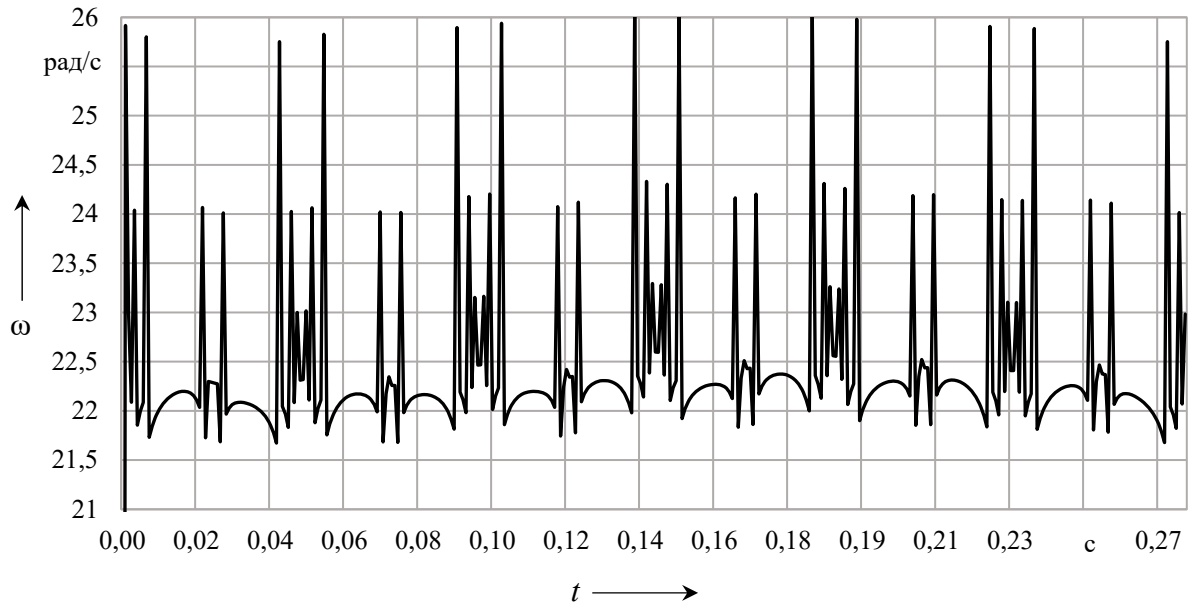


Рисунок 2.20 – График угловой скорости ведомого вала

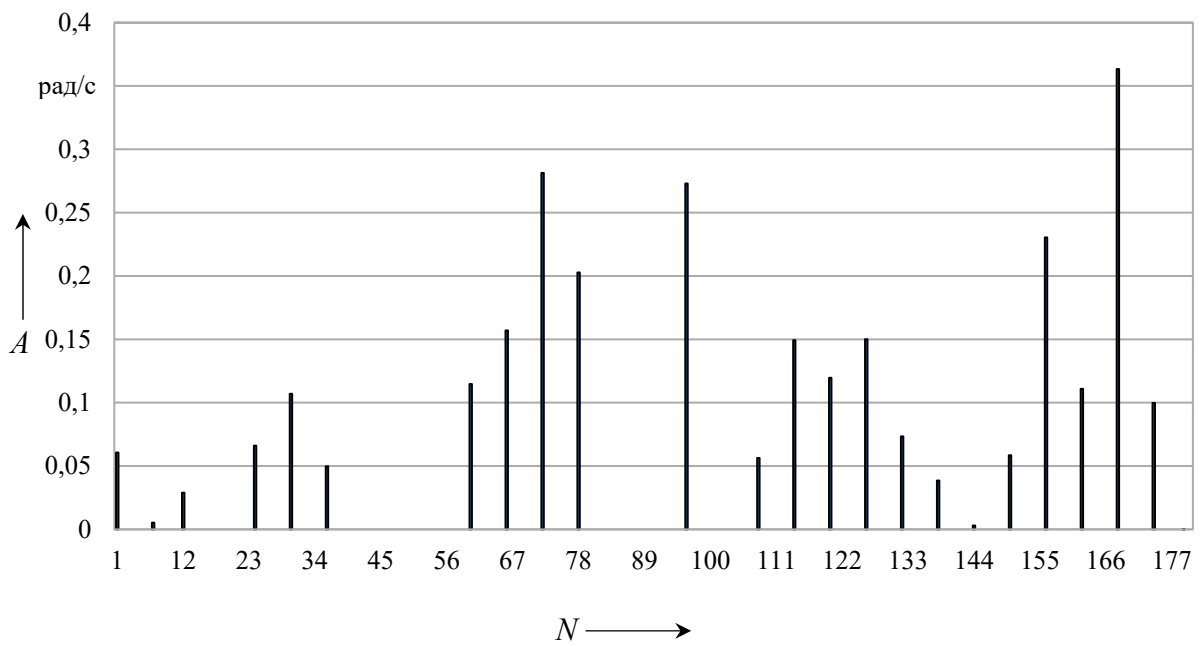


Рисунок 2.21 – Амплитудно-частотный спектр угловой скорости ведомого вала

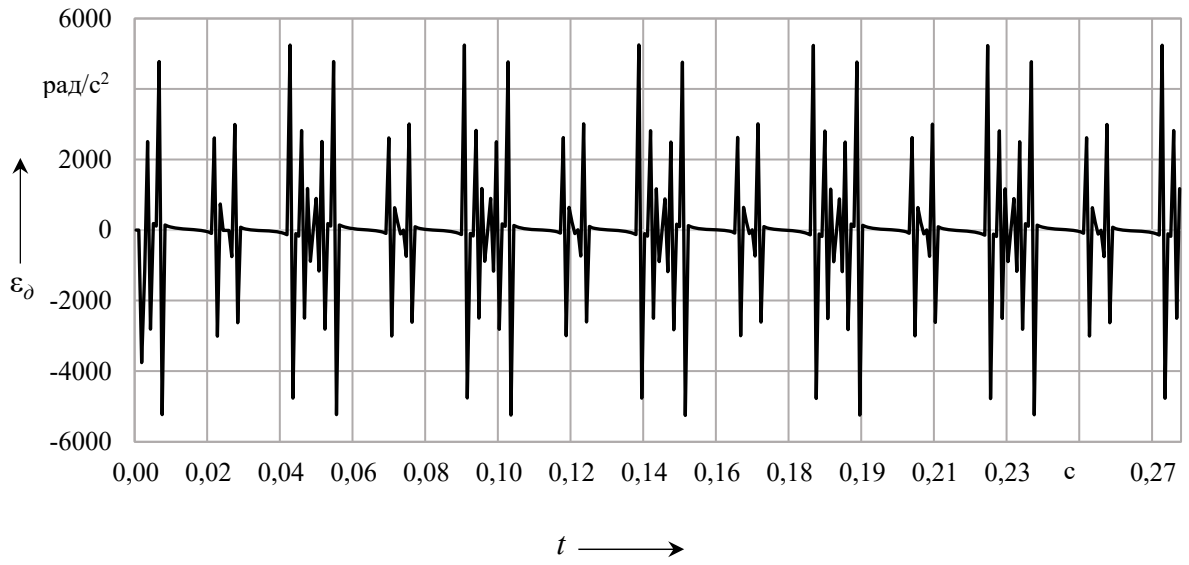


Рисунок 2.22 – График углового ускорения ведомого вала

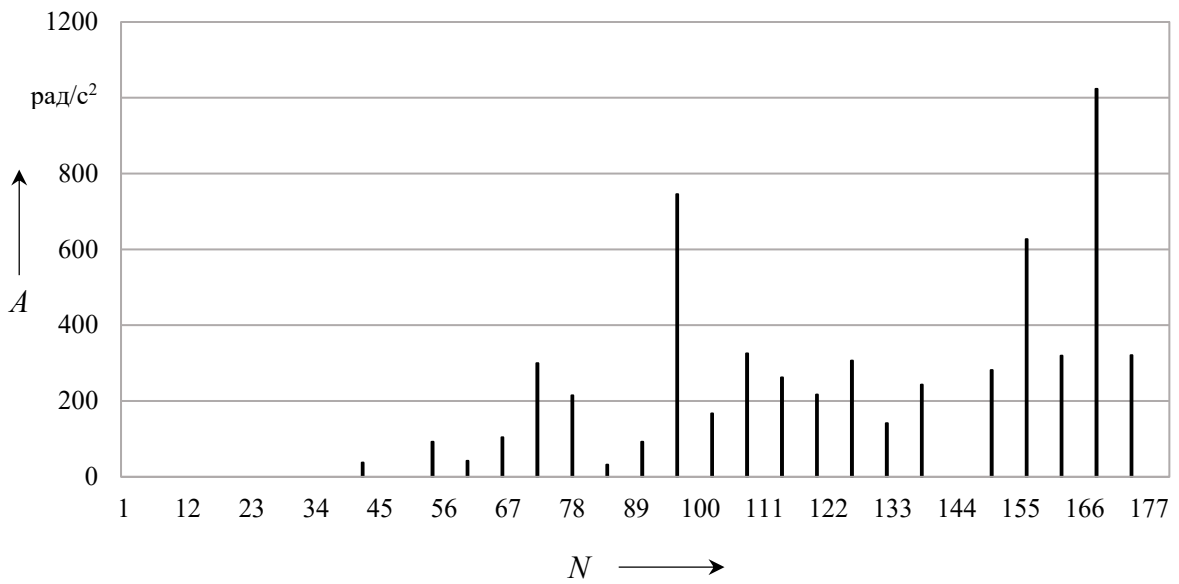


Рисунок 2.23 – Амплитудно-частотный спектр углового ускорения ведомого вала

### 3 Разработка динамической модели для расчета кинематических погрешностей механических передач

#### 3.1 Уравнения движения планетарных механизмов с учетом кинематических погрешностей

##### 3.1.1 Обобщенная динамическая модель.

Уравнение движения в энергетической форме [28, 29, 38–41]

$$\frac{J_{\Sigma}\omega^2}{2} - \frac{J_{\Sigma_{нач}}\omega_{нач}^2}{2} = \int_{\varphi_{нач}}^{\varphi} M_{\Sigma} d\varphi, \quad (3.1)$$

где  $J_{\Sigma}$  – суммарный приведенный момент инерции механизма;

$\omega$  – угловая скорость звена механизма (передачи);

$J_{\Sigma_{нач}}$  – суммарный приведенный начальный момент инерции механизма;

$\omega_{нач}$  – начальная угловая скорость звена механизма (передачи);

$M_{\Sigma}$  – суммарный приведенный момент движущих сил, эквивалент всей нагрузки, приложенной к механизму;

$\varphi$  – угловая координата, угол поворота звена.

Левая часть формулы – это изменение кинетической энергии механизма в начале и в конце рассматриваемого времени движения; правая часть формулы – работа всех сил (сумма работ), действующих на механизм.

Продифференцировав уравнение (3.1) по координате  $\varphi$ , при этом переменными величинами являются  $\omega$  и  $J_{\Sigma}$ , получим уравнение движения в дифференциальной форме

$$J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Sigma}}{d\varphi} = M_{\Sigma}. \quad (3.2)$$

Если переменной величиной является только угловая скорость  $\omega$ , при этом  $J_{\Sigma} = \text{const}$ , то второе слагаемое левой части формулы (3.2) равно нулю. Тогда уравнение движения примет вид

$$J_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Sigma} \quad \text{или} \quad J_{\Sigma} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{\Sigma}; \quad (3.3)$$

$$M_{\Sigma} = \sum M_i(\vec{F}_i) = \pm M_1 + M_2 - M_3, \quad (3.4)$$

где  $M_i$  – момент внешних сил  $F_i$   $i$ -го звена;

$M_1, M_2, M_3$  – моменты внешних сил на ведущем, неподвижном и ведомом звеньях соответственно;

«+» – для первой группы точек пересечения кривых ведущей и неподвижной (ведомой) дорожек;

«-» – для второй группы точек пересечения кривых ведущей и неподвижной (ведомой) дорожек.

Уравнение движения механизма передачи в общем виде на основании принципа Даламбера [28, 29]

$$\sum M_i(\vec{F}_i) + \sum M_i^u(\vec{F}_i^u) = 0, \quad (3.5)$$

где  $M_i^u$  – момент сил инерции  $F_i^u$   $i$ -го звена.

Запишем уравнение (3.3) с учетом уравнения (3.4) и приведенного момента инерции к ведомому звену  $J_3^{np}$ :

$$J_3^{np} = \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{3i}}{\omega_{1i}}; \quad (3.6)$$

$$\pm M_1 + M_2 - M_3 = \frac{d\omega}{dt} \left( \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{3i}}{\omega_{1i}} \right), \quad (3.7)$$

где  $J_{3i}$  –  $i$ -й момент инерции ведомого звена;

$J_{1i}$  –  $i$ -й момент инерции ведущего звена;

$\omega_{3i}$  –  $i$ -я угловая скорость ведомого звена;

$\omega_{1i}$  –  $i$ -я угловая скорость ведущего звена.

Преобразуем это уравнение, приведя моменты сил инерции к угловой скорости выходного вала  $\omega_3$ , для передач первой группы пересечения кривых.

При работе передачи под нагрузкой возникают упругие деформации в звеньях. При этом центр сателлита смещается от номинальной (идеальной) траектории движения, вызывая увеличение или уменьшение радиус-вектора  $\rho$ . Смещение сателлита равно приращению  $\Delta\rho_i$ , различному для каждого звена. Такое же смещение возникает и при погрешностях изготовления передачи. Выведем уравнения движения, которые учитывают упругие деформации, а также погрешности изготовления, проявляющиеся в динамике, деталей передачи с учетом моментов сил, действующих на звенья.

Учитывая приращение  $\Delta\rho_i$ , левую часть уравнения (3.7) можно записать как

$$M_{\Sigma} = \pm M_1 + M_2 - M_3 = F_1(R + \Delta\rho_1) + F_2(R + \Delta\rho_2) - F_3(R + \Delta\rho_3). \quad (3.8)$$

Тогда уравнение (3.7) принимает вид

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{F_1R + F_1\Delta\rho_1 + F_2R + F_2\Delta\rho_2 - F_3R - F_3\Delta\rho_3}{\sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{3i}}{\omega_{1i}}}. \quad (3.9)$$

Исключив выражение  $F_1R + F_2R - F_3R = 0$  из формулы (3.9) и учитывая

$$J_{\Sigma} = J_3^{np} = \sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{3i}}{\omega_{1i}}, \text{ получим уравнение}$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{F_1\Delta\rho_1 + F_2\Delta\rho_2 - F_3\Delta\rho_3}{J_3^{np}} \quad (3.10)$$

или

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2 - \Delta M_3}{J_{\Sigma}}, \quad (3.11)$$

где  $\Delta M_i$  – приращение момента  $i$ -го звена.

Проинтегрируем уравнение (3.10) с переменной  $t$ :

$$\omega_3 = \int \frac{F_1\Delta\rho_1 + F_2\Delta\rho_2 - F_3\Delta\rho_3}{J_{\Sigma}} dt. \quad (3.12)$$

В результате интегрирования получим формулу изменения угловой скорости  $\omega_3 = \Delta\omega_3$  выходного звена, которая применима для любых типов кривых (синусоиды, циклоиды, смещенной окружности, спирали Архимеда),

$$\Delta\omega_3 = \frac{F_1\Delta\rho_1 + F_2\Delta\rho_2 - F_3\Delta\rho_3}{J_{\Sigma}} t, \quad (3.13)$$

где  $t$  – время, за которое происходит изменение угловой скорости  $\Delta\omega_3$ .

Проинтегрировав уравнение (3.13), учитывая  $\omega_3 = d\varphi/dt$ , получим следующее изменение угла поворота  $\varphi = \Delta\varphi$  выходного звена передачи от времени  $t$ :

$$\varphi = \frac{F_1 \Delta \rho_1 + F_2 \Delta \rho_2 - F_3 \Delta \rho_3}{J_\Sigma} \int t dt; \quad (3.14)$$

$$F_{к.н} = \Delta \varphi = \frac{F_1 \Delta \rho_1 + F_2 \Delta \rho_2 - F_3 \Delta \rho_3}{2J_\Sigma} t^2; \quad (3.15)$$

$$F_{к.н} = \Delta \varphi = \frac{F_1 \Delta \rho_1 + F_2 \Delta \rho_2 - F_3 \Delta \rho_3}{\sum_i J_{3i} + \sum_i J_{1i} \frac{\omega_{3i}}{\omega_{1i}}} t^2. \quad (3.16)$$

Время  $t$  в уравнениях (3.15) и (3.16) соответствует изменению угла поворота  $\Delta \varphi$ .

Формула (3.16) динамической модели движения учитывает неравномерность вращения звеньев передачи и позволяет рассчитать кинематическую погрешность  $F_{к.н}$  различных конструкций планетарных передач с промежуточными телами качения.

### 3.1.2 Применение уравнения движения.

Полученные математические зависимости динамической модели передачи применены для расчета кинематической погрешности одноступенчатой планетарной шариковой передачи с передаточным отношением, равным семи, мощностью 1,5 кВт, частотой вращения ведущего вала 1500 мин<sup>-1</sup>. При этом силовые и массогабаритные параметры передачи рассчитаны и приняты как исходные данные. Так как в формуле (3.16) определяется кинематическая погрешность передачи  $\Delta \varphi$  в зависимости от исходных погрешностей звеньев (упругих деформаций или погрешностей изготовления)  $\Delta \rho_1$ ,  $\Delta \rho_2$ ,  $\Delta \rho_3$  – погрешностей ведущего, неподвижного и ведомого звеньев соответственно, а соотношения остальных параметров в формуле (3.16) могут быть постоянными, то исходя из этого на основании параметров данной передачи установлена зависимость между ее кинематической погрешностью и погрешностями изготовления ее звеньев в виде полинома второй степени

$$F_{к.н} = \Delta \varphi = 0,0073x^2 + 0,106x + 9 \cdot 10^{-5}, \quad (3.17)$$

где  $x$  – суммарная погрешность изготовления звеньев передачи,

$$x = \Delta \rho_\Sigma = \sqrt{\Delta \rho_1^2 + \Delta \rho_2^2 + \Delta \rho_3^2}. \quad (3.18)$$

Также установлена полиномиальная зависимость между кинематической погрешностью ведущего звена и погрешностями его изготовления

$$\Delta\varphi_1 = 4 \cdot 10^{-15} x^2 + 0,0367x - 1 \cdot 10^{-17}. \quad (3.19)$$

Учитывая малые величины в формуле (3.19), запишем

$$\Delta\varphi_1 = 0,0367x, \quad (3.20)$$

где  $x$  – суммарная погрешность изготовления ведущего звена передачи,  $x = \Delta\rho_1$ .

Зависимости (3.17)–(3.20) могут применяться для любых типов данных передач с любыми геометрическими, силовыми и массогабаритными параметрами. Параметр  $x$  в зависимостях (3.17)–(3.20) может относиться как к погрешностям изготовления, так и к упругим деформациям звеньев.

### ***3.2 Оценка влияния кинематических погрешностей на КПД планетарных передач с промежуточными телами качения***

Решив дифференциальное уравнение (3.3) и подставив начальные условия движения после интегрирования, получим уравнение, описывающее кинематическую погрешность передачи или, иначе, погрешность угла поворота выходного вала от времени за полный его оборот,

$$\Delta\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{M_\Sigma}{2J_\Sigma} t^2, \quad (3.21)$$

где  $\omega_0$  – начальная угловая скорость.

При решении обратной задачи найдем суммарный момент всех действующих внешних сил  $M_\Sigma$  на звенья передачи, равный суммарному моменту сил инерции  $M_\Sigma^u$ :

$$M_\Sigma(t) = M_\Sigma^u(t) = \frac{2J_\Sigma(\Delta\varphi(t) - \omega_0 t)}{t^2}. \quad (3.22)$$

Учитывая зависимость (3.5), получим

$$M_1(t)i - M_3(t) = M_\Sigma^u(t). \quad (3.23)$$

Тогда

$$M_1(t)i - M_3(t) = \frac{2J_{\Sigma}(\Delta\varphi(t) - \omega_0 t)}{t^2}. \quad (3.24)$$

Согласно [3, 4, 28, 29], КПД передачи определяется по формулам

$$\eta = \frac{W_{\text{вм}}}{W_{\text{вм}} + W_n} 100 \%; \quad (3.25)$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{W_n}{W_{\text{вм}}}} 100 \%, \quad (3.26)$$

где  $W_{\text{вм}}$  – мощность на ведомом звене;

$W_n$  – потери мощности на ведущем, неподвижном и ведомом звеньях.

Скорости трения на поверхностях контакта деталей зацепления звеньев [3]

$$v_1 = \frac{\rho(\omega_1 - \omega_3)}{\cos \alpha_1}; \quad v_2 = \frac{\rho\omega_3}{\cos \alpha_2}; \quad v_3 = \rho\omega_3 \operatorname{tg} \alpha_2, \quad (3.27)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – скорости трения на поверхностях контакта ведущего, неподвижного и ведомого звеньев.

Потери мощности на ведущем  $W_{n1}$ , неподвижном  $W_{n2}$  и ведомом  $W_{n3}$  звеньях, выраженные через момент ведущего вала, принимая углы между векторами сил трения равными нулю, представим зависимостями

$$W_{n1} = \frac{M_1 f_1 \rho (\omega_1 - \omega_3)}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}; \quad (3.28)$$

$$W_{n2} = \frac{M_1 f_2 \rho \omega_3 \operatorname{ctg} \alpha_1}{R \cos^2 \alpha_2}; \quad (3.29)$$

$$W_{n3} = \frac{M_1 f_3 \rho \omega_3 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_2}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}, \quad (3.30)$$

где  $\varepsilon$  – суммарный угол подъема беговых дорожек,  $\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Мощность на ведомом звене

$$W_{\text{вм}} = \frac{M_3 \omega_3 \rho}{R}. \quad (3.31)$$

Подставив в формулу (3.31) выражение (3.23), выразив в нем  $M_3$ , получим

$$W_{\text{вм}} = \frac{(M_1(t)i - M_{\Sigma}^u(t))\omega_3 \rho}{R}. \quad (3.32)$$

Найдем потери мощности передачи, приведенные к мощности на ведомом звене:

$$\psi = \frac{W_n}{W_{\text{вм}}} = \left[ \frac{M_1 f_1 \rho (\omega_1 - \omega_3)}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_1} + \frac{M_1 f_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 \rho \omega_3}{R \cos^2 \alpha_2} + \frac{M_1 f_3 \rho \omega_3 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_2}{R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} \right] : \frac{(M_1(t)i - M_{\Sigma}^u(t))\omega_3 \rho}{R}. \quad (3.33)$$

Преобразуем выражение (3.33), подставив в него суммарный момент инерции  $M_{\Sigma}^u$  из уравнения (3.22). При этом примем начальную скорость  $\omega_0 = 0$ . Окончательно уравнение относительных потерь мощности

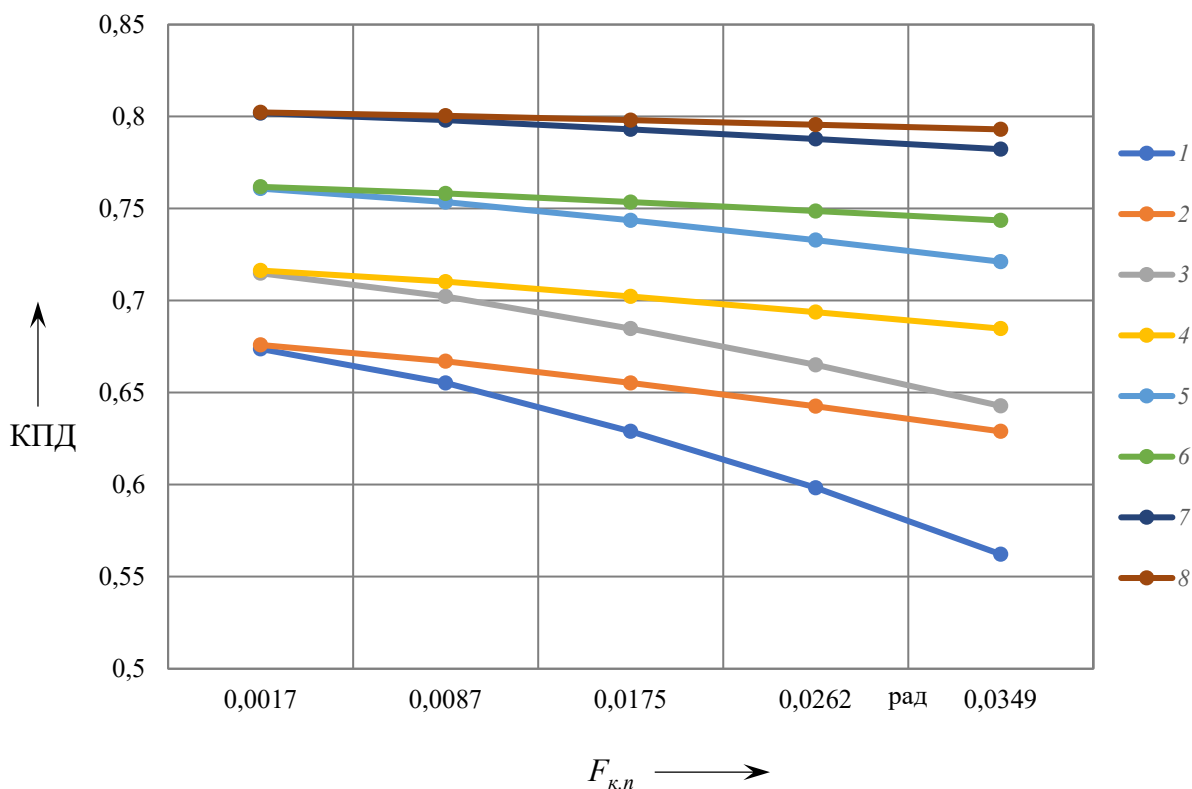
$$\psi = \frac{W_n}{W_{\text{вм}}} = \frac{\frac{f_1(i-1)}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} + \frac{f_2 \operatorname{ctg} \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2} + \frac{f_3 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_2}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}}{i - \frac{2J_z \Delta\varphi(t)}{t^2 M_1}}. \quad (3.34)$$

Подставив уравнение (3.34) в формулу (3.26), получим значения КПД передачи в зависимости от ее кинематической погрешности  $\Delta\varphi(t)$ , изменяющейся за оборот выходного звена.

Таким образом, разработан метод оценки влияния кинематических погрешностей на КПД планетарных передач с промежуточными телами качения. Суть метода заключается в расчете КПД передачи, с учетом ее кинематических погрешностей, рассматриваемых в динамической модели, по вышевыведенным математическим зависимостям. При этом кинематические

погрешности, равные погрешностям углов поворота звеньев передачи, получены из их моментов инерции при неравномерном вращении звеньев.

На рисунке 3.1 представлены графики зависимости КПД от кинематической погрешности планетарных передач с телами качения, построенных по первой, четвертой и шестой кинематическим схемам [3] с различными передаточными отношениями и частотами вращения ведущего и ведомого валов.



1 –  $i = 1,5$ ,  $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 4; 2 –  $i = 1,5$ ,  $n = 1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 4; 3 –  $i = 2$ ,  $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 1; 4 –  $i = 2$ ,  $n = 1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 1; 5 –  $i = 3$ ,  $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 6; 6 –  $i = 3$ ,  $n = 1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 6; 7 –  $i = 5$ ,  $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$ , № 6; 8 –  $i = 5$ ,  $n = 1500 \text{ мин}^{-1}$ , № 6

Рисунок 3.1 – Графики зависимости КПД от кинематической погрешности планетарных передач с телами качения

Графики получены в результате расчетов по вышепредставленному методу, включающему математические зависимости (3.21)–(3.34).

Как видно из графиков (см. рисунок 3.1), изменение КПД за оборот выходного звена передачи при небольших передаточных отношениях и больших кинематических погрешностях, наибольшие значения которых достигают 0,0349 рад (2 град), может быть значительным и составлять 11 %. С увеличением передаточного отношения разность между наибольшими и наименьшими значениями КПД за полный цикл вращения уменьшается. Это связано с тем, что при увеличении передаточного отношения

механизма скорости трения уменьшаются, а также уменьшаются силы трения из-за увеличения углов подъема беговых дорожек с наибольшим числом периодов.

На рисунке 3.2 показан график изменения КПД за оборот выходного вала (360 град) из-за наличия кинематических погрешностей. График получен в результате расчетов по уравнениям (3.34) и (3.26). При этом в расчетах приняты следующие условия: планетарная передача построена по шестой кинематической схеме; наибольшая кинематическая погрешность составляет 0,97 град; передаточное отношение механизма  $i = 5$ ; частота вращения ведущего звена  $n_1 = 3000$  об/мин. Значения функции кинематической погрешности  $\Delta\varphi(t)$  взяты из разработанной кинематической модели.

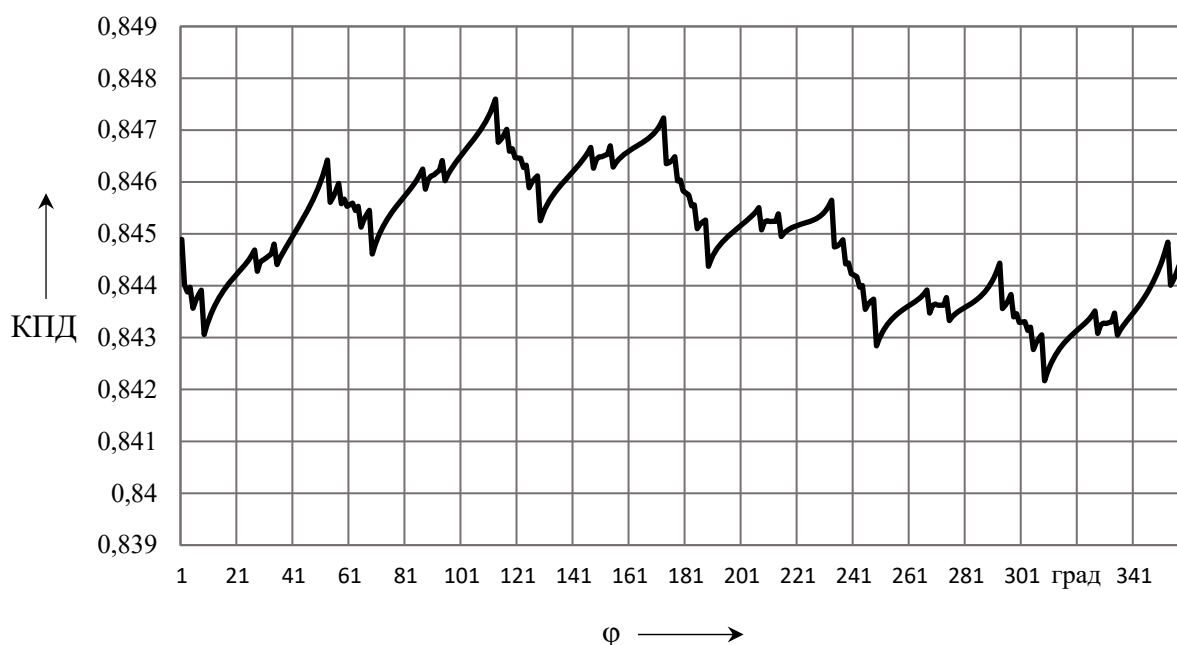


Рисунок 3.2 – График изменения КПД за оборот выходного вала из-за наличия кинематических погрешностей

Изменение КПД составило 0,94 %, отклонение от среднего значения КПД – 0,5 %. При этом наибольший КПД передачи составил 80 %.

Разработанный метод позволяет оценить влияние кинематических погрешностей на КПД передачи.

### 3.3 Расчет контактных напряжений и деформаций в звеньях механизмов с телами качения

Звенья планетарных шариковых и роликовых передач испытывают большие контактные напряжения. Применим методы расчета контактных напряжений и деформаций соприкасающихся тел [42–50] к расчету исследуемых передач.

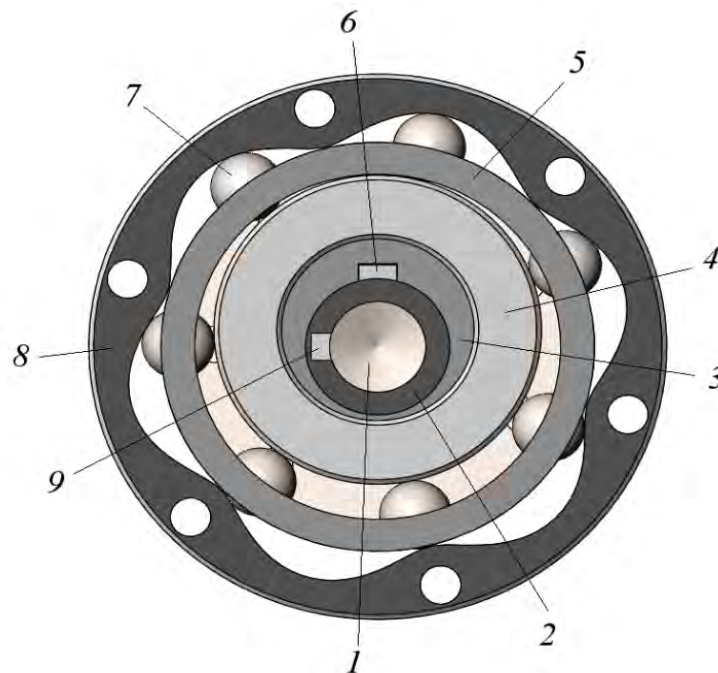
Условие прочности деталей зацепления по контактным напряжениям

$$\sigma_i \leq [\sigma_n], \quad (3.35)$$

где  $\sigma_i$  – расчетное контактное напряжение  $i$ -й контактной пары соприкасающихся деталей;

$[\sigma_n]$  – допускаемое контактное напряжение.

Наибольшие напряжения возникают в шариковых передачах, т. к. контактирующими элементами являются сателлиты-шарики с небольшими поверхностями контакта, взаимодействующие с ведущей и ведомой беговыми дорожками, а также с рабочими поверхностями водила-сепаратора. Рассмотрим схему планетарного редуктора с промежуточными телами качения – шариками, представленную на рисунке 3.3, которую можно использовать для различных типов планетарных шариковых передач.



1, 2 – полый ведущий вал; 3 – эксцентрик; 4 – подшипник (ведущее кольцо); 5 – водило-сепаратор; 6, 9 – шпонки; 7 – сателлиты; 8 – колесо с многопериодной дорожкой

Рисунок 3.3 – Схема зацепления планетарной шариковой передачи

*Контакт сателлита-шарика с ведущим кольцом.* В ведущем звене планетарной шариковой передачи наружная поверхность подшипника (ведущего кольца) 4, установленного на эксцентрик 3, соединенный с ведущим валом 2, является однопериодной беговой дорожкой и имеет форму окружности, смещенной относительно оси вращения ведущего вала 2 передачи на заданный эксцентриситет. Напряжение контактирующих элементов сателлита-шарика 7 и подшипника (ведущего кольца) 4 можно определить по формуле соприкасающихся сферических тел

$$\sigma_1 = 0,338 \sqrt[3]{\frac{F_{1N} E^2 (R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}, \quad (3.36)$$

где  $F_{1N}$  – нормальная сила, приложенная к ведущему кольцу;

$E$  – модуль упругости, принятый одинаковым для материала сателлита-шарика и ведущего кольца;

$R_1$  – радиус ведущего кольца;

$R_2$  – радиус сателлита-шарика.

Радиус поверхности контакта сателлита-шарика с ведущим кольцом

$$r_1 = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_{1N} R_1 R_2}{E (R_1 + R_2)}}. \quad (3.37)$$

Перемещение оси сателлита к оси вращения ведущего вала в результате деформации контактирующих поверхностей

$$h_1 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F_{1N}^2 (R_1 + R_2)}{E^2 R_1 R_2}}. \quad (3.38)$$

*Контакт сателлита-шарика с неподвижной многопериодной дорожкой.* В неподвижном звене многопериодная дорожка колеса 8 (см. рисунок 3.3) является эквидистантой к кривой, описываемой уравнением [3, 4]. Напряжение контактирующих поверхностей, учитывая большой радиус кривизны многопериодной дорожки колеса 8 в месте контакта с сателлитом-шариком 7, можно определить по формуле соприкасающихся сферического тела и плоскости

$$\sigma_2 = 0,338 \sqrt[3]{\frac{F_{2N} E^2}{R_2^2}}, \quad (3.39)$$

где  $F_{2N}$  – нормальная сила, приложенная к поверхности многопериодной дорожки.

Радиус поверхности контакта сателлита-шарика и многопериодной дорожки

$$r_2 = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_{2N} R_2}{E}}. \quad (3.40)$$

Перемещение оси сателлита к оси вращения ведущего вала в результате деформации контактирующих поверхностей

$$h_2 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F_{1N}^2}{E^2 R_2}}. \quad (3.41)$$

*Контакт сателлита-шарика с отверстием водила-сепаратора.* В ведомом звене напряжение контактирующих поверхностей можно определить по формуле соприкасающихся шара и шаровой сферы

$$\sigma_3 = 0,338 \sqrt[3]{\frac{F_3 E^2 (R_1 - R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}, \quad (3.42)$$

где  $F_3$  – нормальная сила, приложенная к поверхности отверстия водила-сепаратора;

$R_1$  – радиус отверстия водила-сепаратора.

Радиус поверхности контакта сателлита-шарика с отверстием водила-сепаратора

$$r_3 = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_3 R_1 R_2}{E (R_1 - R_2)}}. \quad (3.43)$$

Перемещение оси сателлита к оси вращения ведущего вала в результате деформации контактирующих поверхностей

$$h_3 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F_3^2 (R_1 - R_2)}{E^2 R_1 R_2}}. \quad (3.44)$$

Схему зацепления, представленную на рисунке 3.3, можно применить и для расчета разных типов планетарных передач с промежуточными телами качения – роликами.

*Контакт сателлита-ролика с ведущим кольцом.* Ведущая беговая дорожка представляет, так же как и для шариковой передачи, наружную поверхность ведущего кольца, эксцентрично установленного относительно оси ведущего вала. Напряжение контактирующих элементов сателлита-ролика и ведущего кольца можно определить по формуле пересекающихся цилиндров

$$\sigma_{1p} = \alpha \sqrt[3]{\frac{F_{1N}^2 E^2}{R_2^2}}, \quad (3.45)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от коэффициентов уравнения эллипса касания;

$R_2$  – радиус цилиндра сателлита-ролика.

*Контакт сателлита-ролика с многопериодной дорожкой или водилом-сепаратором.* В роликовой передаче многопериодная дорожка, так же как и в шариковой, в точках контакта имеет большие радиусы кривизны (практически плоскую поверхность), а водило-сепаратор имеет прямолнейные пазы, поверхности которых взаимодействуют с сателлитами-роликами. Поэтому напряжение этих контактирующих элементов можно определить по формуле соприкасающихся цилиндра и плоскости

$$\sigma_{23p} = 0,418 \sqrt{\frac{PE}{lR}}, \quad (3.46)$$

где  $P$  – нормальная сила, приложенная к поверхностям многопериодной дорожки или паза водила-сепаратора;

$l$  – длина сателлита-ролика.

Половина ширины контакта сопрягаемых поверхностей

$$b_{23} = 1,52 \sqrt{\frac{PR}{lE}}. \quad (3.47)$$

Перемещения (деформации) в роликовом зацеплении определялись методами компьютерного моделирования, т. к. нет единых формул для их расчета.

Так как сателлиты перемещаются с ускорениями, то возникают силы инерции, направленные от центра (когда сателлит доходит до вершины

беговой дорожки) и к центру (когда сателлит доходит до впадины беговой дорожки) вращения звеньев передачи. Эти силы инерции определяются по соотношению [3]

$$F_{uc} = m_c (a_o + a_n) \cos \alpha, \quad (3.48)$$

где  $m_c$  – масса сателлита;

$a_o$  – относительное ускорение сателлита;

$a_n$  – переносное ускорение сателлита;

$\alpha$  – угол подъема беговой дорожки.

Ведущее звено может быть не сбалансировано, т. к. имеет эксцентриситет. В этом случае нужно учитывать силы инерции ведущего звена

$$F_{u1} = m_1 A \omega_1^2 \cos \alpha_1, \quad (3.49)$$

где  $m_1$  – суммарная масса эксцентрично установленных на ведущем валу деталей;

$A$  – амплитуда беговой дорожки, равная эксцентриситету ведущего звена;

$\omega_1$  – угловая скорость ведущего звена;

$\alpha_1$  – угол подъема ведущей беговой дорожки.

Силы  $F_{uc}$  и  $F_{u1}$  прибавляются к соответствующим нормальным силам.

При расчете напряжений и деформаций в планетарных передачах с телами качения необходимо учитывать число нагруженных сателлитов и распределение нагрузки между ними, внутренние динамические нагрузки. Используя методики, приведенные в [3, 37, 42], введем поправочные коэффициенты в формулы (3.36)–(3.47). Тогда эти формулы будут представлены в следующем виде:

$$\sigma_1 = 0,338 \sqrt[3]{\frac{F_{1N} E^2 (R_1 + R_2)^2 K_1 K_3}{R_1^2 R_2^2 K_2}}; \quad (3.50)$$

$$r_1 = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_{1N} R_1 R_2 K_1 K_3}{E (R_1 + R_2) K_2}}; \quad (3.51)$$

$$h_1 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F_{1N}^2 (R_1 + R_2) K_1 K_3}{E^2 R_1 R_2 K_2}}; \quad (3.52)$$

$$\sigma_2 = 0,338 \sqrt[3]{\frac{F_{2N} E^2 K_1 K_3}{R_2^2 K_2}}; \quad (3.53)$$

$$r_2 = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_{2N} R_2 K_1 K_3}{E K_2}}; \quad (3.54)$$

$$h_2 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F_{1N}^2 K_1 K_3}{E^2 R_2 K_2}}; \quad (3.55)$$

$$\sigma_3 = 0,338 \sqrt[3]{\frac{F_3 E^2 (R_1 - R_2)^2 K_1 K_3}{R_1^2 R_2^2 K_2}}; \quad (3.56)$$

$$r_3 = 1,109 \sqrt[3]{\frac{F_3 R_1 R_2 K_1 K_3}{E (R_1 - R_2) K_2}}; \quad (3.57)$$

$$h_3 = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F_3^2 (R_1 - R_2) K_1 K_3}{E^2 R_1 R_2 K_2}}; \quad (3.58)$$

$$\sigma_{1p} = \alpha \sqrt[3]{\frac{F_{1N}^2 E^2 K_1 K_3}{R_2^2 K_2}}; \quad (3.59)$$

$$\sigma_{23p} = 0,418 \sqrt[3]{\frac{P E K_1 K_3}{l R K_2}}; \quad (3.60)$$

$$b_{23} = 1,52 \sqrt[3]{\frac{P R K_1 K_3}{l E K_2}}, \quad (3.61)$$

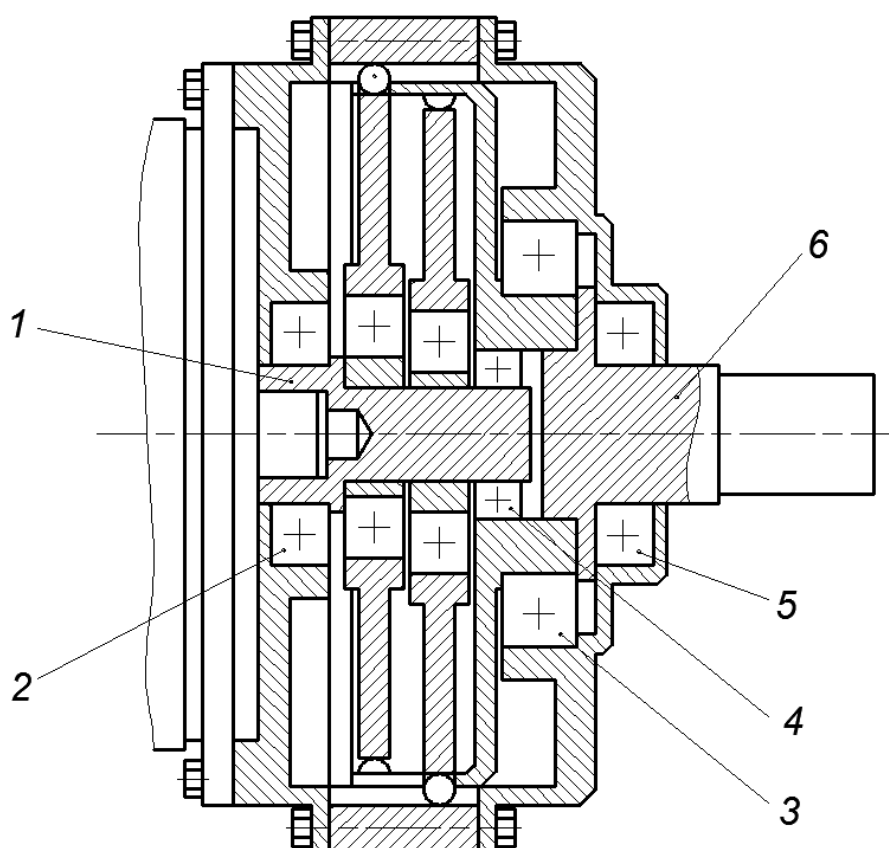
где  $K_1$  – коэффициент загрузки спутника [3];

$K_2$  – коэффициент неравномерности распределения нагрузки между спутниками из-за погрешностей изготовления деталей зацепления [3];

$K_3$  – динамический коэффициент, связанный с погрешностями изготовления и кинематической погрешностью передачи [3, 37].

### 3.4 Расчет напряжений и деформаций при изгибе и кручении узлов механизмов с телами качения

Наибольшим деформациям при изгибе и кручении подвергаются валы планетарных передач с телами качения. При расчете на прочность и жесткость ведущего и ведомого валов разработана методика, основанная на известных методах расчета [37, 42, 43]. При этом были определены наибольшие перемещения валов при изгибе и кручении под нагрузкой. На рисунке 3.4 представлена схема конструкции планетарной передачи, построенной по шестой кинематической схеме, которую можно рассматривать как базовую для статического расчета.



1 – ведущий вал; 2, 4 – опоры ведущего вала; 6 – ведомый вал; 3, 5 – опоры ведомого вала

Рисунок 3.4 – Схема планетарной передачи для статического расчета

Напряжения при изгибе

$$\sigma_{из} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma_{из}], \quad (3.62)$$

где  $\sigma_{из}$  – наибольшее расчетное нормальное напряжение при изгибе;

$M_{\max}$  – наибольший изгибающий момент в сечении вала;  
 $W$  – осевой момент сопротивления сечения;  
 $[\sigma_{из}]$  – допускаемое нормальное напряжение при изгибе;

$$\tau_{из} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{J \cdot b} \leq [\tau_{из}], \quad (3.63)$$

где  $\tau_{из}$  – наибольшее расчетное касательное напряжение при изгибе;

$Q_{\max}$  – наибольшая поперечная сила;

$S_{\max}$  – статический момент площади сечения;

$J$  – осевой момент инерции сечения;

$b$  – ширина сечения;

$[\tau_{из}]$  – допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Ведущий вал установлен на две опоры (радиальные подшипники). При изгибе ведущего вала рассматриваются две силы в вертикальном и горизонтальном направлениях, действующие между опорами. Тогда

$$M_{\max}^{ex} = \sqrt{\left(\frac{F_1' ab}{l}\right)^2 + \left(\frac{F_1 ab}{l}\right)^2}, \quad (3.64)$$

где  $M_{\max}^{ex}$  – наибольший изгибающий момент в поперечном сечении ведущего вала;

$F_1'$  – вертикальная изгибающая сила;

$F_1$  – горизонтальная изгибающая сила;

$a$  – расстояние от левой опоры до изгибающей силы;

$b$  – расстояние от правой опоры до изгибающей силы;

$l$  – расстояние между опорами.

Наибольшая поперечная сила, действующая на ведущий вал,

$$Q_{\max}^{ex} = \sqrt{F_1'^2 + F_1^2}. \quad (3.65)$$

Ведомый вал установлен на две опоры и выполнен как одно целое с водилом-сепаратором, который имеет консольное расположение относительно опоры. Наибольшая поперечная сила, действующая на ведомый вал, направлена на консоль водила-сепаратора со стороны сателлита. Ее можно найти по формуле

$$Q_{\max}^{вix} = F_3 = \frac{M_3 \chi_i}{\sum_{i=1}^m \chi_i R}, \quad (3.66)$$

где  $F_3$  – сила, направленная перпендикулярно рабочей поверхности водила-сепаратора;

$M_3$  – вращающий момент на ведомом валу;

$\chi_i$  – коэффициент нагрузки сателлита;

$R$  – средний радиус беговой дорожки;

$m$  – число сателлитов в передаче.

Наибольший изгибающий момент в сечении ведомого вала

$$M_{\max}^{\text{блх}} = Q_{\max}^{\text{блх}} \cdot c, \quad (3.67)$$

где  $c$  – расстояние от опоры до консольно приложенной силы  $Q_{\max}^{\text{блх}}$ .

Напряжения по четвертой теории прочности (энергетической) – наибольшей потенциальной энергии изменения формы

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{uz}^2 + 3\tau_{uz}^2} \leq [\sigma_{uz}]. \quad (3.68)$$

Деформации (перемещения) при изгибе рассматриваемых валов можно определить по формулам

$$Y_1 = \frac{Q_{\max}^{\text{блх}} a^2 b^2}{3EJl}; \quad (3.69)$$

$$Y_3 = \frac{Q_{\max}^{\text{блх}} c^2 (l + c)}{3EJ}, \quad (3.70)$$

где  $Y_1, Y_3$  – смещение осей ведущего и ведомого валов по нормали в результате деформаций.

Условие прочности при кручении валов

$$\tau_{кр} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_{кр}], \quad (3.71)$$

где  $\tau_{кр}$  – наибольшее расчетное напряжение при кручении;

$M_k$  – крутящий момент;

$W_p$  – момент сопротивления при кручении;

$[\tau_{кр}]$  – допускаемое напряжение при кручении.

## Деформации при кручении, угол закручивания валов

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\kappa} dl}{GJ_p} = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p}, \quad (3.72)$$

где  $l$  – длина вала между крайними сечениями, в которых приложены крутящие моменты;

$G$  – модуль упругости при сдвиге;

$J_p$  – полярный момент инерции сечения.

Условие жесткости вала

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p} \leq [\varphi], \quad (3.73)$$

где  $[\varphi]$  – допускаемый угол скручивания.

При расчете на сопротивление усталости использовалась известная методика [37]. При совместном действии изгиба и кручения запас сопротивления усталости определяется по формуле [37]

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} \geq [S], \quad (3.74)$$

где  $S_{\sigma}$  – запас сопротивления усталости по изгибу;

$S_{\tau}$  – запас сопротивления усталости по кручению.

### ***3.5 Результаты расчетов напряжений и деформаций и оценка их влияния на кинематическую точность и нагрузочную способность механизмов с телами качения***

Расчеты упругих напряжений и деформаций (перемещений) проведены по методике и математическим зависимостям, представленным в подразд. 3.3 и 3.4. Расчеты сведены в таблицы 3.1–3.3. В таблице 3.1 приведены результаты расчетов наибольших контактных напряжений и перемещений по методике и уравнениям, представленным в подразд. 3.4. Расчетная сила (см. таблицу 3.1) включает нормальную силу  $F_{iN}$  и силы инерции  $F_{uc}$  и  $F_{u1}$  в зависимости от направления движения сателлита. При расчете напряжений расчетная сила умножается на коэффициенты, которые учитывают распределение этой силы на все рабочие сателлиты по степени их загруженности.

Так, коэффициент  $k_1 = 0,234$  [3] уменьшает расчетную силу, действующую на наиболее нагруженный сателлит.

Для расчета приняты одноступенчатые шариковые и роликовые планетарные редукторы, построенные по шестой кинематической схеме [3] с передаточным отношением  $i = 7$ . Материал деталей зацепления – 40ХН, предел текучести  $\sigma_T = 1400$  МПа. Наибольшее допускаемое контактное напряжение  $[\sigma_n] = 2,8\sigma_T$  [3, 37].

Таблица 3.1 – Результаты расчета наибольших контактных напряжений и перемещений планетарных шариковых и роликовых редукторов

Контакт	Расчетная сила, Н	Расчетные напряжения, МПа	Допускаемые напряжения, МПа	Радиус (половина ширины) поверхности контакта, мм	Перемещение центра (оси) сателлита, мм
Сателлит-шарик с ведущей дорожкой	2546,5	3690,0	3920,0	0,3185	0,0250
Сателлит-ролик с ведущей дорожкой	2578,5	1243,1	3920,0	–	–
Сателлит-шарик с неподвижной дорожкой	2964,6	3313,5	3920,0	0,3552	0,0253
Сателлит-ролик с неподвижной дорожкой	2965,8	691,7	3920,0	(0,0503)	–
Сателлит-шарик с водилом-сепаратором	1288,6	2125,7	3920,0	0,2923	0,0133
Сателлит-ролик с водилом-сепаратором	1288,6	526,4	3920,0	(0,0383)	–

В таблице 3.2 приведены результаты расчетов наибольших напряжений и деформаций при изгибе, а в таблице 3.3 – при кручении валов планетарных шариковых и роликовых редукторов по методике и уравнениям, представленным в подразд. 3.4, с теми же характеристиками, что и при расчете контактных напряжений.

Как видно из таблицы 3.1, для заданных технических характеристик контактные напряжения шариковой передачи имеют большие значения, но они не превышают допускаемых напряжений. Напряжения и деформации при

изгибе и кручении элементов передач незначительны для рассматриваемых конструкций.

Таблица 3.2 – Результаты расчетов наибольших напряжений и перемещений при изгибе валов планетарных шариковых и роликовых редукторов

Элемент передачи	Изгибающий момент, Н·м	Расчетные нормальные напряжения, МПа	Допускаемые нормальные напряжения, МПа	Расчетные касательные напряжения, МПа	Допускаемые касательные напряжения, МПа	Деформации изгиба, мм
Ведущий вал	33,74	17,9	360	15,3	216	0,0014
Ведомый вал	55,41	1,6	360	1,4	216	0,0003

Таблица 3.3 – Результаты расчетов наибольших напряжений и перемещений при кручении валов планетарных шариковых и роликовых редукторов

Элемент передачи	Крутящий момент, Н·м	Расчетные касательные напряжения, МПа	Допускаемые касательные напряжения, МПа	Угол закручивания, град	Допускаемый угол закручивания, град	Перемещение на среднем радиусе, мм
Ведущий вал	9,55	2,5	230	0,0074	0,018	0,0054
Ведомый вал	53,48	0,8	230	0,0017	0,041	0,0012

Результаты расчетов деформаций и напряжений, проведенных в соответствии с теоретическими положениями, представленными в подразд. 3.3 и 3.4, позволяют использовать полученные численные значения при расчетах исследуемых передач на точность, определять их кинематические погрешности. Исследования показали, что напряжения в зацеплении могут быть значительными, что ограничивает передаваемую мощность редуктора, особенно в шариковых передачах из-за небольших поверхностей контакта. Деформации и перемещения в зоне упругости, наоборот, незначительны по сравнению с погрешностями изготовления и геометрическими неточностями при проектировании. Однако в точных передачах деформации могут составлять существенную часть кинематической погрешности и их нужно учитывать при кинематическом расчете редукторов.

При деформации под нагрузкой центр сателлита (например, шарика) сместится относительно его номинального положения и при этом сателлит-шарик будет передавать вращение по измененному закону движения –

траектории, отличной от номинальной, что приводит к образованию кинематической погрешности механизма.

Положение центра сателлита и кинематическую погрешность передачи можно определить с помощью разработанного метода расчета с использованием методологии, представленной в разд. 2.

Метод расчета кинематической погрешности от влияния упругих деформаций для любого типа планетарной передачи с промежуточными телами качения заключается в определении значений последовательных перемещений деталей зацепления ведущего, неподвижного и ведомого звеньев и, соответственно, центра сателлита передачи от действия сил при работе под нагрузкой, определении координат центра сателлита и его углового положения по разработанным математическим зависимостям.

Смещение центра сателлита в системе координат  $OXYZ$  в результате действия нормальных сил в звеньях передачи можно представить в виде однородной матрицы, задающей последовательность преобразований:  $h_1$  – смещение центра сателлита в направлении ведущей дорожки вдоль оси  $OX$  и  $h'_1$  – вдоль оси  $OY$ ;  $h_2$  – смещение центра сателлита в направлении неподвижной дорожки вдоль оси  $OX$  и  $h'_2$  – вдоль оси  $OY$ ;  $h_3$  – смещение центра сателлита в направлении водила-сепаратора вдоль оси  $OX$ .

$$\begin{aligned}
 T &= T_{x,h_1} \times T_{y,h'_1} \times T_{x,h_2} \times T_{y,h'_2} \times T_{x,h_3} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h'_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h'_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_1 + h_2 + h_3 \\ 0 & 1 & 0 & h'_1 + h'_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

Смещения от упругих деформаций в системе координат  $OXYZ$  в направлении осей  $OX$  и  $OY$  определим по математическим зависимостям

$$\begin{cases} h_1 = h_{1N} \sin \alpha_1; \\ h'_1 = h_{1N} \cos \alpha_1; \\ h_2 = h_{2N} \sin \alpha_2; \\ h'_2 = h_{2N} \cos \alpha_2; \\ h_3 = h_{3N}. \end{cases} \quad (3.76)$$

Суммарные смещения по координатам  $OX$  и  $OY$

$$\begin{cases} h_{\Sigma X} = h_1 + h_2 + h_3; \\ h_{\Sigma Y} = h'_1 + h'_2. \end{cases} \quad (3.77)$$

Координаты действительного центра сателлита  $x$  и  $y$  в результате упругих деформаций и кинематическая погрешность передачи  $F_{к.п}$  определяются по зависимостям

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi + h_{\Sigma X}; \\ y = \rho \sin \varphi + h_{\Sigma Y}; \end{cases} \quad (3.78)$$

$$F_{к.п} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \varphi_n. \quad (3.79)$$

На основе разработанного метода и полученных математических зависимостей рассчитана кинематическая погрешность для планетарных передач с промежуточными телами качения различных видов беговых дорожек и кинематических схем. На рисунке 3.5 показан график кинематической погрешности, вызванной упругими деформациями планетарной шариковой передачи с передаточным отношением  $i = 7$ , числом периодов многопериодной дорожки  $z_2 = 6$ , количеством сателлитов-шариков  $m = 7$ , средним радиусом беговых дорожек  $R = 41,5$  мм, амплитудой кривых беговых дорожек  $A = 3,75$  мм. Оси беговых дорожек заданы уравнением смещенной окружности.

График (см. рисунок 3.5) построен для оценки упругих деформаций (см. таблицы 3.1–3.3) на полупериоде беговых дорожек в пределах углов поворота, равных  $\pi$  для ведущей дорожки с  $z_1 = 1$  и  $\pi/z_2$  для дорожки с большим числом периодов. На остальных поверхностях контакта сопрягаемых деталей зацепления деформации будут повторяться. Наибольшая кинематическая погрешность, представленная на графике, составила 0,4 угл. мин. Для роликового зацепления смещения деталей могут быть несколько больше

в результате изгиба сателлитов, что показало компьютерное моделирование, и кинематическая погрешность при этом имеет большой размах, но она не превысила одной угловой минуты по результатам расчетов и моделирования различных исследуемых передач.

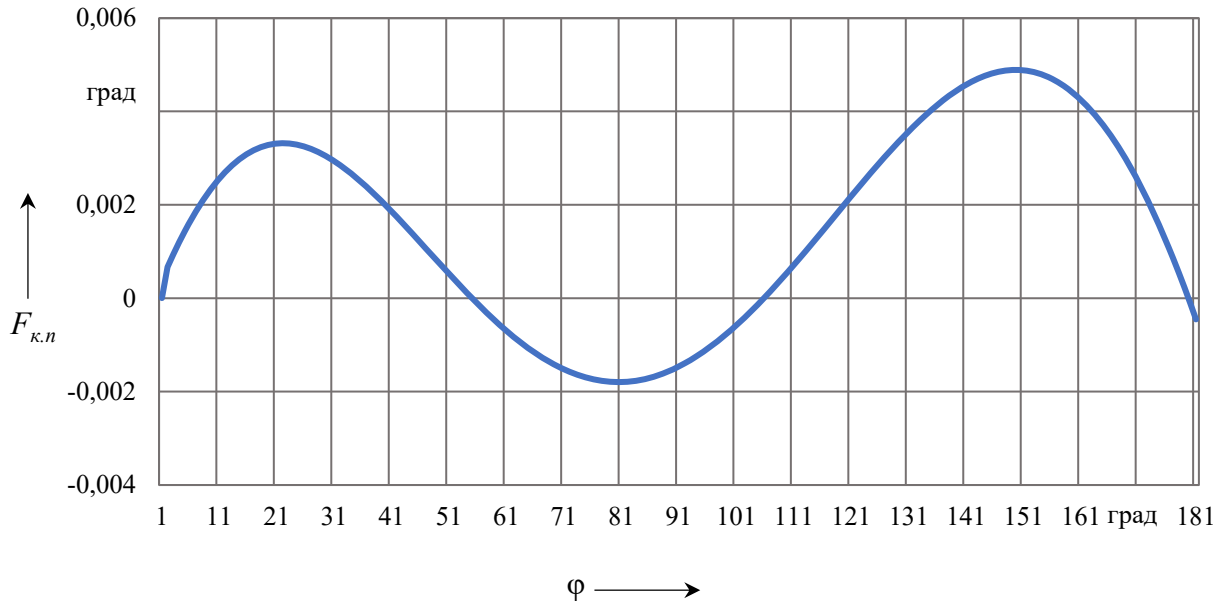
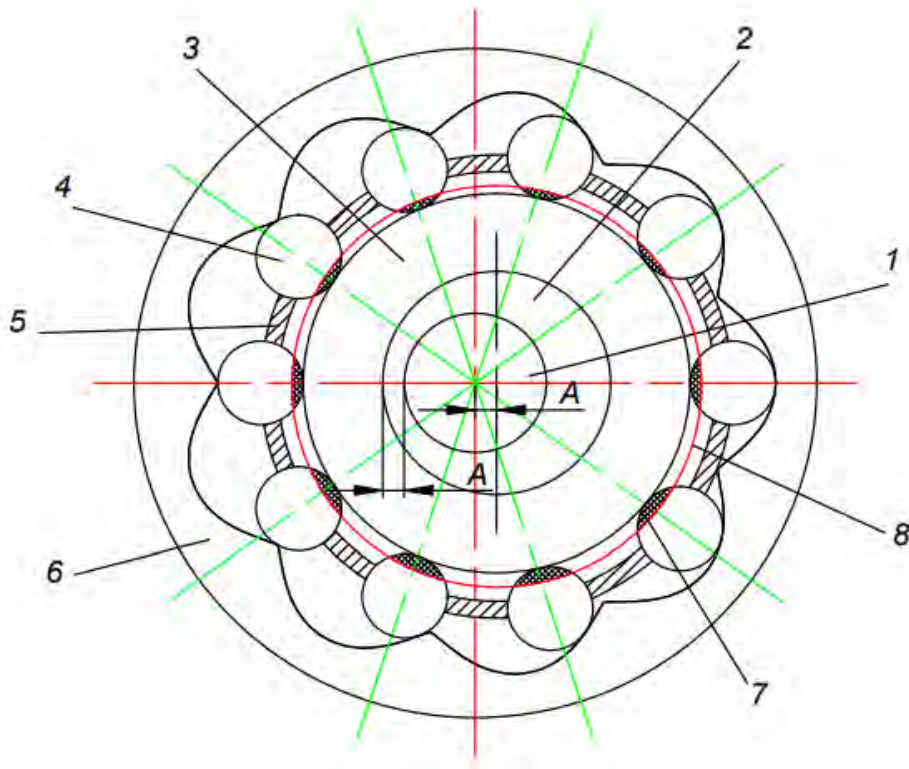


Рисунок 3.5 – График кинематической погрешности планетарной передачи от влияния упругих деформаций

Таким образом, упругие деформации мало влияют на кинематическую погрешность, которая значительно больше от влияния погрешностей изготовления для передач средней и низкой точности. Упругие деформации нужно учитывать при проектировании точных передач и механизмов. Они могут уменьшать (компенсировать) погрешности изготовления, а могут и увеличивать их.

На рисунке 3.6 представлена схема беззазорного зацепления планетарной передачи с сателлитами-шариками с числом сателлитов, равным 10. При небольших зазорах или их отсутствии в зацеплении погрешности изготовления могут компенсироваться за счет упругих деформаций. На рисунке 3.6 ведущее кольцо 3 показано с увеличенным диаметром  $\delta$ , не превышающим зону упругости. В результате возникает пересечение поверхностей контакта и упругая деформация между сателлитами 4 и ведущим кольцом 3, компенсирующая погрешность изготовления ведущего кольца 3.

На рисунке 3.7 показана схема зацепления этой же планетарной передачи с зазорами между сателлитами и отверстиями водила-сепаратора. В этом случае закон движения практически не нарушается, если беговые дорожки и диаметр сателлита высокоточные. В начале вращения только выбирается люфт при повороте ведущего звена на угол  $\varphi_1$ .



1 – ведущий вал; 2 – эксцентрик; 3 – ведущее кольцо с беговой дорожкой;  
4 – сателлит-шарик; 5 – водило-сепаратор; 6 – колесо с беговой дорожкой

Рисунок 3.6 – Схема беззазорного зацепления планетарной передачи с интерференцией

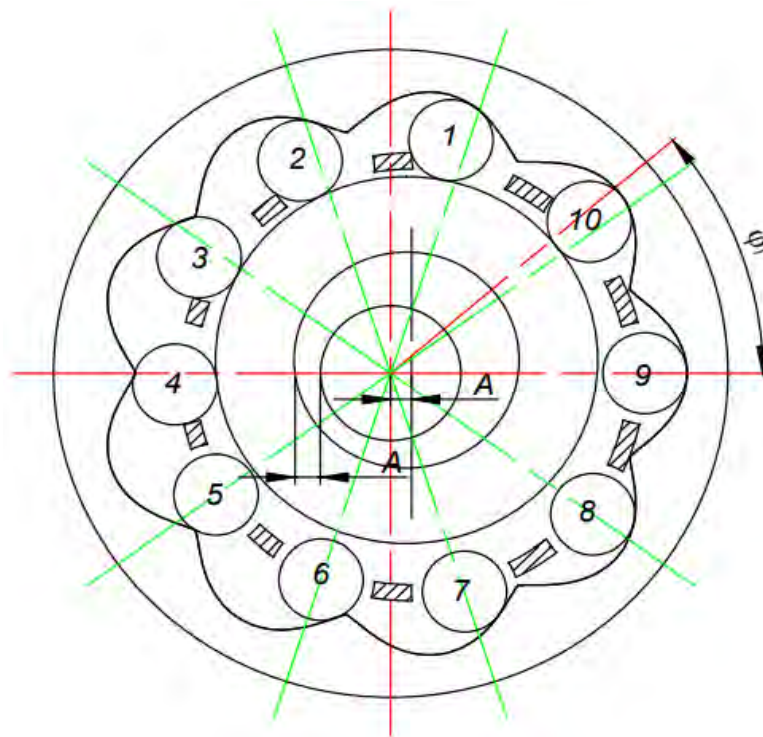


Рисунок 3.7 – Схема зацепления планетарной передачи с зазорами

Однако упругие деформации увеличивают погрешности угла поворота и, следовательно, кинематическую погрешность передачи. Если при наличии больших зазоров имеются погрешности изготовления других деталей зацепления, то упругие деформации также увеличивают кинематическую погрешность. Кроме того, наличие зазоров и погрешностей изготовления приводит к уменьшению числа сателлитов, находящихся в контакте с беговыми дорожками и водилом. Из-за наличия зазоров (см. рисунок 3.7) только сателлиты с номерами 1, 2 и 3 имеют контакт со всеми деталями зацепления, остальные сателлиты такого контакта не имеют.

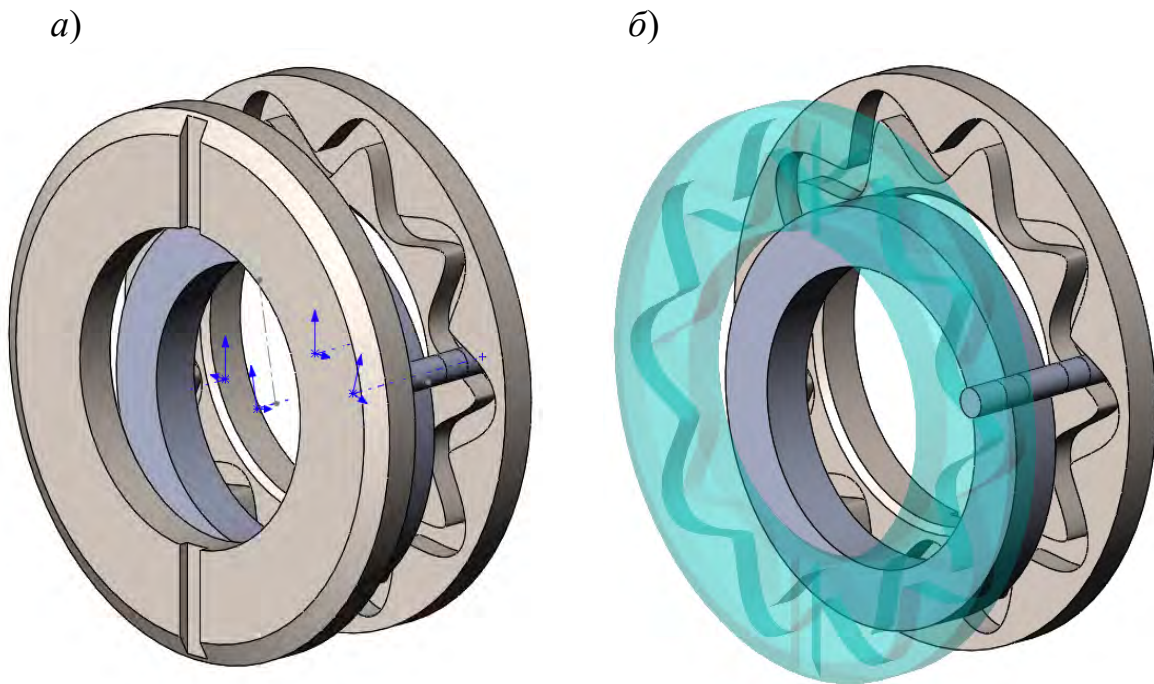
### ***3.6 Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния в роликовом зацеплении планетарных механизмов с промежуточными телами качения***

При решении задачи, включающей контакт цилиндров, нет единых методик и формул расчета перемещений материала деформируемых тел, что не позволяет однозначно рассчитать смещения сателлита-ролика при деформациях в выбранной системе координат. Кроме того, вышеприведенные формулы расчета контактных напряжений в роликовом зацеплении позволяют рассчитать только две сопрягаемые детали. В роликовом же механизме в зацеплении находятся элементы ведущего, неподвижного и ведомого звеньев в виде кольца, многопериодной дорожки и пазов диска-сепаратора, представляющего водило. Исходя из вышесказанного, проводилось компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния деталей зацепления в сборе планетарной роликовой передачи (редуктора) в среде SolidWorks.

В качестве исходных данных принят редуктор с передаточным отношением  $i = 11$ , числом периодов беговой дорожки на неподвижном диске  $z_2 = 10$ ; диаметром сателлита-ролика  $d_p = 8$  мм, длиной контакта с деталями зацепления  $l = 31$  мм; диаметром ведущего кольца  $d_k = 112$  мм, шириной  $h = 15$  мм. Материал моделируемых деталей – легированная сталь, предел текучести  $\sigma_m = 620$  МПа.

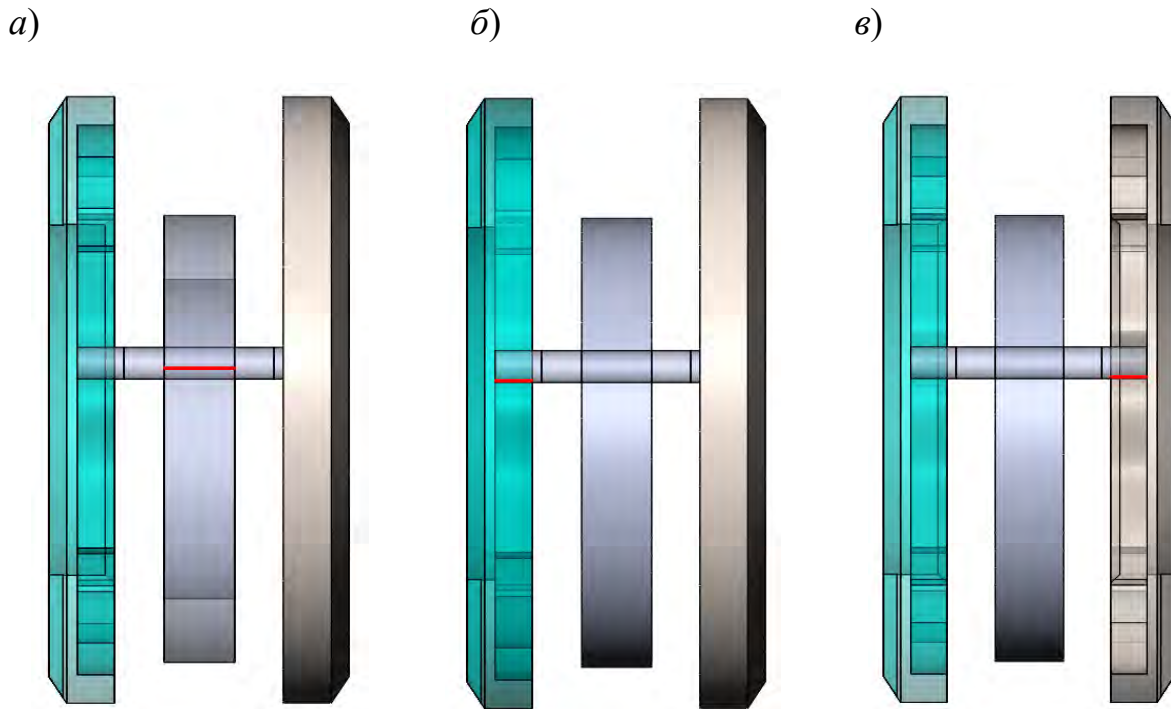
На рисунке 3.8, *а, б* показана созданная САД-модель планетарной роликовой передачи. Модель состоит из двух дисков с многопериодными беговыми дорожками, по которым перемещаются сателлиты, ведущего кольца и сателлита-ролика, взаимодействующего с кольцом и дисками.

На рисунке 3.9 изображена модель роликовой передачи с указанием контакта. Задан контакт деталей зацепления (см. рисунок 3.9, *а–в*), который является линейным (показан красной линией) при взаимодействии сателлита-ролика с деталями передачи.



*a* – диски показаны с двух сторон; *б* – на левом диске показана многопериодная дорожка

Рисунок 3.8 – CAD-модель роликовой передачи



*a* – контакт сателлита-ролика с ведущим кольцом; *б* – контакт сателлита-ролика с многопериодной дорожкой и левым диском; *в* – контакт сателлита-ролика с многопериодной дорожкой и правым диском

Рисунок 3.9 – Модели роликовой передачи с указанием контакта

Заданы параметры: крепление модели, приложение и направление действующих сил (рисунок 3.10, а), сетка (см. рисунок 3.10, б).

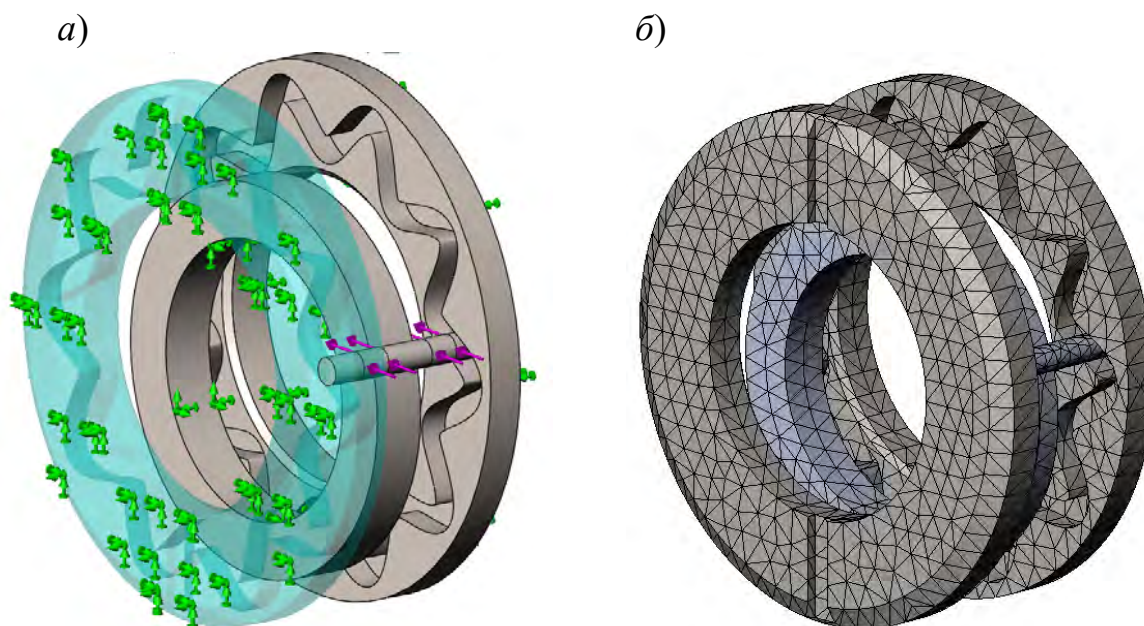


Рисунок 3.10 – Модели передачи с заданными параметрами

После решения заданного исследования программой SolidWorks получены эпюры результатов.

На рисунке 3.11 показаны модель и результаты напряжений моделируемых деталей; на рисунках 3.12 и 3.13 показаны модель, перемещения и деформации моделируемых деталей.

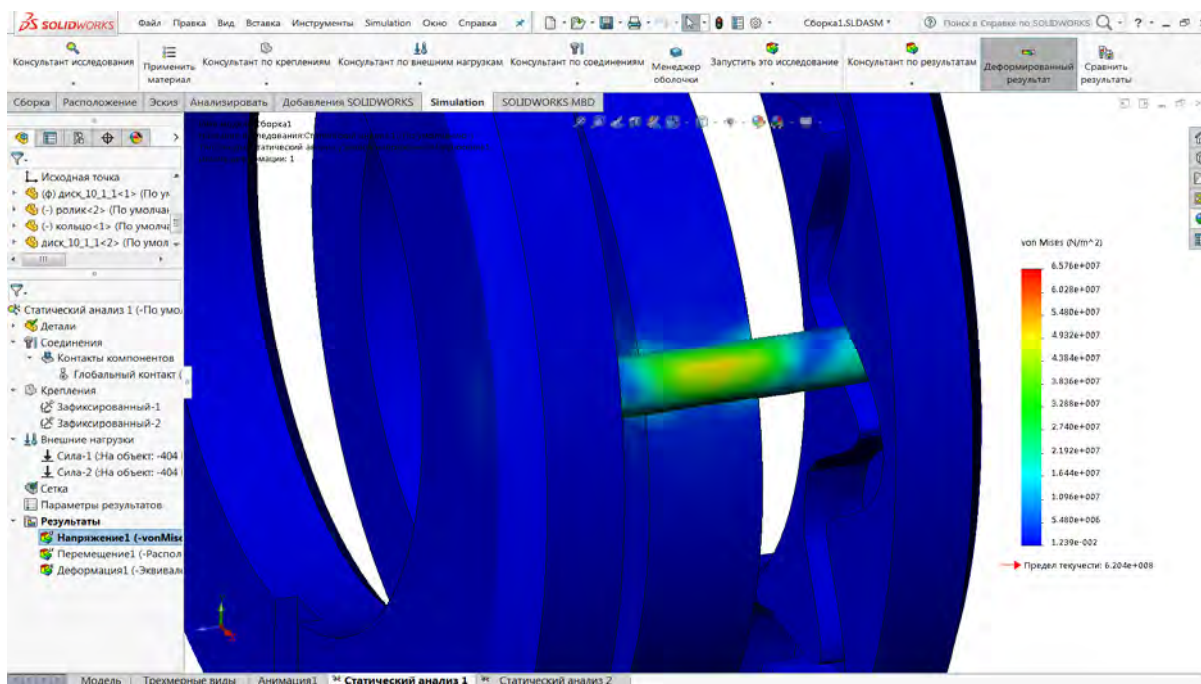


Рисунок 3.11 – Эпюра напряжений деталей зацепления

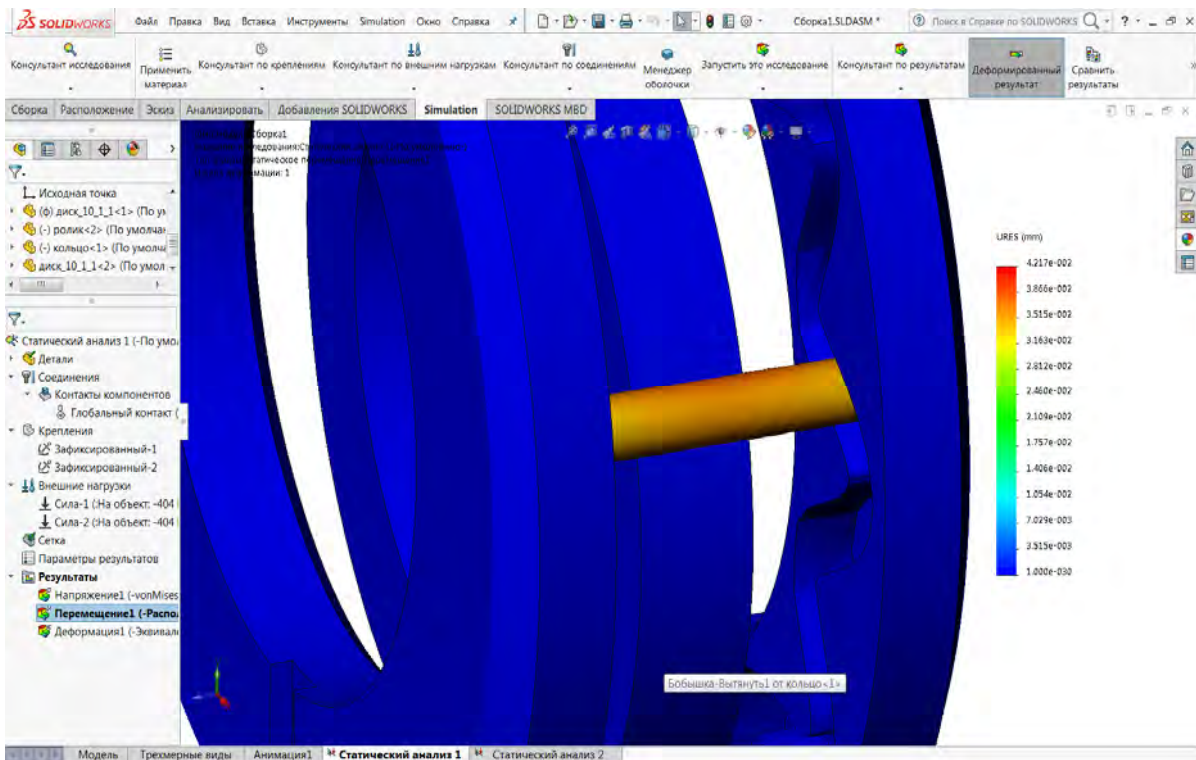


Рисунок 3.12 – Эпюра перемещений деталей зацепления

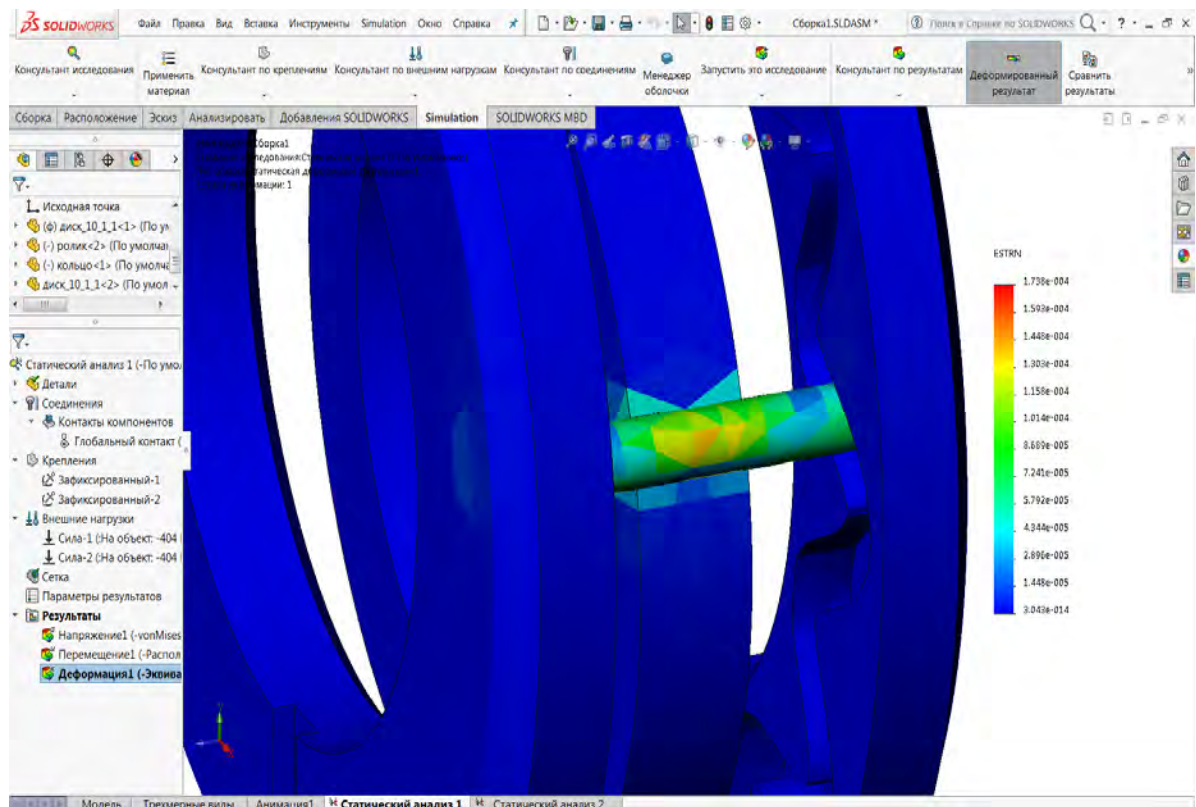


Рисунок 3.13 – Эпюра деформаций деталей зацепления

По результатам моделирования можно сделать следующие выводы. Напряжения на эпюре (см. рисунок 3.8) не превышают предела текучести. Они меньше рассчитанных контактных напряжений, представленных в таблице 3.6, т. к. в модели контакт происходит не отдельно с каждой парой соприкасающихся деталей (как при расчете по формулам), а со всеми контактирующими деталями зацепления в сборе. Деформации и перемещения при моделировании учитывают контактные напряжения и изгиб сателлита-ролика, установленного на опорах многопериодных дорожек дисков. Суммарное перемещение в направлении трех координатных осей составило 0,0422 мм.

## 4 Разработка методологии экспериментальной оценки точности и технологического контроля механизмов с телами качения

Разработаны следующие методы экспериментальных исследований параметров точности передач с промежуточными телами качения:

- комплексной оценки;
- дифференцированный;
- с использованием спектрального анализа;
- комбинированный.

### 4.1 Метод комплексной оценки точности передач с промежуточными телами качения

Для проведения экспериментальных исследований параметров точности планетарных передач (редуцирующих механизмов) с промежуточными телами качения методом комплексной оценки использовались автоматизированные стенды [51–61]. На рисунке 4.1 показана схема стенда для автоматизированного контроля кинематической погрешности планетарных передач с промежуточными телами качения, который является базовым. На его основе разработаны новые усовершенствованные конструкции [57, 58, 61].

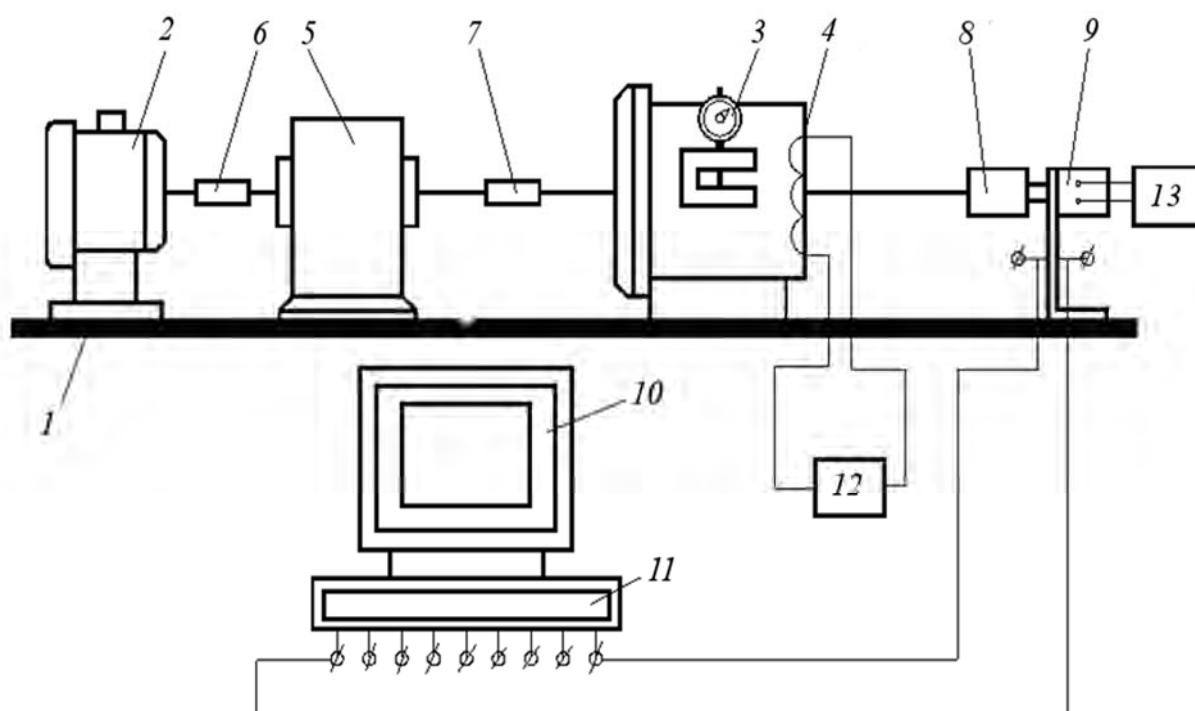


Рисунок 4.1 – Схема стенда для автоматизированного контроля кинематической погрешности планетарных передач с промежуточными телами качения

На стенде измеряется комплексный показатель точности передачи (редуктора) – кинематическая погрешность.

На общем основании 1 установлены приводной двигатель 2, электромагнитный тормоз 3 с обмоткой управления 4. Испытуемый редуктор 5 соединен муфтами 6 и 7 с двигателем и тормозом, а пружинной муфтой 8 – со стандартным преобразователем угловых перемещений 9 типа ВЕ 178А, снабженным оптическим формирователем импульсов с числом отсчетов за оборот  $N = 2500$ . Информация от преобразователя обрабатывается информационно-измерительной системой 11, выполненной в виде платы расширения ПЭВМ 10. Питание преобразователя и тормоза осуществляется источниками 12 и 13. Наличие электромагнитного тормоза дает возможность исследовать изменение кинематической погрешности передачи при различных нагрузках, моделирующих эксплуатационные условия.

Метод комплексной оценки на стенде заключается в измерении кинематической погрешности передачи путем снятия с преобразователя угловых перемещений при вращении ведомого вала последовательности прямоугольных импульсов равной амплитуды, но различной скважности, связанной с неравномерностью вращения. Последовательность импульсов, формируемая преобразователем угловых перемещений, вводится в информационно-измерительную систему. Информация с преобразователя фиксируется в ASCII-файле в виде таблицы «напряжение – время». Кинематическую погрешность в угловых величинах при этом можно рассчитать как отклонение частоты следования импульсов от ее среднего значения:

$$F_{к.н} = \Delta\varphi = (t_k - k t_{cp}) \omega \frac{180^\circ}{\pi}, \quad (4.1)$$

где  $t_k$  – время, соответствующее началу фронта  $k$ -го импульса;

$t_{cp}$  – средняя длительность импульсов;

$\omega$  – угловая частота вращения выходного вала.

Данная формула позволяет наиболее точно оценить кинематическую погрешность, если  $\omega = \text{const}$ . В этом случае на ведущем валу передачи (на валу приводного электродвигателя) может быть установлена инерционная масса, обеспечивающая равномерность вращения ведущего вала исследуемой передачи. Если ротор приводного двигателя обладает достаточной инерционностью, то в дополнительной инерционной массе нет необходимости. Результаты расчетов экспериментальных данных со стенда представляются в виде графика кинематической погрешности редуктора за полный оборот выходного вала. На рисунке 4.2 показан график, полученный на стенде при оценке

точности одноступенчатого планетарного роликового редуктора с передаточным отношением  $i = 14$ .

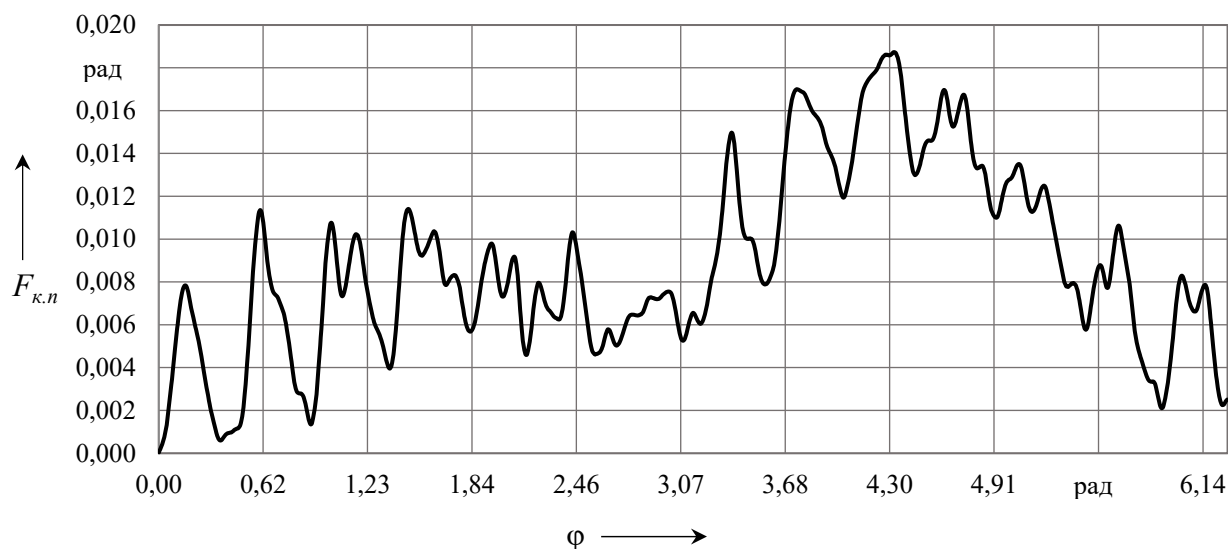


Рисунок 4.2 – График кинематической погрешности планетарного роликового редуктора

На графике (см. рисунок 4.2) можно определить наибольшую кинематическую погрешность передачи как разность наибольшего и наименьшего значений. На графике выделяются местные кинематические погрешности в виде волн с большой амплитудой. Их количество равно передаточному отношению передачи.

Комплексный метод позволяет исследовать и контролировать точность передачи, включая конструктивные неточности и погрешности изготовления и упругие деформации. Оценка точности передачи без нагрузки или с небольшой нагрузкой на выходном валу 1...2 Н·м для выборки зазоров используется для контроля точности изготовления. Исследования под нагрузкой 10...100 Н·м и более позволяют оценить точность передачи в условиях, близких к эксплуатационным. При контроле изготовления метод эффективно применять при средней точности изготовления планетарных механизмов. В сравнении со степенями точности зубчатых колес и передач этот метод можно использовать при изготовлении с 8-й и 9-й степенями точности. При этом многопериодные дорожки и гнезда водил-сепараторов для размещения сателлитов обрабатываются лезвийным инструментом без отделочных операций. Многопериодные дорожки могут иметь упрощенную геометрическую форму. Многопериодная кривая при этом заменяется прямыми линиями на боковом профиле и окружностями в вершинах и впадинах. В этом случае конструкция детали с беговой дорожкой является достаточно технологичной.

#### ***4.2 Дифференцированный метод исследования точности изготовления ответственных деталей планетарных передач с промежуточными телами качения***

Экспериментальные исследования точности изготовления наиболее ответственных деталей планетарных передач с промежуточными телами качения проводились дифференцированным методом с помощью координатно-измерительной машины (КИМ) Carl Zeiss DuraMax 5/5/5 с программным обеспечением Calypso (рисунок 4.3) [62–68].



Рисунок 4.3 – Координатно-измерительная машина DuraMax 5/5/5

КИМ позволяет контролировать точность изготовления профиля много-периодных дорожек и поверхностей гнезд водил-сепараторов планетарных

передач с телами качения методом координатных измерений и обрабатывать полученные результаты. С помощью программного обеспечения КИМ выполняются следующие функции: определяется стратегия измерений (решение о последовательности измерения координат отдельных точек и элементов детали); устанавливается число точек, подлежащих измерению; назначаются параметры геометрической точности, которые необходимо рассчитать; указываются данные, выводимые в протокол в результате измерений.

Предложен метод оценки точности изготовления профиля многопериодной дорожки на основе использования технологий координатных измерений на координатно-измерительной машине (КИМ).

Метод заключается в измерении на КИМ изготовленного реального профиля многопериодной дорожки в разных сечениях путем сканирования и оцифровки криволинейной поверхности многопериодной дорожки с выводом координат опорных точек полученных кривых в ASCII-файл, получении массива координат точек в результате измерений, определяющего внутренний контур колеса после обработки, и проведении вычислений погрешностей профиля дорожки. Координаты точек определялись следующим образом. Щуп координатно-измерительной машины (КИМ), соприкасаясь с изготовленной многопериодной дорожкой и перемещаясь по ней, сканировал ее поверхность. С помощью встроенного программного обеспечения Calypso КИМ создавал точки реального (изготовленного) профиля многопериодной дорожки с заданным при предварительной настройке шагом, координаты которых записывались в автоматическом режиме в текстовый файл. Получено, например, 2500 точек, описывающих реальный профиль многопериодной дорожки после изготовления. Координаты полученных точек использовались в дальнейшем при расчете показателей точности передачи.

В среде VBA Excel были разработаны компьютерные программы для обработки экспериментальных результатов измерений на КИМ и расчета показателей кинематической точности исследуемых механизмов. Новизна метода заключается в том, что он применен впервые для оценки точности изготовления профиля многопериодных дорожек передач с телами качения и позволяет определять в автоматическом режиме координаты точек изготовленного профиля и с помощью разработанных компьютерных программ рассчитывать показатели кинематической точности.

На рисунке 4.4 показана круговая диаграмма профиля многопериодной дорожки после изготовления, построенная по координатам точек, измеренных на КИМ; на рисунке 4.5 показан график накопленной погрешности профиля дорожки, характеризующий разность действительного и номинального угловых шагов точек профиля с суммированием предыдущего значения.

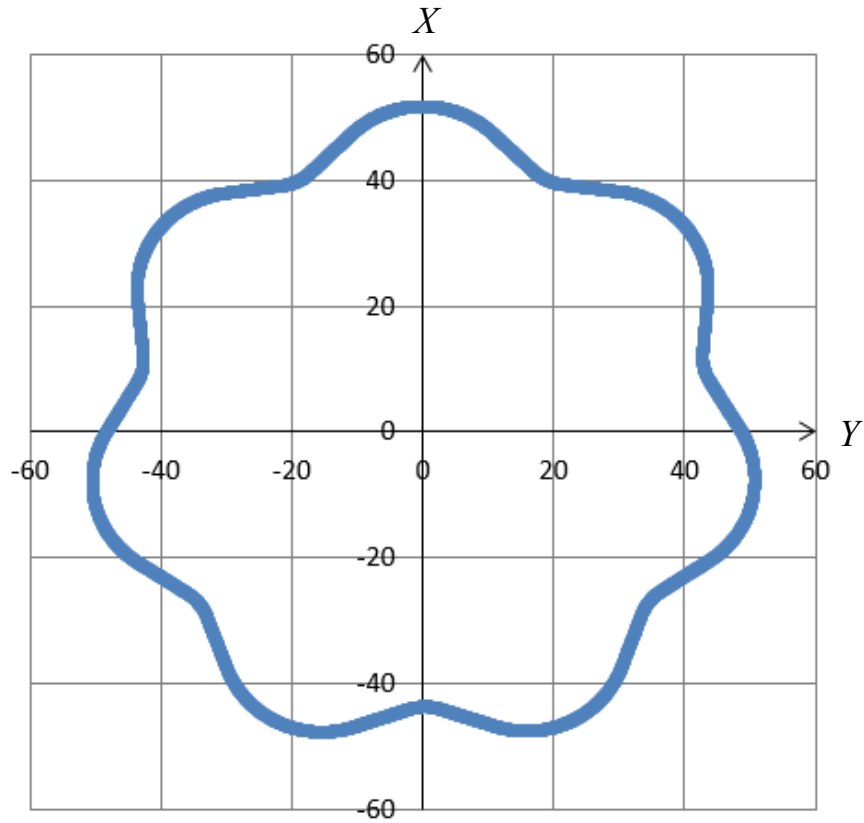


Рисунок 4.4 – Окно программы VBA Excel с круговой диаграммой периодического профиля дорожки

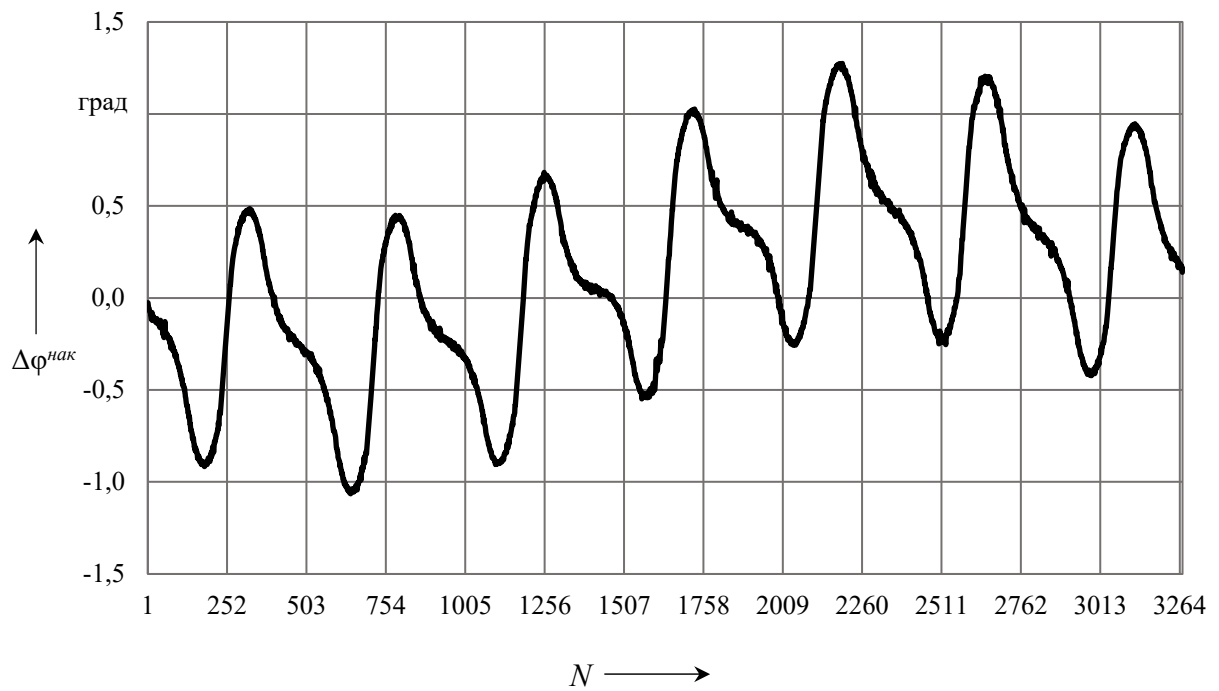


Рисунок 4.5 – График накопленной погрешности профиля многопериодной дорожки

График (см. рисунок 4.5) наиболее полно характеризует погрешности профиля многопериодной дорожки.

Дифференцированным методом можно контролировать точность геометрических параметров основных деталей планетарных передач с телами качения средней и пониженной точности. Данный метод предполагает в основном контроль параметров профиля многопериодных дорожек, т. к. они в наибольшей степени влияют на кинематическую погрешность передачи (редуктора). Как показали исследования, конструктивные и технологические погрешности деталей с многопериодными дорожками могут составлять до 70 % суммарной кинематической погрешности передачи в сборе, поэтому данный метод можно эффективно использовать при контроле передач, изготовленных с 8–12-й степенью точности, в сравнении с зубчатыми передачами, не выполняя комплексный контроль. При этом многопериодные дорожки могут изготавливаться без отделочной обработки.

#### ***4.3 Метод оценки точности передачи с использованием спектрального анализа***

Оценка точности планетарного редуктора после изготовления с использованием спектрального анализа позволяет определить гармонические составляющие кинематической погрешности и установить причины их образования, а также расширить количество параметров контроля.

Метод спектрального анализа предполагает построение амплитудно-частотных спектров кинематической погрешности передачи при испытаниях на стенде.

Амплитудно-частотный спектр функции изменения угловых значений параметра можно получить, используя ряды Фурье, по формуле

$$F(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (4.2)$$

где  $F(\varphi)$  – функция изменения угловых значений параметра;

$a_0/2$  – нулевой член разложения;

$a_k, b_k$  – коэффициенты ряда Фурье;

$k$  – порядковый номер гармонической составляющей.

Формулу (4.2), не учитывая нулевой член разложения, можно представить в виде

$$F(\varphi) = \sum_{k=1}^n c_k \sin(k\varphi + \varphi_k), \quad (4.3)$$

где  $c_k$  – амплитуда  $k$ -й гармоники;

$\varphi_k$  – угол фазового смещения  $k$ -й гармоники;

$n$  – принятое число членов разложения функции  $F(\varphi)$ .

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad (4.4)$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n F(\varphi) \cos(k\varphi); \quad (4.5)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n F(\varphi) \sin(k\varphi). \quad (4.6)$$

На рисунке 4.6 показан график амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$ , построенный после математической обработки значений кинематической погрешности редуктора, представленных на рисунке 4.2, с использованием формул (4.2)–(4.6).

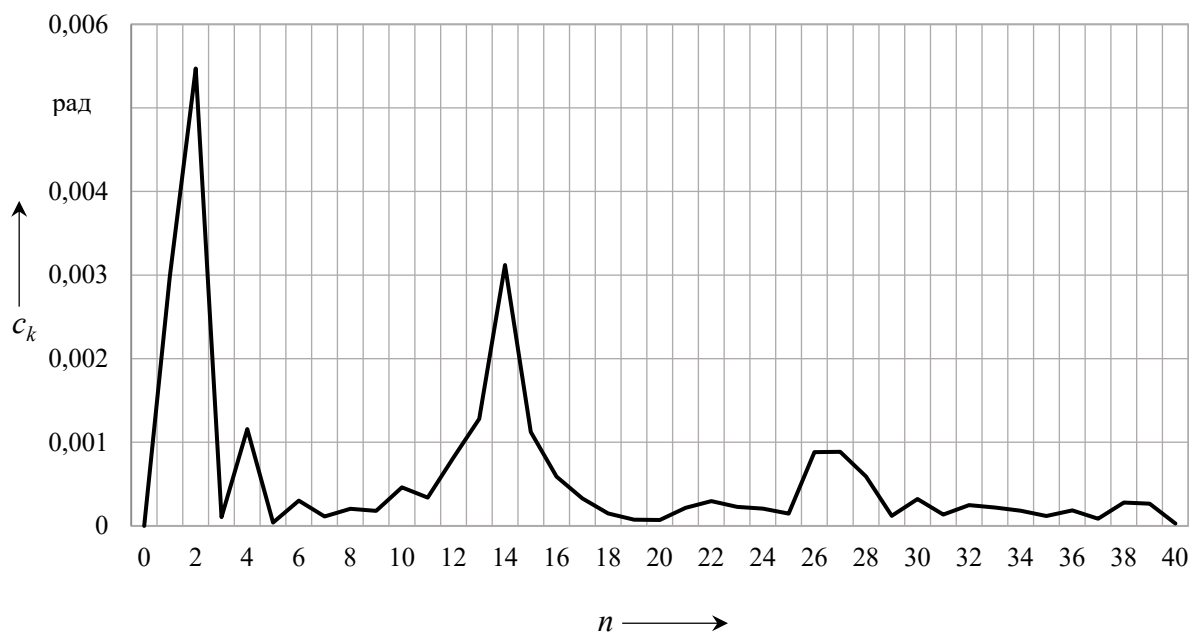


Рисунок 4.6 – График амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$

Наибольшие амплитуды гармоник  $c_k$  на графике (см. рисунок 4.6) характеризуют конструктивные и технологические причины кинематической погрешности передачи. По номеру гармоники можно определить частоту

изменения элементарной погрешности и установить, к какой детали или узлу передачи эта погрешность относится. Из графика видны гармоники с наибольшими амплитудами, которые рассматривают при спектральном анализе.

#### ***4.4 Комбинированный метод исследования и оценки точности механических передач***

Комбинированный метод предусматривает исследование и оценку точности любой механической передачи, а также планетарных передач с промежуточными телами качения несколькими вышерассмотренными методами.

Используя комбинированный метод, сначала проводятся контроль и оценка точности передачи, например, комплексным методом, в результате которого после измерений на стенде и расчета получен график кинематической погрешности редуктора (см. рисунок 4.2). График позволяет определить наибольшую кинематическую погрешность передачи и местные кинематические погрешности. Затем на основе значений, представленных на графике как функции кинематической погрешности, рассчитывается и строится амплитудно-частотный спектр (см. рисунок 4.6), по которому можно установить и проанализировать гармонические составляющие спектра.

Комбинированным методом можно также проводить оценку и сопоставление точности изготовления деталей с многопериодными дорожками и передачи в сборе. Значения накопленной погрешности профиля дорожки (см. рисунок 4.5) можно рассматривать как функцию кинематической погрешности детали передачи. Разложив эту функцию в ряд Фурье, получим амплитудно-частотный спектр значимых гармонических составляющих кинематической погрешности. На рисунке 4.7 показан график амплитудно-частотного спектра значений, представленных на рисунке 4.5.

График, характеризующий погрешности профиля многопериодной дорожки (см. рисунок 4.7), можно сравнить с графиком амплитудно-частотного спектра, полученного экспериментально на стенде, кинематической погрешности передачи в сборе (редуцирующего механизма). Сравнив графики и номера гармоник с наибольшими амплитудами, можно сделать полный анализ точности изготовления передачи (механизма) и влияния геометрических параметров многопериодных дорожек на кинематическую погрешность передачи.

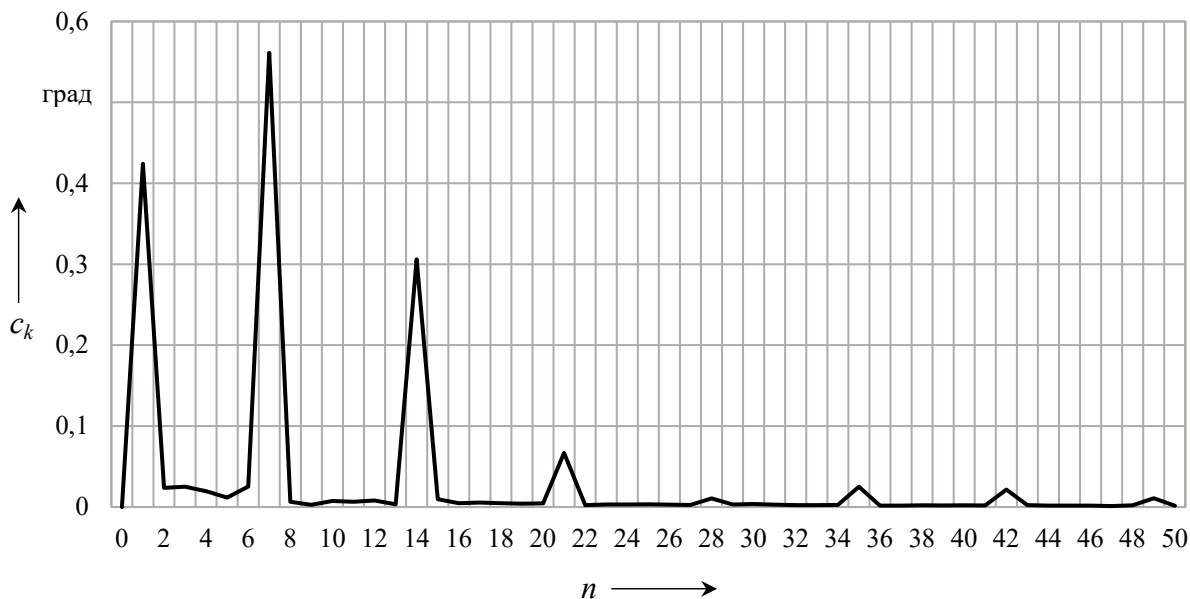


Рисунок 4.7 – Амплитудно-частотный спектр значений накопленной погрешности профиля многопериодной дорожки

#### ***4.5 Новые средства и методики оценки точности и контроля механизмов с телами качения***

Наиболее эффективными средствами комплексного контроля передач и построенных на их основе редукторов являются специализированные стенды. Комплексные методы позволяют контролировать точность механизмов после их изготовления без нагрузки, а также моделировать работу редуктора под нагрузкой на выходном валу и при этом оценивать его кинематические и точностные параметры. Одним из основных комплексных параметров точности изготовления передачи является кинематическая погрешность, которая характеризует ее кинематическую точность и плавность работы. Для некоторых типов передач, например планетарных шариковых и роликовых, комплексный метод контроля является единственно возможным, т. к. эти передачи и редукторы имеют узлы и детали с различной сложностью конструкции и геометрических форм и сложные причинно-следственные связи точностных параметров деталей с кинематической точностью механической передачи.

Известны установки (стенды) для оценки точности механических передач в сборе с соосным расположением валов [21, 22]. Эти установки и их варианты часто недостаточно функциональны, в отличие от разработанных и нижепредставленных стендов, позволяющих проводить исследования и контроль на современном техническом уровне автоматизации технологических процессов. Возможность контролировать не один, а ряд параметров

позволяет более комплексно оценивать точность изготовления редуцирующих механизмов и их кинематические и точностные характеристики в процессе эксплуатации.

Исходя из вышеотмеченного, разработана автоматизированная информационно-измерительная система оценки и контроля кинематических параметров механических передач, которая включает:

- автоматизированные стенды;
- измерительную систему;
- нагружающие устройства;
- методы и программное обеспечение обработки импульсных сигналов;
- методики и программное обеспечение расчета кинематических параметров.

#### *4.5.1 Стенды для контроля параметров точности и кинематических характеристик редуцирующих механизмов.*

Разработанные автоматизированные стенды имеют следующие преимущества по сравнению с известными аналогами:

- универсальность, модульный принцип компоновки;
- большая информативность по сравнению с аналогами, возможность контролировать различные кинематические и точностные параметры;
- повышенная точность контроля за счет использования двух датчиков угловых перемещений на входе и выходе;
- компенсация потерь мощности, энергосбережение.

На рисунке 4.8 показана структурная схема первого разработанного стенда с нагружающим устройством.

На схеме (см. рисунок 4.8) электродвигатель задает вращение испытуемому редуктору. С помощью регулятора скорости можно изменять частоту вращения электродвигателя. Для задания нагрузки на выходном валу используется электромагнитный тормоз, подключенный к источнику питания. Электродвигатель, редуктор и тормоз соединяются компенсирующими муфтами. Высокую точность измерения обеспечивают датчики угла поворота, установленные на входе и выходе системы. Сигналы от датчиков поступают на устройство измерения и с помощью программного обеспечения (ПО) пересчитываются в углы поворота ведущего и ведомого валов редуктора.

Данный стенд позволяет проводить контроль кинематической погрешности, угловой скорости, углового ускорения и частоты вращения валов редуктора, а также его передаточного отношения. Погрешности угла вращения электродвигателя фиксируются входным датчиком и учитываются при расчете за полный оборот выходного вала. Регулятор скорости позволяет проводить исследования и контроль с различной частотой вращения ведущего вала редуктора. Электромагнитный тормоз создает условия, близкие к

эксплуатационным, и позволяет определять контролируемые параметры редуктора с разными нагрузками. При этом учитываются не только погрешности изготовления испытуемых механизмов, но и упругие деформации деталей, возможные динамические явления, удары в зацеплении.

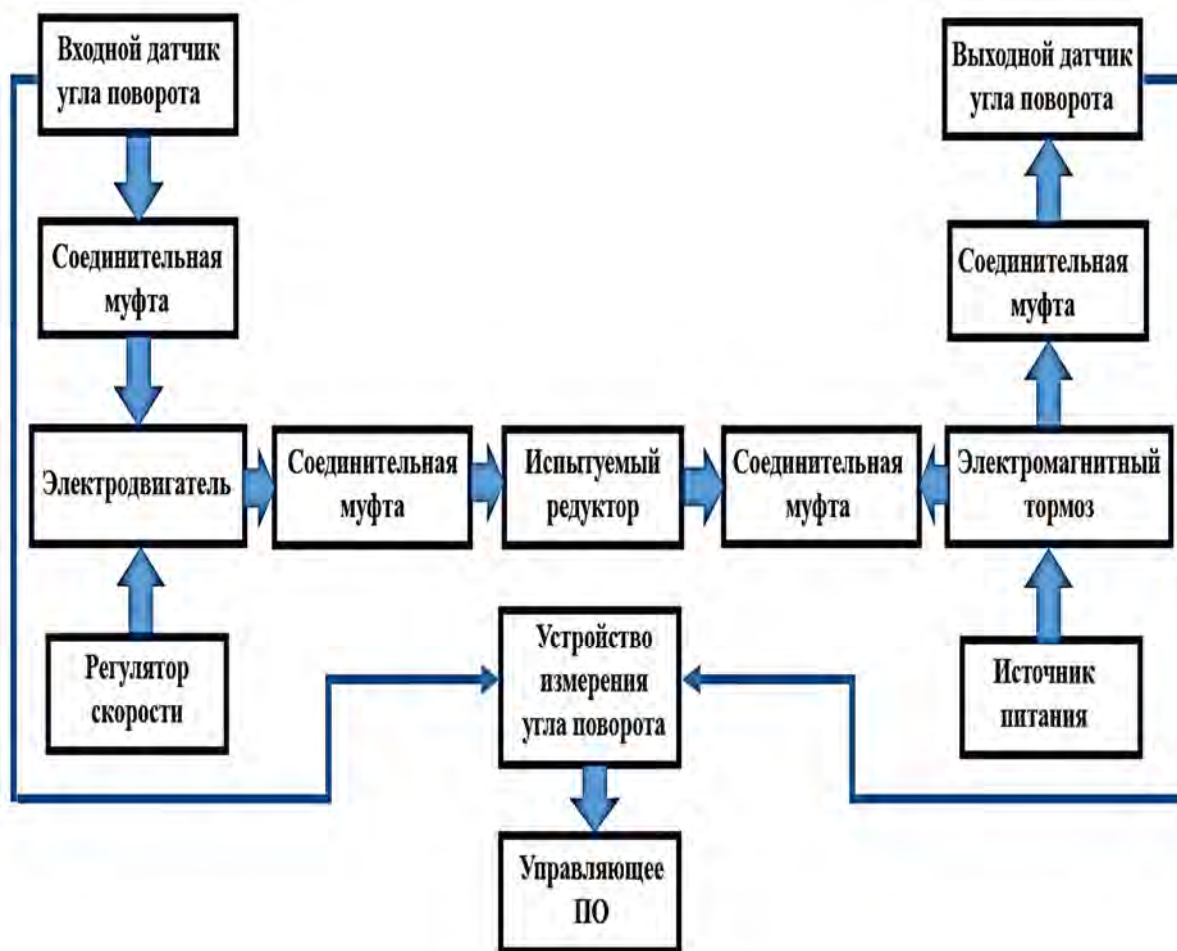


Рисунок 4.8 – Структурная схема автоматизированного стенда с нагружающим устройством

На рисунке 4.9 показана структурная схема энергосберегающего стенда с несколько измененной компоновкой. Вместо нагружающего электромагнитного тормоза используются мотор-редуктор, соединенный с выходным валом испытуемого редуктора, и регулятор скорости, понижающий частоту вращения (см. рисунок 4.9). Использование мотор-редуктора позволяет компенсировать потребляемую электроэнергию (за исключением потерь на трение) при работе стенда, т. к. мотор-редуктор выполняет в этом случае роль генератора и обеспечивает энергосбережение за счет возврата энергии в сеть. С помощью регулятора скорости (преобразователя частоты) понижается частота вращения мотор-редуктора, по сравнению с номинальной частотой вращения испытуемой передачи, до величины, необходимой для создания

нагружающего момента. При этом ведомый вал мотор-редуктора совершает разгон до требуемой скорости вращения выходного вала испытуемой передачи.



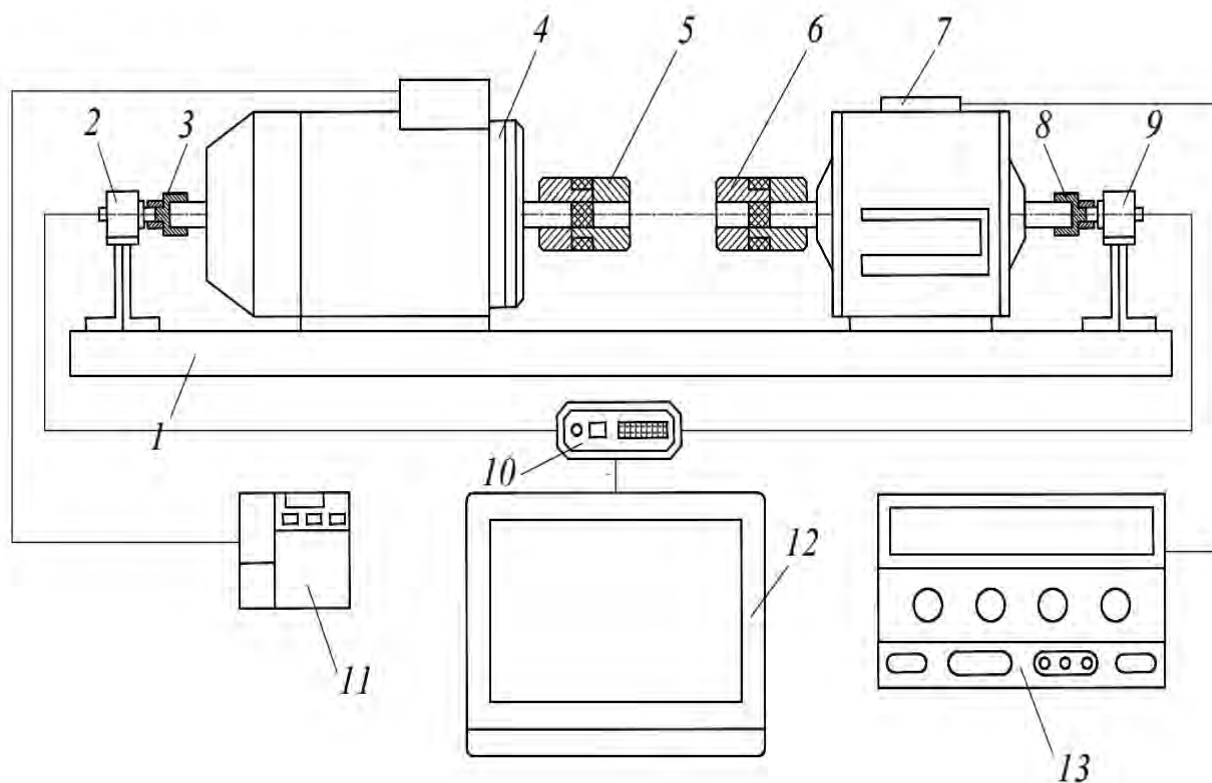
Рисунок 4.9 – Структурная схема энергосберегающего автоматизированного стенда

На рисунке 4.10 показана схема компоновки стенда, разработанного по структурной схеме, представленной на рисунке 4.8.

На основании 1 расположены элементы стенда (см. рисунок 4.10) в соответствии с описанной структурной схемой, приведенной на рисунке 4.8. Между муфтами 5 и 6 устанавливается соосный испытуемый редуктор. В соответствии с разработанной компоновкой собран стенд и проведены испытания кинематических и точностных параметров редукторов с различными передаточными отношениями в лаборатории Белорусско-Российского университета.

В конструкции стенда используются датчики угловых перемещений (энкодеры инкрементальные) 2, 9. Входной датчик 2 типа ВЕ 178А, снабженный оптическим формирователем импульсов с числом отсчетов за оборот  $N = 2500$ , устанавливается на валу электродвигателя; выходной датчик 9 типа Е50 8-8000-3-Т-24 с  $N = 8000$  устанавливается на валу электромагнитного тормоза. Также используются электродвигатель 4 модели АИР100L4 мощностью 4 кВт; электромагнитный порошковый нагрузочный тормоз 7 модели ПТ-40М1 с номинальным крутящим моментом до 200 Н·м; регулятор

скорости *11* – преобразователь частоты, привод L1000V, диапазон управления частотой – 0,01...120 Гц; источник питания *13* модели Mastech NY3010, выходной ток составляет до 10 А, выходное напряжение – до 30 В. Для соединения валов используются соединительные упругие муфты *3*, *8* типов FACML12-4-4 и Flair (муфты *5*, *6*).



*1* – основание; *2* – входной датчик; *3*, *5*, *6*, *8* – муфты; *4* – электродвигатель; *7* – электромагнитный тормоз; *9* – выходной датчик; *10* – АЦП; *11* – регулятор скорости; *12* – ПЭВМ; *13* – источник питания

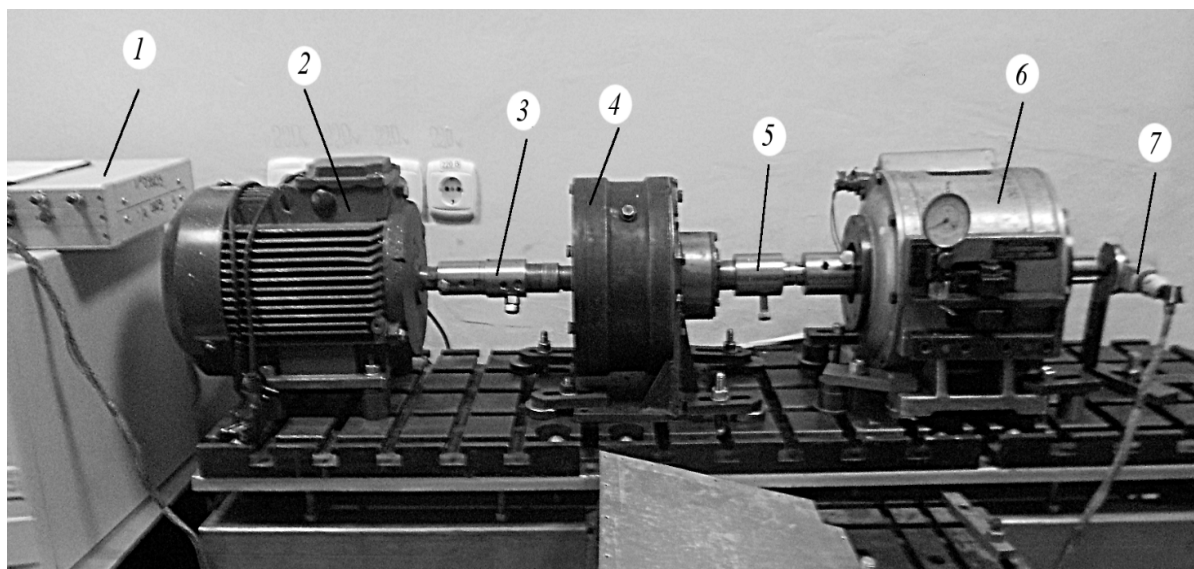
Рисунок 4.10 – Схема компоновки автоматизированного стенда

Для данного стенда разработан аналого-цифровой преобразователь (АЦП), который входит в измерительную систему стенда и позволяет с разработанным программным обеспечением с высокой точностью проводить исследования кинематических параметров любых механических передач. Сигналы от датчиков *2*, *9* поступают на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) *10*. АЦП (блок ввода аналоговых сигналов БВАС) осуществляет преобразование выходных сигналов энкодеров в цифровую форму и передает данные на персональный компьютер *12* по интерфейсу USB. Преобразователь имеет два независимых канала для ввода сигналов с частотой дискретизации до 64000 отсчетов в секунду, что обеспечивает высокую точность измерения. Установленное на персональном компьютере программное обеспечение

записывает передаваемые преобразователем данные в ASCII-файл в форме «время – напряжение». Затем эти данные обрабатываются с помощью разработанных компьютерных программ.

АЦП работает следующим образом. На разъем XS1 поступает напряжение питания преобразователя от внешнего блока питания. Величина напряжения питания должна составлять от 20 до 24 В. Микросхема DA1 является параметрическим стабилизатором напряжения, снижает входное напряжение до стабилизированного уровня 15 В. Данная величина напряжения необходима для питания энкодера (датчика положения) в составе испытательного стенда. Микросхема DA2 также является параметрическим стабилизатором напряжения, снижает напряжение уровня 15 В до уровня 5 В. Данный уровень напряжения используется для питания энкодера и для питания микроконтроллера DD1. Конденсаторы C1, C2, C3 необходимы для работы параметрических стабилизаторов напряжения. Разъем XS2 предназначен для подключения энкодера, находящегося в составе измерительного стенда. На гнезда 7 и 8 данного разъема подаются напряжения питания энкодера 5 и 15 В соответственно. С гнезд 1 и 6 снимаются выходные сигналы энкодера, каналы А и В соответственно. Гнезда 2, 4 – общие выводы энкодера.

На рисунке 4.11 изображен автоматизированный стенд, на котором проводились экспериментальные исследования кинематических характеристик планетарных редуцирующих механизмов.



1 – аналого-цифровой преобразователь; 2 – электродвигатель; 3 – муфта на входном валу редуктора; 4 – испытуемый редуктор; 5 – муфта на выходном валу редуктора; 6 – электромагнитный тормоз; 7 – датчик угла поворота

Рисунок 4.11 – Автоматизированный стенд для экспериментальных исследований кинематических характеристик планетарных редуцирующих механизмов

На рисунке 4.12 показана электрическая принципиальная схема разработанного АЦП для автоматизированного стенда. Выходные сигналы энкодера имеют величину напряжения около 12 В, что превышает предельно допустимое напряжение на входах микроконтроллера – 3,3 В (см. рисунок 4.12). Для согласования уровня напряжений сигналы энкодера пропускаются через резистивные делители напряжения R1, R2 и R3, R4 и затем подаются на аналоговые входы PA0, PA1 микроконтроллера DD1. Микроконтроллер DD1 выполняет функции оцифровки сигналов энкодера и передачи цифровых данных по интерфейсу USB на персональный компьютер (ПК). Для подключения к ПК используется разъем XS3 стандарта microUSB.

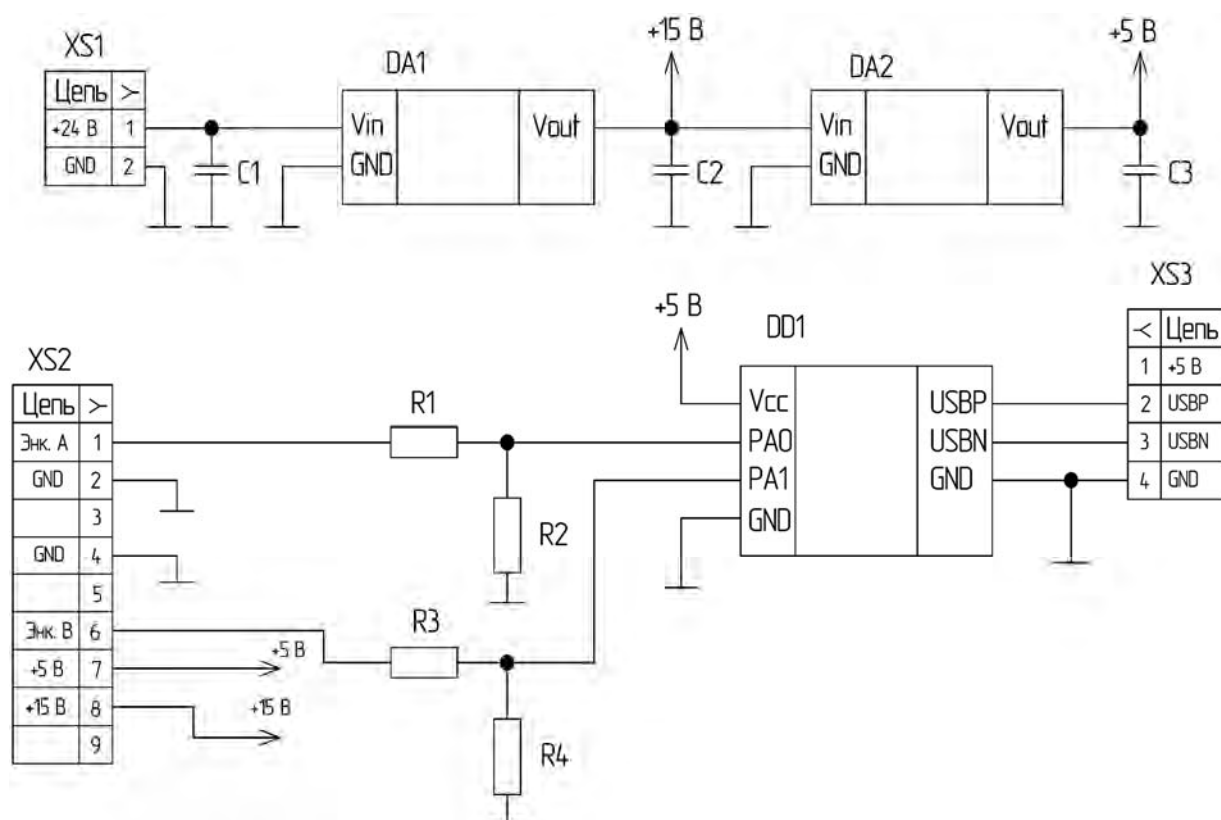


Рисунок 4.12 – Схема электрическая принципиальная аналого-цифрового преобразователя

#### 4.5.2 Методы обработки импульсных сигналов с АЦП автоматизированного стенда.

При экспериментальных исследованиях кинематических параметров с различной частотой вращения ведущего вала редуктора использовался преобразователь частоты (регулятор скорости), который является источником зашумления сигнала при измерениях на стенде. Если не использовать регулятор скорости, т. е. измерять параметры с частотой вращения электродвигателя, то можно применить один способ фильтрации, который использовался ранее с электронной платой Bordo. При проведении экспериментов с

использованием регулятора скорости для изменения частоты вращения вала электродвигателя одного способа фильтрации недостаточно, т. к. при этом появляются ложные сигналы. Поэтому для устранения шумов из полезного сигнала АЦП разработано три уровня фильтрации, которые представляют собой три способа обработки импульсных сигналов.

На рисунке 4.13 показано окно разработанного программного обеспечения измерительной системы автоматизированного стенда с графиком импульсных сигналов, полученных с АЦП на ПЭВМ без фильтрации шумов сигналов. График получен при измерениях кинематических характеристик планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$ , пониженной регулятором скорости частотой вращения ведущего вала 100 об/мин без нагрузки. При такой небольшой частоте вращения регулятор скорости создает наибольшее количество шумов. При этой частоте вращения ведущего вала редуктора с  $i = 49$  в пределах полного оборота его выходного вала число импульсных сигналов, исходящих из разработанного АЦП, составляет 792 934. На графике без фильтрации сигналов и на последующих графиках с отфильтрованными сигналами показано только 256 импульсных сигналов.

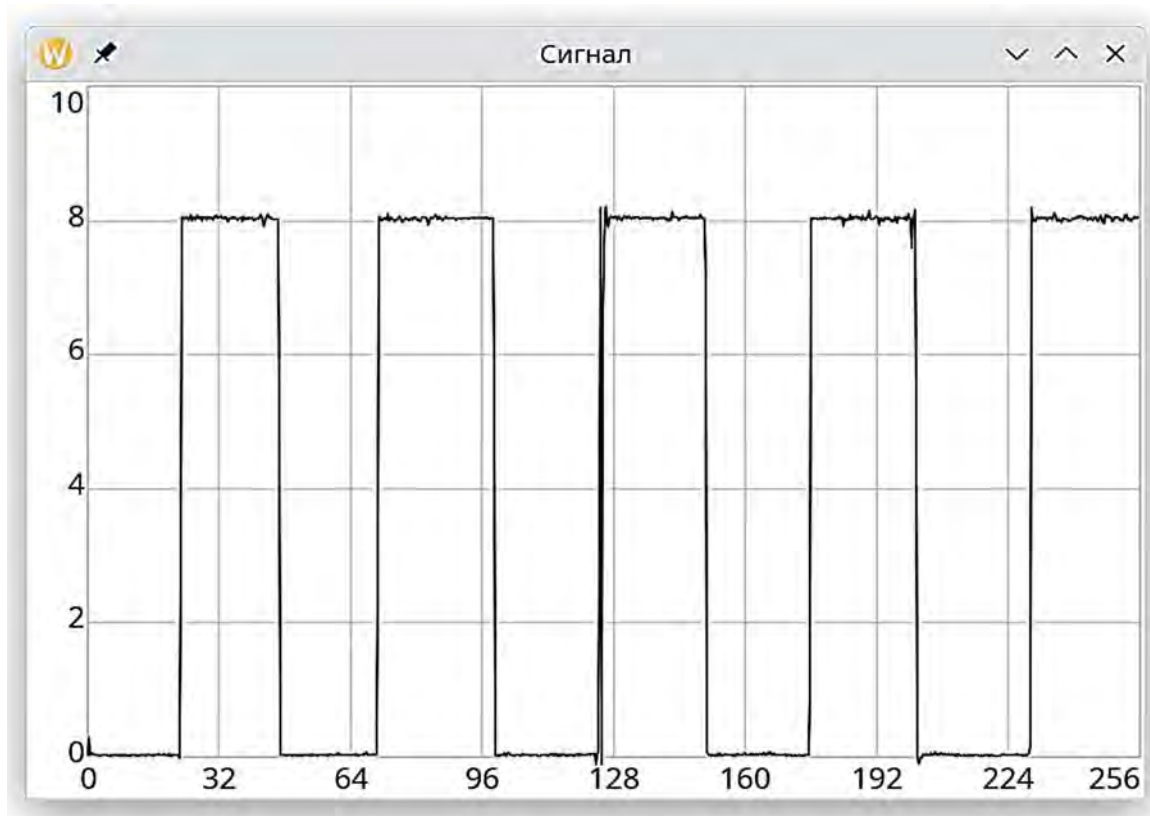


Рисунок 4.13 – Окно программы с графиком импульсных сигналов с зависимостью напряжения от времени без фильтрации шумов

На графике (см. рисунок 4.13) по вертикальной оси показано напряжение в вольтах (В), а по горизонтальной оси – число импульсных сигналов, создаваемых АЦП. Напряжение наименьшего и наибольшего сигналов составляет 0 и 8,1 В соответственно. На графике видны случайные сигналы в виде больших и малых скачков, искажающих форму прямоугольных импульсов, являющиеся шумами.

*4.5.2.1 Первый способ фильтрации сигнала.* От датчика частоты вращения (энкодера) на два канала АЦП поступают импульсные сигналы в виде групп прямоугольных импульсов «напряжение – время» в противофазе. Сигналы проходят через черные и прозрачные сектора оптического диска датчика. Сигнал  $u_{ni}$ , проходящий через прозрачный сектор (номинальный – 8,1 В) на один канал АЦП, совпадает с сигналом  $u_{ci}$ , проходящим через черный сектор (номинальный – 0 В) на второй канал. Рассчитывается разность этих сигналов, которая дает отфильтрованный сигнал:

$$u_{1i} = u_{ni} - u_{ci}. \quad (4.7)$$

Первый фильтр уменьшает влияние шума при измерениях, однако он не устраняет его полностью. Эффективность первого фильтра зависит от степени зашумленности (количество импульсов, числовые значения которых не соответствуют значениям импульсов без влияния шума). Чем больше степень зашумленности получаемого сигнала, тем менее эффективен данный способ фильтрации.

На рисунке 4.14 показано окно разработанной программы с графиком импульсных сигналов, полученных с АЦП автоматизированного стенда после первой фильтрации шумов.

График (см. рисунок 4.14) после первой фильтрации шумов сигналов показывает незначительные уменьшения случайных сигналов и мало отличается от графика без фильтрации, представленного на рисунке 4.13. Первый способ фильтрации для данной степени зашумленности оказался малоэффективным и незначительно уменьшил влияние шумов на полезный сигнал.

*4.5.2.2 Второй способ фильтрации сигнала.* Устанавливаются верхняя и нижняя границы (горизонтальные линии) числовых значений импульсных сигналов, близкие к наибольшему и наименьшему номинальным значениям (0,5 и 7,5 В), определяемым датчиком частоты вращения. Если величина поступившего сигнала  $u_i$  с датчика на АЦП больше значения верхней границы  $u_{вг}$ , то числовое значение этого сигнала  $u_i$  приравнивается к числовому номинальному значению верхней границы  $u_{вг}^H$ . Если величина поступившего сигнала  $u_i$  с датчика на АЦП меньше значения нижней границы  $u_{нг}$ , то числовое значение этого сигнала  $u_i$  приравнивается к числовому номи-

нальному значению нижней границы  $u_{н2}^H$ . Если сигнал находится между верхней и нижней границами, то его числовое значение  $u_i$  принимается равным числовому значению предыдущего сигнала  $u_{i-1}$ :

$$\begin{cases} \text{если } u_i > u_{в2}, \text{ то } u_i = u_{в2}^H; \\ \text{если } u_i < u_{н2}, \text{ то } u_i = u_{н2}^H; \\ \text{если } u_{в2} < u_i < u_{н2}, \text{ то } u_i = u_{i-1}. \end{cases} \quad (4.8)$$

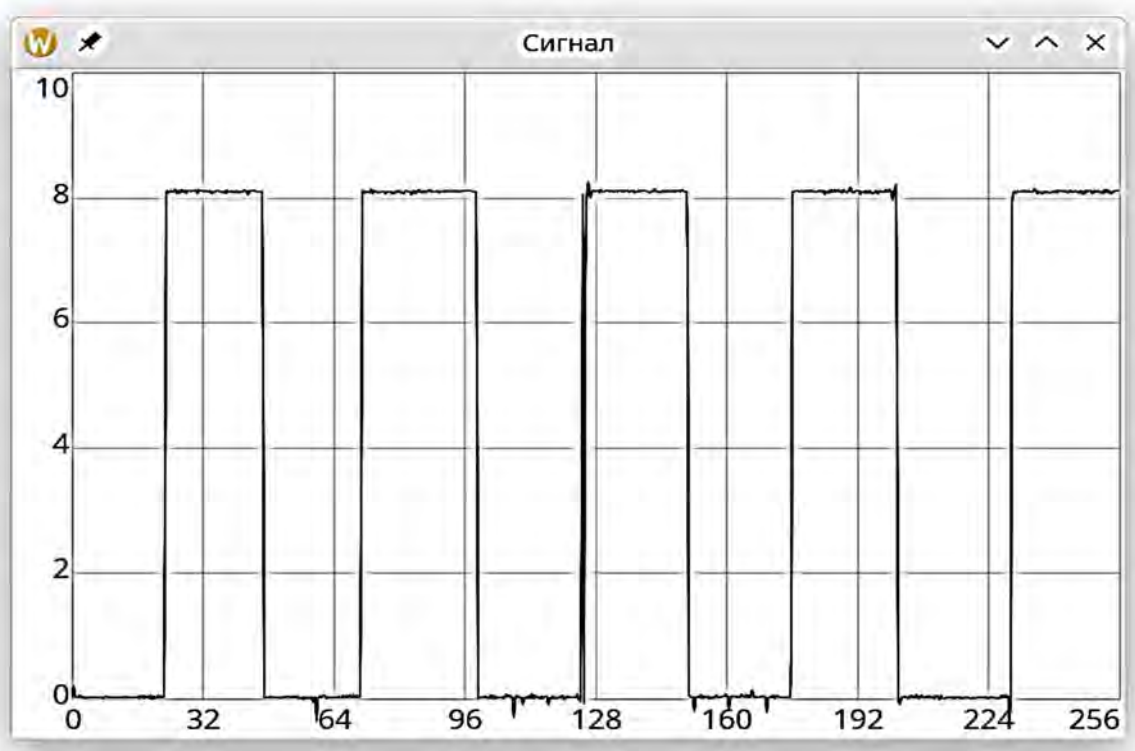


Рисунок 4.14 – Окно программы с графиком импульсных сигналов с зависимостью напряжения от времени после первой фильтрации шумов

Второй фильтр устанавливает для всех сигналов, поступающих с датчика частоты вращения, либо номинальное максимальное (8,1 В), либо номинальное минимальное (0 В) значение. Все сигналы принимают одно из двух значений, при этом выстраивается и многократно чередуется последовательность из номинальных максимальных и номинальных минимальных значений. Среди максимальных значений могут появляться случайные минимальные значения и наоборот. При этом остается зашумленность сигналов случайными максимальными и минимальными значениями – «ложными сигналами», которые нужно отфильтровать.

На рисунке 4.15 показано окно разработанной программы с графиком импульсных сигналов, полученных с АЦП автоматизированного стенда после второй фильтрации шумов.

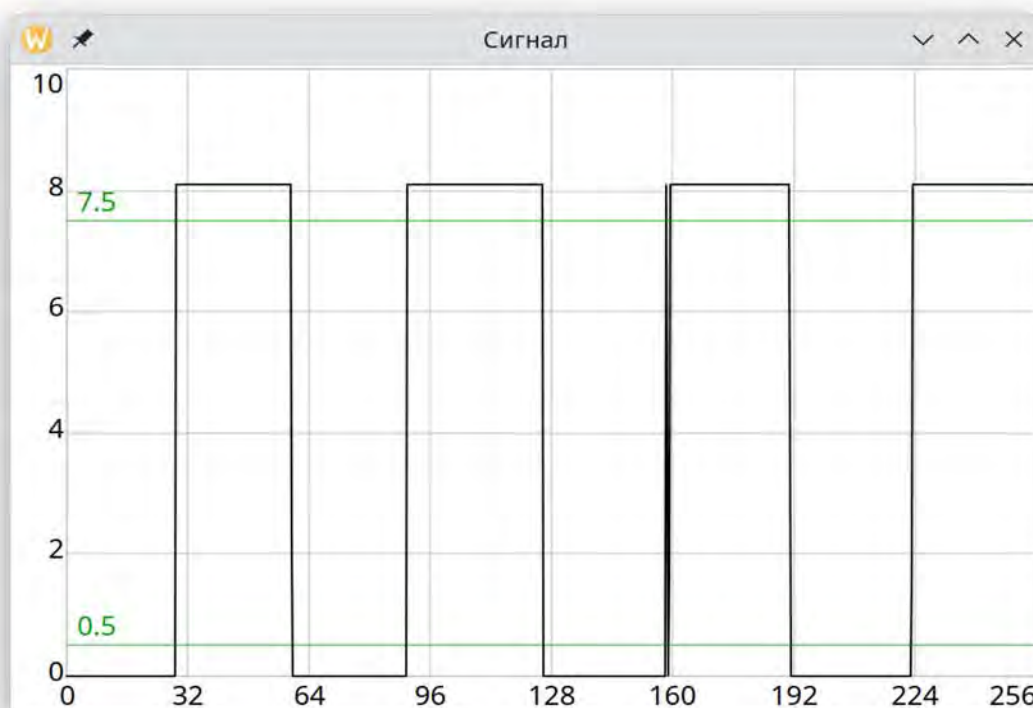


Рисунок 4.15 – Окно программы с графиком импульсных сигналов с зависимостью напряжения от времени после второй фильтрации шумов

Из графика (см. рисунок 4.15) видно значительное уменьшение случайных сигналов и, соответственно, уменьшение влияния шумов по сравнению с графиками, приведенными на рисунках 4.13 и 4.14. После второй фильтрации шумов в алгоритме расчета изменено начало следования импульсов, т. е. график имеет некоторый сдвиг импульсных сигналов, номера которых не соответствуют номерам на предыдущих графиках (см. рисунки 4.13 и 4.14). Форма графика прямолинейная (см. рисунок 4.15). На графике виден ложный сигнал в окрестности 160-го импульса из 256 показанных. Такие же случайные ложные сигналы проявляются за время следования всех импульсов за оборот выходного вала редуктора.

**4.5.2.3 Третий способ фильтрации сигнала.** Выбираются последовательно группы значений из трех, четырех, пяти, шести и семи последовательных импульсных сигналов от начала следования импульсов. Если крайние числовые значения группы  $u_i$  и  $u_n$  оба максимальные (8,1 В) или оба минимальные (0 В)  $u_{7,0}$ , то числовые значения внутри группы  $u_{i+1}, u_{i+2} \dots u_{n-1}$  принимаются равными крайним значениям группы  $u_{7,0}$ . В каждой последующей группе количество неотфильтрованных сигналов на один больше,

чем в предыдущей. Фильтрация группы из семи импульсных сигналов принята завершающей, т. к. после нее все случайные сигналы практически исключаются.

$$\begin{cases} u_i, u_{i+1}, u_{i+2} \dots u_n, n = 7; \\ \text{если } u_i = u_n = u_{7,0}, \text{ то } (u_{i+1}, u_{i+2} \dots u_{n-1}) = u_{7,0}. \end{cases} \quad (4.9)$$

4.5.2.4 *Оценка импульсных сигналов и кинематической погрешности редуктора после фильтрации шумов.* На рисунке 4.16 показано окно разработанной программы с графиком импульсных сигналов, полученных с АЦП автоматизированного стенда после третьей фильтрации шумов.

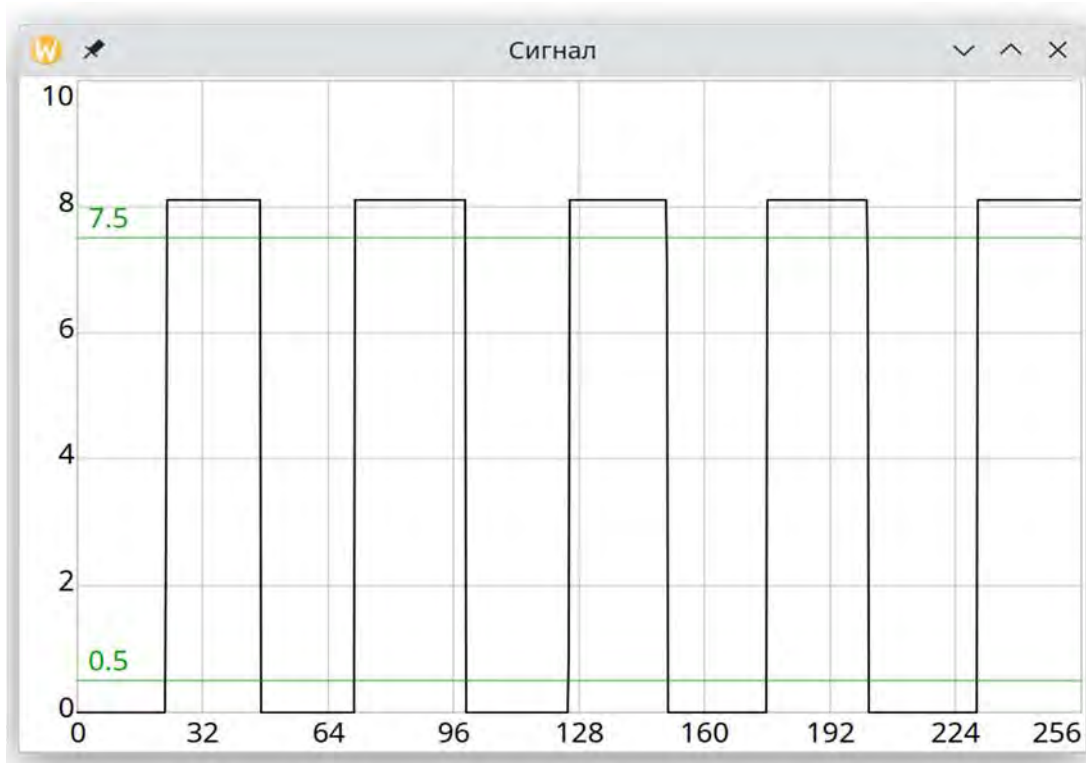


Рисунок 4.16 – Окно программы с графиком импульсных сигналов с зависимостью напряжения от времени после третьей фильтрации шумов

Из графика (см. рисунок 4.16) видно, что после третьего способа фильтрации шумы устранены и на графике нет случайных сигналов.

По численным значениям сигналов, полученных с АЦП и представленных на графиках (см. рисунки 4.13–4.16), разработаны методика и компьютерные программы для расчета кинематической погрешности механических передач. На рисунке 4.17 показано окно разработанной программы с графиками кинематической погрешности и амплитудно-частотного спектра планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  без фильтрации шумов.

На графике (см. рисунок 4.17) кинематическая погрешность имеет высокочастотные шумы. График от нулевого значения уходит вверх и не возвращается в ноль, что объясняется накоплением импульсного шума. Наибольшая кинематическая погрешность (разность между наибольшим и наименьшим значениями на графике) в данном случае составила 8,95 град. Она значительно превышает действительную кинематическую погрешность из-за наличия шумов. На амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности редуктора видны большое количество гармоник небольшой амплитуды и большие значения амплитуд первых гармоник, что характеризует наличие импульсных шумов, которые создают ложные гармоники и увеличивают амплитуды действительных гармоник.

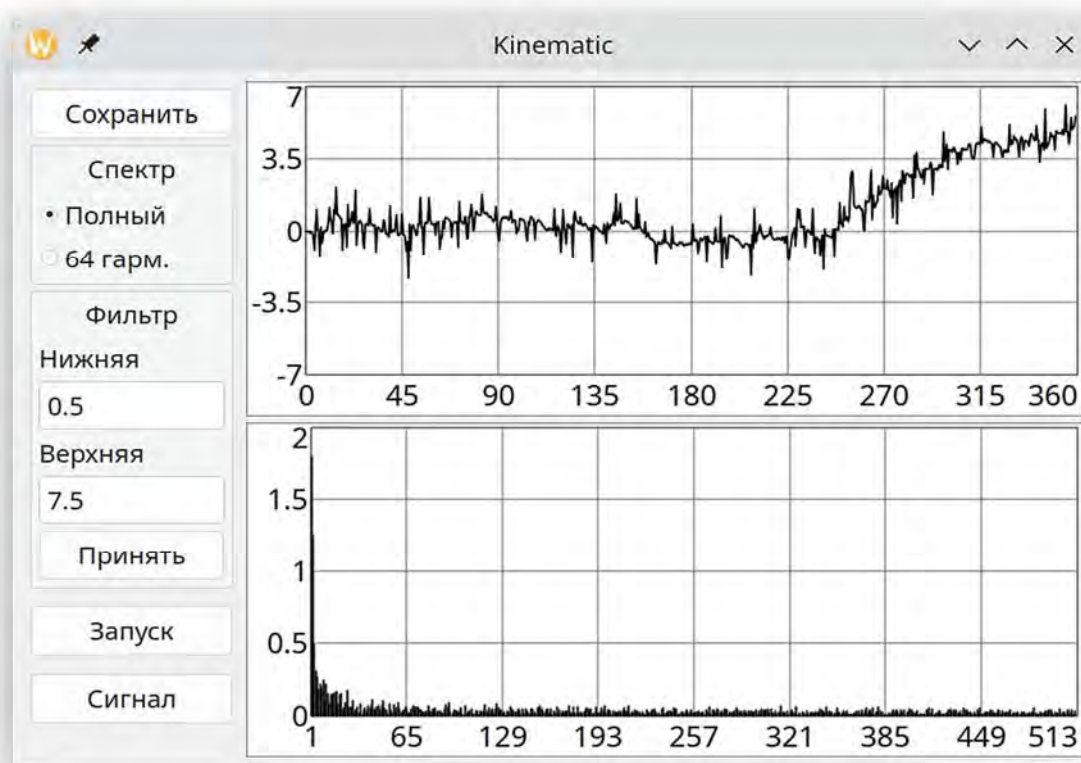


Рисунок 4.17 – Окно программы с графиком кинематической погрешности редуктора без фильтрации шумов

После применения первого способа фильтрации форма графика и его наибольшее значение мало изменились. Наибольшая кинематическая погрешность при этом составила 8,39 град. На рисунке 4.18 показано окно разработанной программы с графиками кинематической погрешности и амплитудно-частотного спектра планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  после применения второго способа фильтрации шумов.

График кинематической погрешности (см. рисунок 4.18) начинается и заканчивается нулевым значением, что характеризует отсутствие накопления и уменьшение импульсных шумов. При этом после второй фильтрации шумов уменьшилась наибольшая кинематическая погрешность редуктора. Она составила 7,26 град. На амплитудно-частотном спектре заметно уменьшились амплитуды первых гармоник.

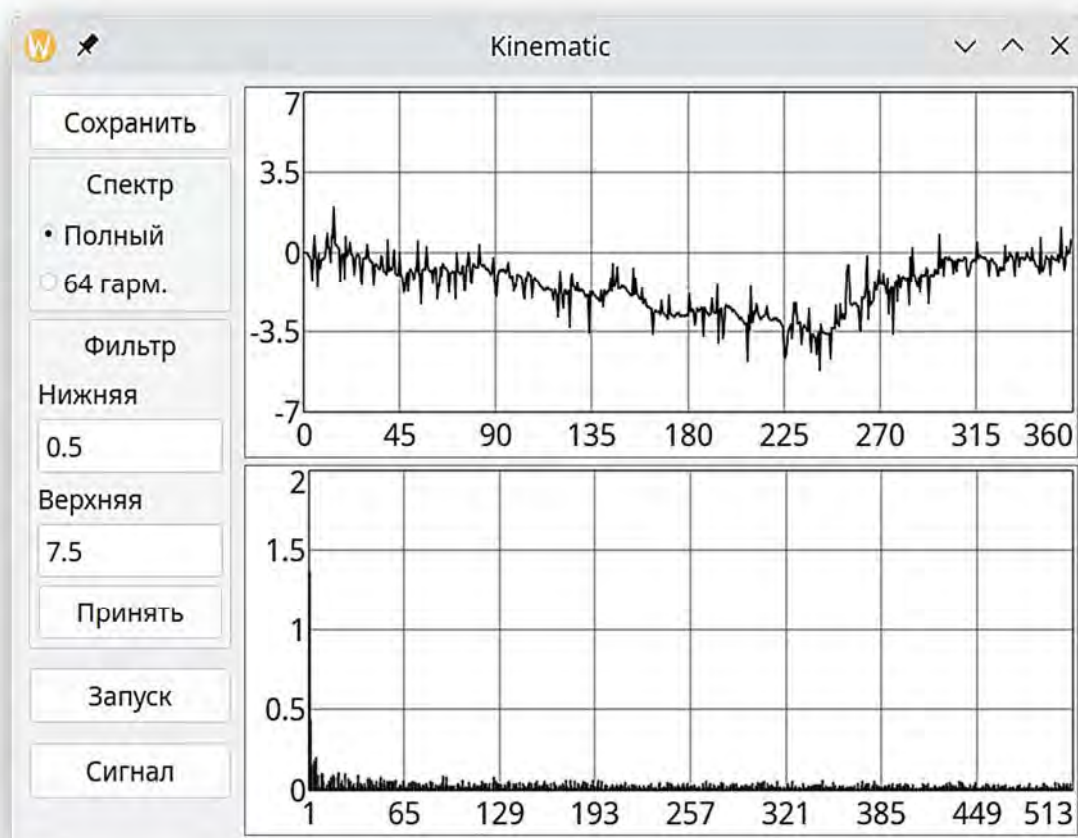


Рисунок 4.18 – Окно программы с графиком кинематической погрешности редуктора после второй фильтрации шумов

На рисунке 4.19 показано окно разработанной программы с графиками кинематической погрешности и амплитудно-частотного спектра планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  после применения третьего способа фильтрации шумов, который после предыдущих двух способов окончательно устраняет шумы. На рисунке 4.19 видны отфильтрованные графики кинематической погрешности и амплитудно-частотного спектра с действительными гармониками без влияния шума. Наибольшая кинематическая погрешность после применения третьего способа фильтрации составила 0,93 град.

Исследования показали, что при фильтрации шумов передач с понижением частоты вращения ведущего вала регулятором скорости (преобра-

зователем частоты) третий способ фильтрации является наиболее эффективным. Однако первый и второй способы фильтрации подготавливают данные для фильтрации сигналов третьим способом, поэтому необходимо применять последовательно три способа фильтрации.

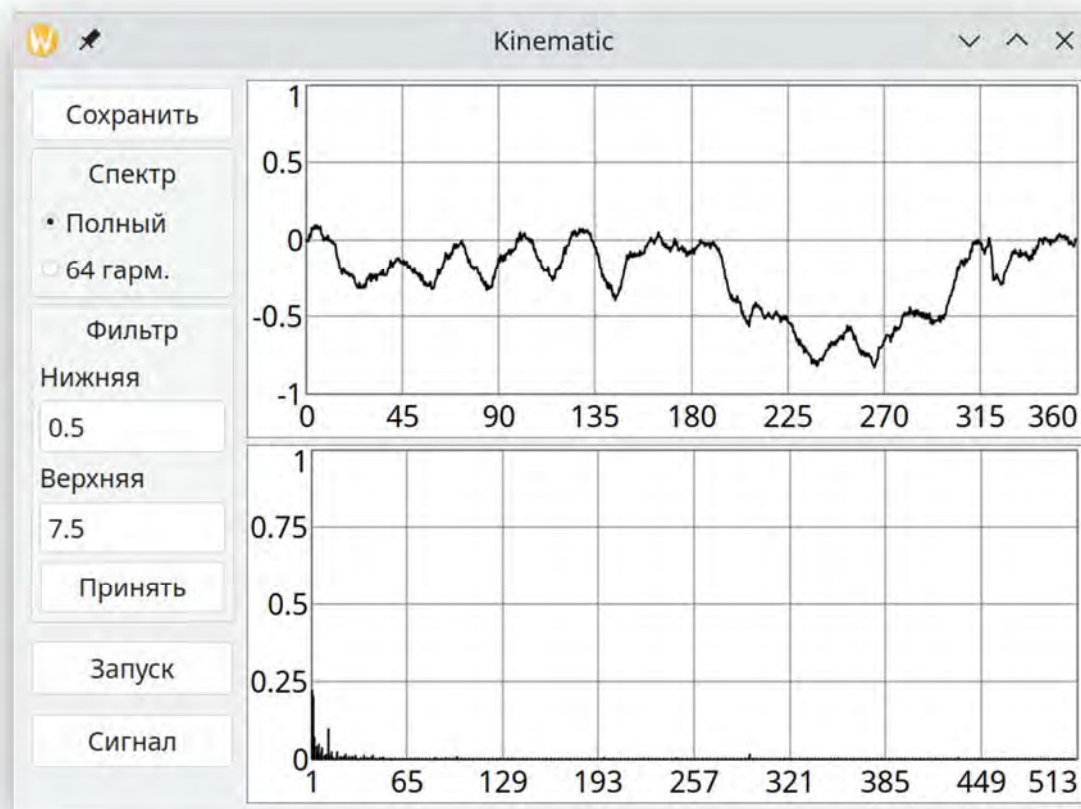


Рисунок 4.19 – Окно программы с графиком кинематической погрешности редуктора после третьей фильтрации шумов

Форма графика, амплитудно-частотный спектр с гармоническими составляющими, значение наибольшей кинематической погрешности, приведенные на рисунке 4.19, представляют собой действительную кинематическую погрешность планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$ .

При исследованиях кинематических параметров редукторов с частотой вращения электродвигателя, подсоединенного к редуктору, без снижения частоты вращения ведущего вала редуктора и поэтому без применения регулятора скорости достаточно использовать только второй способ фильтрации, который полностью устраняет случайные сигналы, поступающие от АЦП.

На рисунках 4.20 и 4.21 показаны окна разработанной программы с графиками импульсных сигналов, полученных с АЦП автоматизированного стенда без фильтрации и после второй фильтрации шумов.

На графике (см. рисунок 4.20) видно, что без фильтрации сигнала, снимаемого с АЦП без регулятора скорости с частотой вращения ведущего

вала редуктора 1500 об/мин, есть случайные импульсы, искажающие прямолинейность трапецеидальных сигналов, а на рисунке 4.21 представлено окно программы с отфильтрованным сигналом, с его прямолинейной формой, после применения второго способа фильтрации.

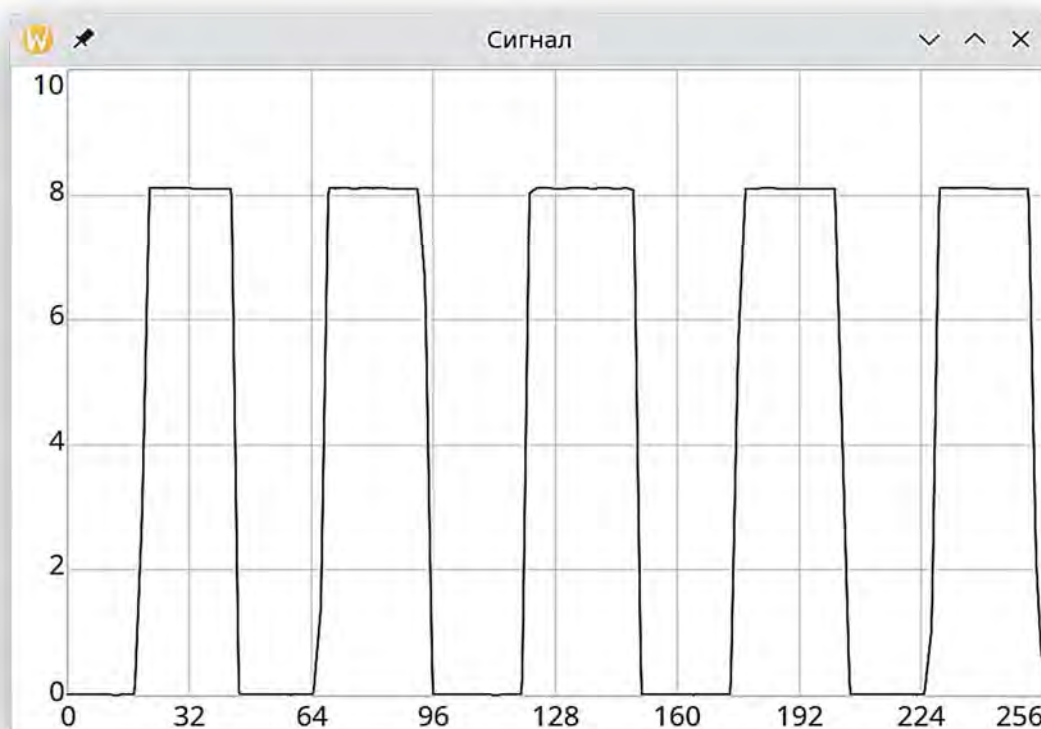


Рисунок 4.20 – Окно программы с графиком импульсных сигналов с зависимостью напряжения от времени без фильтрации шумов

Исследования показали, что без использования регулятора скорости, создающего зашумление сигнала с АЦП, первый и третий способы фильтрации не требуются, т. к. сигнал с АЦП в данном случае практически идет без шума и поэтому для устранения небольших шумов достаточно использовать только второй способ их фильтрации. При этом наибольшая кинематическая погрешность без фильтрации шумов составила 1,065 град, а после второй фильтрации – 1,064 град. Остальные способы фильтрации не изменили наибольшую кинематическую погрешность, форму графиков кинематической погрешности и ее амплитудно-частотные спектры. На рисунке 4.22 показано окно разработанной программы с графиками кинематической погрешности и амплитудно-частотного спектра планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$ , частотой вращения ведущего вала редуктора 1500 об/мин без использования регулятора скорости и после применения второго способа фильтрации шумов.

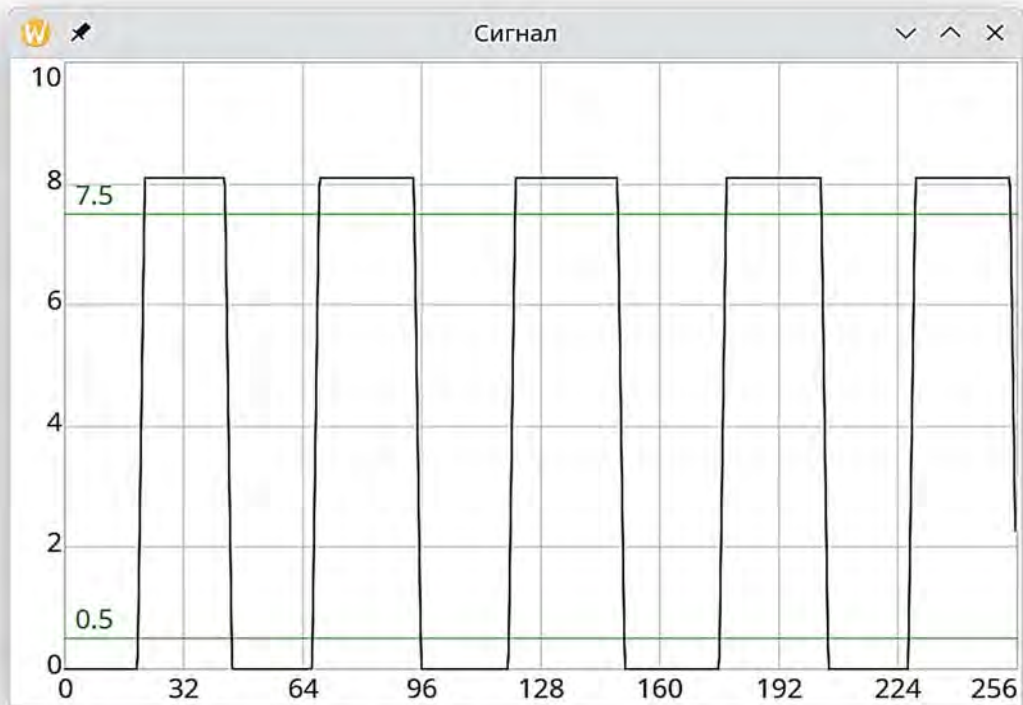


Рисунок 4.21 – Окно программы с графиком импульсных сигналов с зависимостью напряжения от времени после второй фильтрации шумов

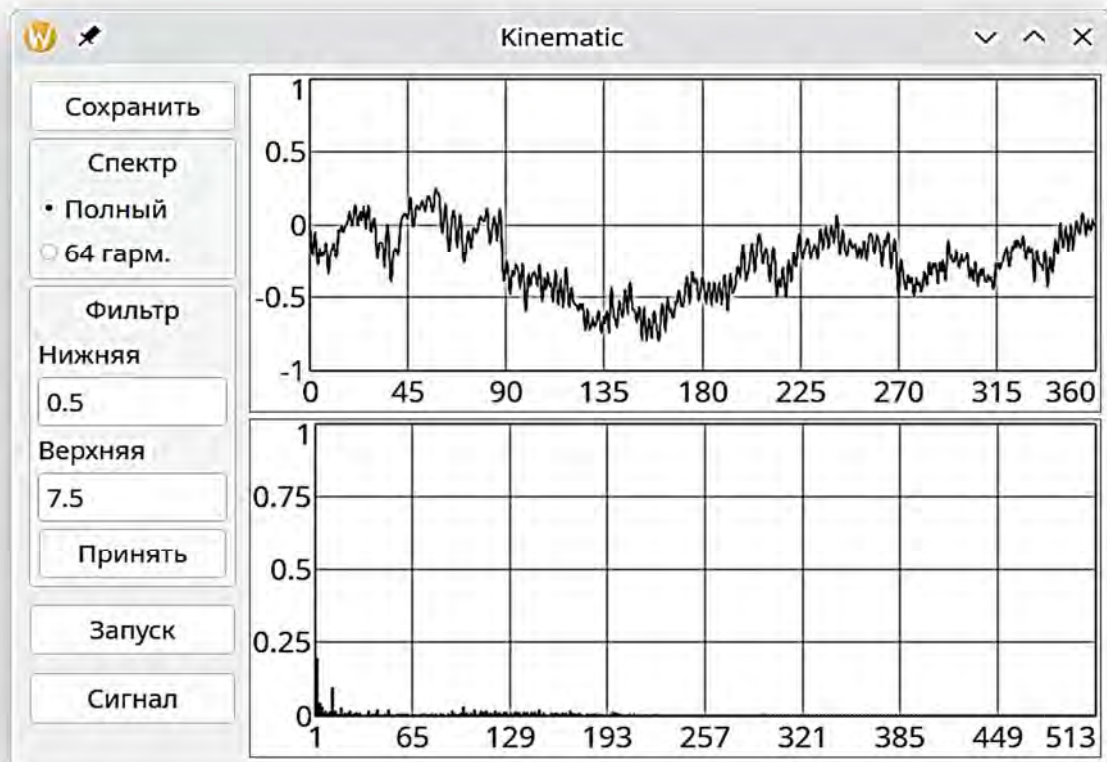


Рисунок 4.22 – Окно программы с графиком кинематической погрешности редуктора после второй фильтрации шумов

### 4.5.3 Методики расчета кинематических параметров механических передач.

Для комплексной оценки кинематических характеристик редуцирующих механизмов с промежуточными телами качения, а также любых механических передач, в том числе и зубчатых, предложены и выведены следующие параметры и их математические зависимости:

- кинематическая погрешность передачи (механизма);
- наибольшая кинематическая погрешность передачи как разность наибольшей и наименьшей кинематических погрешностей;
- угловая скорость выходного вала передачи (механизма);
- угловое ускорение выходного вала передачи (механизма);
- местная кинематическая погрешность передачи (механизма);
- наибольшая местная кинематическая погрешность передачи (механизма);
- средняя местная кинематическая погрешность передачи (механизма);
- передаточное отношение передачи (механизма);
- процент отклонения передаточного отношения.

Методика расчета базируется на обработке сигналов (импульсов), полученных с энкодеров и АЦП станда. Используя значения полученных отфильтрованных сигналов (как на графиках, приведенных на рисунках 4.16 и 4.20) в виде таблицы «время – напряжение», запишем формулу для определения периода следования импульсов как

$$T_i = t_{0i} + t_{1i}, \quad (4.10)$$

где  $t_{0i}$  – длительность  $i$ -го участка между фронтами импульса с напряжением, равным нулю (уровень логического нуля), с;

$t_{1i}$  – длительность  $i$ -го участка между фронтами импульса с напряжением, равным 8,1 В (уровень логической единицы), с.

Сумма всех периодов  $n$  за оборот выходного вала

$$T_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n (t_{0i} + t_{1i}). \quad (4.11)$$

Среднее значение периода

$$T_{cp} = \frac{T_{\Sigma}}{n}. \quad (4.12)$$

Кинематическая погрешность передачи  $F_i$  может быть определена как разность периодов следования импульсов и среднего значения периода с накоплением, умноженная на угловую скорость выходного звена:

$$F_i = \left( \sum_i T_i - iT_{cp} \right) \omega_{вых.ср}, \quad (4.13)$$

где  $\omega_{вых.ср}$  – среднее значение угловой скорости выходного вала редуктора, рад.

Формула кинематической погрешности передачи, выраженная через частоту вращения,

$$F_i = 2\pi n_{вых.ср} \left( \sum_i T_i - iT_{cp} \right), \quad (4.14)$$

где  $n_{вых.ср}$  – среднее значение частоты вращения выходного вала,  $c^{-1}$ .

Угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$ , с учетом кинематической погрешности,

$$\omega = \frac{d(\varphi + \Delta\varphi)}{dt} = \frac{d(\varphi + F)}{dt}; \quad (4.15)$$

$$\varepsilon = \frac{d(\omega + \Delta\omega)}{dt} = \frac{d^2(\varphi + \Delta\varphi)}{dt^2} = \frac{d^2(\varphi + F)}{dt^2}, \quad (4.16)$$

где  $\varphi$  – текущий угол поворота выходного вала;

$\Delta\omega$  – приращение угловой скорости выходного вала;

$\Delta\varphi$  – приращение угла поворота, равное кинематической погрешности  $F$ .

Используя численные методы, запишем следующие формулы угловой скорости и углового ускорения:

$$\omega_i = \frac{(\varphi_i + F_i) - (\varphi_{i-1} + F_{i-1})}{T_i - T_{i-1}}, \quad (4.17)$$

где  $\varphi_i$  – текущий угол поворота;

$F_i$  – текущее значение кинематической погрешности;

$T_i$  – текущее значение периода следования импульсов;

$\varphi_{i-1}$  – предыдущий угол поворота;

$F_{i-1}$  – предыдущее значение кинематической погрешности;

$T_{i-1}$  – предыдущее значение периода следования импульсов;

$$\varepsilon_i = \frac{(\varphi_{i+1} + F_{i+1}) - (\varphi_i + F_i) - (\varphi_i + F_i) - (\varphi_{i-1} + F_{i-1})}{T_{i+1} - T_i} \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{T_{i+1} - T_i}. \quad (4.18)$$

Местную кинематическую погрешность  $f_i$  можно определить по формуле

$$f_i = |F_{i+1} - F_i|, \quad (4.19)$$

где  $F_i, F_{i+1}$  – текущее и следующее значения кинематической погрешности;  
 $i$  – порядковый номер значения кинематической погрешности.

Наибольшая местная кинематическая погрешность

$$f_{\max} = f_{i\max} - f_{i\min}, \quad (4.20)$$

где  $f_{i\max}, f_{i\min}$  – максимальное и минимальное значения местной кинематической погрешности;

$i$  – порядковый номер значения местной кинематической погрешности.

Средняя местная кинематическая погрешность

$$f_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n}, \quad (4.21)$$

где  $f_i$  – текущее значение местной кинематической погрешности;

$n$  – число всех значений местной кинематической погрешности.

Для определения действительного передаточного отношения, с учетом кинематических погрешностей передачи, запишем формулу колебания (погрешности) угловой скорости выходного вала передачи (редуцирующего механизма) как

$$\Delta\omega_2 = \frac{f_{cp}}{\Delta t}, \quad (4.22)$$

где  $\Delta t$  – дискретное время, равное интервалу временного шага.

При этом

$$\Delta t = \frac{t_{\text{ввх}}}{n}, \quad (4.23)$$

где  $t_{\text{ввх}}$  – время полного оборота выходного вала передачи (механизма).

Угловую скорость выходного вала, с учетом ее колебания из-за кинематических погрешностей, определим по формуле

$$\omega_{2n} = \omega_2 + \Delta\omega_2 \quad \text{или} \quad \omega_{2n} = \frac{\omega_1}{i_n} + \Delta\omega_2, \quad (4.24)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – номинальные угловые скорости входного и выходного валов передачи (механизма);

$i_n$  – номинальное передаточное отношение передачи (механизма).

Передаточное отношение механизма, с учетом кинематических погрешностей, проявляющихся в колебании (погрешности) угловой скорости,

$$i_n = \frac{\omega_1}{\omega_{2n}}. \quad (4.25)$$

Формулу (4.25) можно представить в более развернутом виде как

$$i_n = \frac{\omega_1}{\omega_2 + \Delta\omega_2} \quad \text{или} \quad i_n = \omega_1 \left( \omega_2 + \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{t_{\text{вых}}} \right)^{-1}. \quad (4.26)$$

Для компоновки второго стэнда с нагрузателем в виде мотор-редуктора, работающим в режиме генератора (см. рисунок 4.9), необходимо рассчитать задаваемую преобразователем частоты электродвигателя мотор-редуктора угловую скорость, которая должна быть меньше установившейся угловой скорости, чтобы обеспечивать требуемый нагрузочный крутящий момент на выходном валу испытуемого редуктора. Используем с этой целью зависимость для определения соотношения момента и угловой скорости двигателя [61]

$$M_{\text{дв}} = \beta (\omega_0 - \omega_{\text{дв}}), \quad (4.27)$$

где  $\beta$  – жесткость механической характеристики, определяется по паспорту двигателя;

$\omega_0$  – угловая скорость холостого хода двигателя;

$\omega_{\text{дв}}$  – угловая скорость вала двигателя под нагрузкой.

Из формулы (4.27) найдем задаваемую преобразователем частоты угловую скорость электродвигателя мотор-редуктора:

$$\omega_{02} = \frac{M_{2\partial\epsilon} + \beta\omega_{2\partial\epsilon}}{\beta}, \quad (4.28)$$

где  $M_{2\partial\epsilon}$  – момент на валу двигателя мотор-редуктора;

$\omega_{2\partial\epsilon}$  – установившаяся угловая скорость вала двигателя мотор-редуктора.

$$M_{2\partial\epsilon} = \frac{M_n}{i_2} \eta_{2\text{ред}}, \quad (4.29)$$

где  $M_n$  – нагрузочный момент на выходном валу исследуемого редуктора;

$\eta_{2\text{ред}}$  – КПД редуцирующего механизма мотор-редуктора;

$i_2$  – передаточное отношение мотор-редуктора.

$$\omega_{2\partial\epsilon} = \frac{\beta\omega_{01} - M_{1\partial\epsilon}}{\beta i_1} i_2, \quad (4.30)$$

где  $M_{1\partial\epsilon}$  – момент на валу первого электродвигателя;

$i_1$  – передаточное отношение испытуемого редуктора;

$\omega_{01}$  – угловая скорость холостого хода двигателя, соединенного с испытуемым редуктором.

Определим разницу между потребляемой и возвращаемой мощностями. Сначала найдем мощность  $N_1$ , потребляемую из сети:

$$N_1 = \frac{M_n \omega}{\eta_{1\text{нч}} \eta_{1\partial\epsilon} \eta_{1\text{ред}}}, \quad (4.31)$$

где  $\omega$  – угловая скорость выходного вала исследуемого редуктора;

$\eta_{1\text{нч}}$  – КПД преобразователя частоты, установленного на приводном двигателе, соединенном с испытуемым редуктором;

$\eta_{1\partial\epsilon}$  – КПД приводного двигателя;

$\eta_{1\text{ред}}$  – КПД испытуемого редуктора.

Мощность, которая возвращается в сеть, вычислим по формуле

$$N_2 = M_n \omega \eta_{2\text{ред}} \eta_{2\partial\epsilon} \eta_{2\text{нч}}, \quad (4.32)$$

где  $\eta_{2\text{нч}}$  – КПД преобразователя частоты, установленного на двигателе мотор-редуктора;

$\eta_{2\partial\epsilon}$  – КПД двигателя мотор-редуктора;

$\eta_{2\text{ред}}$  – КПД редуцирующего механизма мотор-редуктора.

Найдем разницу между потребляемой и возвращаемой мощностями:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = M_n \omega \left[ \frac{1}{\eta_{1лч} \eta_{1дв} \eta_{1ред}} - \eta_{2ред} \eta_{2дв} \eta_{2лч} \right]. \quad (4.33)$$

Возвращаемая мощность составила 40 %...50 % от потребляемой мощности при работе стенда с различными задаваемыми исходными данными.

На стенде, схема которого представлена на рисунке 4.10, а методы обработки данных и расчета рассмотрены ранее, проведены экспериментальные исследования и оценка кинематических и точностных параметров планетарных редукторов с промежуточными телами качения.

*4.5.4 Метод и методика расчета КПД механических передач с использованием автоматизированной информационно-измерительной системы оценки кинематических параметров.*

Разработанная и вышепредставленная автоматизированная информационно-измерительная система оценки и контроля кинематических параметров механических передач на основе разработанных стендов позволяет исследовать, проводить контроль и анализ не только кинематических характеристик механических передач, но и рассчитывать такой динамический параметр, как КПД передачи (механизма).

КПД передачи рассчитывался на основе измерений импульсных сигналов с энкодера и АЦП разработанного автоматизированного стенда с нагружающими моментами на ведомом валу. Из полученных значений «напряжение – время» принималось время полного оборота ведомого вала, различное в зависимости от замедления скорости вращения и изменений вращающего момента на ведущем валу, что связано с нагрузкой, потерями и КПД передачи. По полученному времени оборота ведомого вала рассчитывались его угловая скорость (частота вращения  $n$ ) и скольжение электродвигателя  $s$ , которое рассматривалось как переменная величина.

При расчете КПД использовалось уравнение механической характеристики электродвигателя для расчета момента электродвигателя  $M_{дв}$ , в зависимости от скольжения (переменная  $s$ ), [61]

$$M_{дв}(s) = \frac{2M_k(1 + as_k)}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} + 2as_k}, \quad (4.34)$$

где  $M_k$  – критический момент электродвигателя;  
 $s_k$  – критическое скольжение электродвигателя;  
 $a$  – значение, получаемое путем подбора для обеспечения верности равенства

$$M_{ог}(s_H) = M_H, \quad (4.35)$$

где  $s_H$  – номинальное скольжение электродвигателя;  
 $M_H$  – номинальный момент электродвигателя.

Критическое скольжение электродвигателя определим по формуле

$$s_k = \frac{s_H \left( \mu_k + \sqrt{\mu_k^2 + 2as_H(\mu_k - 1)} - 1 \right)}{1 + 2as_H(\mu_k - 1)}, \quad (4.36)$$

где  $\mu_k$  – кратность критического момента электродвигателя.

Критический момент электродвигателя

$$M_k = M_H \mu_k. \quad (4.37)$$

Номинальное скольжение

$$s_H = \frac{n_0 - n_H}{n_0}, \quad (4.38)$$

где  $n_0$  – частота вращения холостого хода электродвигателя;

$n_H$  – номинальная частота вращения электродвигателя.

Номинальный момент

$$M_H = \frac{30P_H}{\pi n_H}, \quad (4.39)$$

где  $P_H$  – номинальная мощность электродвигателя.

Значение скольжения (переменная  $s$ ) для частоты вращения ротора  $n$

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0}, \quad (4.40)$$

где  $n$  – действительная частота вращения электродвигателя, учитывающая потери в механизме.

КПД передачи (механизма) определим по формуле

$$\eta = \frac{M_{вых}}{(M_{\partial в}(s) - M_n)i}, \quad (4.41)$$

где  $M_{вых}$  – ведомый вал передачи (механизма);

$M_n$  – момент, связанный с потерями из-за трения в электродвигателе;

$i$  – передаточное отношение механизма.

Разработанные метод и методика подтверждаются известным методом расчета КПД механических передач, который представлен в [37, 42].

## 5 Экспериментальная оценка и анализ кинематических характеристик механизмов с телами качения

Для проведения экспериментальных исследований с целью установления закономерностей, зависимостей, допусков на изготовление и создание системы нормирования точности разработаны и изготовлены шариковые и роликовые редукторы в качестве опытных образцов с передаточными отношениями 7, 8, 11, 12, 14, 15, 25, 49, 64 и 121. Из них редукторы с передаточными отношениями 7, 8, 11, 12, 14, 15 и 25 – одноступенчатые, 49, 64 и 121 – двухступенчатые. Передаточные отношения каждой ступени двухступенчатых редукторов равны. При этом первые ступени можно рассматривать как одноступенчатые редукторы с передаточными отношениями соответственно 7, 8 и 11. Редукторы построены в соответствии с шестой кинематической схемой, т. к. она позволяет получить наибольшие передаточные отношения и лучшие кинематические, динамические и эксплуатационные характеристики. При проектировании и изготовлении опытных образцов еще не были известны закономерности и зависимости между кинематическими показателями передач и погрешностями изготовления и сборки деталей, а также еще не установлены допуски в соответствии с этими зависимостями. Поэтому опытные образцы редукторов для экспериментальных исследований изготавливались с нормальной точностью (экономической точностью), со средними и расширенными допусками с целью выявления большего количества погрешностей, влияющих на кинематические характеристики.

Исследования проводились на автоматизированном стенде (см. рисунок 4.11) методами комплексной оценки и спектрального анализа (см. разд. 4). Беговые дорожки этих передач выполнены по уравнениям (2.64)–(2.74) с однопериодной ведущей беговой дорожкой в виде смещенной окружности. Точность изготовления редукторов соответствует задаваемой точности при моделировании кинематических погрешностей (см. разд. 1 и 2).

### *5.1 Экспериментальная оценка и анализ кинематических характеристик одноступенчатых планетарных редуцирующих механизмов*

На рисунках 5.1–5.5 показаны экспериментальные графики 2500 значений кинематической погрешности  $F_{к.п}$  в градусах за полный оборот выходного вала планетарного роликового редуктора с передаточным отношением  $i = 14$  [69, 70] без нагрузки и с нагрузками 10, 20, 30 и 40 Н·м. Частота вращения ведущего вала при измерениях – 1500 об/мин. Конструкция редуктора соответствует схеме, представленной на рисунке 3.4.

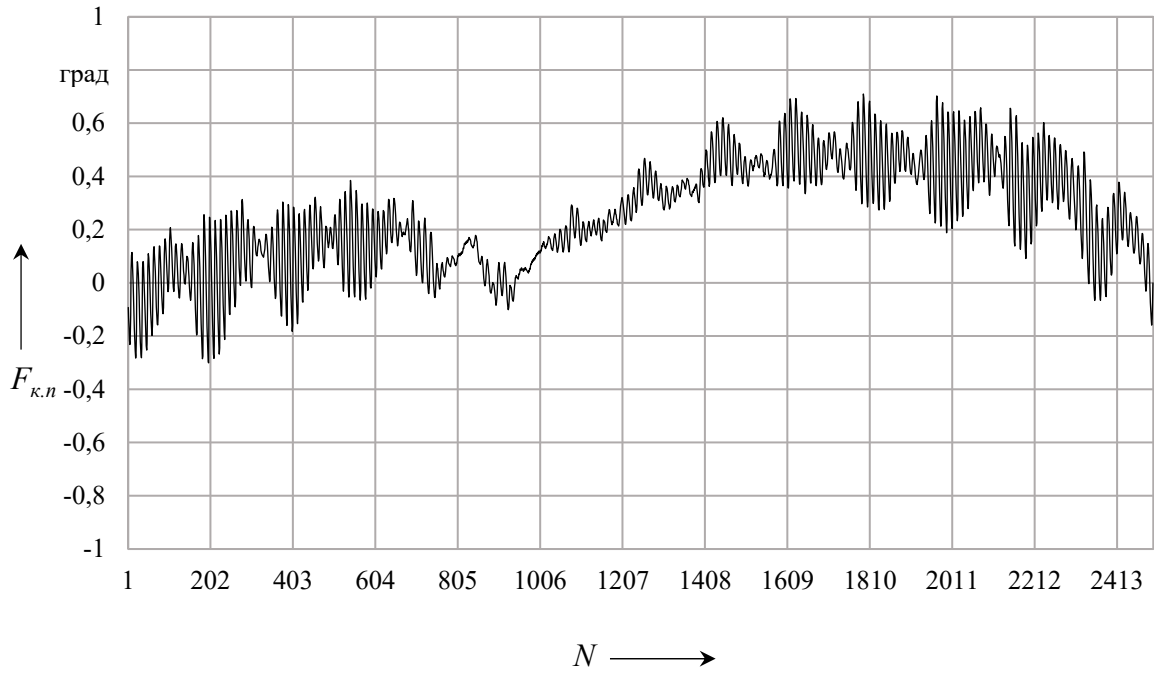


Рисунок 5.1 – Кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 без нагрузки

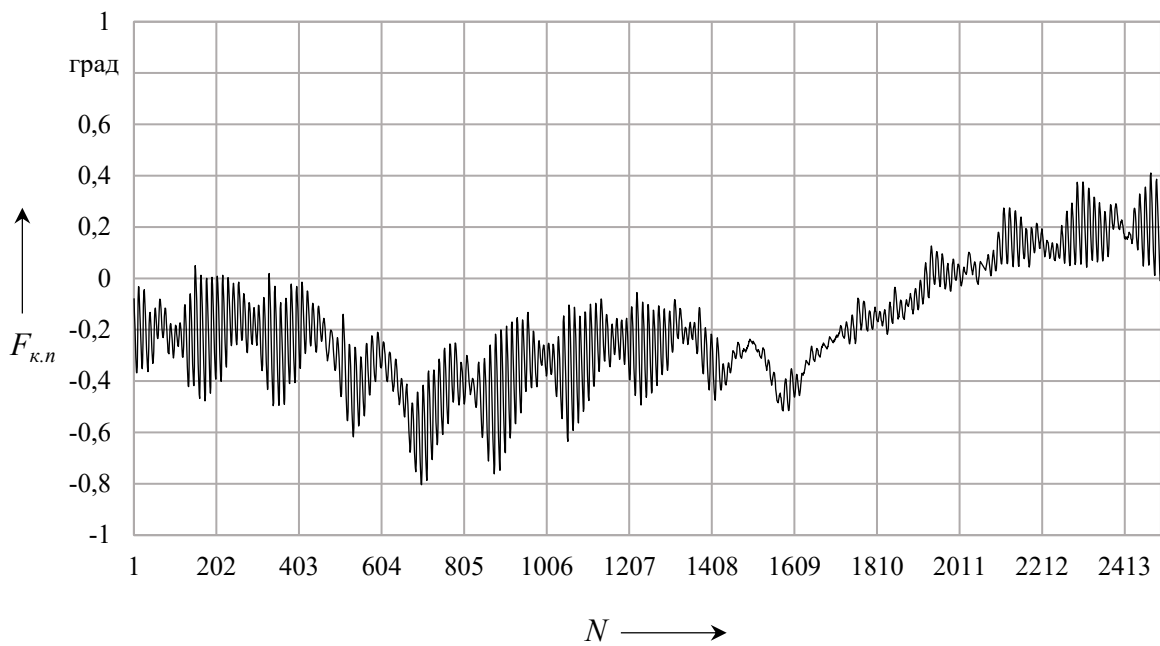


Рисунок 5.2 – Кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 10 Н·м

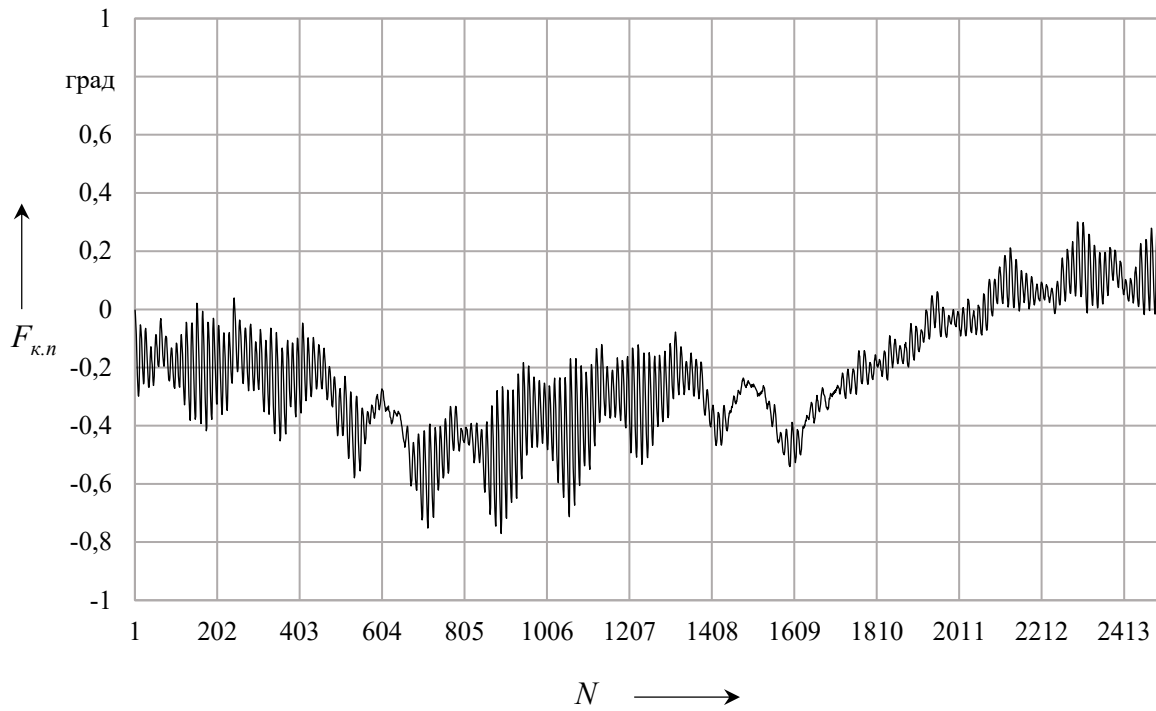


Рисунок 5.3 – Кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 20 Н·м

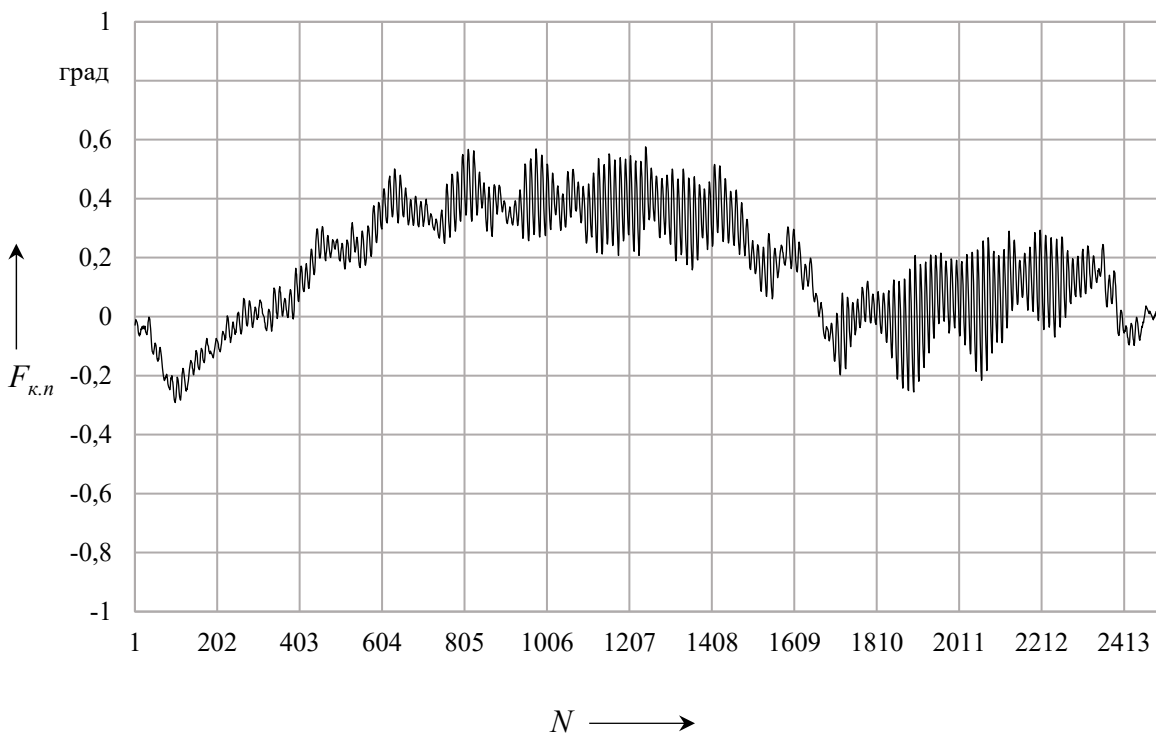


Рисунок 5.4 – Кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 30 Н·м

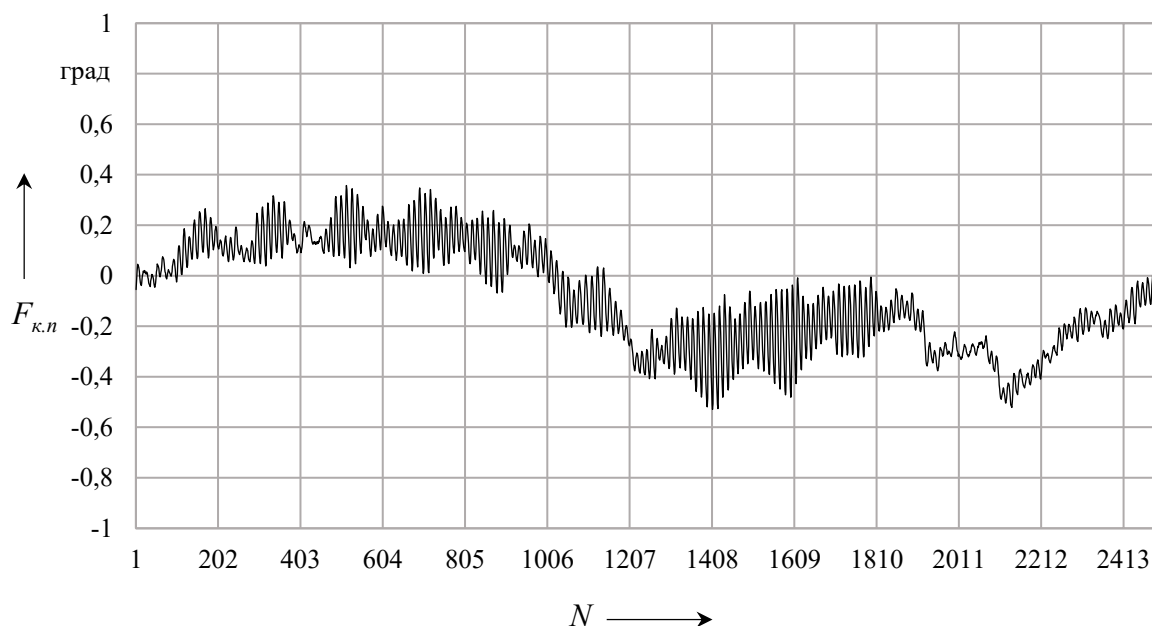


Рисунок 5.5 – Кинематическая погрешность планетарного роликowego редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 40 Н·м

На графиках (см. рисунки 5.1–5.5) обозначено:  $F_{к.п}$  – кинематическая погрешность передачи;  $N$  – число измерений за оборот выходного вала, равное числу отсчета датчика угловых перемещений ( $N = 2500$ ), установленного на стенде и соединенного с выходным валом редуктора.

Графики (см. рисунки 5.1–5.5) имеют выраженную однопериодную синусоидальную кривую, на которую накладываются местные погрешности с высокой частотой колебаний. Проводилось по три эксперимента для каждого нагружающего момента. На рисунке 5.6 показаны график и линия тренда средних значений кинематических погрешностей для каждой нагрузки по результатам трех экспериментальных графиков.

Из графика (см. рисунок 5.6) видно, что с увеличением нагрузки кинематическая погрешность уменьшается. Среднее значение наибольшей кинематической погрешности редуктора с  $i = 14$  по результатам всех экспериментов без нагрузки и с нагрузками 10, 20, 30 и 40 Н·м составило 0,98 град. На рисунках 5.7 и 5.8 представлены графики местной кинематической погрешности этого же редуктора без нагрузки и с нагрузкой 40 Н·м.

На графике (см. рисунок 5.7) выделяется 14 периодов (равных передаточному отношению) всплесков и затуханий значений местной кинематической погрешности редуктора. Из графиков (см. рисунки 5.7 и 5.8) видно, что с нагрузкой редуктора 40 Н·м амплитуда колебаний местных кинематических погрешностей уменьшается.

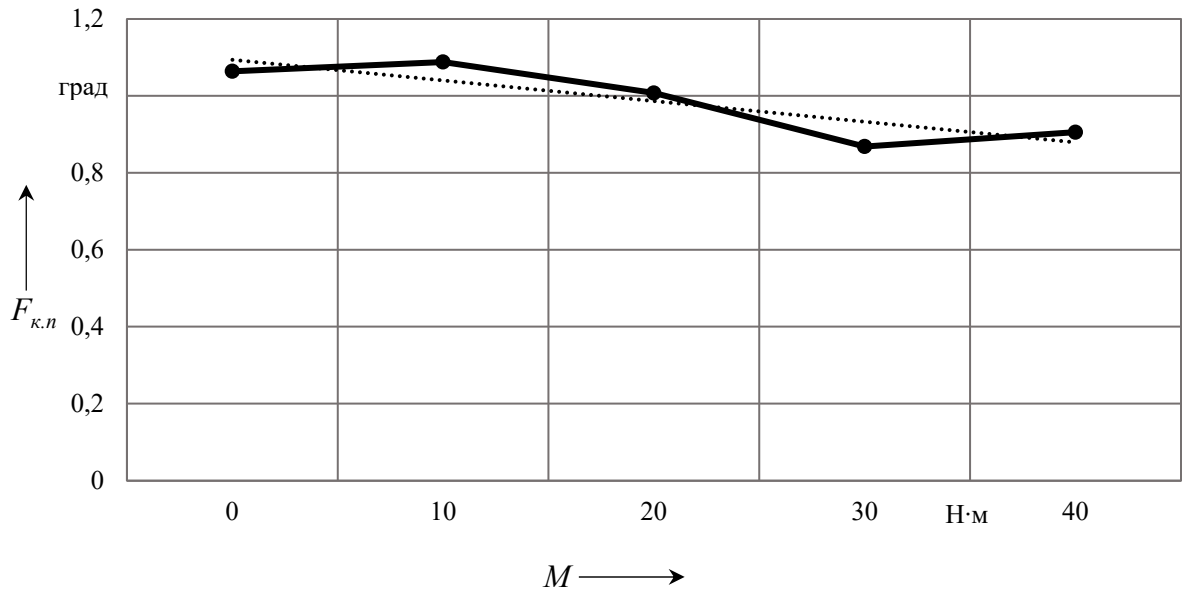


Рисунок 5.6 – Средние значения кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 в зависимости от нагрузки

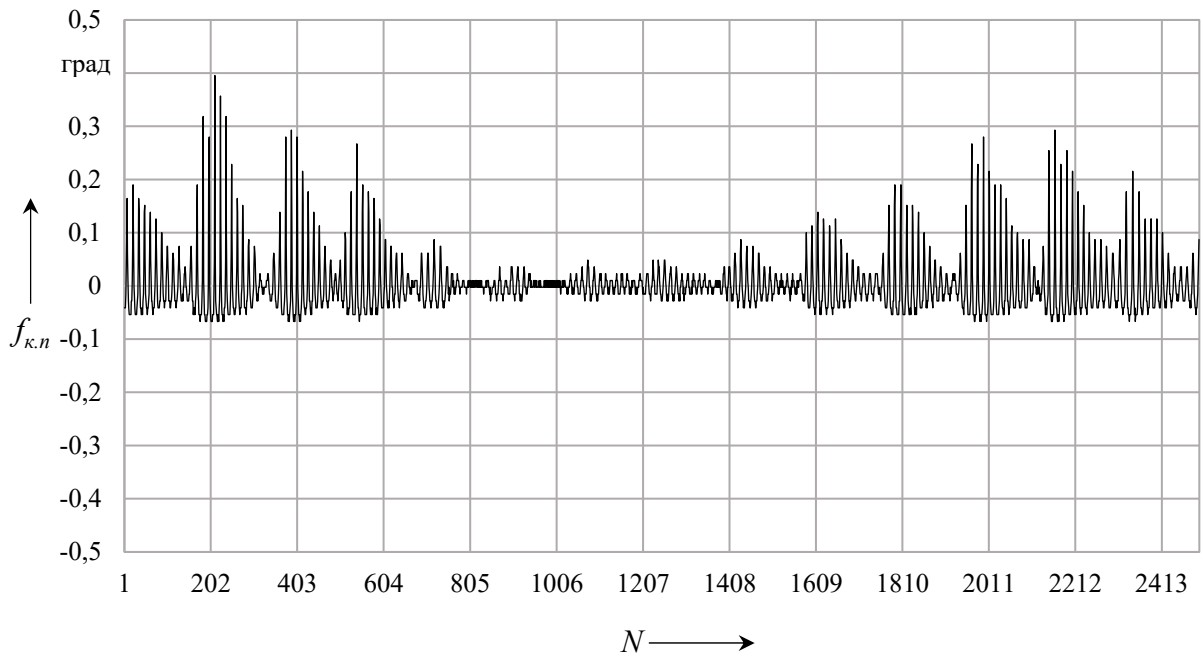


Рисунок 5.7 – Местная кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 без нагрузки

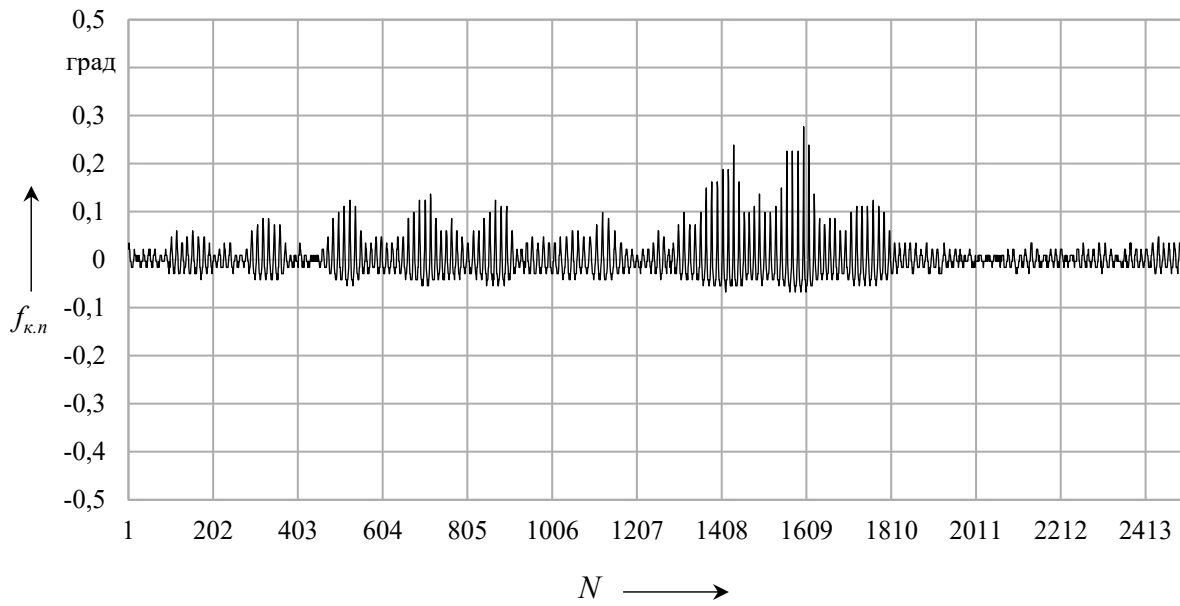


Рисунок 5.8 – Местная кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 40 Н·м

На графике (рисунок 5.9) представлены усредненные значения по трем экспериментам наибольшей местной кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  в зависимости от нагружающего момента, а на рисунке 5.10 – процентное отношение наибольшей местной кинематической погрешности к наибольшей кинематической погрешности этого редуктора.

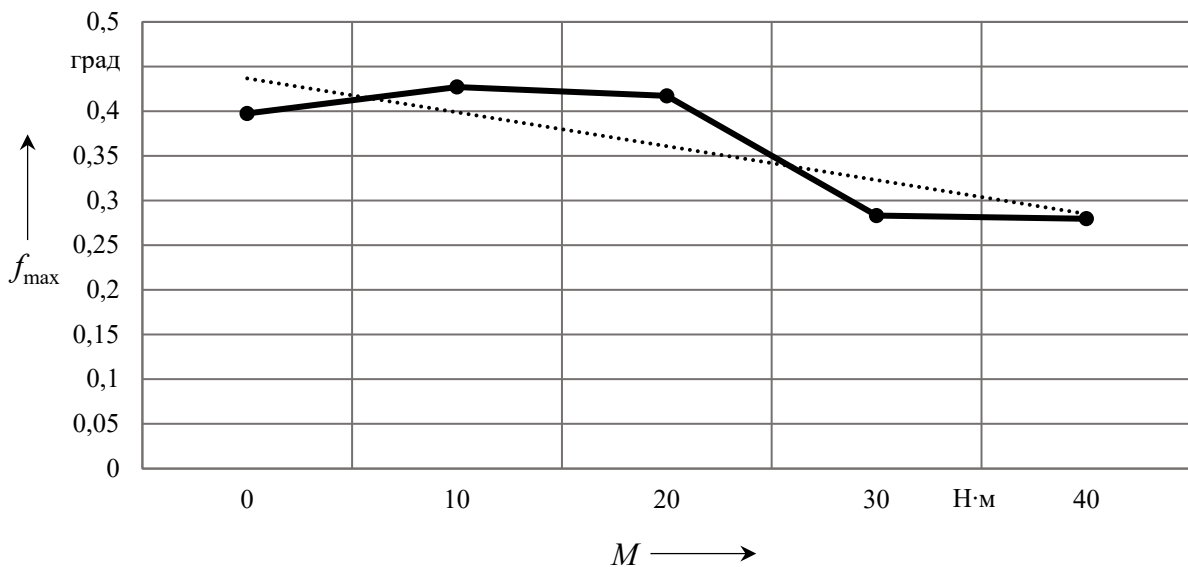


Рисунок 5.9 – Наибольшая местная кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  от нагружающего момента (усредненные значения)

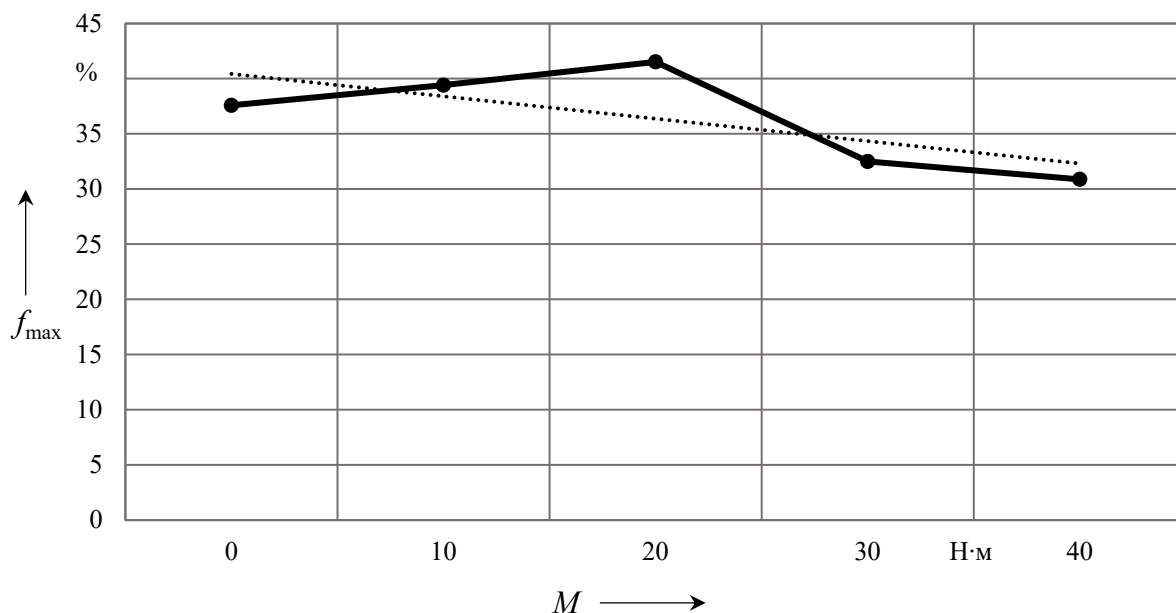


Рисунок 5.10 – Наибольшая местная кинематическая погрешность в процентах от наибольшей кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  (усредненные значения)

На графике (рисунок 5.11) приведены усредненные значения по трем экспериментам средней местной кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  в зависимости от нагружающего момента, а на рисунке 5.12 – процентное отношение средней местной кинематической погрешности к наибольшей кинематической погрешности этого редуктора.

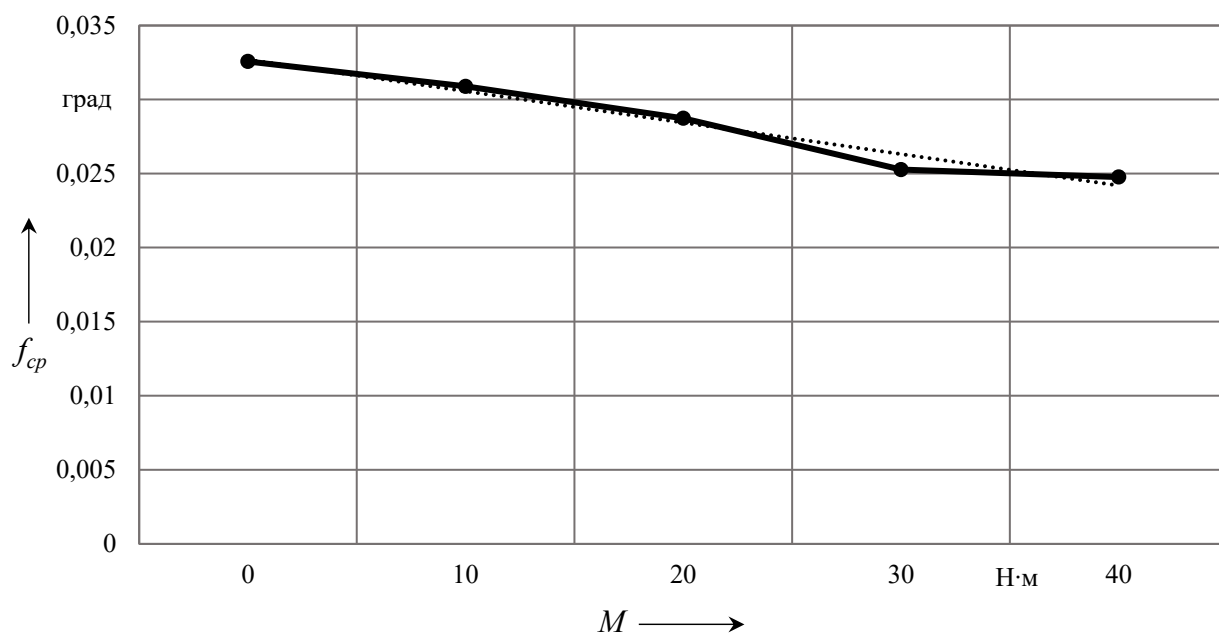


Рисунок 5.11 – Средняя местная кинематическая погрешность планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  от нагружающего момента (усредненные значения)

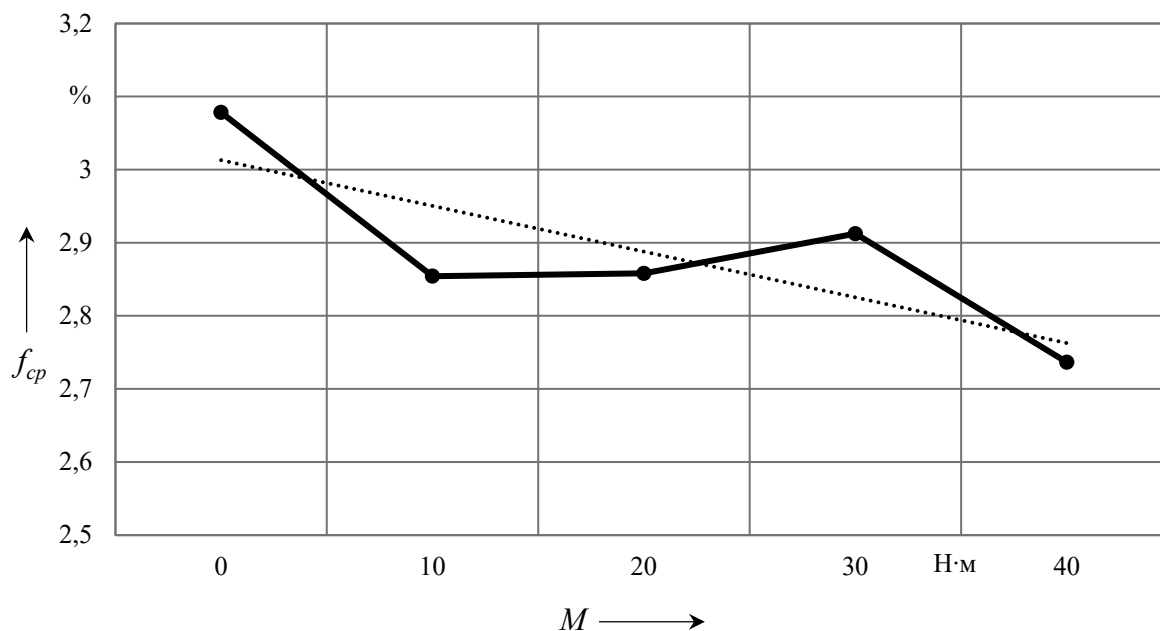


Рисунок 5.12 – Средняя местная кинематическая погрешность в процентах от наибольшей кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  (усредненные значения)

Из графиков (см. рисунки 5.9–5.12) видно, что с увеличением нагрузки местная кинематическая погрешность и ее процентное отношение к кинематической погрешности передачи уменьшаются. Также видно, что средняя местная кинематическая погрешность значительно меньше ее наибольших значений, связанных с местными и нечастыми выбросами.

В результате проведенных экспериментов оценки местных кинематических погрешностей планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  без нагрузки и с нагрузкой усредненные значения составили: наибольшей местной кинематической погрешности – 0,36 град (36,4 % от наибольшей кинематической погрешности); средней местной кинематической погрешности – 0,028 град (2,9 % от наибольшей кинематической погрешности). Отклонение передаточного отношения от номинального значения составило  $\pm 7,8$  %.

На рисунках 5.13–5.17 показаны амплитудно-частотные спектры кинематических погрешностей, представленных на рисунках 5.1–5.5. Спектры содержат 200 гармонических составляющих кинематической погрешности передачи. На спектрах обозначено:  $A$  – амплитуда гармонической составляющей;  $n$  – номер гармонической составляющей (гармоники).

Амплитудно-частотные спектры кинематической погрешности планетарного роликового редуктора с  $i = 14$ , представленные на рисунках 5.13–5.17, показывают наиболее значимые гармоники, имеющие наибольшие амплитуды. Для низкочастотного участка это гармоники 1, 2, 3, 4 и 5; среднечастотного – 13, 14, 15; высокочастотного – 168, 180, 182, 194, 195 и 196.

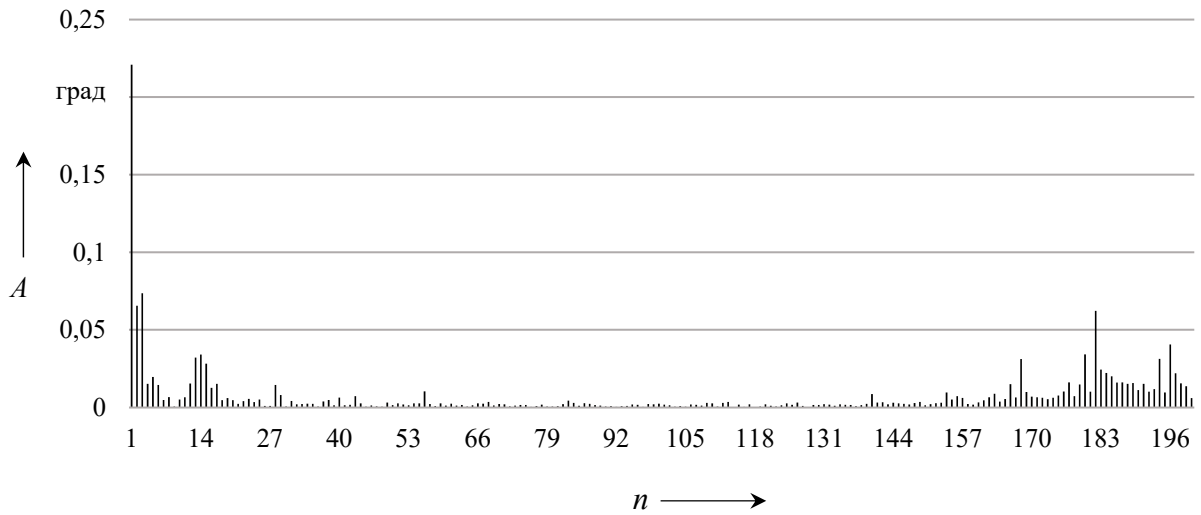


Рисунок 5.13 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.1, редуктора с передаточным отношением 14 без нагрузки

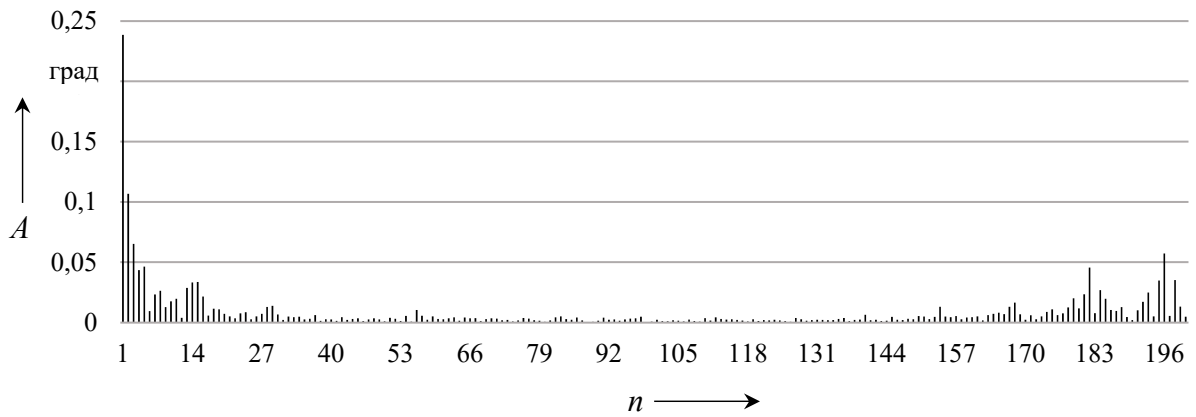


Рисунок 5.14 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.2, редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 10 Н·м

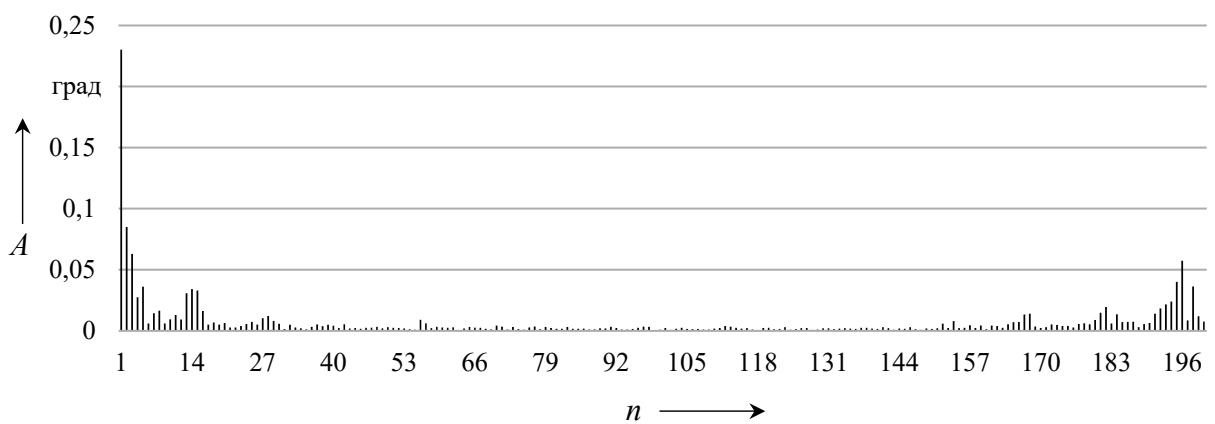


Рисунок 5.15 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.3, редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 20 Н·м

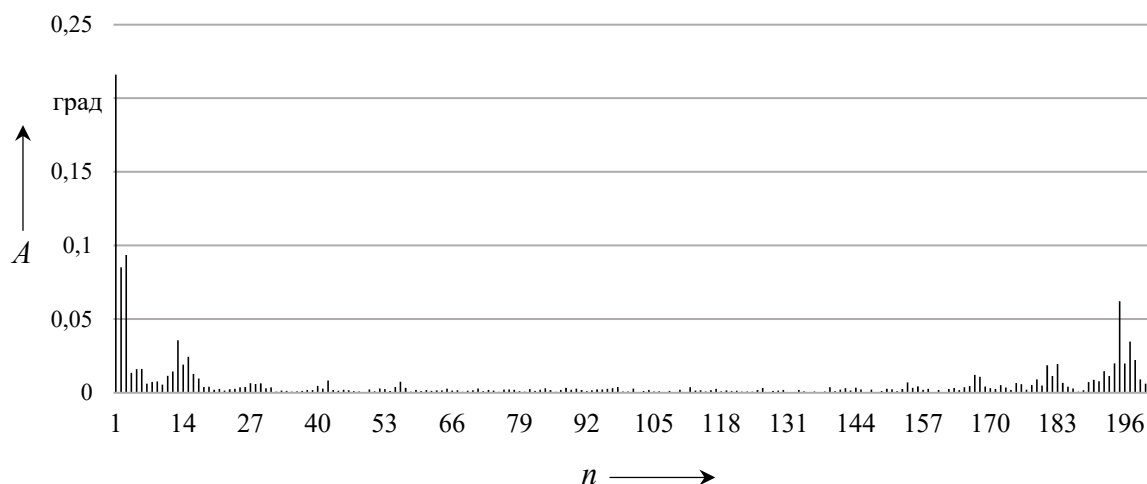


Рисунок 5.16 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.4, редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 30 Н·м

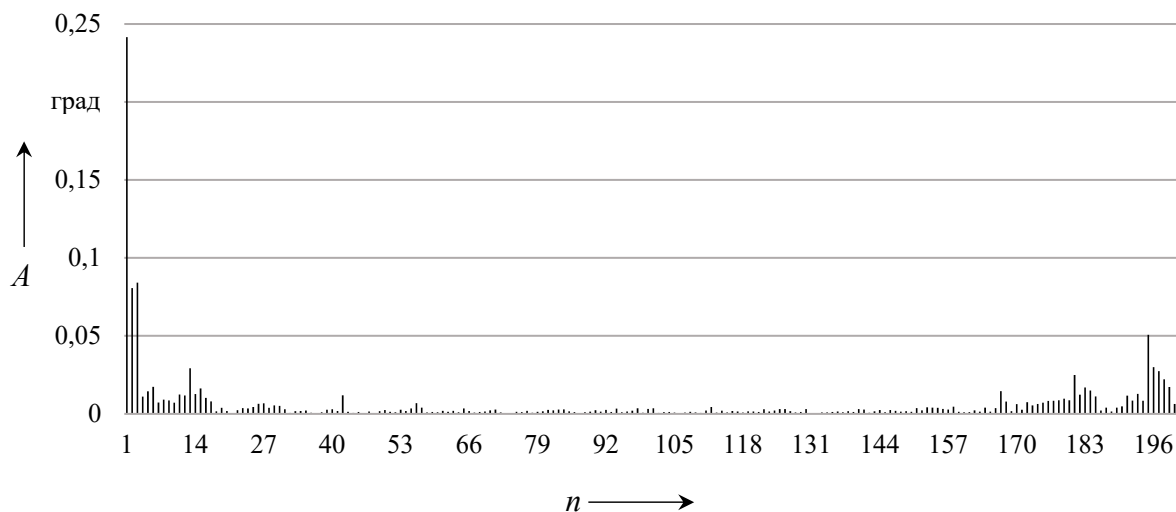


Рисунок 5.17 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.5, редуктора с передаточным отношением 14 с нагрузкой 40 Н·м

Из амплитудно-частотных спектров (см. рисунки 5.13–5.17) видно, что с увеличением нагрузки количество значимых гармоник (в основном высокочастотных) уменьшается. Наиболее значимые гармоники без нагрузки – 1, 2, 3, 13, 14, 15, 168, 180, 182, 194 и 196; с нагрузкой 40 Н·м – 1, 2, 3, 13, 195 и 196. С нагрузкой число значимых гармоник уменьшилось почти в 2 раза. При этом амплитуды наиболее значимых гармоник при увеличении нагрузки изменяются неоднозначно. В низкочастотном участке спектра в основном проявляются гармоники с номерами от 1 до 3, а в среднечастотном и высокочастотном участках спектров номера гармоник в основном равны, кратны или близки числу периодов многопериодной беговой дорожки  $z_2 = 13$  и передаточному отношению  $i = 14$  редуктора.

На низкочастотном участке амплитуды гармоник показывают погрешности, связанные со смещением при изготовлении и сборке деталей ведомого звена относительно заторможенного звена с многопериодной дорожкой; на среднем участке – погрешности деталей заторможенного звена; на высокочастотном участке – погрешности из-за наличия зазоров при вхождении сателлитов в зацепление с беговыми дорожками и сепаратором.

В таблице 5.1 представлены значимые гармонические составляющие (гармоники) кинематической погрешности, имеющие часто повторяющиеся наибольшие амплитуды  $A_i$ , полученные после трех измерений на стенде для каждой нагрузки за полный оборот выходного вала планетарного роликового редуктора с  $i = 14$ , и средние значения амплитуд  $A_{cp}$ . Все значения получены при измерениях с частотой вращения ведущего вала 1500 об/мин.

На рисунке 5.18 показаны экспериментальные графики средних значений амплитуд, представленных в таблице 5.1 (кроме амплитуды первой гармоники), амплитудно-частотных спектров кинематических погрешностей планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  в зависимости от нагружающего момента  $M_{вм}$  на ведомом валу.

Из таблицы 5.1 и графиков (см. рисунок 5.18) видно, что наибольшие амплитуды имеют гармоники низкочастотного участка спектра. С увеличением нагрузки высокочастотные погрешности (гармоники 182 и 196) значительно уменьшаются. Это уменьшение связано с выборкой зазоров и меньшим колебанием сателлитов во время движения по беговым дорожкам под нагрузкой.

На рисунках 5.19 и 5.20 представлены графики и линейные тренды изменения амплитуд значимых гармоник в зависимости от нагрузки.

График, приведенный на рисунке 5.19, показывает тенденцию к небольшому увеличению амплитуды первой гармоники с увеличением нагрузки. На рисунке 5.20 амплитуды гармоник с номерами 2 и 3 низкочастотного спектра имеют противоположную зависимость и их суммарные значения мало изменяются при изменении нагрузки. Гармоники средне- и высокочастотных участков спектра имеют тенденцию в основном к уменьшению значений амплитуд при увеличении нагрузки.

В таблице 5.2 приведены значения кинематических погрешностей, которые соответствуют графикам, представленным на рисунках 5.1–5.5.

Из таблицы 5.2 видно, что среднее значение кинематической погрешности с увеличением нагрузки имеет тенденцию к уменьшению в основном за счет уменьшения амплитуд высокочастотных гармоник амплитудно-частотных спектров, что показано в таблице 5.1 и на графиках, приведенных на рисунках 4.29 и 4.31.

Таблица 5.1 – Значимые гармоники планетарного роликowego редуктора с  $i = 14$ 

Номер эксперимента	Амплитуда $i$ -й гармоники	Нагрузка, Н·м				
		0	10	20	30	40
		Значение амплитуды гармоники, град				
1	$A_1$	0,2208	0,2385	0,2301	0,2159	0,2415
2		0,2086	0,1753	0,1987	0,2106	0,2594
3		0,2570	0,2024	0,2121	0,2101	–
	$A_{1cp}$	<b>0,2288</b>	<b>0,2054</b>	<b>0,2136</b>	<b>0,212</b>	<b>0,2505</b>
1	$A_2$	0,0654	0,1067	0,0850	0,0851	0,0805
2		0,0790	0,0669	0,0895	0,0989	0,0661
3		0,1090	0,0773	0,0863	0,0858	–
	$A_{2cp}$	<b>0,0845</b>	<b>0,0836</b>	<b>0,0869</b>	<b>0,0897</b>	<b>0,0733</b>
1	$A_3$	0,0736	0,0652	0,0629	0,0935	0,0840
2		0,0714	0,0875	0,0971	0,0896	0,0829
3		0,0542	0,0712	0,0799	0,0858	–
	$A_{3cp}$	<b>0,0664</b>	<b>0,0746</b>	<b>0,0800</b>	<b>0,0896</b>	<b>0,0835</b>
1	$A_{13}$	0,0321	0,0287	0,0307	0,0355	0,0291
2		0,0337	0,0394	0,0344	0,0351	0,0337
3		0,0334	0,0337	0,0364	0,0337	–
	$A_{13cp}$	<b>0,0330</b>	<b>0,0339</b>	<b>0,0338</b>	<b>0,0348</b>	<b>0,0314</b>
1	$A_{14}$	0,0340	0,0331	0,0341	0,0190	0,0125
2		0,0358	0,0286	0,0294	0,0230	0,0177
3		0,0256	0,0277	0,0275	0,0208	–
	$A_{14cp}$	<b>0,0318</b>	<b>0,0298</b>	<b>0,0303</b>	<b>0,0209</b>	<b>0,0151</b>
1	$A_{15}$	0,0282	0,0336	0,0330	0,0243	0,0162
2		0,0278	0,0351	0,0252	0,0243	0,0216
3		0,0307	0,0347	0,0248	0,0218	–
	$A_{15cp}$	<b>0,0289</b>	<b>0,0344</b>	<b>0,0277</b>	<b>0,0235</b>	<b>0,0189</b>
1	$A_{182}$	0,0622	0,0456	0,0194	0,0113	0,0122
2		0,0418	0,0373	0,0197	0,0082	0,0145
3		0,0628	0,0366	0,0199	0,0082	–
	$A_{182cp}$	<b>0,0556</b>	<b>0,0398</b>	<b>0,0197</b>	<b>0,0092</b>	<b>0,0134</b>
1	$A_{195}$	0,0095	0,0347	0,0400	0,0620	0,05060
2		0,0396	0,0450	0,0559	0,0547	0,05204
3		0,0133	0,0532	0,0378	0,0557	–
	$A_{195cp}$	<b>0,0208</b>	<b>0,0443</b>	<b>0,0446</b>	<b>0,0575</b>	<b>0,05132</b>
1	$A_{196}$	0,0405	0,0572	0,0573	0,0197	0,0298
2		0,0249	0,0514	0,0290	0,0220	0,0225
3		0,0432	0,0311	0,0551	0,0218	–
	$A_{196cp}$	<b>0,0362</b>	<b>0,0466</b>	<b>0,0471</b>	<b>0,0212</b>	<b>0,0262</b>

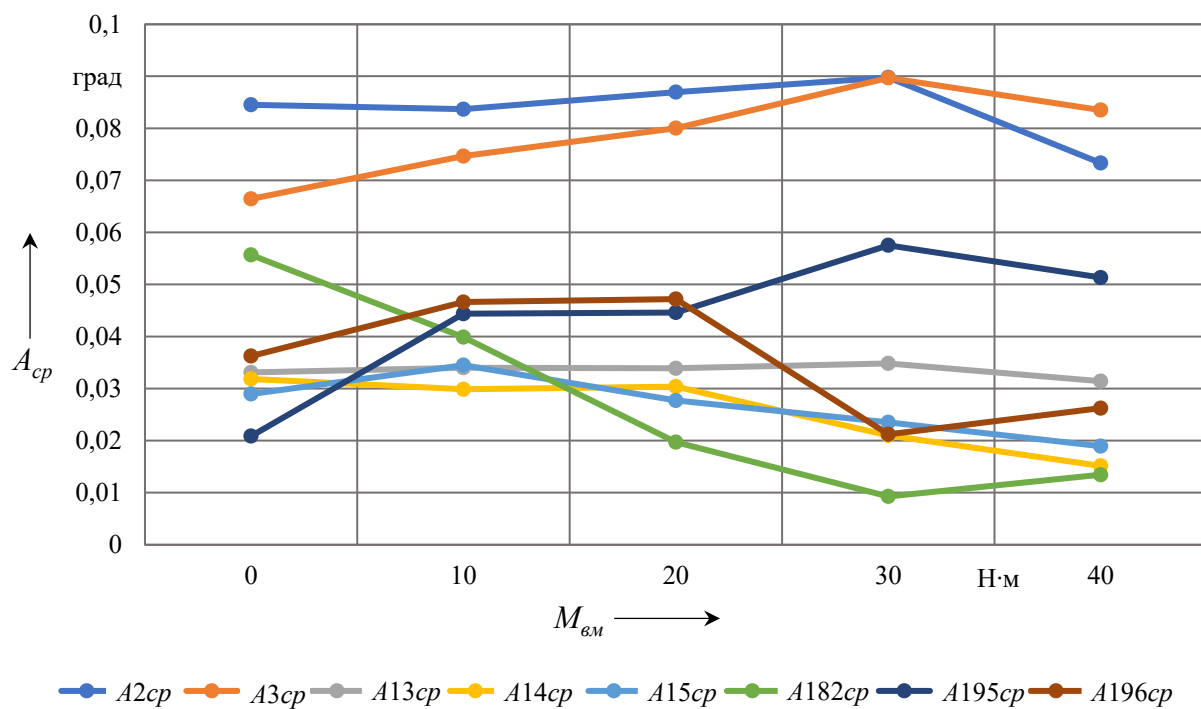


Рисунок 5.18 – Графики средних значений амплитуд спектров кинематических погрешностей планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  в зависимости от нагружающего момента на ведомом валу

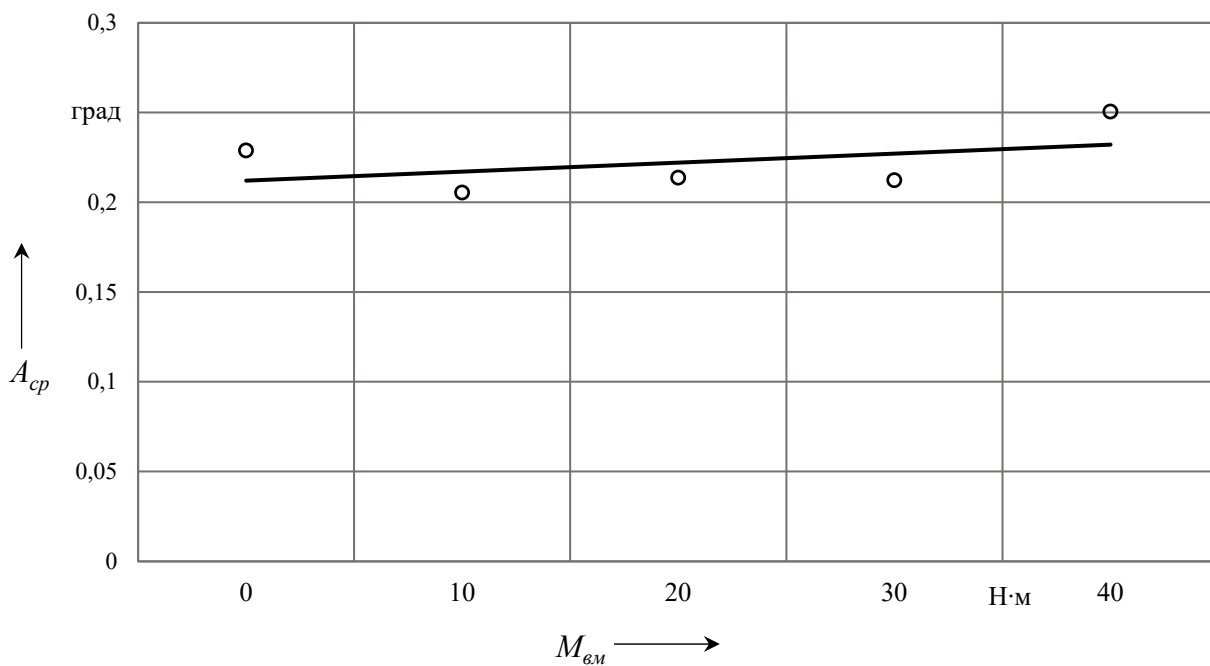


Рисунок 5.19 – Изменение амплитуды первой гармоники

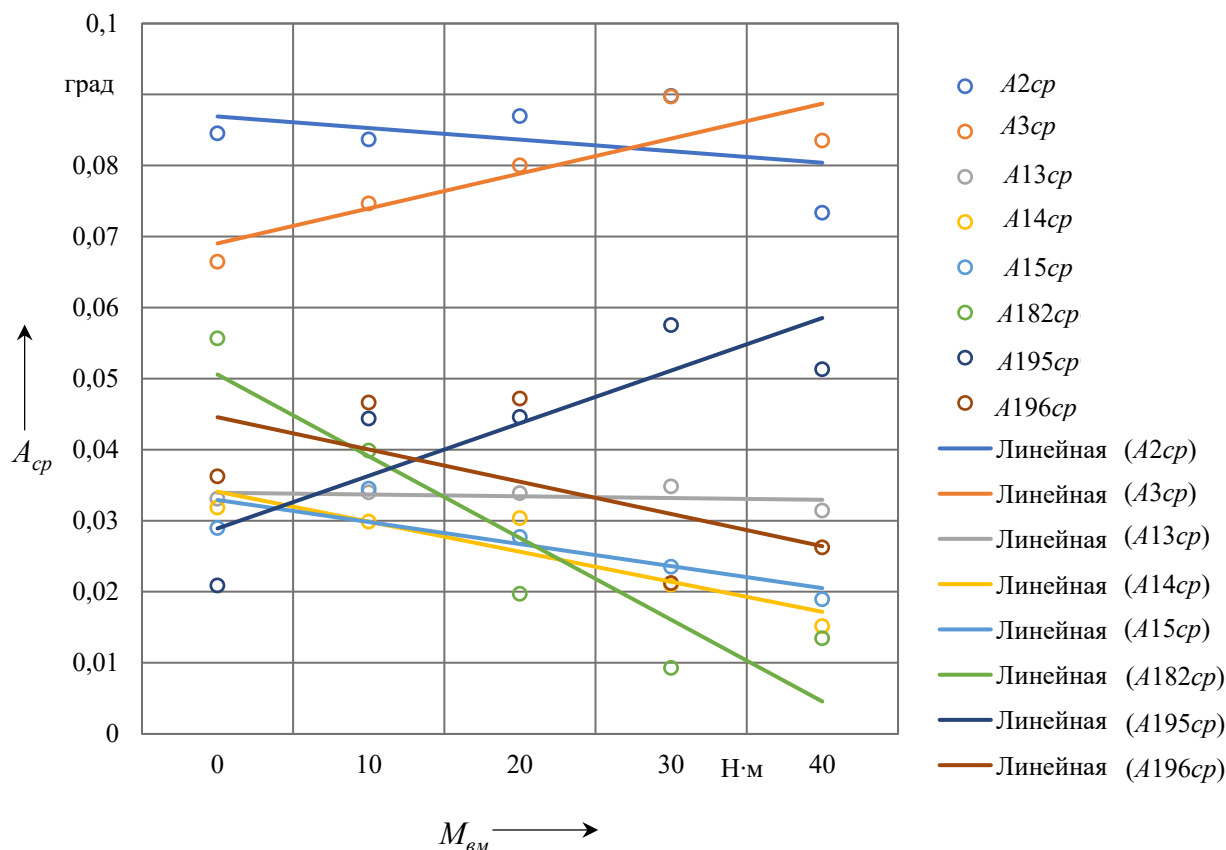


Рисунок 5.20 – Тренды амплитуд гармонических составляющих

Таблица 5.2 – Значения наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.н}$  планетарного роликового редуктора с  $i = 14$  в зависимости от нагружающего момента  $M_{вед}$  на ведомом валу

Номер измерения	Нагружающий момент $M_{вед}$ , Н·м				
	0	20	40	60	80
	Наибольшая кинематическая погрешность $F_{к.н}$ , град				
1	1,0101	1,2144	1,0708	0,8668	0,8870
2	1,0059	1,0268	0,9921	0,9035	0,9241
3	1,1752	1,0232	0,9593	0,8343	–
$F_{cp}$	<b>1,0638</b>	<b>1,0881</b>	<b>1,0074</b>	<b>0,8682</b>	<b>0,9055</b>

На рисунках 5.21–5.27 показаны экспериментальные графики кинематической погрешности  $F_{к.н}$  планетарного роликового редуктора с передаточным отношением  $i = 11$  без нагрузки с различной балансировкой ведущего эксцентрикового звена. При этом № 0 – редуктор без балансировки; № 1–6 – на ведущем звене устанавливались грузики разной массы для балансировки

ведущего эксцентрикового механизма. Конструкция редуктора соответствует схеме, приведенной на рисунке 3.4.

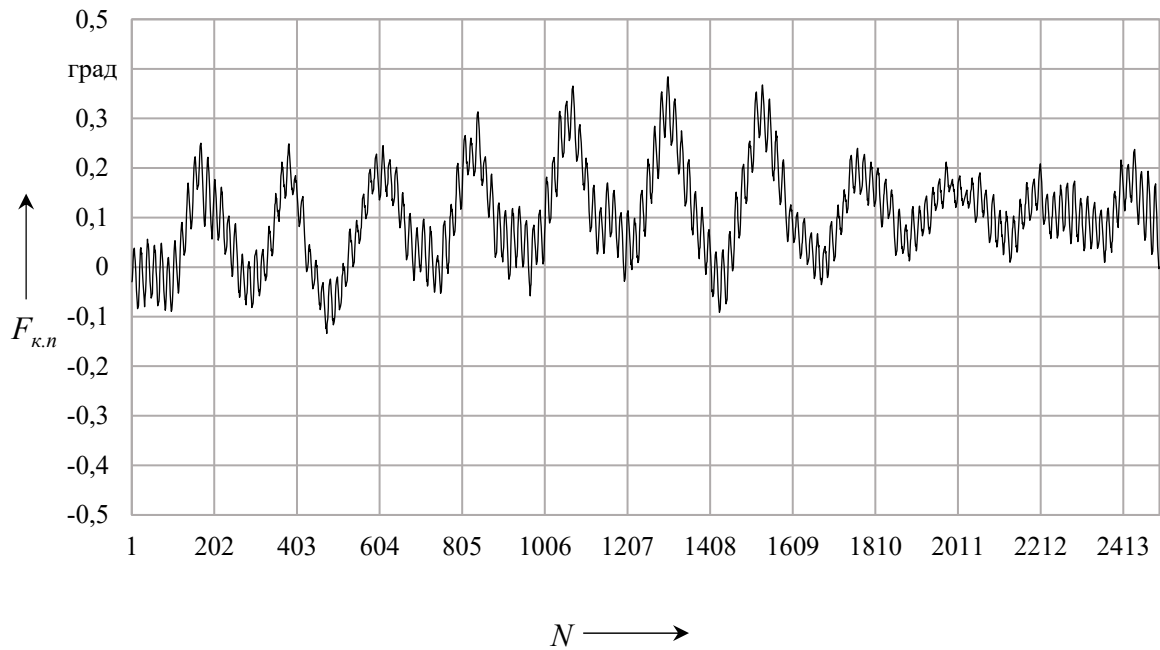


Рисунок 5.21 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 0

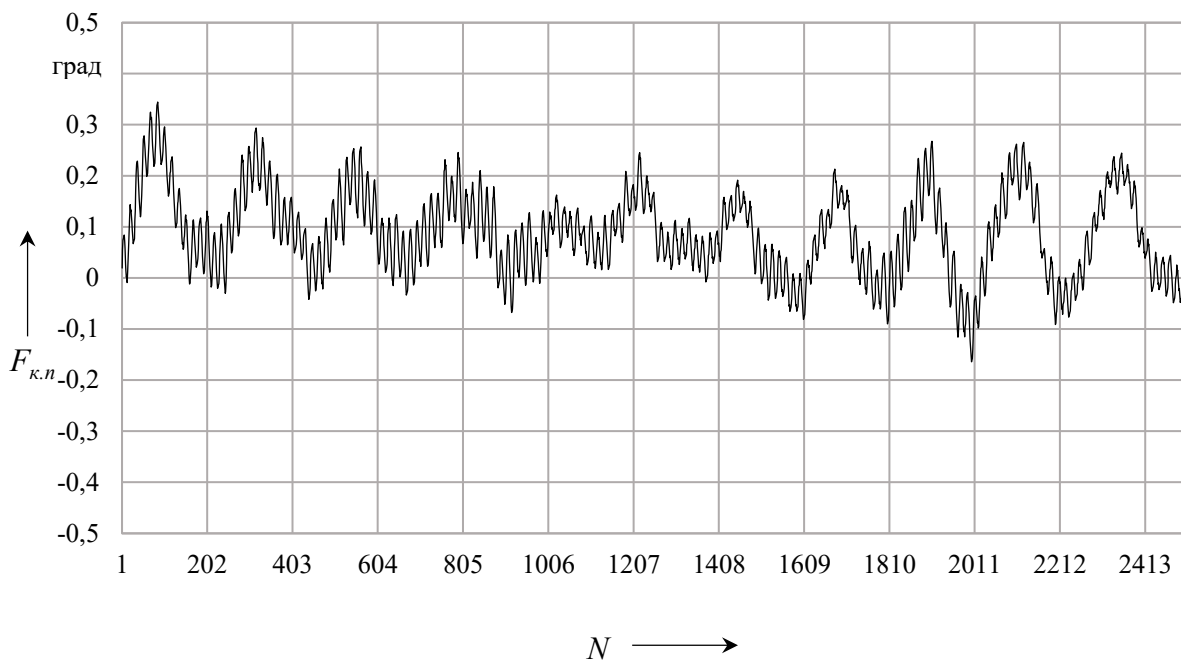


Рисунок 5.22 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 1

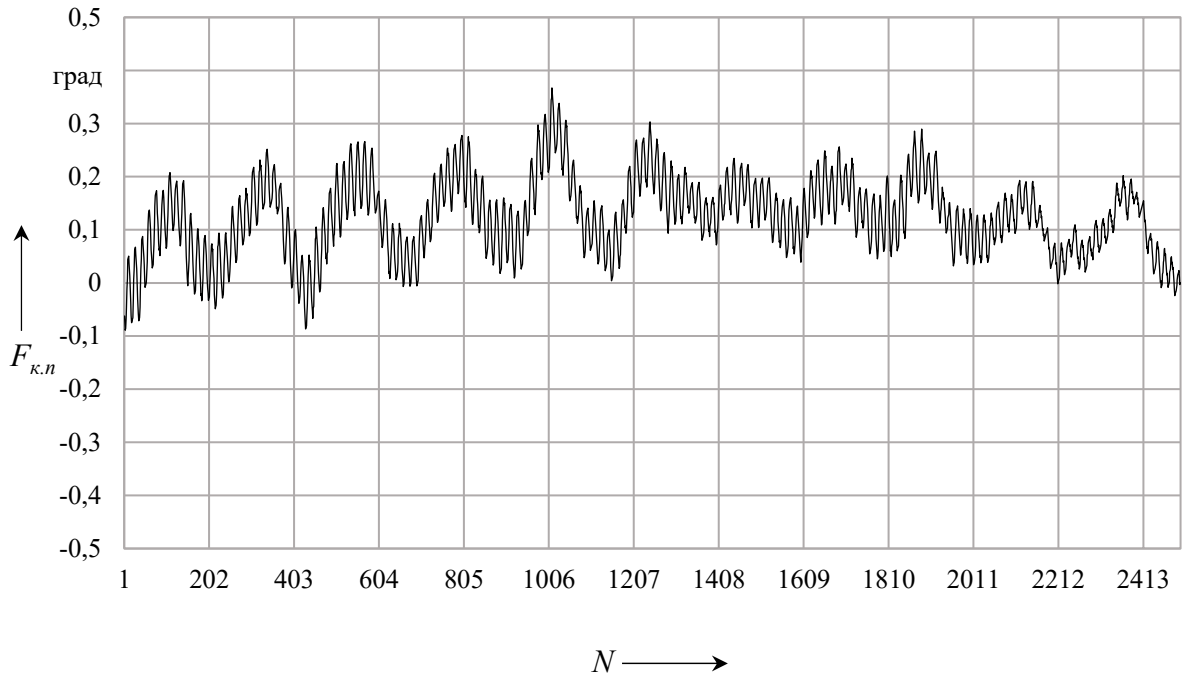


Рисунок 5.23 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 2

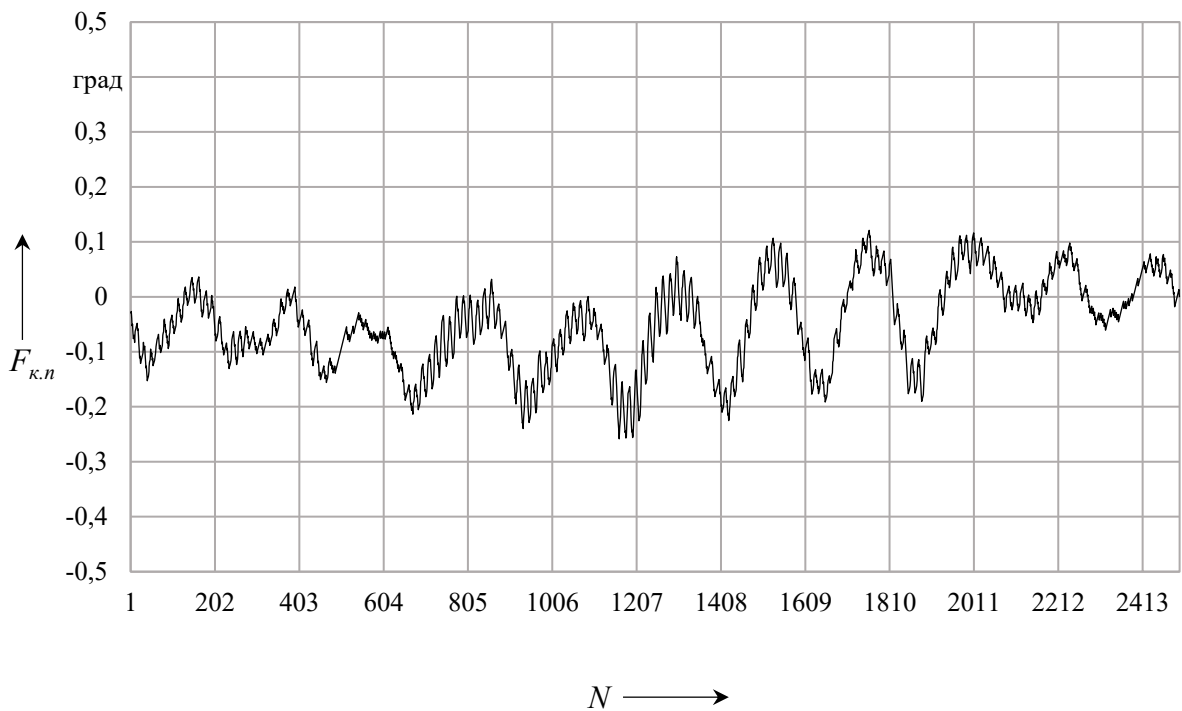


Рисунок 5.24 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 3

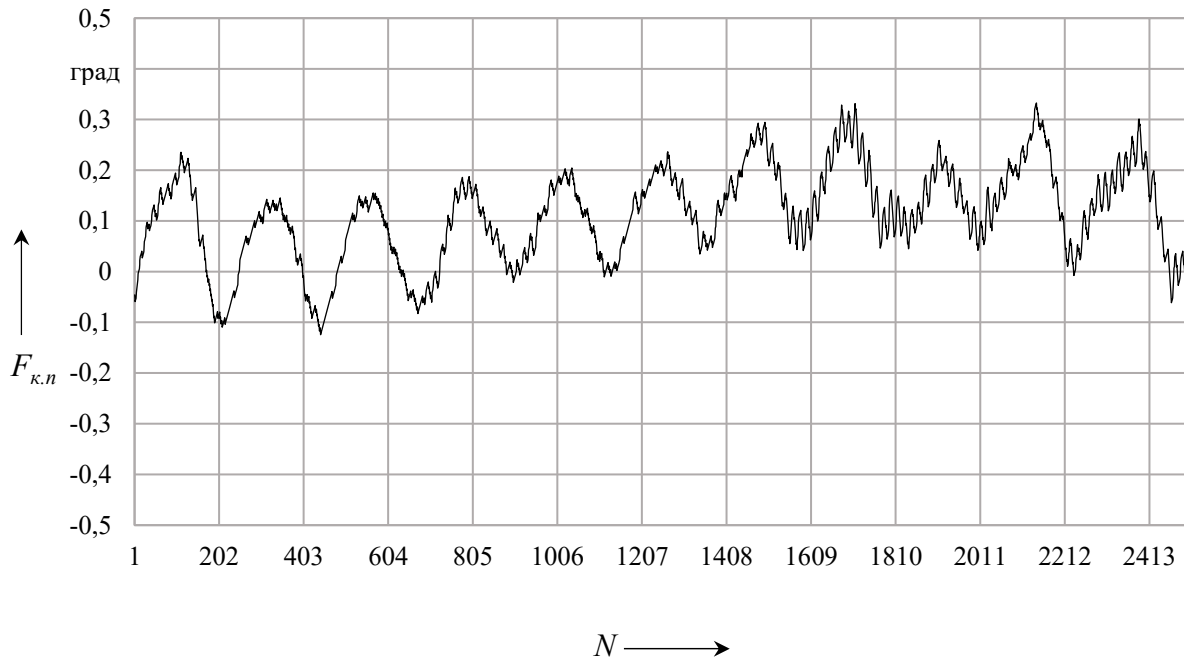


Рисунок 5.25 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 4

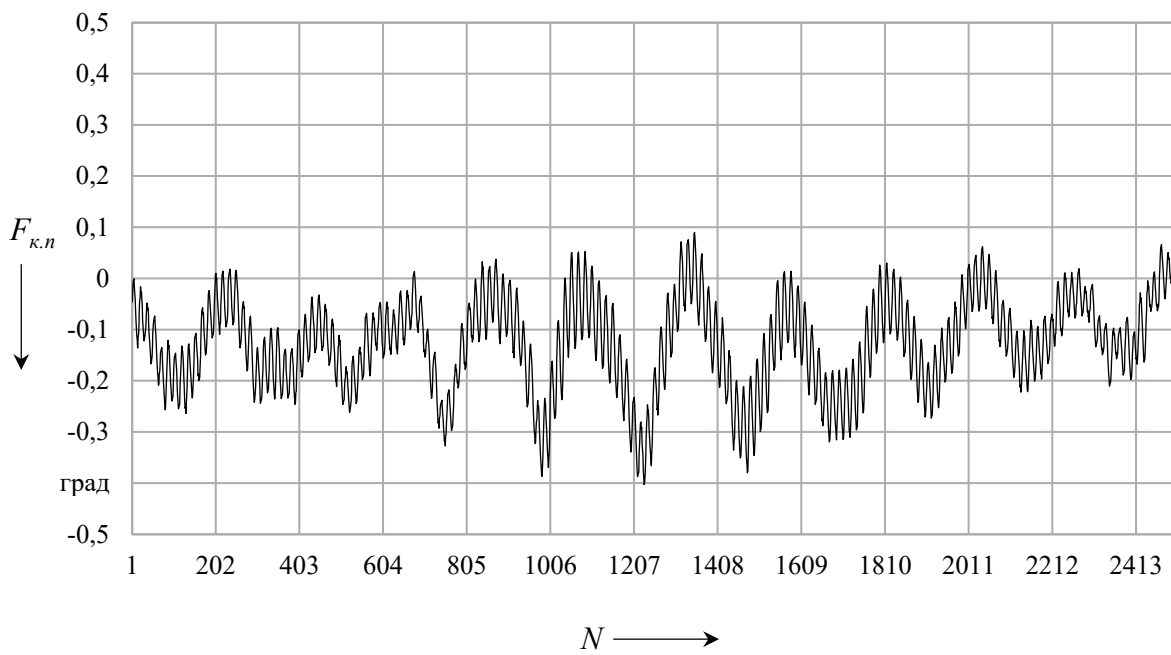


Рисунок 5.26 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 5

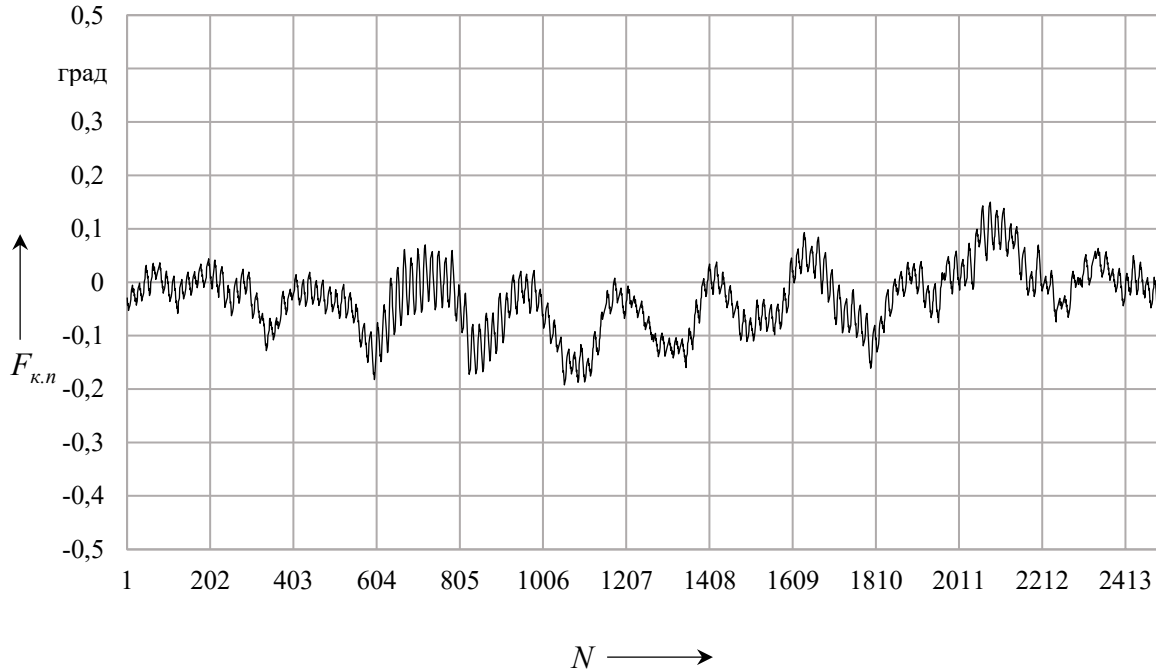


Рисунок 5.27 – Кинематическая погрешность редуктора с  $i = 11$ , балансировка № 6

Оценка кинематической погрешности редуктора проводилась без нагрузки. При этом не учитывались упругие деформации. Частота вращения ведущего вала, связанного с валом электродвигателя, составляла 1500 об/мин.

На рисунках  $N$  – число измерений за оборот выходного вала, равное числу отсчета датчика угловых перемещений ( $N = 2500$ ), установленного на стенде и соединенного с выходным валом редуктора.

В таблице 5.3 приведены значения кинематических характеристик планетарного роликового редуктора с  $i = 11$  с различной балансировкой.

В таблице обозначено:  $F_{к.п}$  – наибольшая кинематическая погрешность редуктора;  $f_{\max}$  – наибольшая местная кинематическая погрешность;  $f_{\max, \%}$  – процент наибольшей местной погрешности от наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.п}$ ;  $f_{ср}$  – средняя местная кинематическая погрешность;  $f_{ср, \%}$  – процент средней местной погрешности от наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.п}$ ;  $\Delta i, \%$  – процент отклонения среднего экспериментального передаточного отношения от номинального.

Из графиков (см. рисунки 5.21–5.27) и таблицы 5.3 видно, что балансировка улучшает кинематические характеристики редуктора. С балансировками № 3 и 6 кинематическая погрешность редуктора имеет наименьшее значение. С балансировками № 3, 4 и 6 средние местные кинематические погрешности имеют наименьшие значения. При этом с этими балансировками расчетом получились наименьшие отклонения частоты вращения и переда-

точного отношения, представленные в таблице 5.3, что характеризует в этом случае наибольшую сбалансированность редуктора.

Таблица 5.3 – Кинематические характеристики планетарного роликового редуктора с  $i = 11$

Параметры	Балансировка						
	№ 0	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
$F_{к.п}$ , град	0,5182	0,5083	0,4559	0,3792	0,4571	0,4926	0,34208
$f_{\max}$ , град	0,0327	0,0326	0,0327	0,0327	0,0264	0,04905	0,0327
$f_{\max}$ , %	6,3134	6,4311	7,1714	8,6276	5,7763	9,9565	9,5603
$f_{ср}$ , град	0,0127	0,0124	0,0129	0,00794	0,00716	0,0154	0,00844
$f_{ср}$ , %	2,4596	2,4559	2,8354	2,0954	1,5679	3,1306	2,469
$\Delta i$ , %	8,1289 $\pm 4,06$	7,9758 $\pm 3,99$	8,2357 $\pm 4,12$	5,2277 $\pm 2,61$	4,7404 $\pm 2,37$	9,6707 $\pm 4,84$	5,5382 $\pm 2,77$

На рисунках 5.28 и 5.29 представлены графики местных кинематических погрешностей по результатам балансировок № 0 и 3.

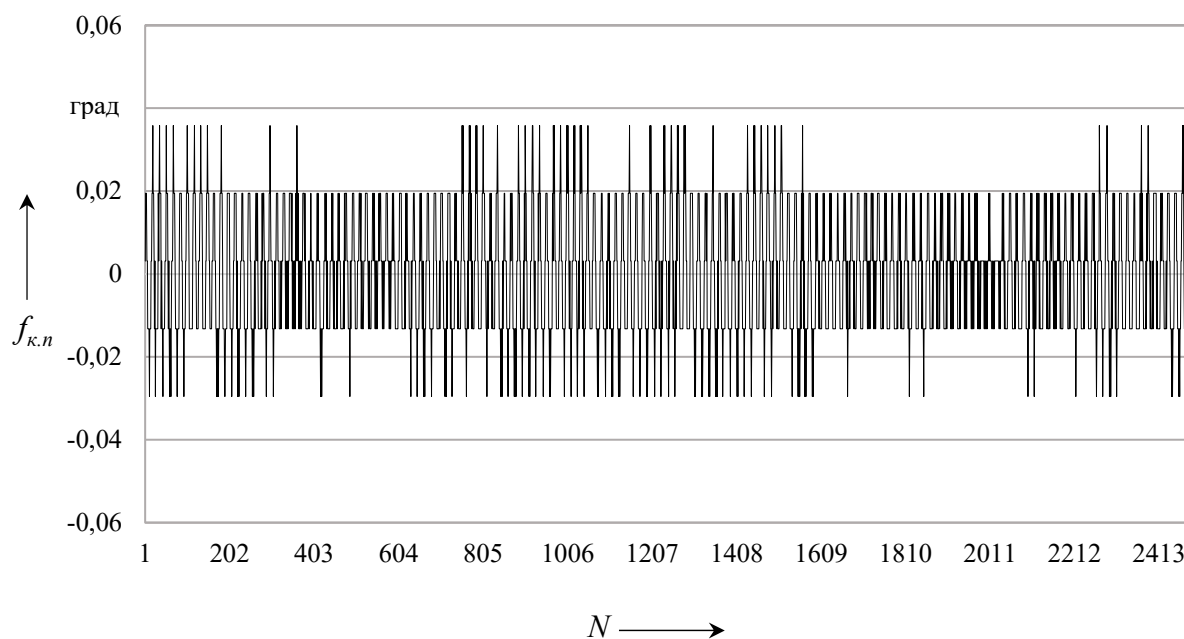


Рисунок 5.28 – Местная кинематическая погрешность (балансировка № 0)

Из графиков (см. рисунки 5.28 и 5.29) видно, что размах местных кинематических погрешностей с балансировкой № 3 меньше, чем с балансировкой № 0, что характеризует большую плавность работы редуктора с балансировкой № 3.

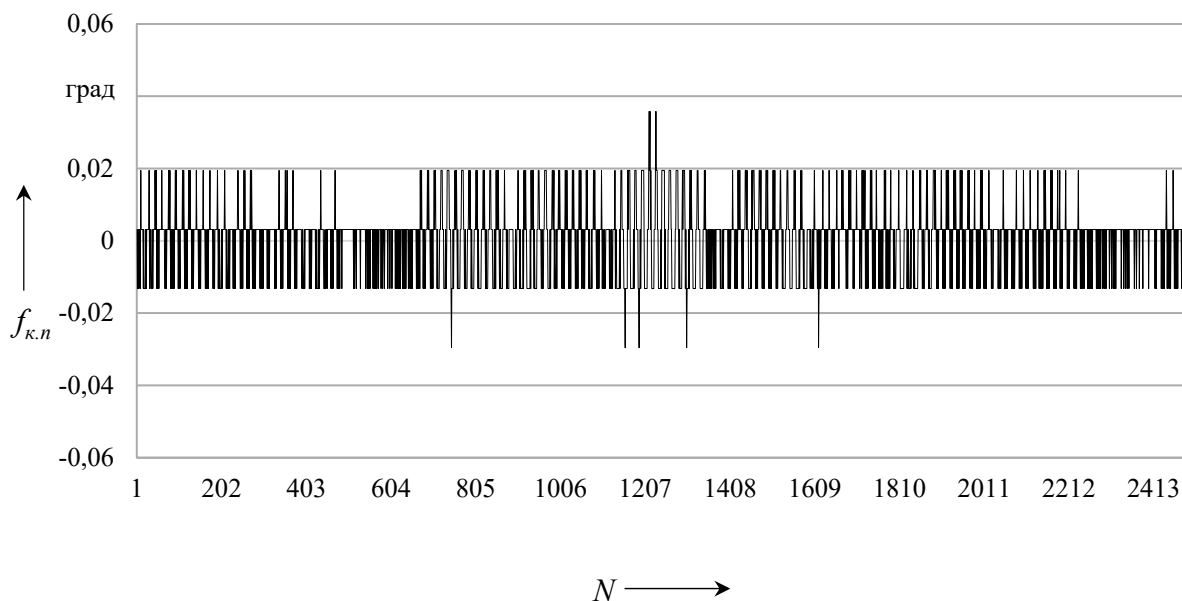


Рисунок 5.29 – Местная кинематическая погрешность (балансировка № 3)

На рисунках 5.30 и 5.31 показаны амплитудно-частотные спектры кинематических погрешностей, представленных на рисунках 5.21 и 5.26, менее сбалансированного редуктора (балансировки № 0 и 5 соответственно), а на рисунках 5.32 и 5.33 – амплитудно-частотные спектры кинематических погрешностей, представленных на рисунках 5.24 и 5.27, наиболее сбалансированного редуктора с  $i = 11$  (балансировки № 3 и 6 соответственно).

На графиках (см. рисунки 5.30–5.33) обозначено:  $A$  – амплитуда гармонической составляющей;  $n$  – номер гармоники. Из графиков видно, что у сбалансированного редуктора (см. рисунки 5.32 и 5.33) амплитуды гармоник с номерами больше единицы, характеризующие плавность работы передачи, уменьшились в сравнении с несбалансированным редуктором (см. рисунки 5.30 и 5.31). Номера гармоник с наибольшими амплитудами – 1, 10, 11 и 152. Эти гармоники связаны с радиальными смещениями при обработке и сборке деталей, геометрическими параметрами передачи (числом периодов дорожек, передаточным отношением), зазорами и дисбалансом, создающими погрешности угла поворота при вхождении сателлитов-роликов в зацепление. Номера гармоник равны и кратны числу периодов многопериодной дорожки  $z_2 = 10$  или передаточному отношению редуктора  $i = 11$ .

На рисунке 5.34 представлены значения амплитуд  $A$  гармонических составляющих кинематической погрешности передачи с  $i = 11$  при различной балансировке ведущего звена, а на рисунке 5.35 – суммарные значения амплитуд  $A_{\Sigma}$  гармоник с номерами 10, 11 и 152.

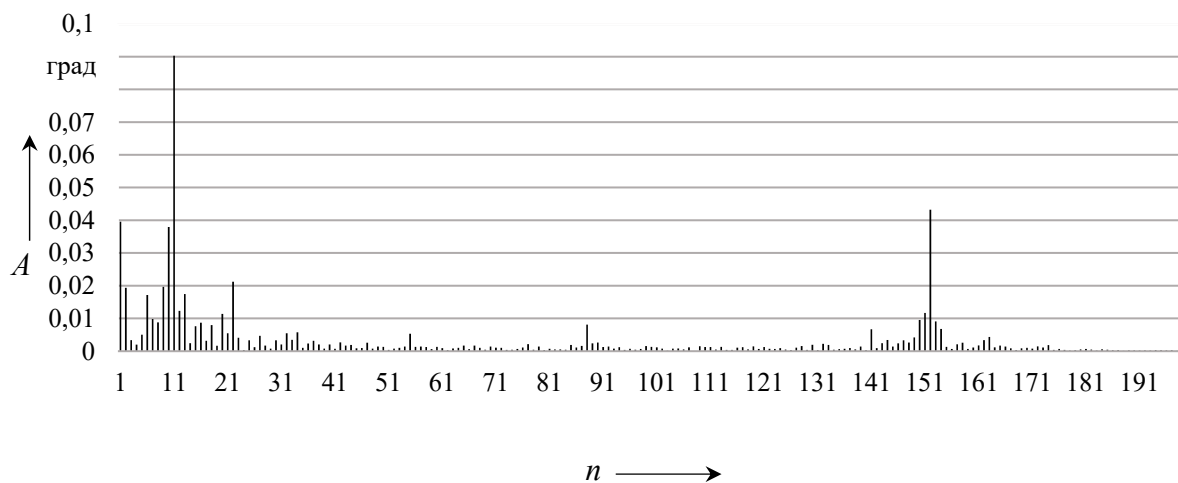


Рисунок 5.30 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.21, редуктора с балансировкой № 0

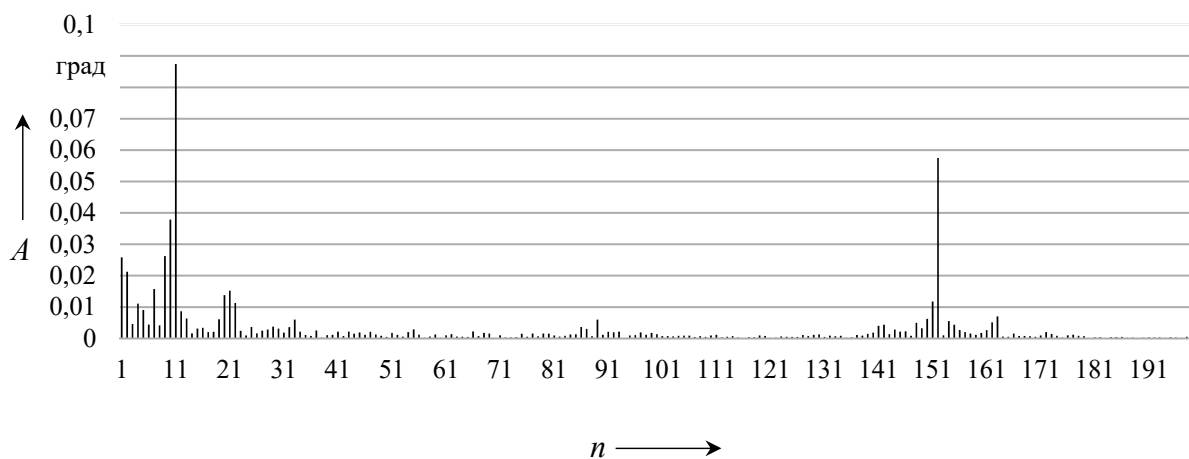


Рисунок 5.31 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.26, редуктора с балансировкой № 5

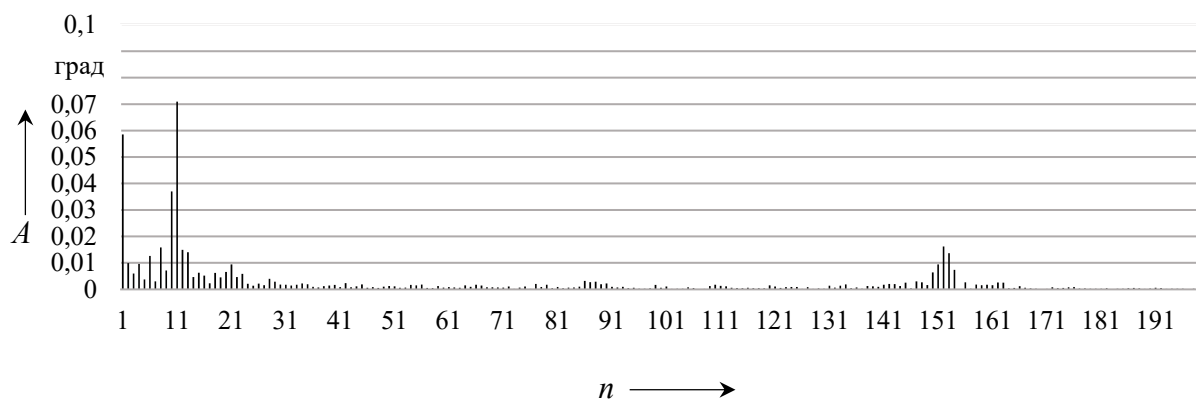


Рисунок 5.32 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.24, редуктора с балансировкой № 3

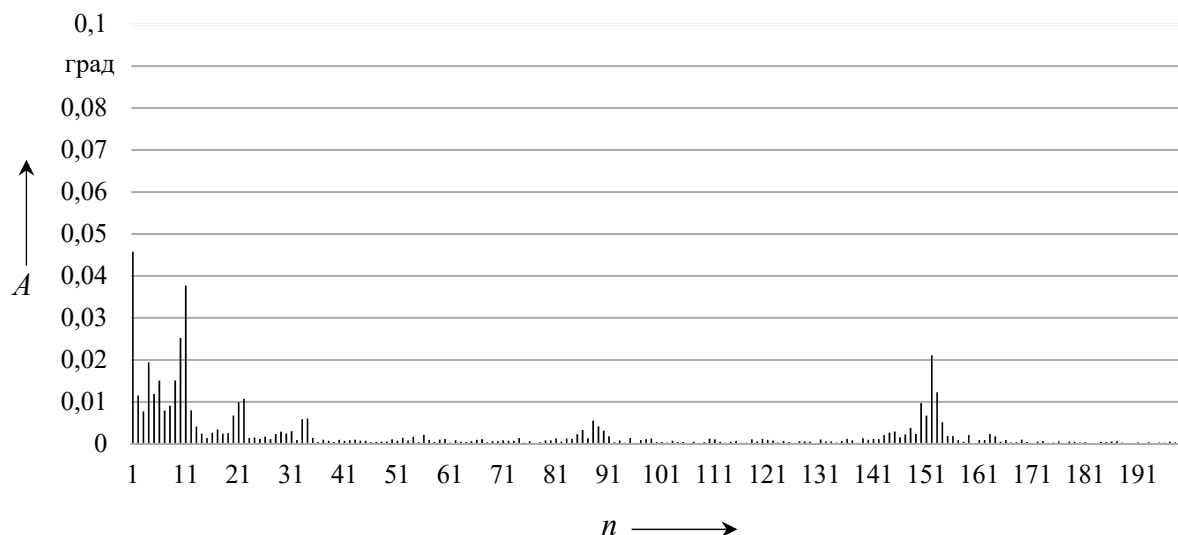


Рисунок 5.33 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 5.27, редуктора с балансировкой № 6

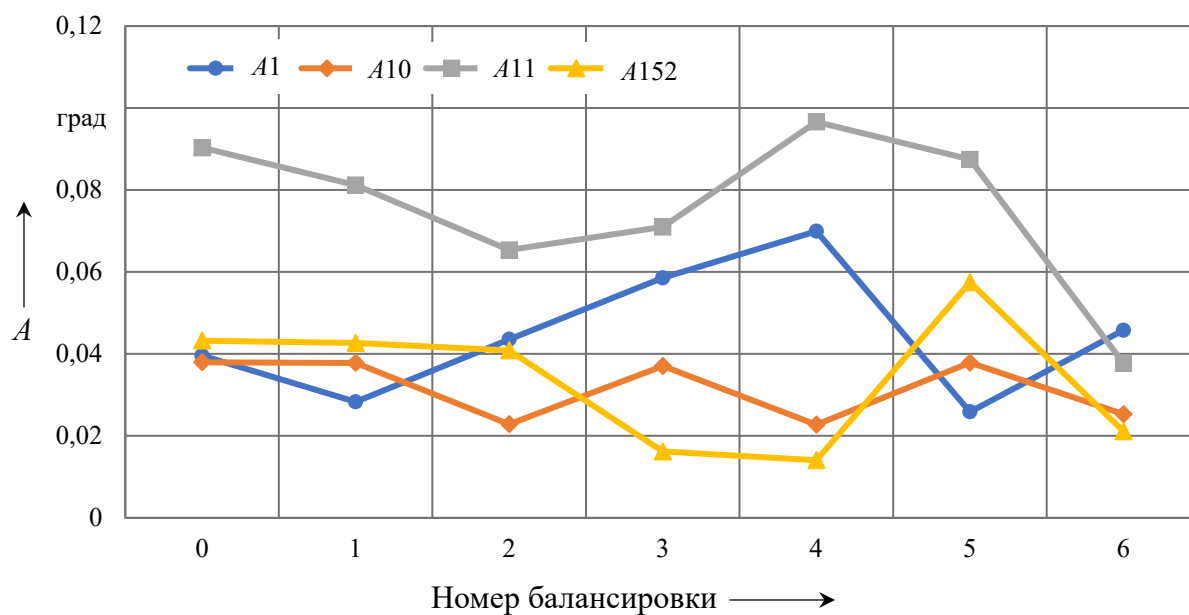


Рисунок 5.34 – Значения амплитуд гармонических составляющих кинематической погрешности передачи с  $i = 11$  при различной балансировке ведущего звена

На рисунке 5.34 обозначено:  $A_1$ ,  $A_{10}$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{152}$  – амплитуды гармоник с номерами 1, 10, 11 и 152; на рисунке 5.35 –  $A_{\Sigma} = A_1 + A_{10} + A_{11} + A_{152}$ .

Как видно из графиков (см. рисунки 5.34 и 5.35), балансировки № 3, 4 и 6 значительно уменьшают гармонику 152, характеризующую плавное вхождение сателлитов-роликов в зацепление. На остальные наиболее значимые гармоники 1, 10 и 11 эти балансировки влияют неоднозначно. Из графиков также видно, что наиболее сбалансирован редуктор с балансировками № 3

и 6, т. к. при этом суммарные значения амплитуд  $A_{\Sigma}$  высокочастотных гармоник наименьшие.



Рисунок 5.35 – Суммарные значения амплитуд гармоник с номерами 10, 11 и 152

## 5.2 Экспериментальная оценка и анализ кинематических характеристик двухступенчатых планетарных редуцирующих механизмов

Экспериментальные исследования кинематических характеристик двухступенчатых планетарных редукторов с промежуточными телами качения проводились с разной частотой вращения входного вала без нагрузки и при нагрузках на выходном валу. В результате экспериментальной оценки на стенде (см. рисунок 3.11) получены графики кинематических характеристик редукторов с использованием разработанной измерительной системы, а также системы Shark, которые были установлены на стендах.

В качестве примера представлены результаты экспериментальных исследований кинематических характеристик двухступенчатого планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  [60]. Передаточные отношения ступеней редуктора равны и составляют  $i_1 = i_2 = 7$ .

На рисунках 5.36–5.48 показаны графики кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$ , частотами вращения ведущего вала  $n_1$ , равными 100, 500, 750, 1000 и 1500 об/мин, без нагрузки и с нагружающими моментами  $M_{вед}$  на ведомом валу 40 и 100 Н·м. Редуктор построен на основе схемы, представленной на рисунке 3.4.

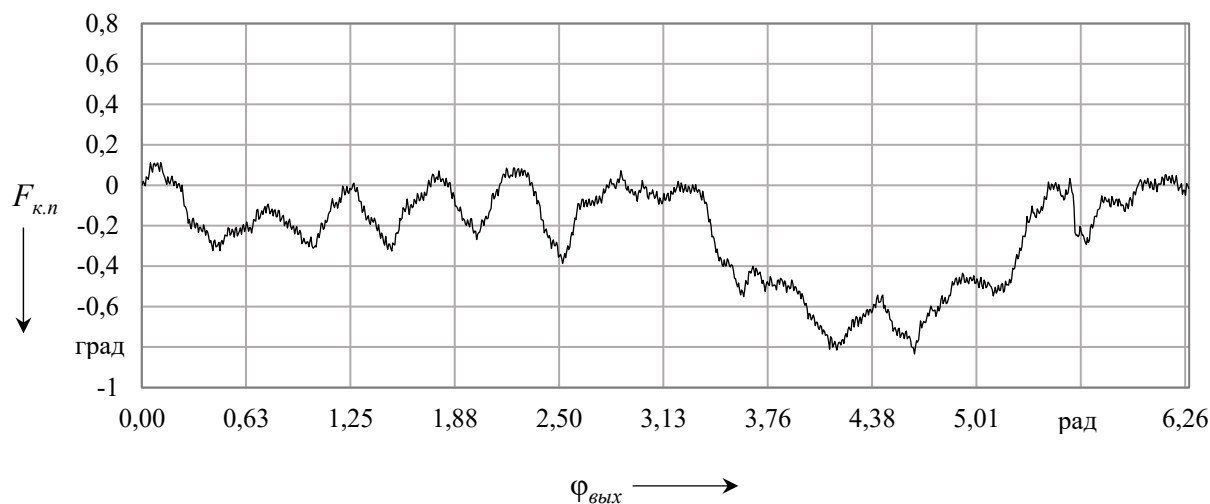


Рисунок 5.36 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 100$  об/мин без нагрузки

На графиках (рисунки 5.36–5.48) обозначено:  $F_{\text{к.п}}$  – кинематическая погрешность передачи;  $\varphi_{\text{вых}}$  – угол поворота выходного вала за его полный оборот; значение угла поворота равно числу отсчета датчика угловых перемещений ( $N = 1024$ ), установленного на стенде и соединенного с выходным валом редуктора.

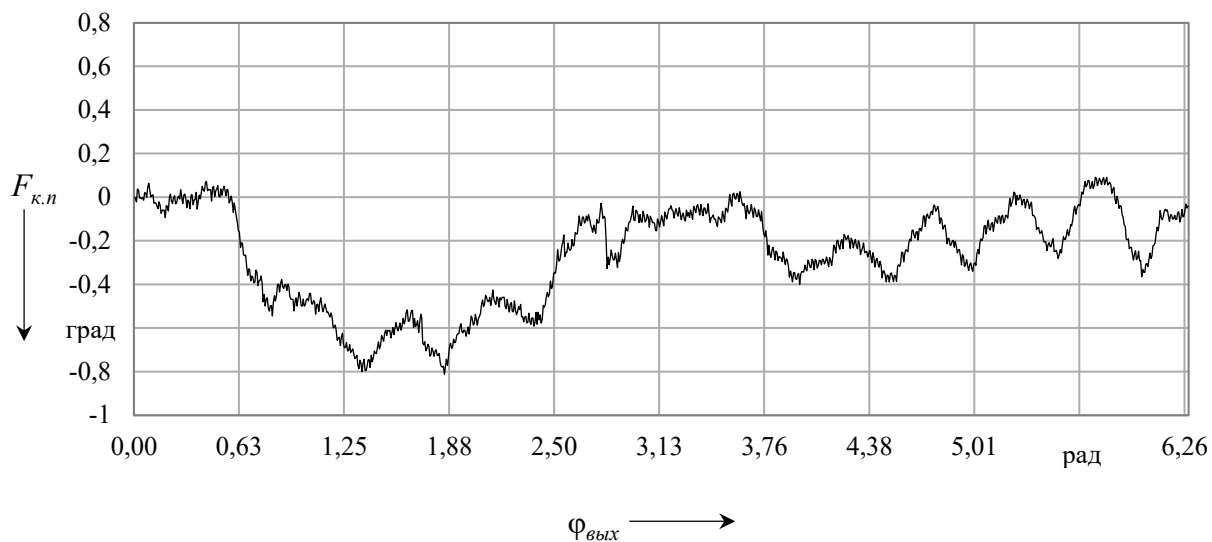


Рисунок 5.37 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин без нагрузки

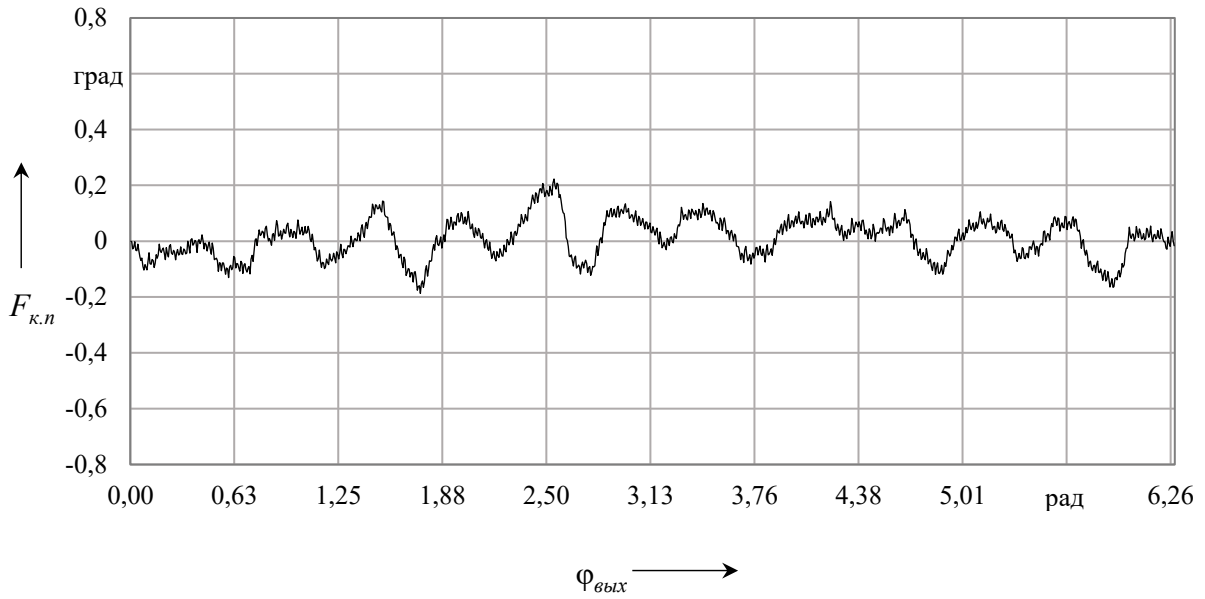


Рисунок 5.38 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин с нагрузкой  $40 \text{ Н}\cdot\text{м}$

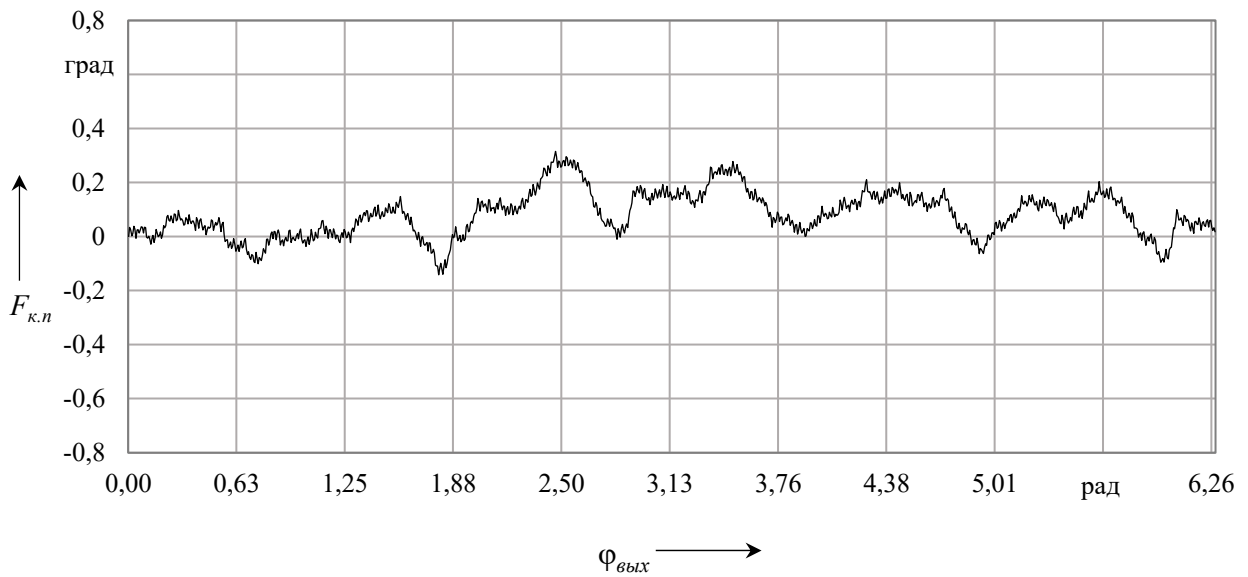


Рисунок 5.39 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

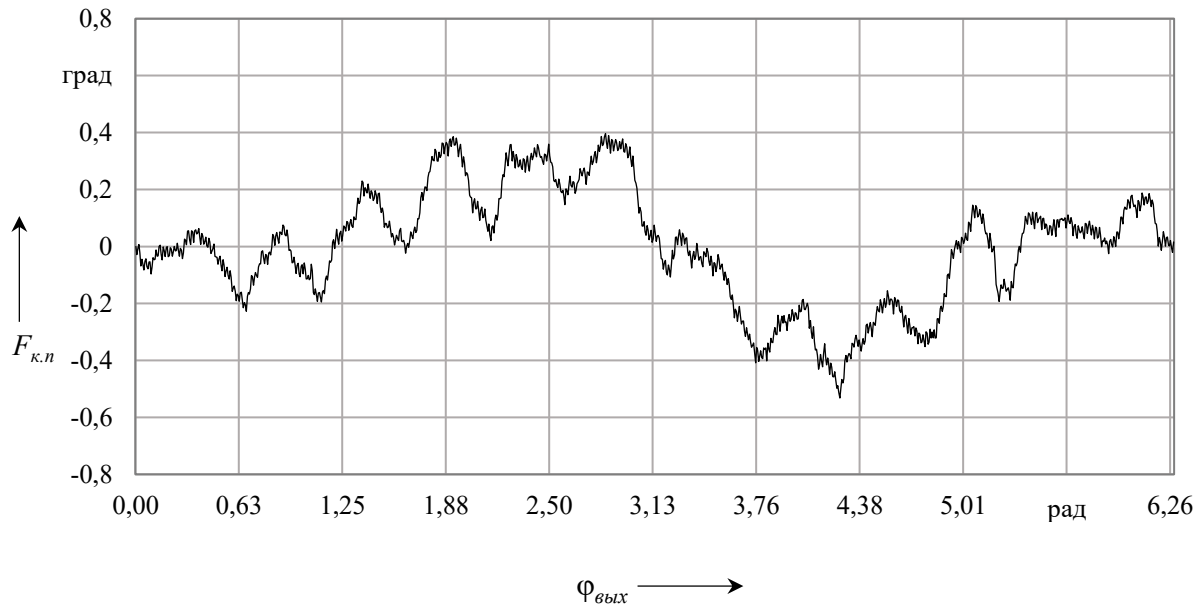


Рисунок 5.40 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин без нагрузки

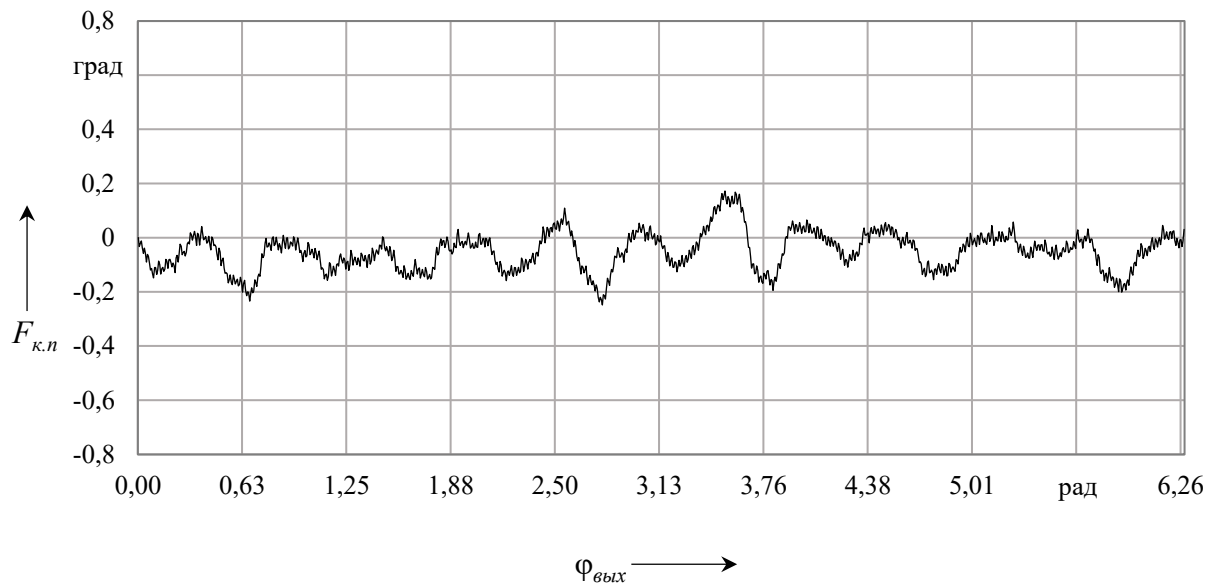


Рисунок 5.41 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин с нагрузкой 40 Н·м

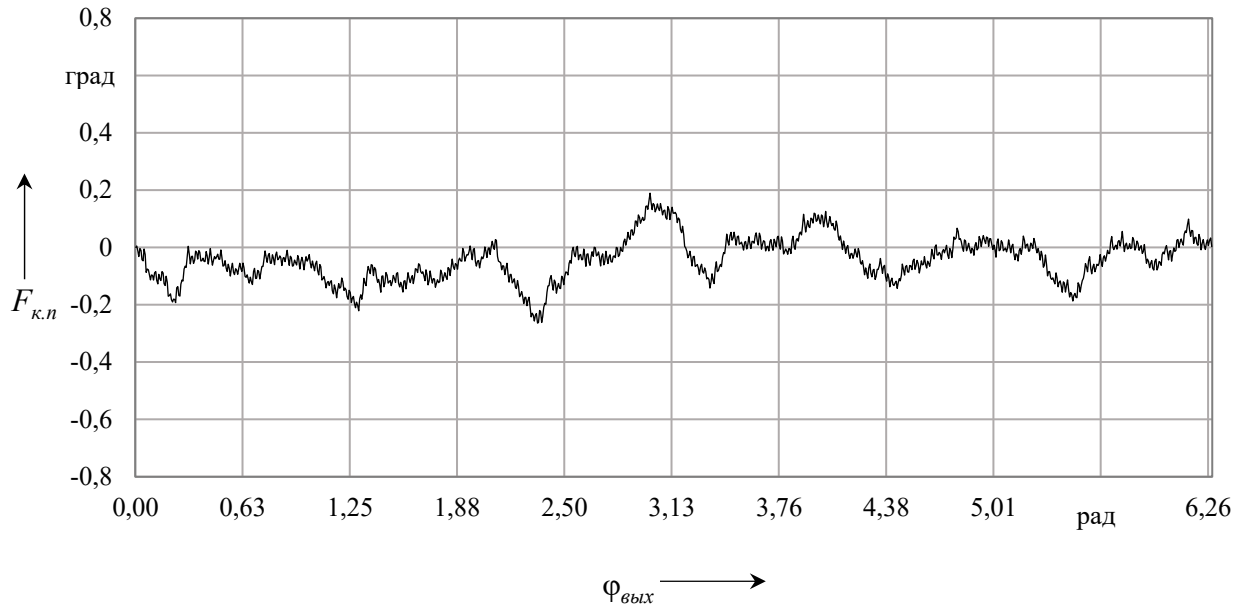


Рисунок 5.42 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин с нагрузкой 100 Н·м

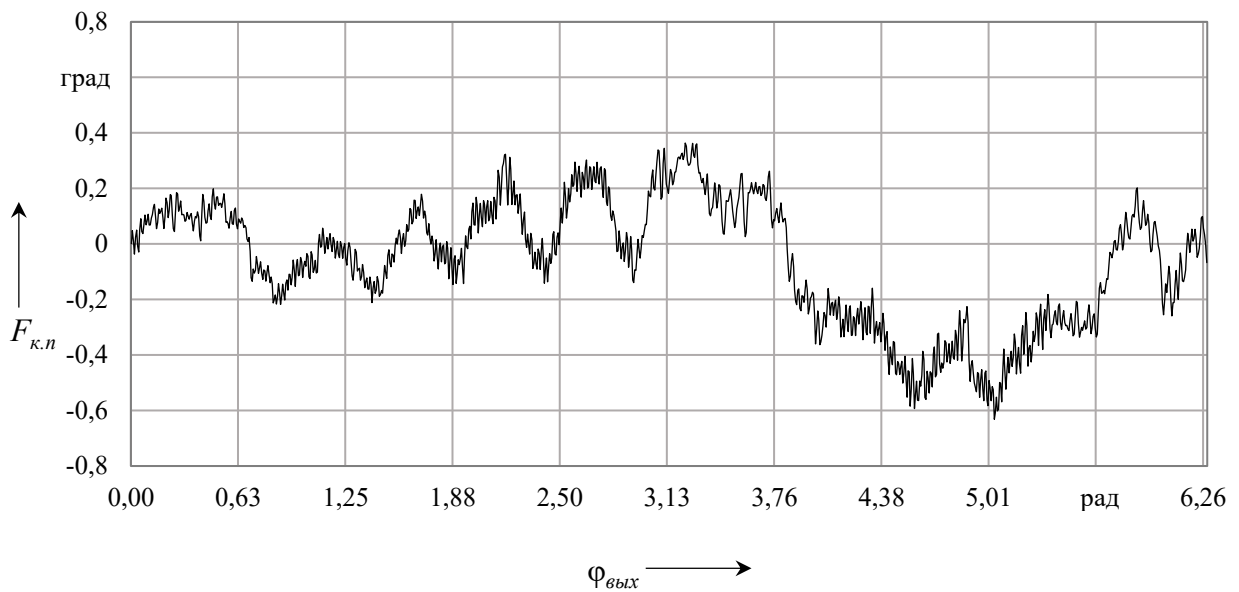


Рисунок 5.43 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин без нагрузки

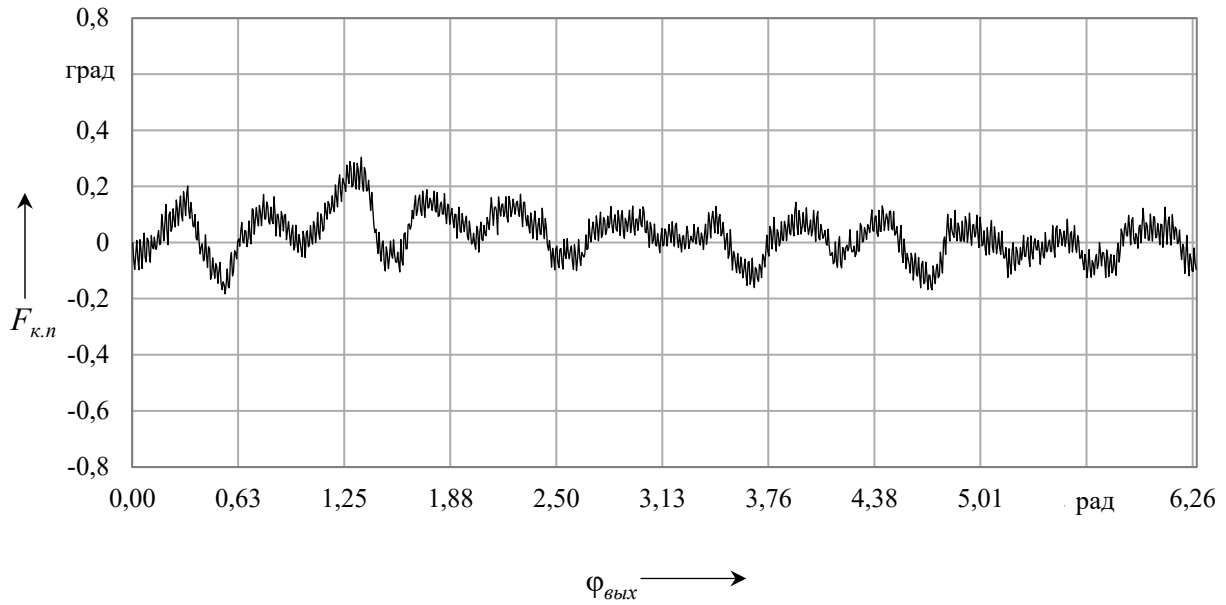


Рисунок 5.44 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин с нагрузкой 40 Н·м

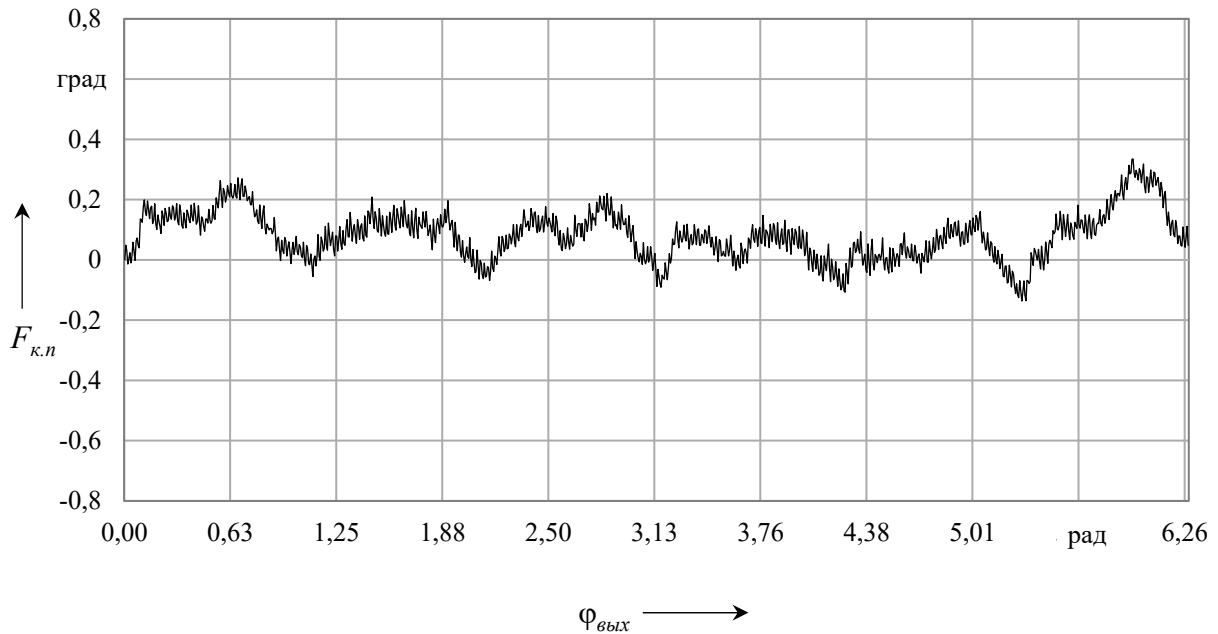


Рисунок 5.45 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин с нагрузкой 100 Н·м

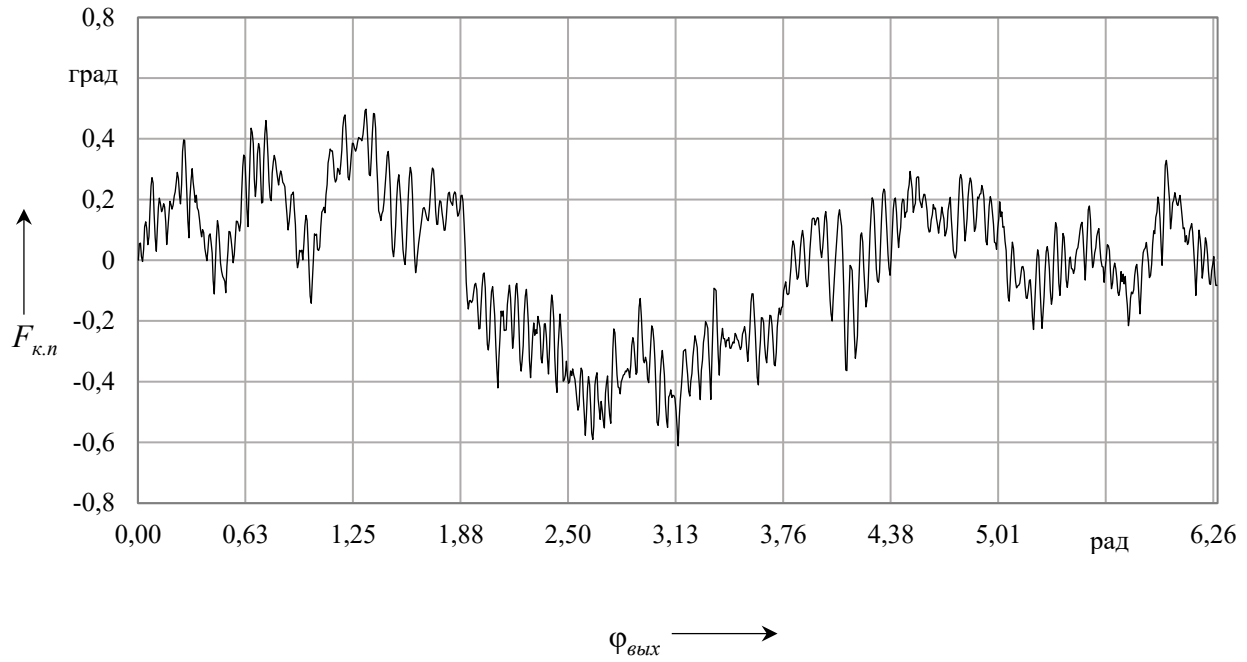


Рисунок 5.46 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин без нагрузки

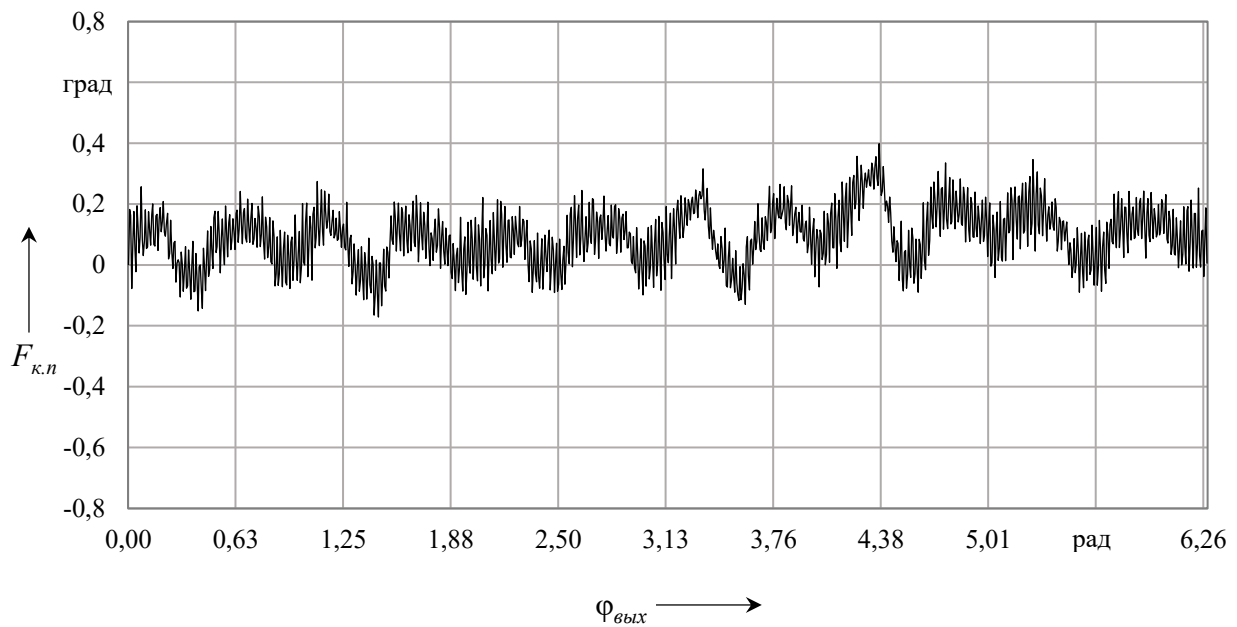


Рисунок 5.47 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин с нагрузкой 40 Н·м

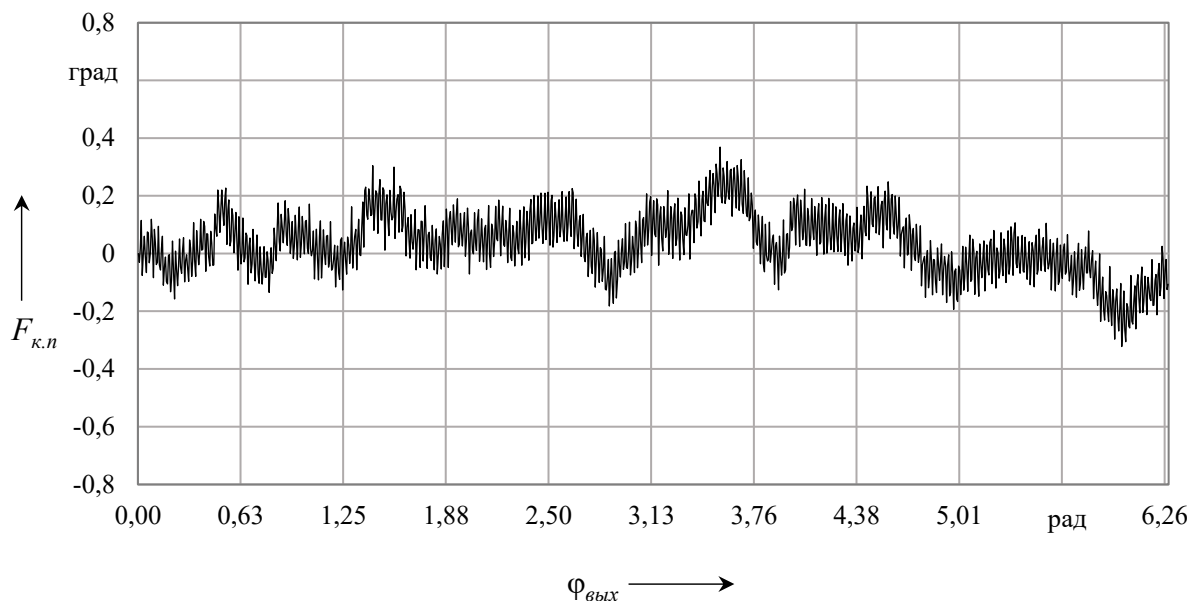


Рисунок 5.48 – График кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Из графиков (см. рисунки 5.36–5.48) видно, что с бóльшими частотами вращения ведущего вала 1000 и 1500 об/мин увеличиваются местные высокочастотные погрешности. Особенно это заметно при измерениях под нагрузкой. Также графики показывают, что под нагрузкой наибольшая кинематическая погрешность (размах значений) значительно меньше, чем без нагрузки, за счет изменения амплитуд синусоид с одним и двумя периодами, на которые накладываются значения кинематических погрешностей с высокой частотой. Под нагрузкой амплитуды этих синусоид значительно уменьшаются, а также уменьшается наибольшая кинематическая погрешность.

В таблице 5.4 представлены значения наибольшей  $F_{к.п}$  кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  для каждого из трех экспериментов и их средних значений  $F_{ср}$  для каждой частоты вращения  $n_1$  ведущего вала редуктора и нагружающих моментов  $M_{вед}$  на ведомом валу.

Усредненное значение кинематической погрешности, полученное по трем экспериментам для каждых частот вращения ведущего вала 500, 750, 1000 и 1500 об/мин и нагрузок 0, 20, 40, 60, 80 и 100 Н·м, составило 0,57 град.

На рисунках 5.49–5.57 представлены графики местных кинематических погрешностей с  $i = 49$ , частотами вращения ведущего вала  $n_1$ , равными 100, 500, 750, 1000 и 1500 об/мин, без нагрузки и с нагружающим моментом  $M_{вед}$  на ведомом валу 100 Н·м.

Таблица 5.4 – Значения наибольшей кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$

Частота вращения $n_1$ , об/мин	Номер эксперимента и $F_{cp}$	Нагружающий момент $M_{введ}$ , Н·м					
		0	20	40	60	80	100
		Наибольшая кинематическая погрешность $F_{к.н}$ , град					
100	1	0,9466	–	–	–	–	–
	2	0,9181	–	–	–	–	–
	3	0,9057	–	–	–	–	–
	$F_{cp}$	<b>0,9235</b>	–	–	–	–	–
300	1	0,9260	–	–	–	–	–
	2	0,8976	–	–	–	–	–
	3	0,9389	–	–	–	–	–
	$F_{cp}$	<b>0,9208</b>	–	–	–	–	–
500	1	0,9031	0,4682	0,4099	0,4070	0,4194	0,4568
	2	0,9410	0,4720	0,4417	0,3987	0,4444	0,4716
	3	0,9433	0,4986	0,4404	0,4032	0,4335	0,4992
	$F_{cp}$	<b>0,9291</b>	<b>0,4796</b>	<b>0,4307</b>	<b>0,4030</b>	<b>0,4324</b>	<b>0,4759</b>
750	1	0,9285	0,4813	0,4203	0,4068	0,4514	0,4535
	2	0,9639	0,4913	0,4360	0,3963	0,4236	0,4645
	3	0,9402	0,4738	0,4349	0,4060	0,4167	0,4542
	$F_{cp}$	<b>0,9442</b>	<b>0,4821</b>	<b>0,4304</b>	<b>0,4030</b>	<b>0,4306</b>	<b>0,4574</b>
1000	1	0,9946	0,5427	0,4871	0,4503	0,4784	0,4712
	2	1,0577	0,5764	0,5003	0,4500	0,4819	0,5001
	3	1,1126	0,5724	0,4914	0,4501	0,4521	0,4904
	$F_{cp}$	<b>1,0550</b>	<b>0,5638</b>	<b>0,4929</b>	<b>0,4501</b>	<b>0,4708</b>	<b>0,4873</b>
1500	1	1,1088	0,5796	0,5694	0,5738	0,5641	0,6909
	2	1,0717	0,5760	0,5614	0,5921	0,5515	0,5716
	3	1,2024	0,5443	0,5811	0,5756	0,5735	0,5979
	$F_{cp}$	<b>1,1276</b>	<b>0,5666</b>	<b>0,5706</b>	<b>0,5805</b>	<b>0,5630</b>	<b>0,6201</b>

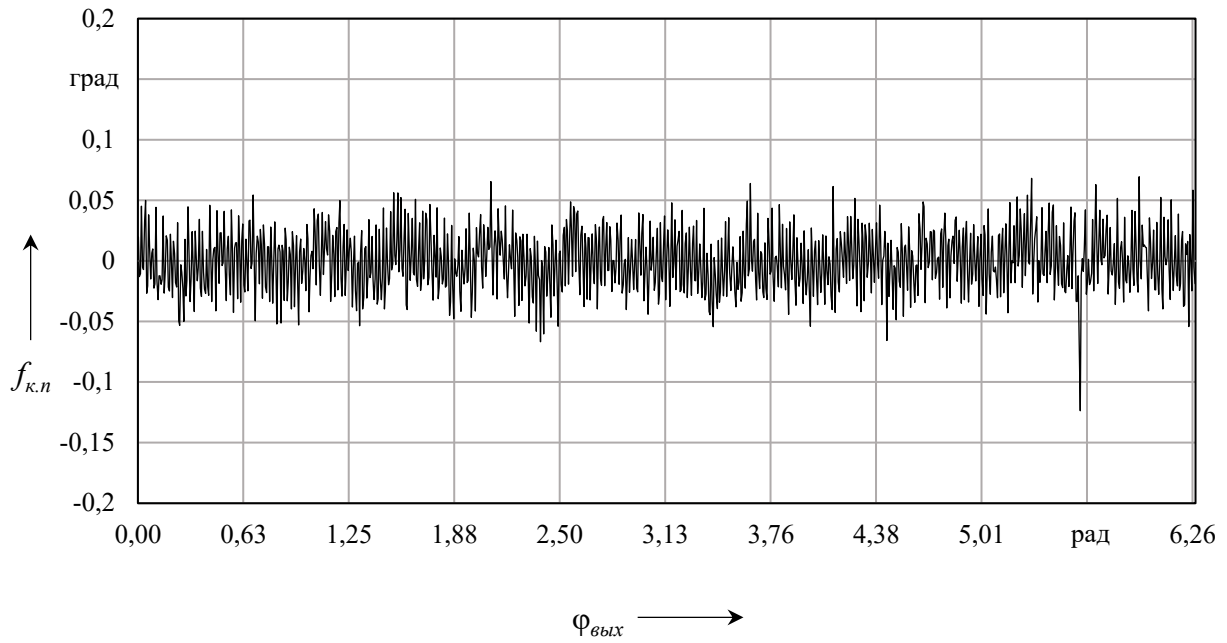


Рисунок 5.49 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 100$  об/мин без нагрузки

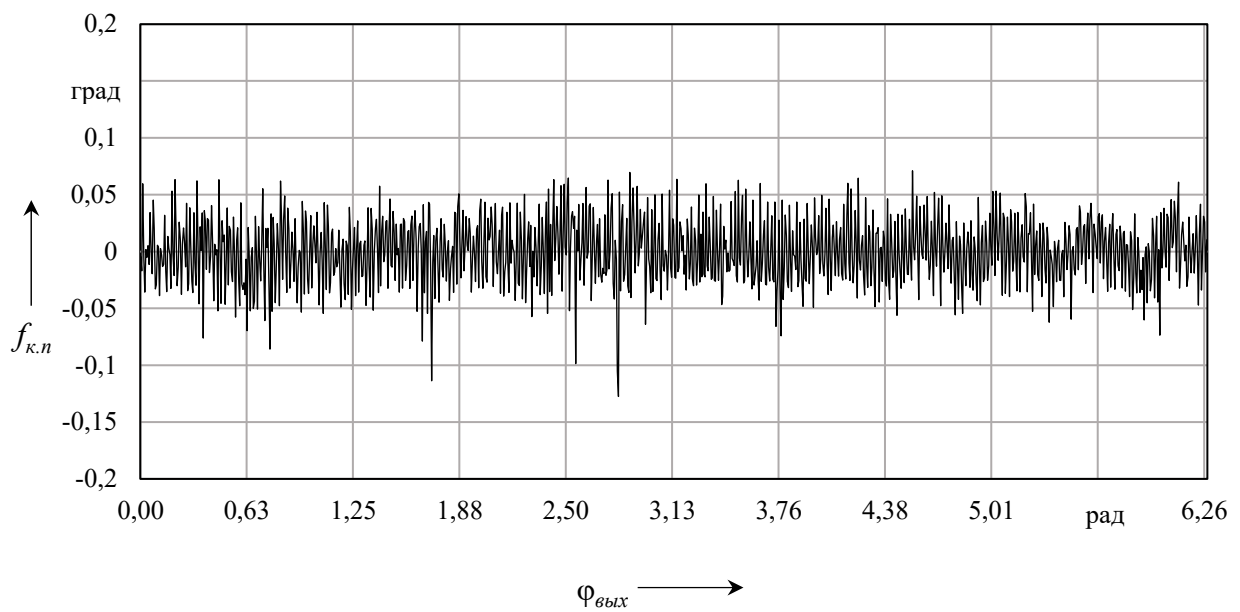


Рисунок 5.50 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин без нагрузки

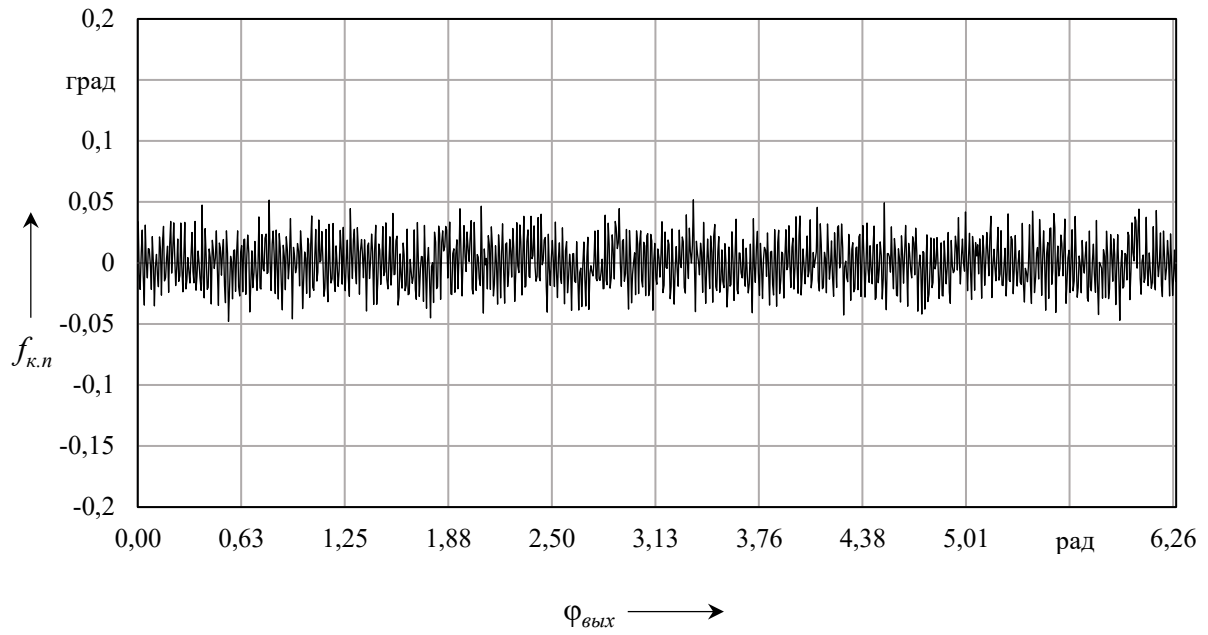


Рисунок 5.51 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин с нагрузкой 100 Н·м

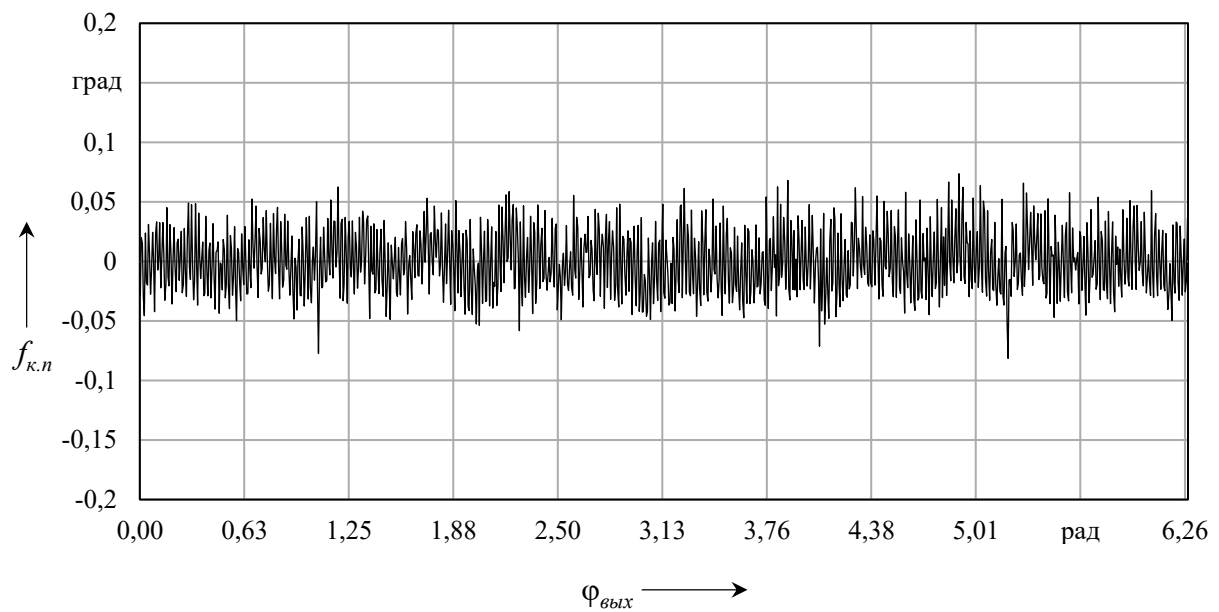


Рисунок 5.52 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин без нагрузки

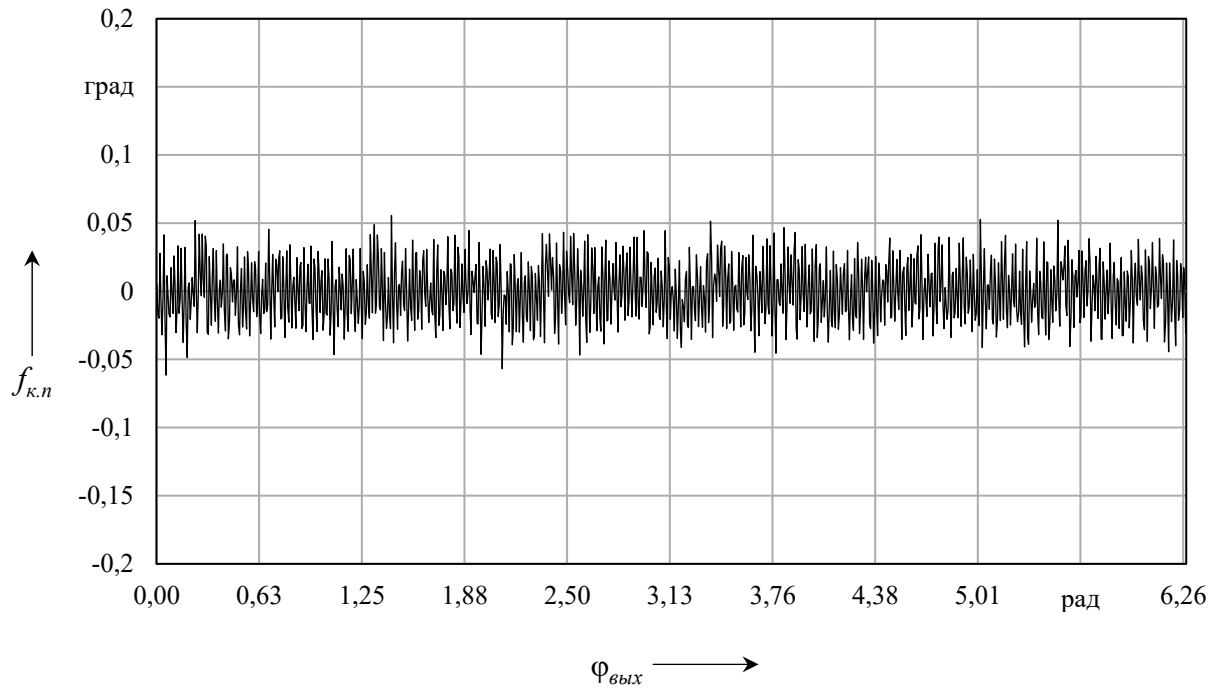


Рисунок 5.53 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

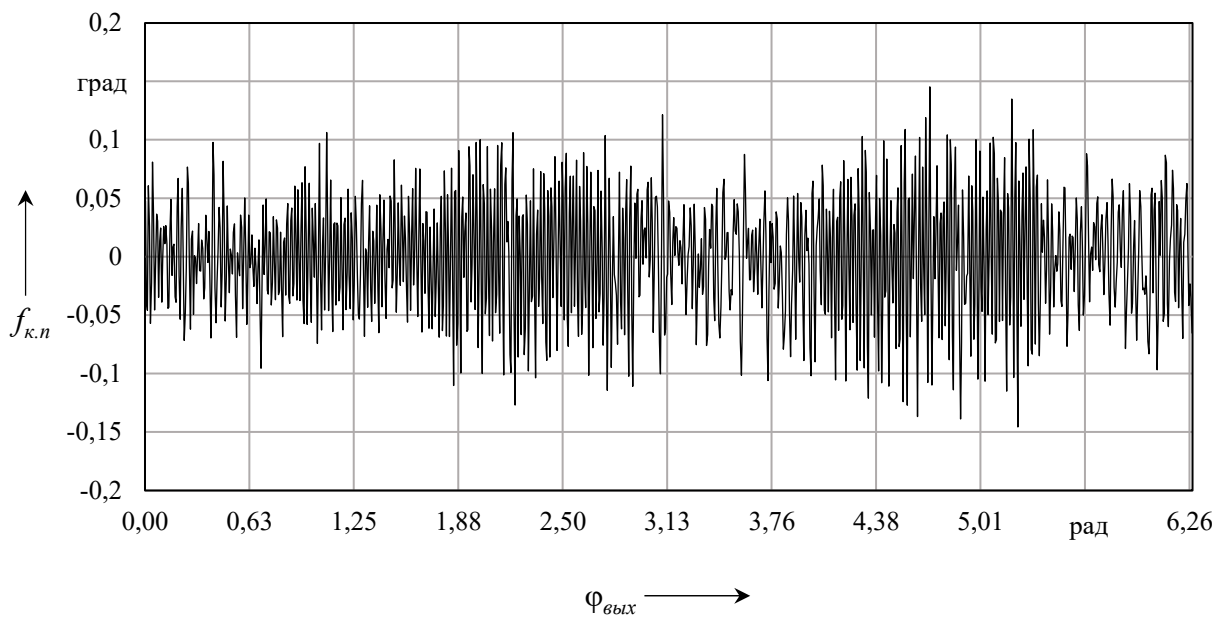


Рисунок 5.54 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин без нагрузки

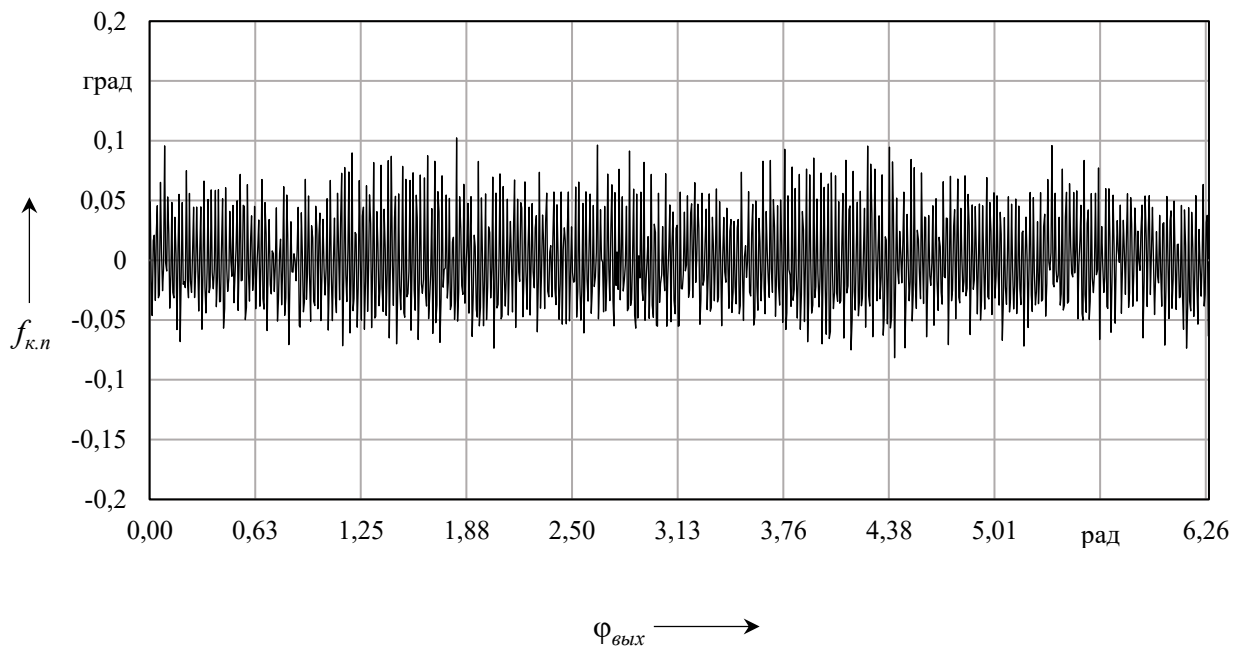


Рисунок 5.55 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

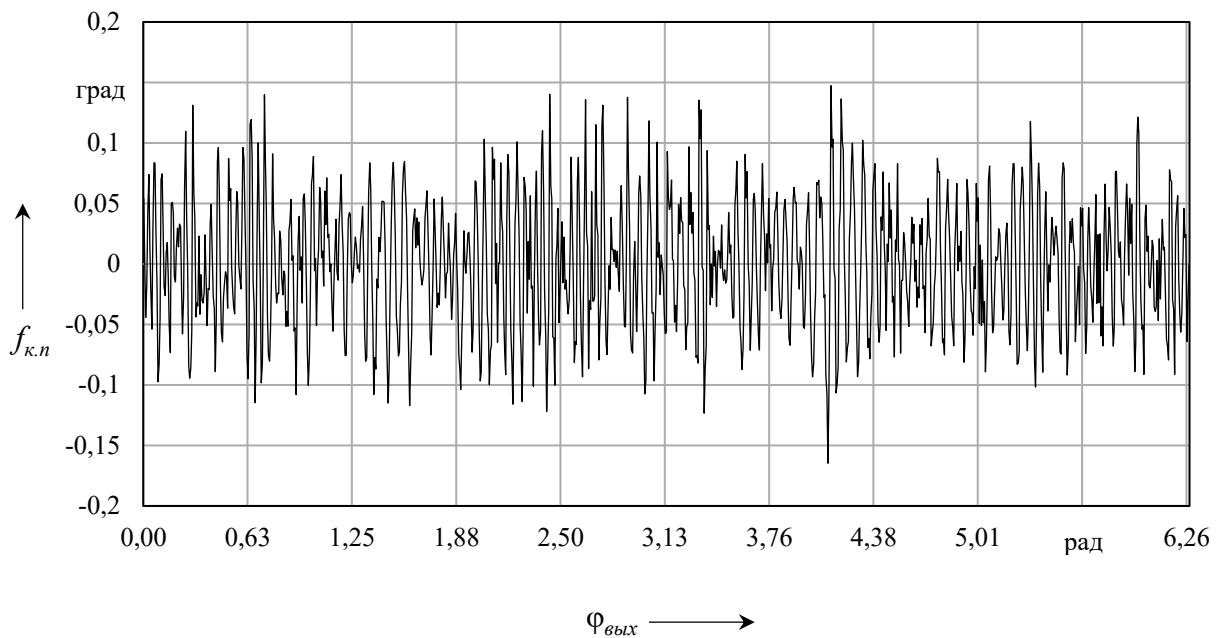


Рисунок 5.56 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин без нагрузки

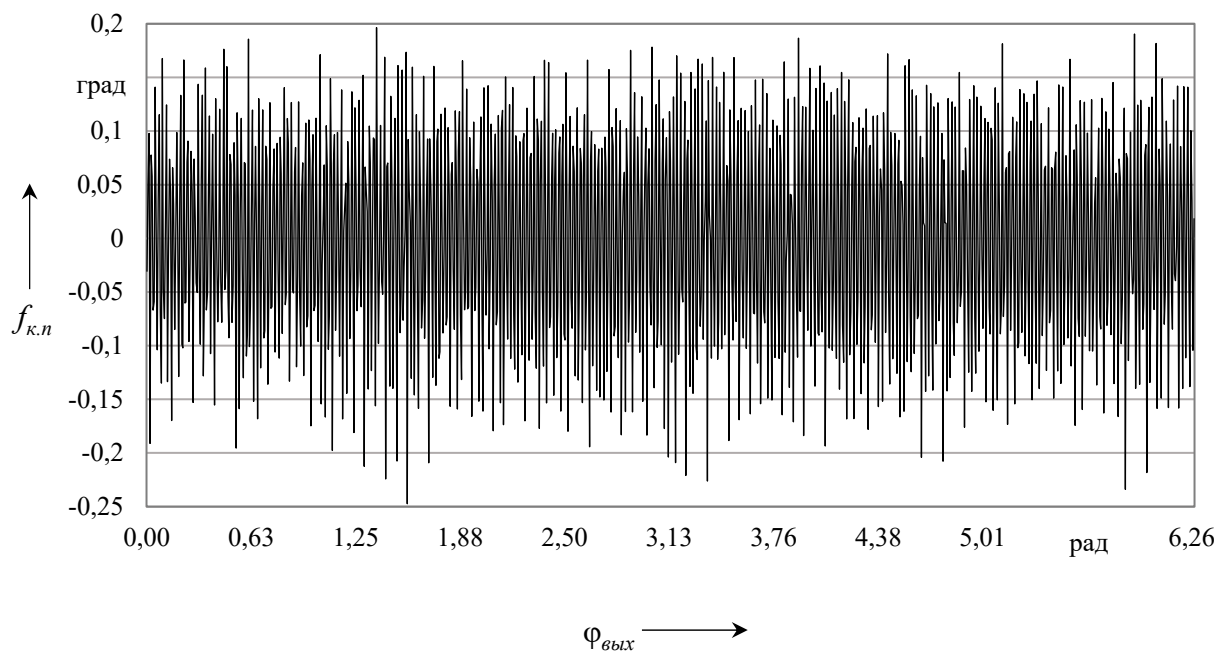


Рисунок 5.57 – График местной кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

На графиках (см. рисунки 5.49–5.57) видно, что под нагрузкой с частотами вращения ведущего вала  $100, 500, 750$  и  $1000$  об/мин размах и местные выбросы местных кинематических погрешностей меньше, чем без нагрузки. С частотой вращения ведущего вала редуктора  $1500$  об/мин наблюдается увеличение значений местных кинематических погрешностей, особенно под нагрузкой. Характер изменения местных кинематических погрешностей, характеризуемый графиками (см. рисунки 5.49–5.57), согласуется с зависимостями кинематических погрешностей, представленных на рисунках 5.36–5.48.

На рисунке 5.58 показаны график изменения и линейный тренд наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.п}$  в зависимости от частоты вращения ведущего вала  $n_1$  планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки.

Значения, приведенные на графике (см. рисунок 5.58), получены как средние значения трех измерений на стенде. На графике видно, что с увеличением частоты вращения кинематическая погрешность увеличивается.

На рисунке 5.59 представлены графики зависимостей наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.п}$  от нагружающего момента на ведомом валу  $M_{\text{вед}}$  планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$ , частотами вращения ведущего вала  $500, 750, 1000$  и  $1500$  об/мин.

Графики, приведенные на рисунке 5.59, показывают, что для разных частот вращения ведущего вала редуктора без нагрузки кинематическая погрешность значительно больше, чем с нагружающим моментом. Под

нагрузкой кинематическая погрешность уменьшается в 1,9–2,0 раза, при этом изменения кинематической погрешности, в зависимости от нагрузки, незначительны.

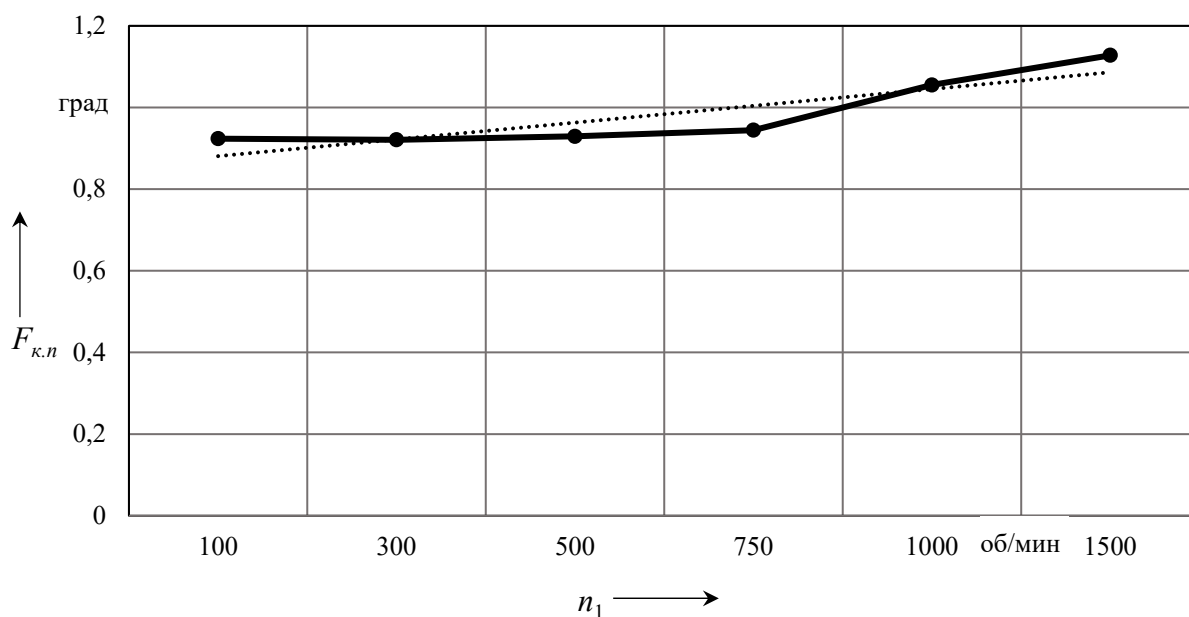


Рисунок 5.58 – График зависимости наибольшей кинематической погрешности от частоты вращения ведущего вала планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки

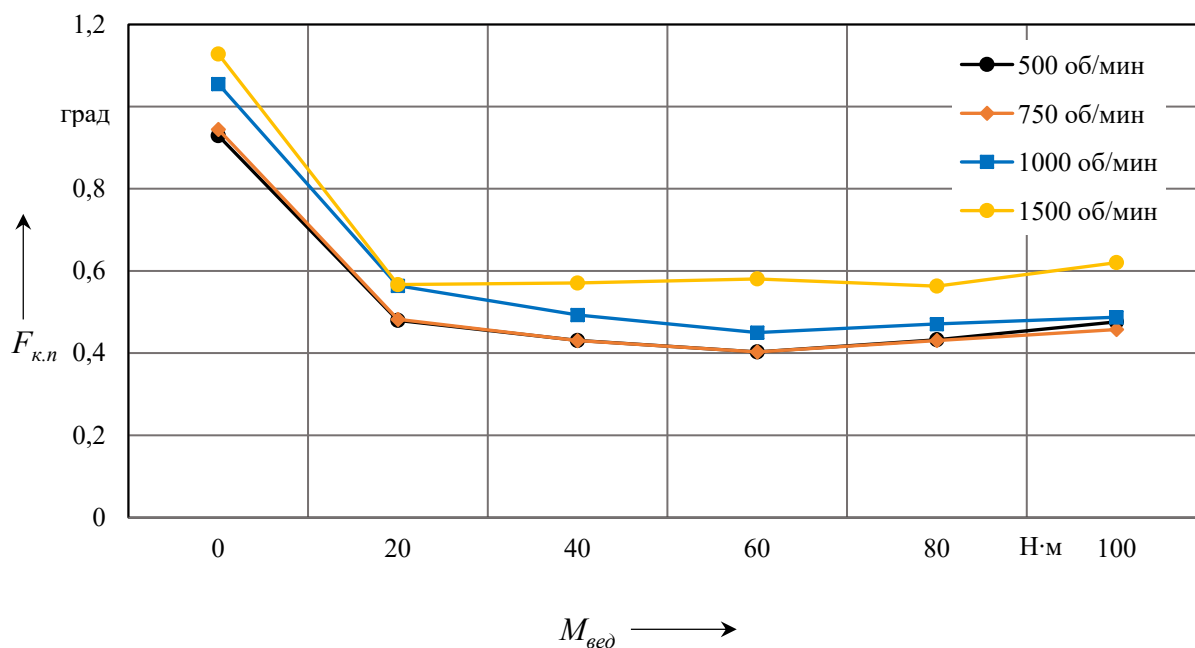


Рисунок 5.59 – Графики зависимостей наибольшей кинематической погрешности от нагружающего момента на ведомом валу планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$

На рисунках 5.60–5.63 представлены графики и линейные тренды наибольших  $f_{\max}$  и средних  $f_{cp}$  значений местных кинематических погрешностей в зависимости от частоты вращения ведущего вала планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки, а также процент значений местных погрешностей от наибольших кинематических погрешностей  $F_{к.н}$  редуктора.

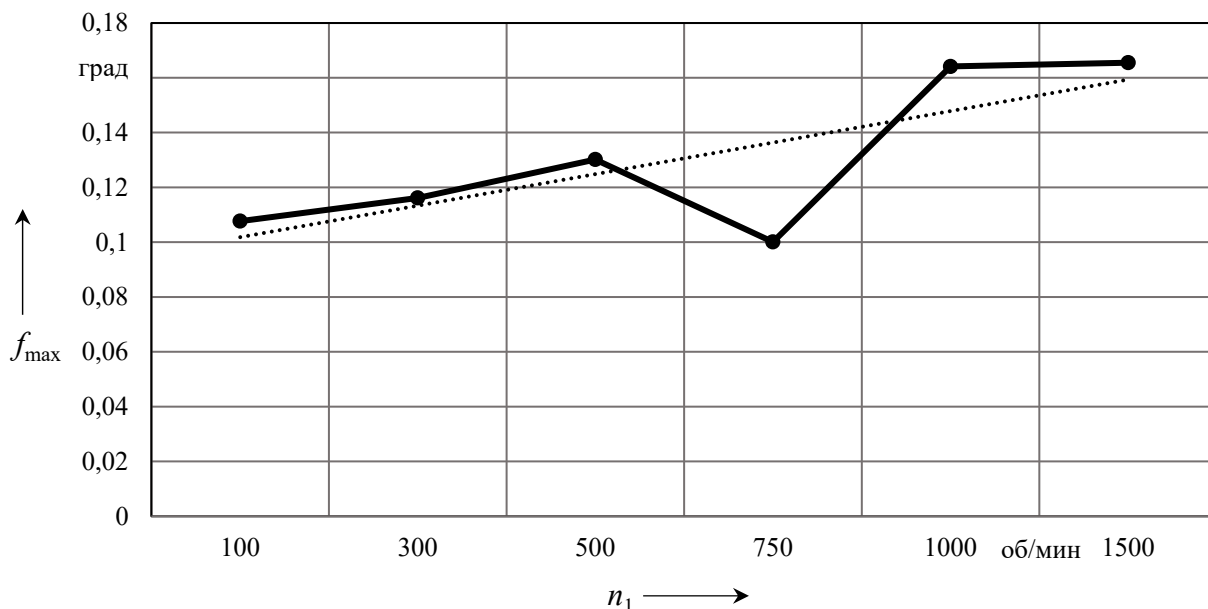


Рисунок 5.60 – График наибольших значений местных кинематических погрешностей в зависимости от частоты вращения ведущего вала планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки

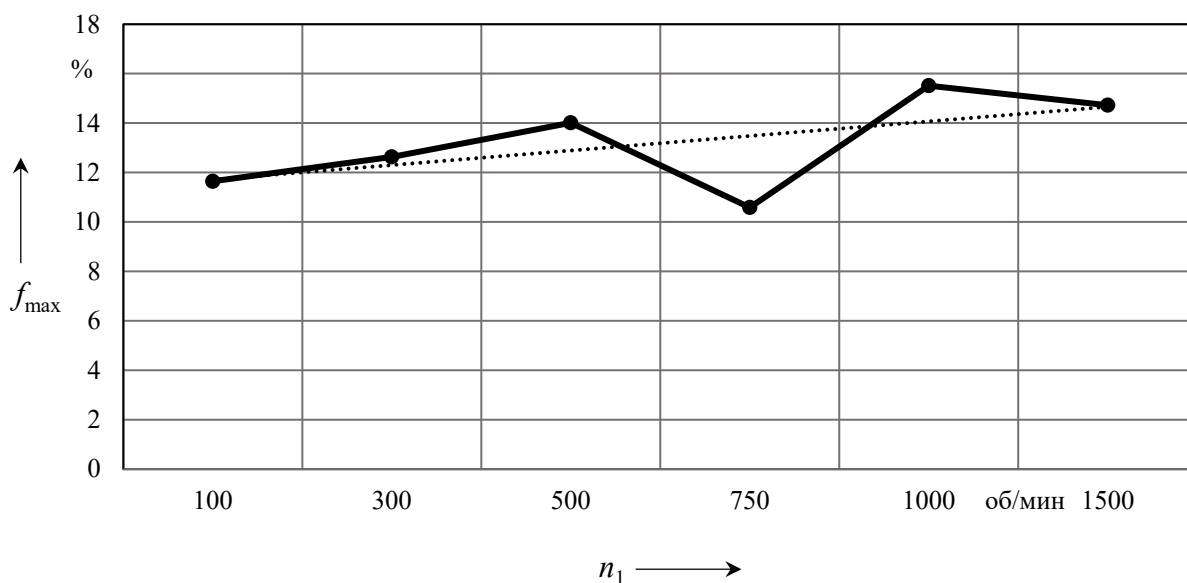


Рисунок 5.61 – Процент наибольших значений местных погрешностей от наибольших кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки

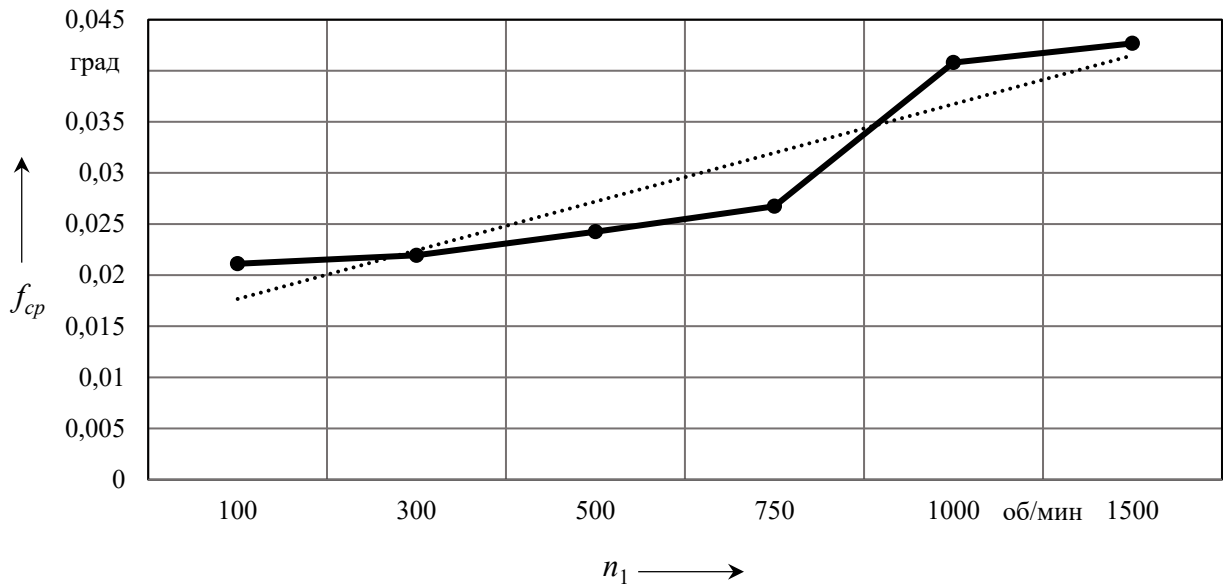


Рисунок 5.62 – График средних значений местных кинематических погрешностей в зависимости от частоты вращения ведущего вала планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки

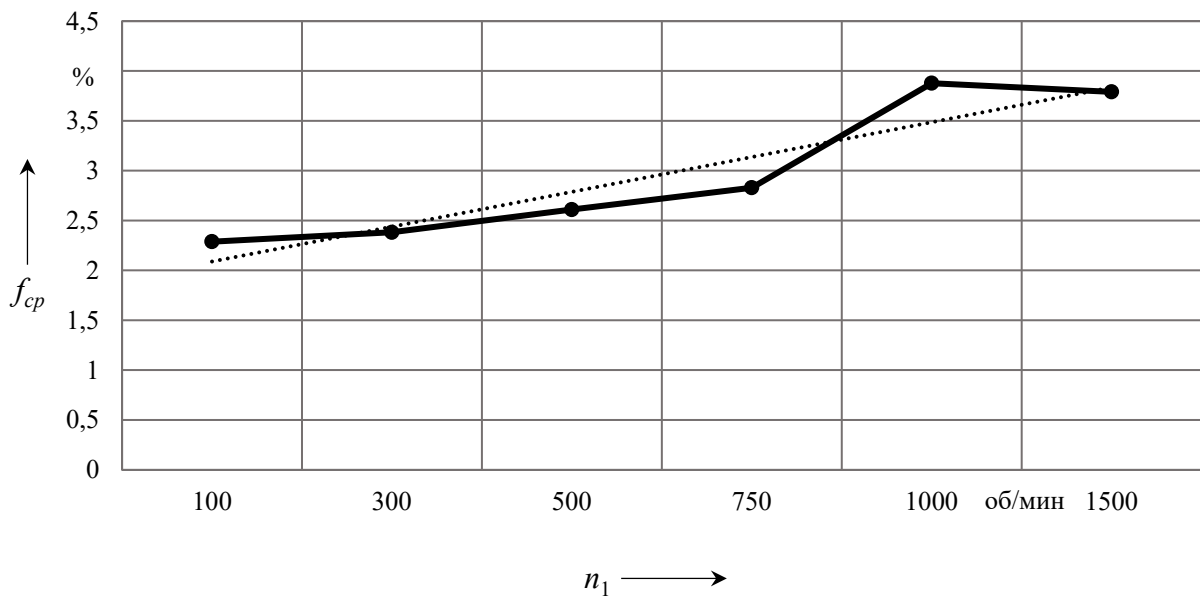


Рисунок 5.63 – Процент средних значений местных погрешностей от наибольших кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  без нагрузки

На графиках (см. рисунки 5.60–5.63) видно, что с увеличением частоты вращения ведущего вала редуктора местные кинематические погрешности так же, как и наибольшие кинематические погрешности, увеличиваются. При этом характер изменения местных погрешностей такой же, как и их процентное отношение к наибольшим кинематическим погрешностям. Среднее значение местных погрешностей значительно меньше (в 3,8–4,7 раза)

их максимальных значений, характеризующих редкие экстремальные выбросы на графиках.

На рисунках 5.64–5.67 представлены графики местных кинематических погрешностей с усредненными значениями, включающими измерения без нагрузки и с нагрузками для частот вращения 500, 750, 1000 и 1500 об/мин ведущего вала редуктора (находились средние арифметические значения нагрузок 0, 20, 40, 60, 80 и 100 Н·м для каждой частоты вращения ведущего вала).

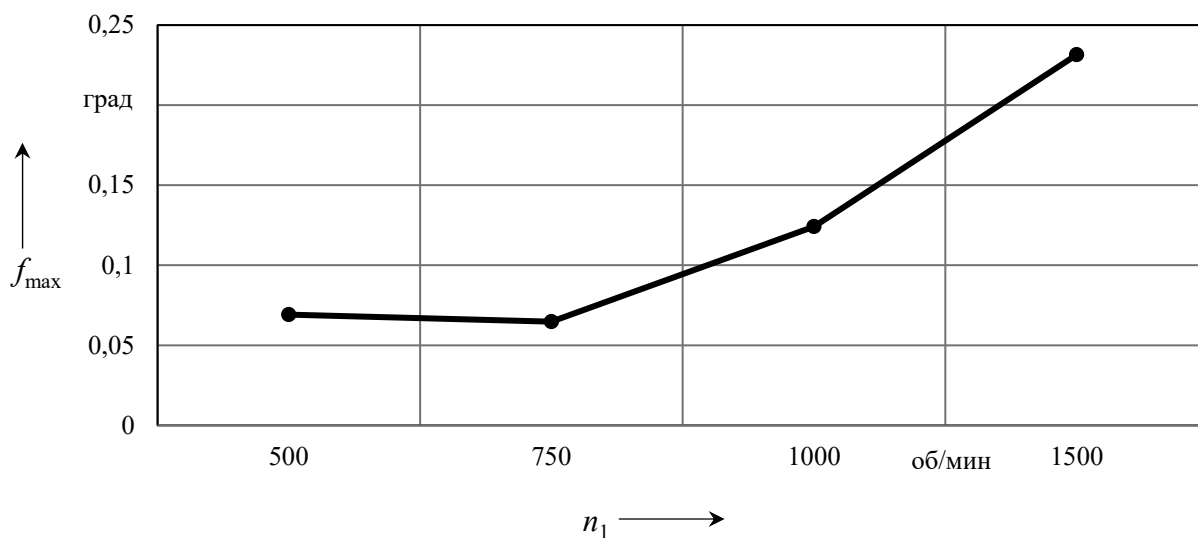


Рисунок 5.64 – График наибольшей местной кинематической погрешности при усредненной нагрузке планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  в зависимости от частоты вращения ведущего вала

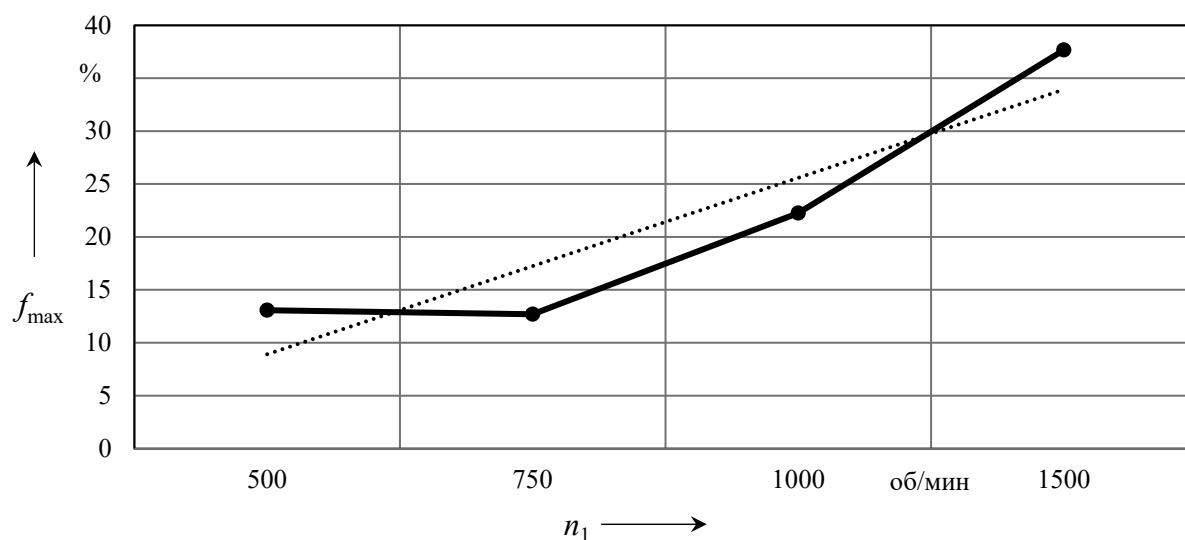


Рисунок 5.65 – График наибольшей местной погрешности в процентах от наибольшей кинематической погрешности при усредненной нагрузке планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  в зависимости от частоты вращения ведущего вала

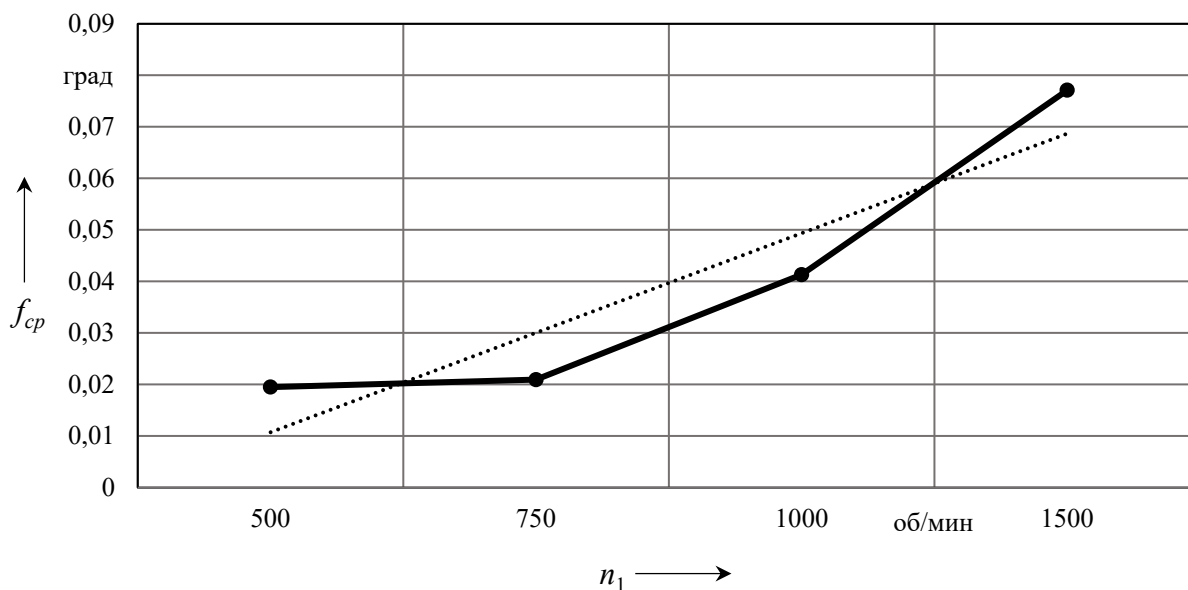


Рисунок 5.66 – График средней местной кинематической погрешности при усредненной нагрузке планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  в зависимости от частоты вращения ведущего вала

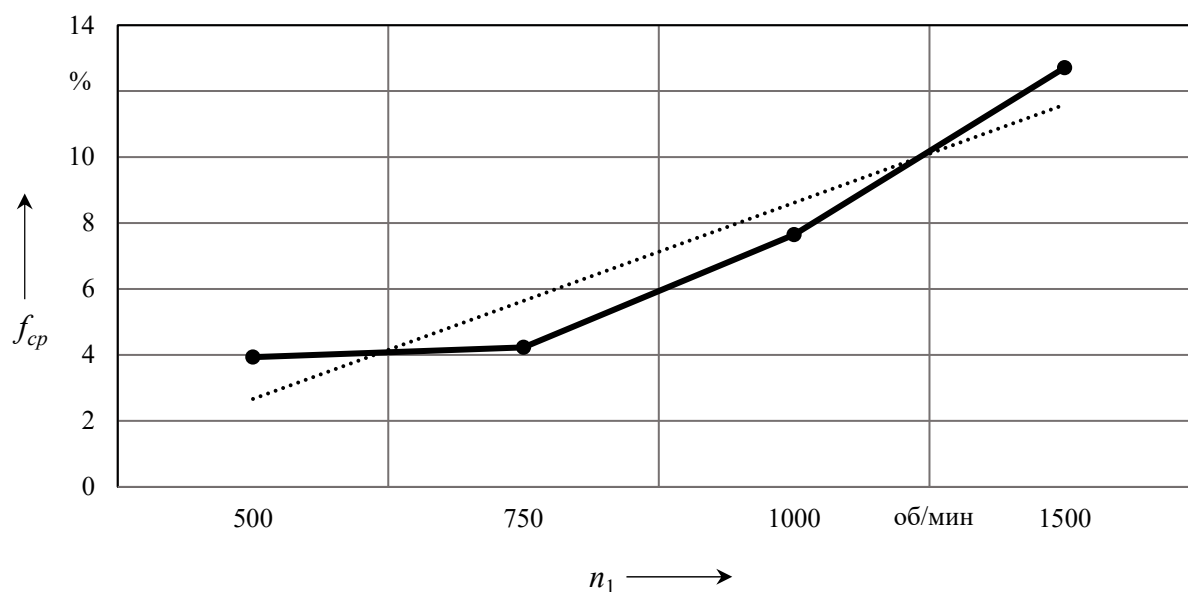


Рисунок 5.67 – График средней местной погрешности в процентах от наибольшей кинематической погрешности при усредненной нагрузке планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  в зависимости от частоты вращения ведущего вала

Графики (см. рисунки 5.64–5.67) показывают, что местные кинематические погрешности с усредненной нагрузкой редуктора значительно увеличиваются в 3–4 раза при изменении частоты вращения ведущего вала от 500 до 1500 об/мин.

На рисунках 5.68–5.71 представлены графики изменения местных кинематических погрешностей этого же редуктора в зависимости от нагружающего момента на выходном валу  $M_{в\text{ед}}$  (нагрузки 0, 20, 40, 60, 80 и 100 Н·м) и их процентное отношение к наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.п.}$

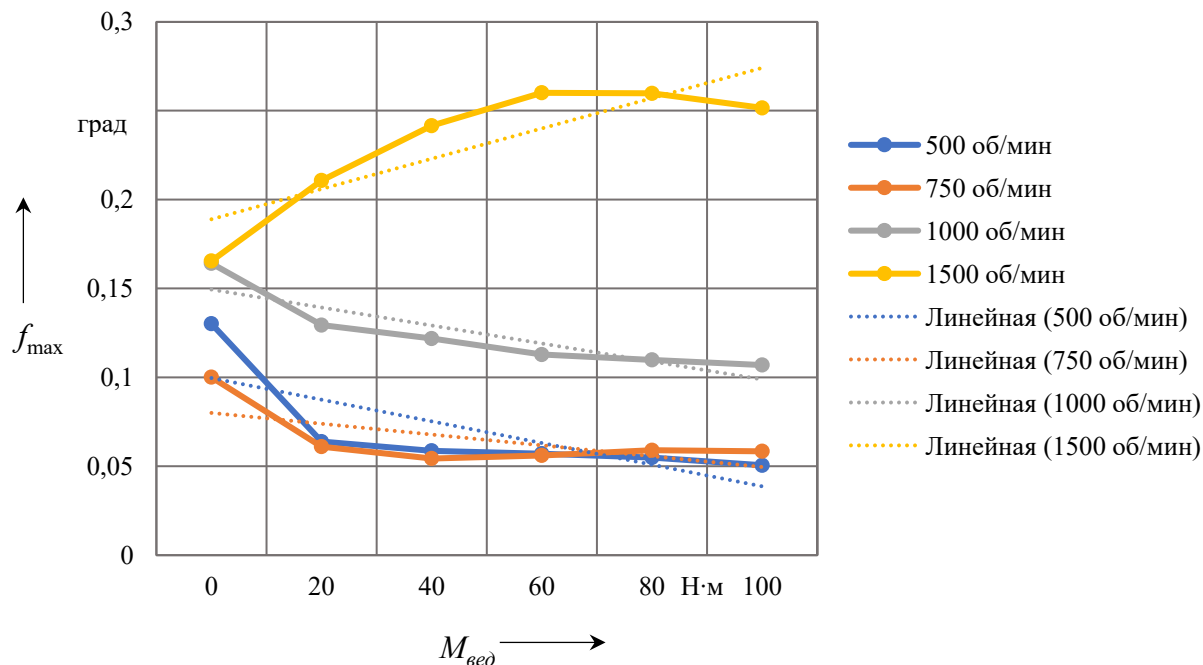


Рисунок 5.68 – Графики наибольших значений местных кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  в зависимости от нагружающего момента

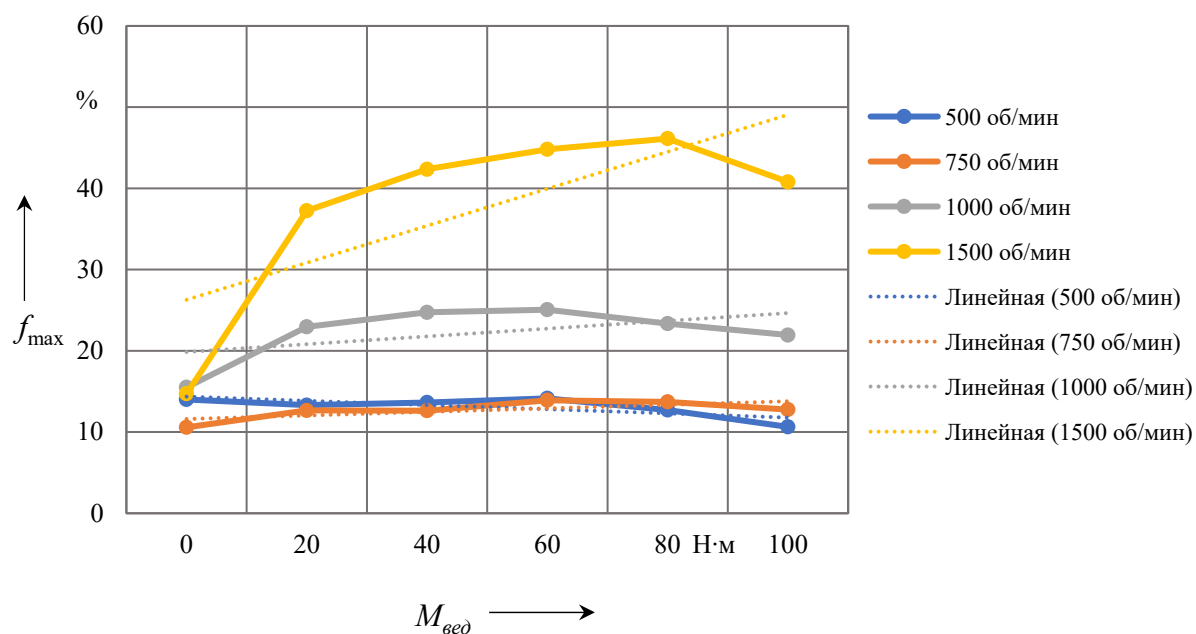


Рисунок 5.69 – Процент наибольших значений местных погрешностей от наибольших кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  с разной нагрузкой

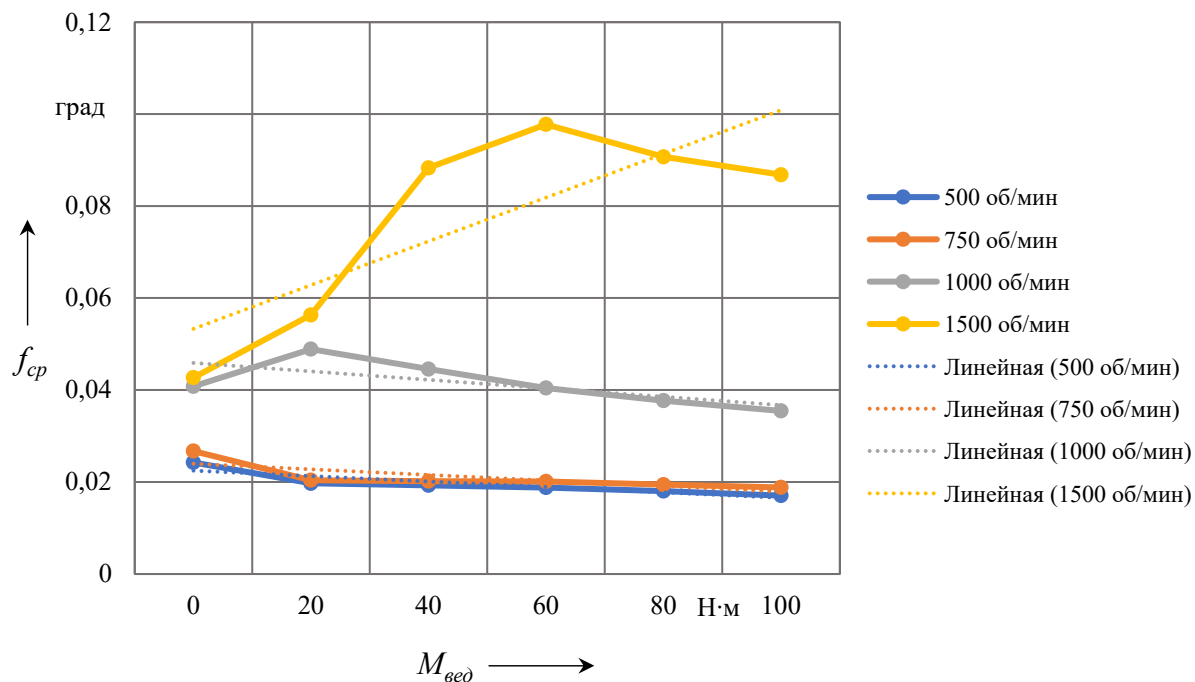


Рисунок 5.70 – Графики средних значений местных кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  в зависимости от нагружающего момента

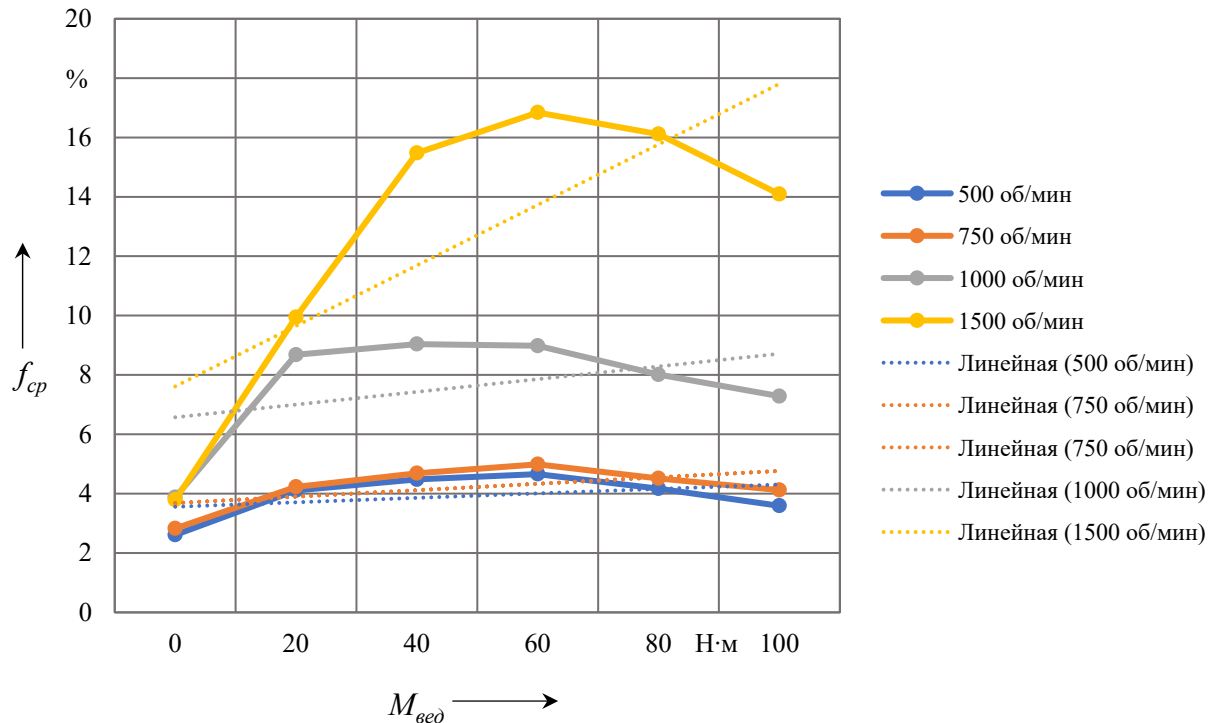


Рисунок 5.71 – Процент средних значений местных погрешностей от наибольших кинематических погрешностей планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  с разной нагрузкой

Из графиков (см. рисунки 5.68–5.71) видно, что для частот вращения ведущего вала редуктора 500, 750 и 1000 об/мин местные кинематические погрешности с увеличением нагрузки мало изменяются в сторону увеличения или уменьшения, что показывают линейные тренды на графиках (см. рисунки 5.68 и 5.70). Для частоты вращения ведущего вала 1500 об/мин заметно увеличение местных погрешностей редуктора под нагрузкой по сравнению со значениями без нагрузки. При нагрузке 60 Н·м достигнуто максимальное их значение. Такое увеличение связано с наличием высокочастотной гармоники кинематической погрешности передачи, которая была установлена экспериментально спектральным анализом. Процент средних значений местных погрешностей от наибольших кинематических погрешностей редуктора имеет такой же характер изменений, как и их числовые зависимости.

Полученные графики представляют числовые значения и характер изменения кинематических погрешностей. В результате проведенных экспериментов оценки местных кинематических погрешностей планетарного редуктора с  $i = 49$  без нагрузки и с нагрузками 0, 20, 40, 60, 80 и 100 Н·м для разных частот вращения 500, 750, 1000 и 1500 об/мин усредненные значения составили: наибольшей местной кинематической погрешности – 0,12 град (21,4 % от наибольшей кинематической погрешности); средней местной кинематической погрешности – 0,039 град (7,1 % от наибольшей кинематической погрешности). Отклонение передаточного отношения от номинального значения составило  $\pm 4,8$  %.

В результате спектрального анализа экспериментальных результатов получены амплитудно-частотные спектры кинематических характеристик планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$ . На графиках (рисунки 5.72–5.80) представлены амплитудно-частотные спектры кинематических погрешностей этого редуктора.

На графиках (см. рисунки 5.72–5.80) обозначено:  $A$  – амплитуда гармонической составляющей;  $n$  – номер гармоники. Наиболее значимые гармоники на этих графиках – 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 42, 98 и 294. На амплитудно-частотных спектрах (см. рисунки 5.72–5.80) можно выделить три участка гармонических составляющих: низкочастотный с номерами гармоник меньше числа периодов многопериодной дорожки  $z_2 = 6$  – гармоники 1, 2, 3, 4; среднечастотный с номерами гармоник, равными числу периодов многопериодной беговой дорожки  $z_2 = 6$  и передаточному отношению второй ступени  $i_2 = 7$ , а также с номерами, кратными числу периодов  $2 \times z_2$  и  $2 \times i_2$ , – гармоники 6, 7, 12, 14; высокочастотный с номерами гармоник, определяемыми соотношениями, кратными передаточному отношению второй ступени  $i_2$ , передаточному отношению редуктора  $i$  и числу периодов многопериодной дорожки  $z_2$ ,  $z_2 \times i_2$ ,  $2 \times i$ ,  $z_2 \times i$  – гармоники 42, 98, 294.

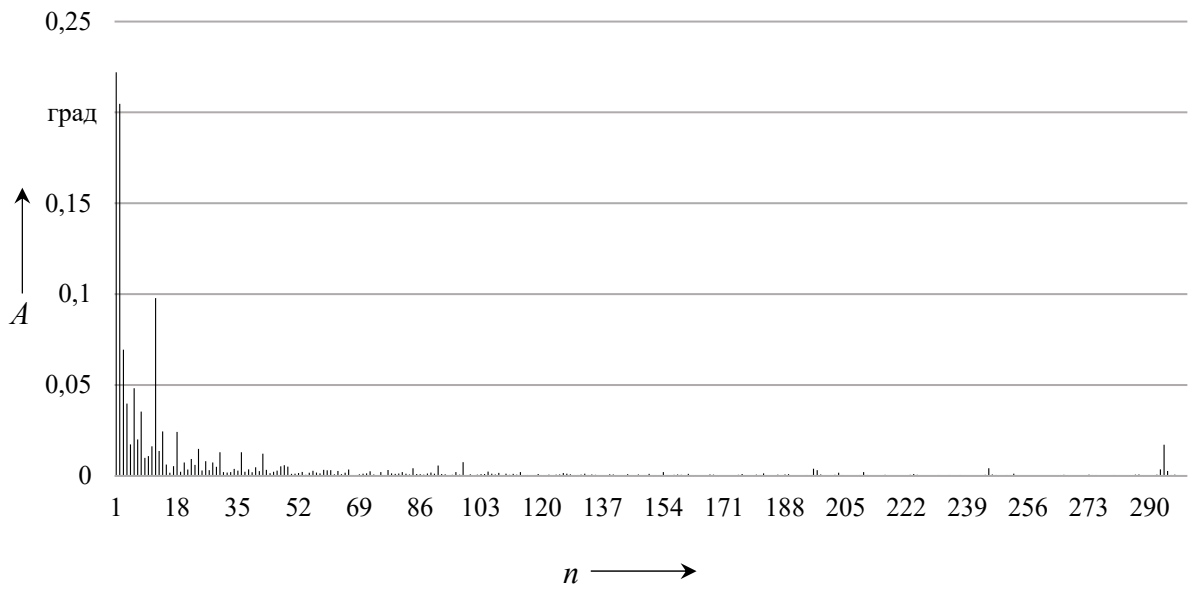


Рисунок 5.72 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.47, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 100$  об/мин без нагрузки

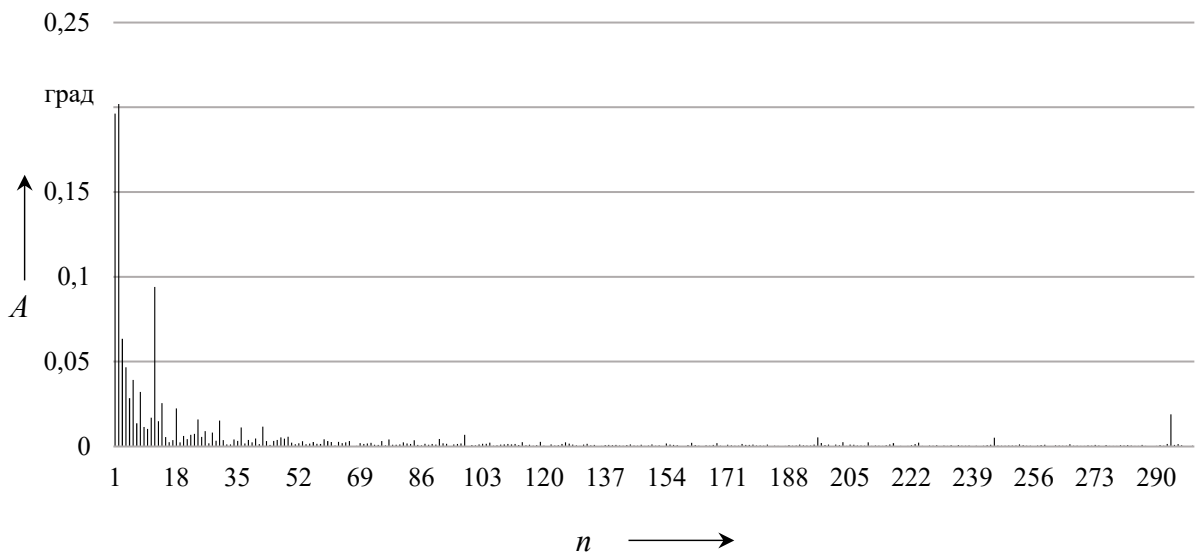


Рисунок 5.73 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.48, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин без нагрузки

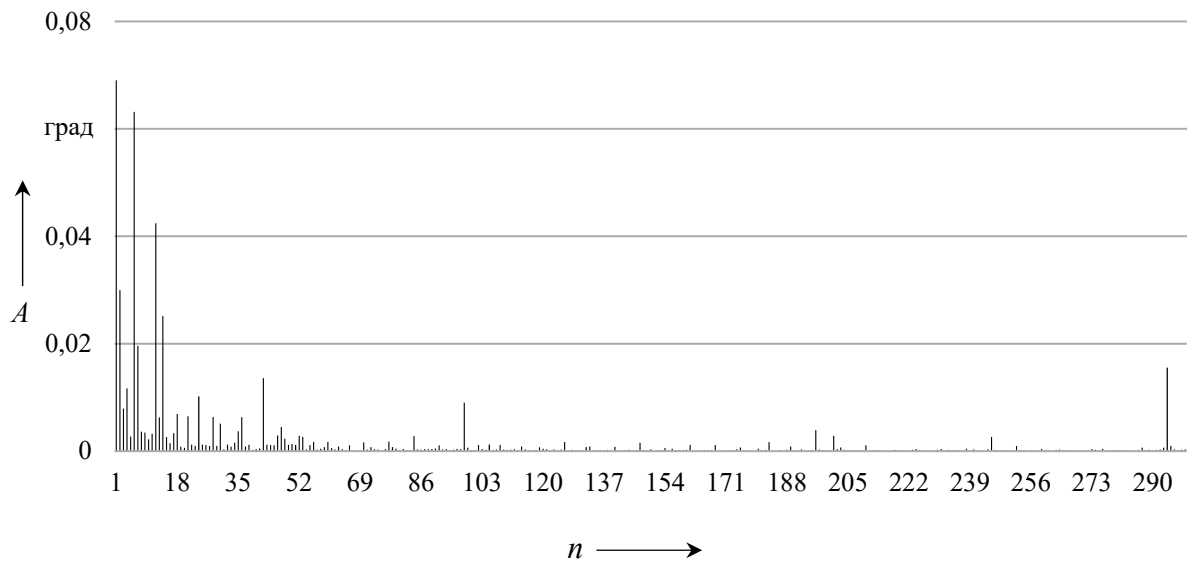


Рисунок 5.74 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.50, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 500$  об/мин с нагрузкой 100 Н·м

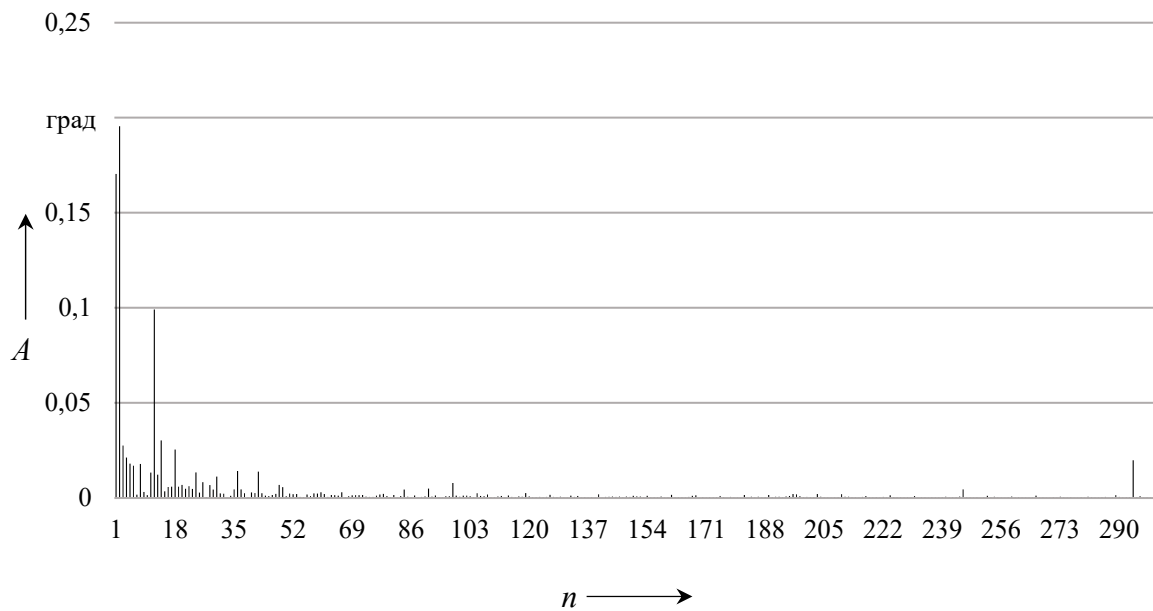


Рисунок 5.75 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.51, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин без нагрузки

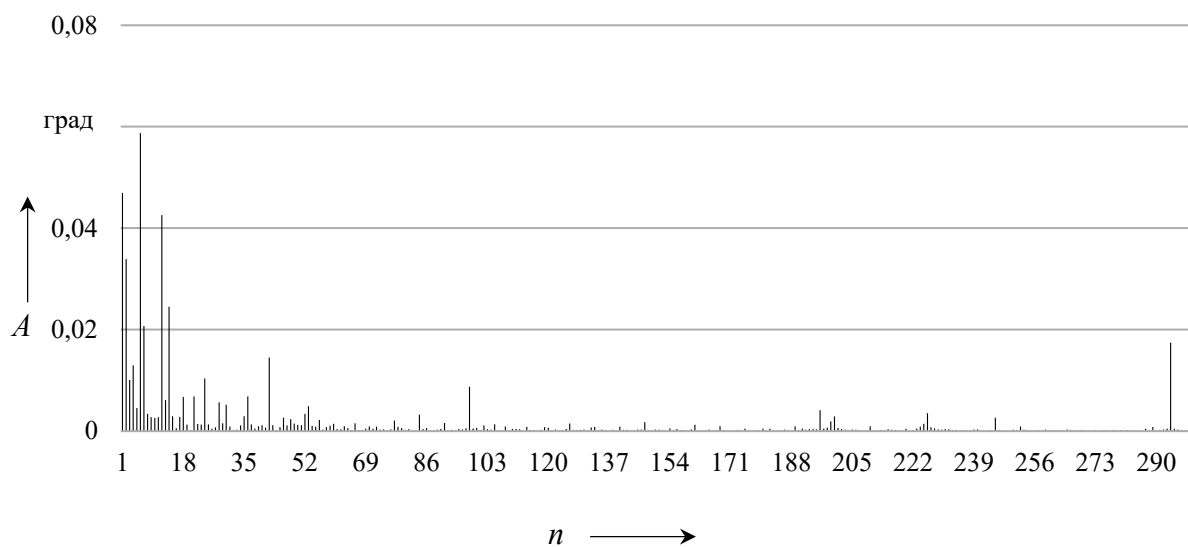


Рисунок 5.76 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.53, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 750$  об/мин с нагрузкой 100 Н·м

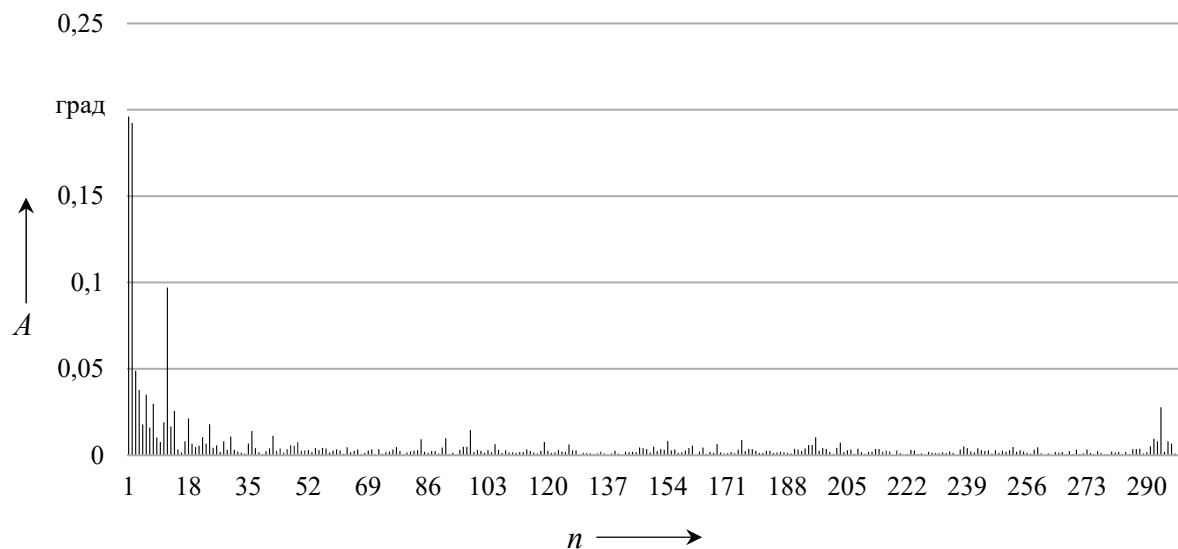


Рисунок 5.77 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.54, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин без нагрузки

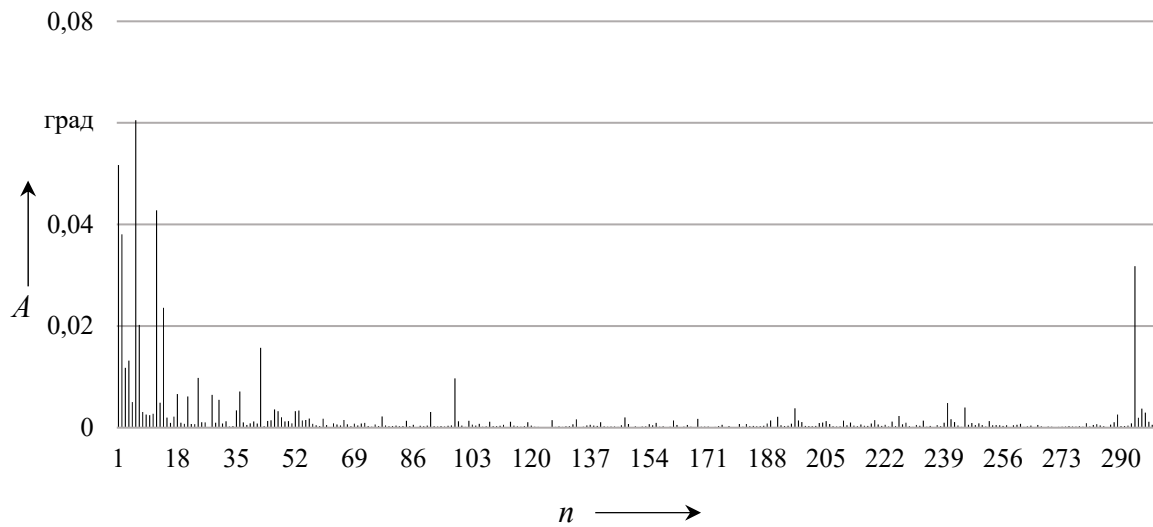


Рисунок 5.78 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.56, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1000$  об/мин с нагрузкой 100 Н·м

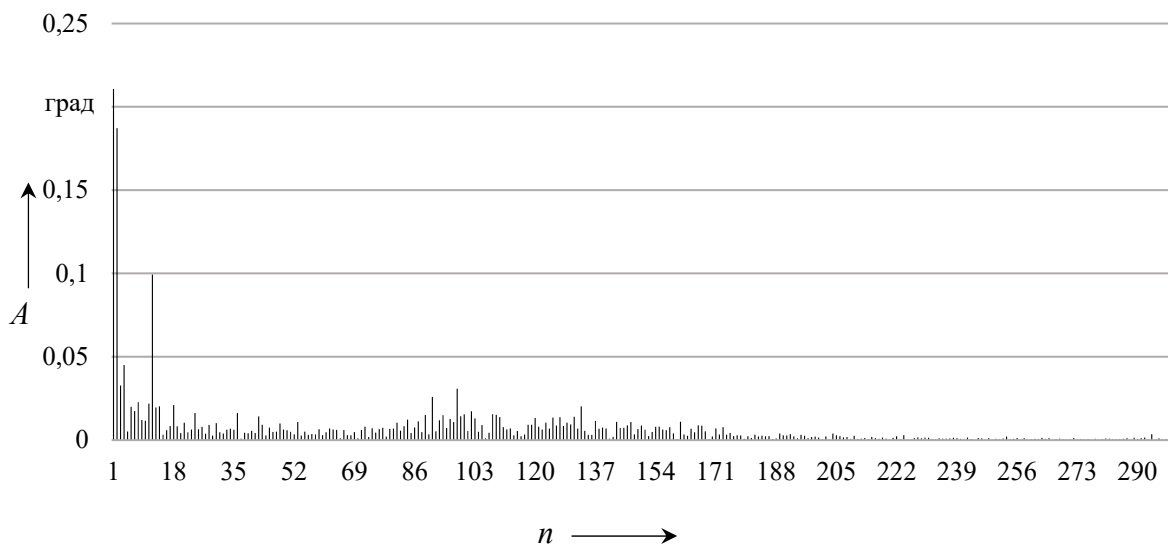


Рисунок 5.79 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.57, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин без нагрузки

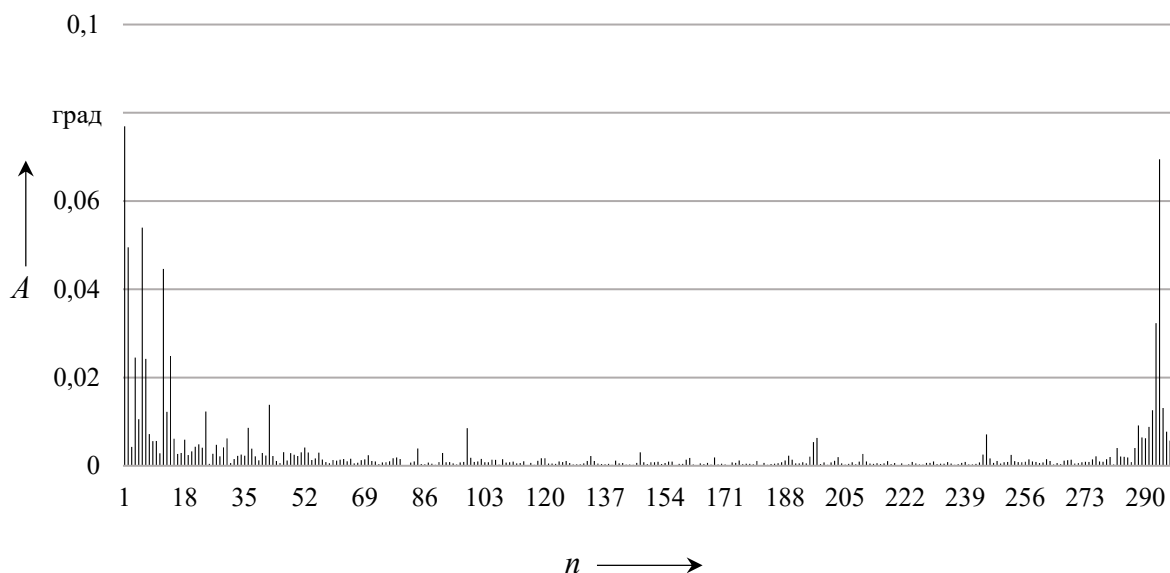


Рисунок 5.80 – Амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности, представленной на рисунке 4.59, планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и  $n_1 = 1500$  об/мин с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Установлена зависимость проявления наиболее значимых гармонических составляющих амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора от геометрических параметров передачи: числа периодов беговых дорожек, передаточных отношений первой и второй ступеней и передачи. На графиках (см. рисунки 5.72–5.80) видно, что с нагрузкой  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$  значительно уменьшаются амплитуды гармоник с первыми номерами 1, 2 и 3. Уменьшение значений этих гармоник установлено и при нагрузках  $20, 40, 60$  и  $80 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Амплитудно-частотные спектры также показывают зависимости высокочастотных гармоник кинематической погрешности от частоты вращения ведущего вала редуктора под нагрузкой и без нагрузки. На графиках (см. рисунки 5.72–5.80) амплитуда 294-й гармоники, характеризующая наибольшие высокочастотные погрешности при перемещении сателлитов по шестипериодной беговой дорожке первой ступени редуктора, увеличивается с увеличением частоты вращения под нагрузкой и практически не изменяется и имеет небольшую амплитуду при различных частотах вращения без нагрузки.

На рисунках 5.81–5.84 показаны графики средних значений по трем экспериментам наиболее значимых гармонических составляющих кинематической погрешности (имеющих наибольшие амплитуды) с номерами 1 – низкочастотного участка, 12 – среднечастотного участка и 294 – высокочастотного участка амплитудно-частотного спектра при частотах вращения ведущего вала  $500, 750, 1000$  и  $1500$  об/мин в зависимости от нагружающего момента  $M$  на выходном валу редуктора (нагрузки  $0, 20, 40, 60, 80$  и  $100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ).

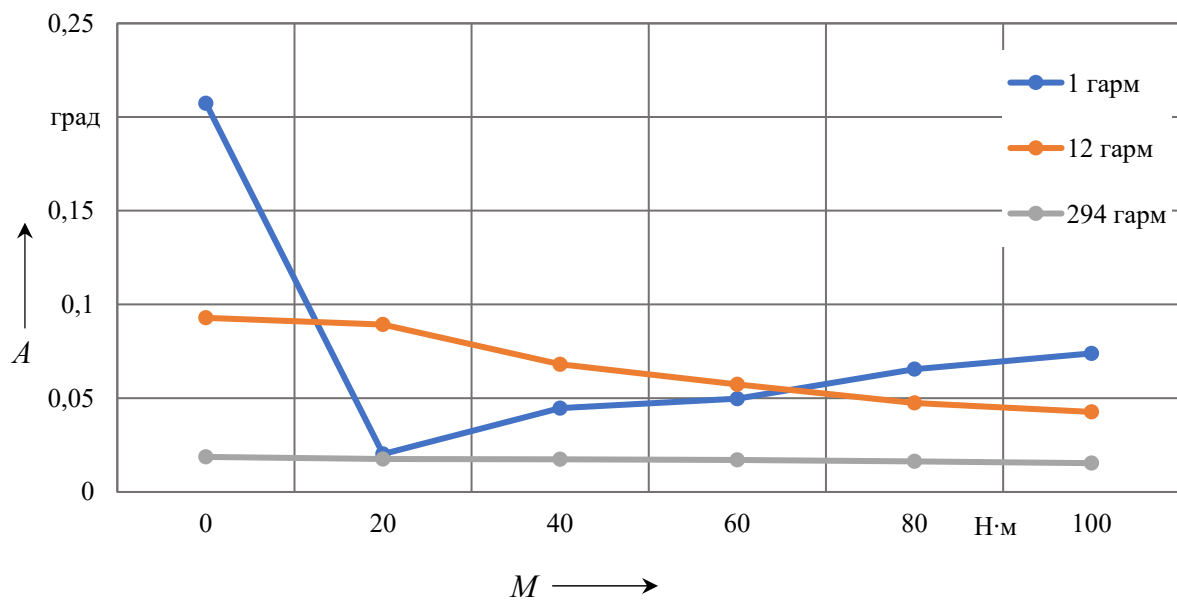


Рисунок 5.81 – Гармонические составляющие кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и частотой вращения ведущего вала 500 об/мин

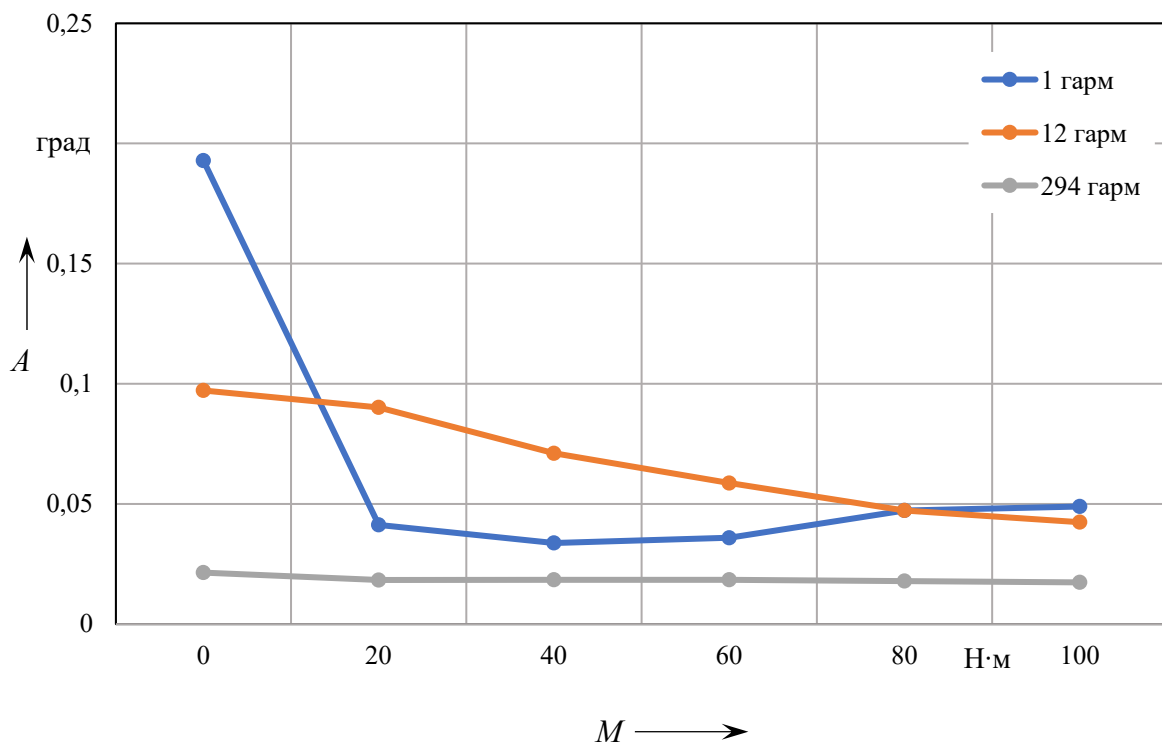


Рисунок 5.82 – Гармонические составляющие кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и частотой вращения ведущего вала 750 об/мин

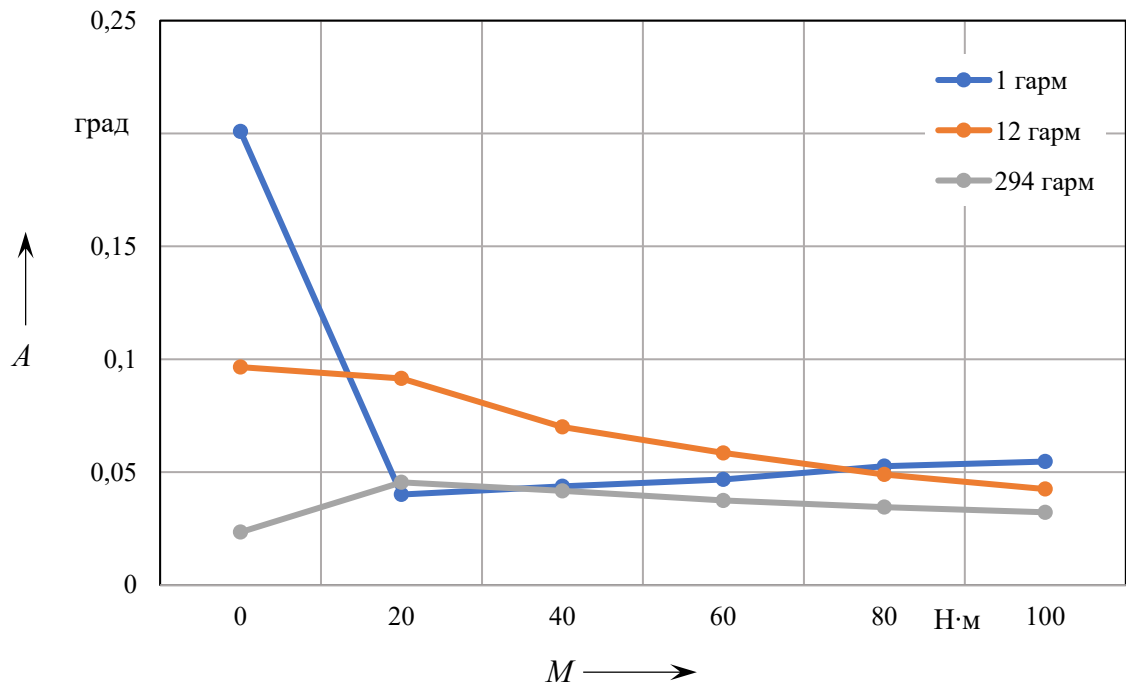


Рисунок 5.83 – Гармонические составляющие кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и частотой вращения ведущего вала 1000 об/мин

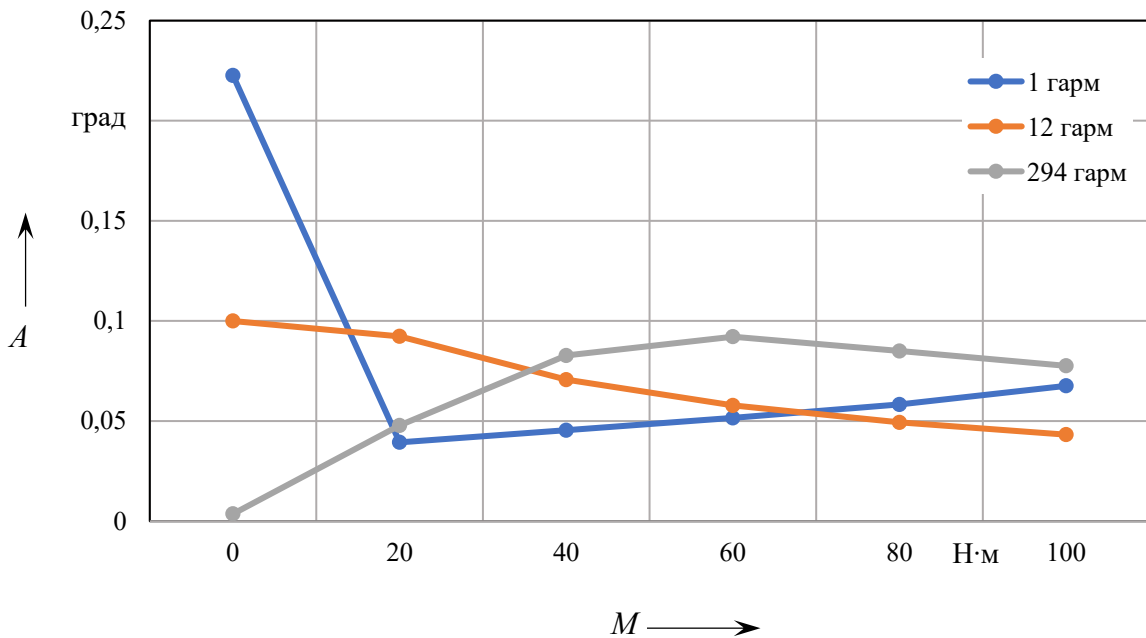


Рисунок 5.84 – Гармонические составляющие кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  и частотой вращения ведущего вала 1500 об/мин

Графики (см. рисунки 5.81–5.84) показывают, что 1-я гармоника при вращении редуктора под нагрузкой может уменьшаться в 2,5–10 раз по сравнению с вращением без нагрузки, при этом с увеличением нагрузки от 20 до 100 Н·м 1-я гармоника может увеличиваться в 4 раза. 12-я гармоника для всех частот вращения с увеличением нагрузки уменьшается в 2–2,5 раза, при этом ее значения практически не зависят от частоты вращения. 294-я гармоника с увеличением частоты вращения увеличивается, особенно заметно ее увеличение в 5,4 раза с частотой вращения ведущего вала 1500 об/мин в сравнении с частотой вращения 100 об/мин под нагрузкой 60 Н·м. Также значения этой гармоники больше под нагрузкой, чем без нагрузки, при частотах вращения 1000 и 1500 об/мин.

В таблицах 5.5–5.7 представлены значения амплитуд  $A_i$  гармонических составляющих (гармоник) с номерами 1, 12 и 294 кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  по результатам трех экспериментов и их средние значения  $A_{icp}$ , которые имеют наибольшие амплитуды в амплитудно-частотных спектрах, полученных экспериментально.

На рисунке 5.85 приведены графики всех наиболее значимых гармоник, указанных ранее (1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 42, 98, 294), при экспериментальной оценке кинематической погрешности с частотой вращения ведущего вала редуктора 1500 об/мин и нагрузками 20, 40, 60, 80 и 100 Н·м.

Из графиков (см. рисунок 5.85) видно, что наибольшие амплитуды имеют гармоники 1, 2, 6, 12, 294. Они также заметно изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в зависимости от величины нагружающего момента  $M$ . Остальные гармоники 3, 4, 7, 14, 42, 98 имеют в несколько раз меньшие значения амплитуд и мало изменяются в зависимости от изменения момента  $M$ .

Разработаны метод и методика расчета кинематической погрешности одноступенчатого редуктора на базе двухступенчатого. Из исследуемого двухступенчатого редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  можно выделить первую или вторую ступень и рассмотреть любую из них как одноступенчатую передачу с  $i = 7$  при равенстве передаточных отношений каждой ступени. Так как кинематическая погрешность двухступенчатого редуктора включает в основном погрешности второй ступени (80 %...90 %), то лучше рассматривать вторую ступень редуктора с передаточным отношением  $i = 49$  как одноступенчатый редуктор с передаточным отношением  $i = 7$  с учетом частоты вращения ведущего вала второй ступени двухступенчатого редуктора. Частота вращения ведущего вала второй ступени двухступенчатого редуктора с  $i = 49$  меньше частоты вращения ведущего вала его первой ступени в число раз, равное передаточному отношению ступени  $i = 7$ , и изменяется от 14,28 об/мин при частоте вращения ведущего вала первой ступени 100 об/мин до 214,28 об/мин при частоте вращения ведущего вала первой ступени 1500 об/мин.

Таблица 5.5 – Значения амплитуды  $A_1$  1-й гармонической составляющей кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$

Частота вращения $n_1$ , об/мин	Номер эксперимента и $A_{1cp}$	Нагружающий момент $M_{ввд}$ , Н·м					
		0	20	40	60	80	100
		Значение $A_1$ , рад (град)					
500	1	0,003424	0,000271	0,000716	0,000845	0,001073	0,001205
	2	0,003718	0,000253	0,000752	0,000908	0,001189	0,001254
	3	0,00371	0,000533	0,00087	0,000849	0,001164	0,001409
	$A_{1cp}$	<b>0,003617</b> <b>(0,2072)</b>	<b>0,000352</b> <b>(0,0201)</b>	<b>0,000779</b> <b>(0,0446)</b>	<b>0,000867</b> <b>(0,0496)</b>	<b>0,001142</b> <b>(0,0654)</b>	<b>0,001289</b> <b>(0,0738)</b>
750	1	0,002973	0,000928	0,000551	0,000635	0,000871	0,00082
	2	0,003566	0,000745	0,000553	0,000671	0,000818	0,000892
	3	0,003559	0,000488	0,000662	0,000574	0,000785	0,00085
	$A_{1cp}$	<b>0,003366</b> <b>(0,1928)</b>	<b>0,00072</b> <b>(0,0412)</b>	<b>0,000589</b> <b>(0,0337)</b>	<b>0,000627</b> <b>(0,0359)</b>	<b>0,000825</b> <b>(0,0472)</b>	<b>0,000854</b> <b>(0,0489)</b>
1000	1	0,003423	0,000591	0,000804	0,000857	0,000877	0,000902
	2	0,003444	0,000772	0,000761	0,000848	0,000911	0,000974
	3	0,00365	0,00074	0,000724	0,000745	0,00097	0,000988
	$A_{1cp}$	<b>0,003506</b> <b>(0,2008)</b>	<b>0,000701</b> <b>(0,0401)</b>	<b>0,000763</b> <b>(0,0437)</b>	<b>0,000817</b> <b>(0,0467)</b>	<b>0,000919</b> <b>(0,0526)</b>	<b>0,000955</b> <b>(0,0546)</b>
1500	1	0,003677	0,000637	0,000739	0,000876	0,001053	0,001343
	2	0,003756	0,000751	0,000716	0,00084	0,000994	0,001074
	3	0,004223	0,000674	0,000923	0,000985	0,001005	0,001124
	$A_{1cp}$	<b>0,003885</b> <b>(0,2226)</b>	<b>0,000687</b> <b>(0,0393)</b>	<b>0,000793</b> <b>(0,0454)</b>	<b>0,0009</b> <b>(0,0515)</b>	<b>0,001017</b> <b>(0,0582)</b>	<b>0,00118</b> <b>(0,0676)</b>

Таблица 5.6 – Значения амплитуды  $A_{12}$  12-й гармонической составляющей кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$

Частота вращения $n_1$ , об/мин	Номер эксперимента и $A_{1cp}$	Нагружающий момент $M_{введ}$ , Н·м					
		0	20	40	60	80	100
		Значение $A_{12}$ , рад (град)					
500	1	0,00164	0,001514	0,0012	0,001003	0,000833	0,000741
	2	0,001595	0,00156	0,001187	0,001006	0,000827	0,00075
	3	0,001629	0,0016	0,001176	0,000993	0,000823	0,000745
	$A_{12cp}$	<b>0,001621</b> <b>(0,0928)</b>	<b>0,001558</b> <b>(0,0892)</b>	<b>0,001188</b> <b>(0,0680)</b>	<b>0,001001</b> <b>(0,0573)</b>	<b>0,000828</b> <b>(0,0474)</b>	<b>0,000745</b> <b>(0,0427)</b>
750	1	0,001729	0,00158	0,001238	0,001028	0,000841	0,000743
	2	0,001671	0,001557	0,001253	0,001018	0,000816	0,000735
	3	0,00169	0,001584	0,001231	0,001026	0,000817	0,000744
	$A_{12cp}$	<b>0,001697</b> <b>(0,0972)</b>	<b>0,001574</b> <b>(0,0901)</b>	<b>0,001241</b> <b>(0,0710)</b>	<b>0,001024</b> <b>(0,0586)</b>	<b>0,000825</b> <b>(0,0472)</b>	<b>0,000741</b> <b>(0,0424)</b>
1000	1	0,001694	0,001593	0,001223	0,001025	0,000861	0,000747
	2	0,001704	0,001617	0,001233	0,001031	0,000847	0,000738
	3	0,001656	0,001581	0,00121	0,001007	0,000856	0,000743
	$A_{12cp}$	<b>0,001685</b> <b>(0,0965)</b>	<b>0,001597</b> <b>(0,0915)</b>	<b>0,001222</b> <b>(0,0700)</b>	<b>0,001021</b> <b>(0,0584)</b>	<b>0,000855</b> <b>(0,0489)</b>	<b>0,000743</b> <b>(0,0425)</b>
1500	1	0,001733	0,001636	0,001258	0,001015	0,000888	0,000778
	2	0,001694	0,001598	0,001232	0,001012	0,000848	0,000751
	3	0,001808	0,0016	0,001212	0,001	0,000848	0,000737
	$A_{12cp}$	<b>0,001745</b> <b>(0,0999)</b>	<b>0,001611</b> <b>(0,0923)</b>	<b>0,001234</b> <b>(0,0707)</b>	<b>0,001009</b> <b>(0,0578)</b>	<b>0,000861</b> <b>(0,0493)</b>	<b>0,000755</b> <b>(0,0432)</b>

Таблица 5.7 – Значения амплитуды  $A_{294}$  294-й гармонической составляющей кинематической погрешности планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$

Частота вращения $n_1$ , об/мин	Номер эксперимента и $A_{icp}$	Нагружающий момент $M_{ввод}$ , Н·м					
		0	20	40	60	80	100
		Значение $A_{294}$ , рад (град)					
500	1	0,00033	0,000303	0,000305	0,000299	0,000287	0,000271
	2	0,000333	0,000306	0,000303	0,000296	0,000282	0,000269
	3	0,000316	0,000307	0,000302	0,000298	0,000284	0,000263
	$A_{294cp}$	<b>0,000326</b> <b>(0,0186)</b>	<b>0,000305</b> <b>(0,0174)</b>	<b>0,000303</b> <b>(0,0173)</b>	<b>0,000298</b> <b>(0,0170)</b>	<b>0,000284</b> <b>(0,0162)</b>	<b>0,000268</b> <b>(0,0153)</b>
750	1	0,000345	0,000325	0,000322	0,000323	0,000315	0,000304
	2	0,000379	0,000315	0,00032	0,000321	0,000313	0,000302
	3	0,0004	0,000319	0,000322	0,000321	0,000309	0,000303
	$A_{294cp}$	<b>0,000375</b> <b>(0,0214)</b>	<b>0,00032</b> <b>(0,0183)</b>	<b>0,000321</b> <b>(0,0184)</b>	<b>0,000322</b> <b>(0,0184)</b>	<b>0,000312</b> <b>(0,0178)</b>	<b>0,000303</b> <b>(0,0173)</b>
1000	1	0,000484	0,000805	0,000736	0,00067	0,000601	0,000555
	2	0,000368	0,000795	0,000724	0,000653	0,000601	0,00056
	3	0,000378	0,000784	0,000724	0,000638	0,000606	0,000571
	$A_{294cp}$	<b>0,00041</b> <b>(0,0234)</b>	<b>0,000795</b> <b>(0,0455)</b>	<b>0,000728</b> <b>(0,0417)</b>	<b>0,000654</b> <b>(0,0374)</b>	<b>0,000603</b> <b>(0,0345)</b>	<b>0,000562</b> <b>(0,0322)</b>
1500	1	0,000061	0,000796	0,001442	0,001624	0,00149	0,001212
	2	0,000065	0,000858	0,001449	0,001605	0,001482	0,001423
	3	0,000066	0,000851	0,001441	0,001597	0,001479	0,001429
	$A_{294cp}$	<b>0,000064</b> <b>(0,0036)</b>	<b>0,000835</b> <b>(0,0478)</b>	<b>0,001444</b> <b>(0,0827)</b>	<b>0,001609</b> <b>(0,0921)</b>	<b>0,001484</b> <b>(0,0850)</b>	<b>0,001355</b> <b>(0,0776)</b>

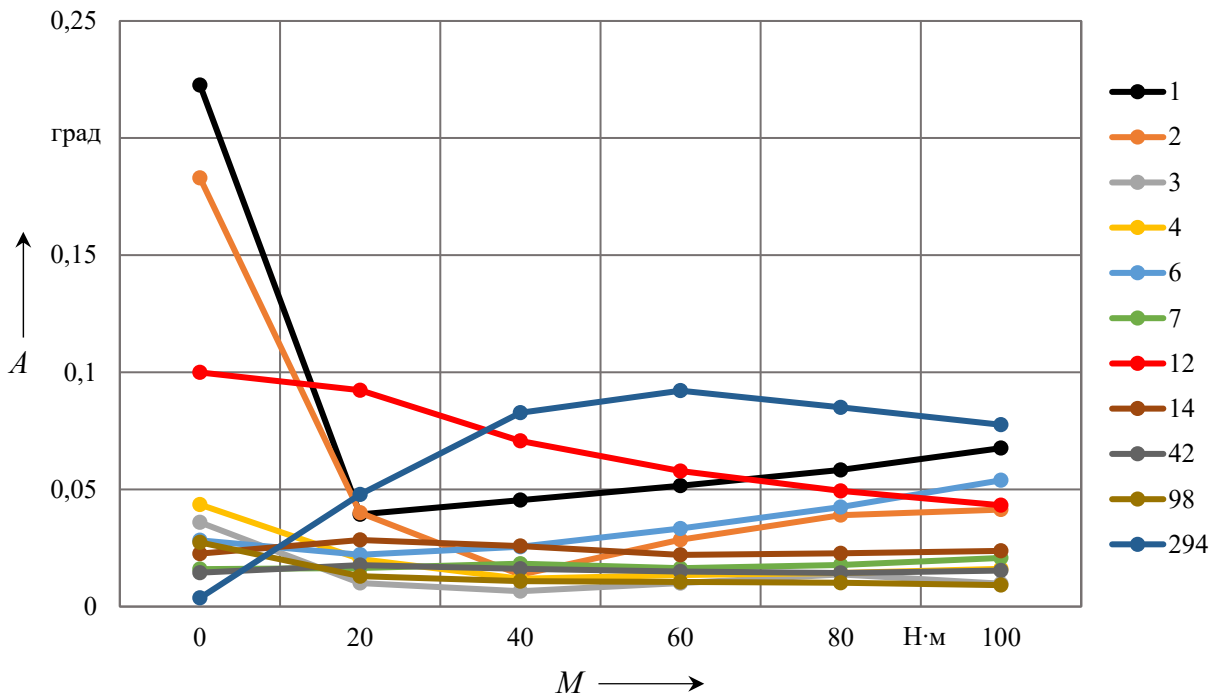


Рисунок 5.85 – Графики наиболее значимых гармоник при экспериментальной оценке кинематической погрешности с частотой вращения 1500 об/мин ведущего вала планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$

При этом кинематическая погрешность увеличивается в 1,22 раза без нагрузки (см. рисунок 5.58) и 1,28 раза под нагрузкой (см. таблицу 5.4) при частоте вращения ведущего вала второй ступени в диапазоне 100...200 об/мин. При меньших частотах вращения ведущего вала второй ступени редуктора кинематическая погрешность практически не изменяется. Экспериментально установлено, что при частотах вращения больше 200 об/мин кинематическая погрешность изменяется в меньшей степени, чем на графике (см. рисунок 5.58), поэтому принято для оценки кинематической погрешности одноступенчатого редуктора с  $i = 7$  использовать динамические коэффициенты по аналогии с зубчатыми прямозубыми передачами, учитывая для планетарного шарикового редуктора частоту вращения (скорость, м/с), 8-ю степень точности, твердость поверхностей контакта более 45 HRC, средний радиус беговых дорожек, равный 41,5 мм, на котором передается нагрузка.

В таблице 5.8 представлены принятые динамические коэффициенты, рассчитанная, с их учетом, кинематическая погрешность одноступенчатого редуктора с  $i = 7$  и для сравнения ранее представленная кинематическая погрешность двухступенчатого редуктора с  $i = 49$ , а также частота вращения ведущего вала одноступенчатого или первой ступени двухступенчатого редукторов. Для редуктора с  $i = 7$  кинематическая погрешность рассчитывалась путем умножения средних значений (по трем экспериментам с нагруз-

ками, см. таблицу 5.4) кинематической погрешности редуктора с  $i = 49$  на соответствующий динамический коэффициент для частот вращения 500, 750, 1000 и 1500 об/мин. При расчете кинематической погрешности редуктора с  $i = 7$  вычиталась кинематическая погрешность первой ступени редуктора с  $i = 49$  по методике, представленной в подразд. 4.2.

Таблица 5.8 – Динамический коэффициент и кинематическая погрешность одно- и двухступенчатых редукторов с  $i = 7$  и  $i = 49$

Частота вращения ведущего вала $n_1$ , об/мин (скорость, м/с)	Динамический коэффициент $k_d$	Кинематическая погрешность редуктора с $i = 7$ , град	Кинематическая погрешность редуктора с $i = 49$ , град
500 (2,1)	1,06	0,4870	0,5251
750 (3,2)	1,09	0,5004	0,5246
1000 (4,3)	1,12	0,5749	0,5866
1500 (6,5)	1,18	0,6932	0,6714

В результате расчетов (см. таблицу 5.8) по разработанному методу кинематическая погрешность редуктора с  $i = 7$  и частотами вращения ведущего вала 500, 750 и 1000 об/мин имеет меньшие значения (на 2 %...7,25 %), чем кинематическая погрешность редуктора с  $i = 49$ , а для частоты вращения 1500 об/мин значение больше на 3,15 %. Бóльшая кинематическая погрешность одноступенчатого редуктора с  $i = 7$  и частотой вращения ведущего вала 1500 об/мин, по сравнению с двухступенчатым редуктором с  $i = 49$ , объясняется значительно бóльшими частотами вращения ведущего и ведомого валов одноступенчатого редуктора ( $n_1 = 1500$  об/мин,  $n_2 = 214,2$  об/мин), в сравнении со второй ступенью двухступенчатого редуктора ( $n_1 = 214,2$  об/мин,  $n_2 = 30,6$  об/мин), определяющей его кинематическую погрешность, что увеличивает динамические нагрузки и, соответственно, кинематическую погрешность передачи с  $i = 7$ .

При оценке кинематической погрешности редукторов нужно учитывать и вычитать погрешности экспериментального стенда, которые приводят к погрешностям измерения и завышают значения кинематической погрешности передачи. Погрешность стенда, включающая отклонение от соосности осей валов электродвигателя, осей нагружающего тормоза и переходных муфт, составляет 0,02 мм. В соответствии с методикой, представленной в разд. 4, на основе погрешности стенда в линейных величинах (мм) рассчитаны погрешность измерения в угловых величинах (град) и кинематическая погрешность одноступенчатого редуктора с  $i = 7$  с вычитанием погрешности измерения. Результаты расчетов приведены в таблице 5.9.

Таблица 5.9 – Погрешность измерения и кинематическая погрешность редуктора с  $i = 7$

Частота вращения ведущего вала $n_1$ , об/мин (скорость, м/с)	Погрешность измерения, град	Кинематическая погрешность редуктора с $i = 7$ , град
500 (2,1)	0,0868	0,4002
750 (3,2)		0,4135
1000 (4,3)		0,4881
1500 (6,5)		0,6064

Проведенные экспериментальные исследования с использованием разработанной информационно-измерительной системы согласуются с исследованиями, проведенными с использованием системы Shark (разработка БГУ) для частоты вращения 1500 об/мин ведущих валов редукторов, для которой разрабатывалась данная система. Разработанная измерительная система позволила исследовать кинематические характеристики с разными частотами вращения валов испытуемых редукторов, увеличить число исследуемых параметров и является более информативной, чем система Shark. Экспериментальные исследования кинематических характеристик планетарных передач с телами качения проводились также для редукторов с передаточными отношениями 8, 12, 15, 25, 64 и 121.

### ***5.3 Экспериментальные результаты на основе метода расчета КПД механических передач с использованием автоматизированной информационно-измерительной системы***

На основе метода и методики расчета КПД механизмов, представленной в разд. 3, проведены экспериментальные исследования КПД редукторов с использованием разработанной автоматизированной информационно-измерительной системы.

В таблице 5.10 приведены исходные данные с результатами экспериментальных исследований и расчета КПД двухступенчатого планетарного шарикового редуктора с передаточным отношением  $i = 49$ .

В таблице 5.10 в исходных данных  $t_{\text{облх}}$  – время полного оборота ведомого вала редуктора, полученное экспериментально на автоматизированном стенде. Из паспортных данных электродвигателя АИР100L4:  $P_n$  – номинальная мощность электродвигателя;  $n_0$  – частота вращения холостого хода электродвигателя;  $n_n$  – номинальная частота вращения электродвигателя;  $\mu_k$  – кратность критического момента электродвигателя. Кинематический

параметр испытуемого двухступенчатого шарикового редуктора  $i$  – передаточное отношение.

Таблица 5.10 – Исходные данные и результаты расчета КПД двухступенчатого планетарного шарикового редуктора на основе экспериментальных исследований

Параметры расчета	Нагружающий момент $M_{вых}$ , Н·м					
	0	20	40	60	80	100
Исходные данные						
$t_{вых}$ , с	1,962837	1,964467	1,965961	1,968014	1,969943	1,971598
$P_n$ , Вт	4000					
$n_0$ , об/мин	1500					
$n_n$ , об/мин	1410					
$\mu_k$	2,4					
$i$	49					
Результаты расчета						
$\omega$ , рад/с	3,201073	3,198417	3,195987	3,192652	3,189526	3,186849
$n$ , об/мин	1497,832	1496,589	1495,452	1493,892	1492,429	1491,176
$s_n$	0,06					
$s_k$	0,029					
$a$	0,6019					
$M_n$ , Н·м	27,09					
$M_k$ , Н·м	65,016					
$M_n$ , Н·м	0,15					
$M_{об}$ , Н·м	0,75648	1,18808	1,581644	2,119679	2,621959	3,05029
КПД	0	0,393191	0,570202	0,62167	0,660469	0,703659

В результатах расчета (см. таблицу 5.10) обозначено:  $\omega$  – угловая скорость вала ротора электродвигателя;  $n$  – действительная частота вращения электродвигателя, учитывающая потери в механизме;  $s_n$  – номинальное скольжение электродвигателя;  $s_k$  – критическое скольжение электродвигателя;  $a$  – значение, получаемое путем подбора для обеспечения равенства момента двигателя и его номинального момента;  $M_n$  – номинальный момент электродвигателя;  $M_k$  – критический момент электродвигателя;  $M_n$  – момент, связанный с потерями из-за трения в электродвигателе;

$M_{\text{об}}$  – момент электродвигателя в зависимости от скольжения; КПД – коэффициент полезного действия испытуемого редуктора.

Из таблицы 5.10 видно, что без нагрузки (0 Н·м) вращающий момент двигателя не равен нулю ( $M_{\text{об}} \approx 0,75$  Н·м). Это связано с потерями на трение в испытуемом редукторе и электродвигателе. На основе экспериментальных исследований принимался момент потерь электродвигателя без нагрузки, равный 0,15 Н·м.

Результаты расчетов, представленные в таблице 5.10, получены по математическим зависимостям (4.34)–(4.41).

На рисунках 5.86–5.88 представлены графики для визуализации соотношений результатов расчета, показывающие зависимости времени за оборот ведомого вала, его угловой скорости и КПД редуктора от нагружающего момента.

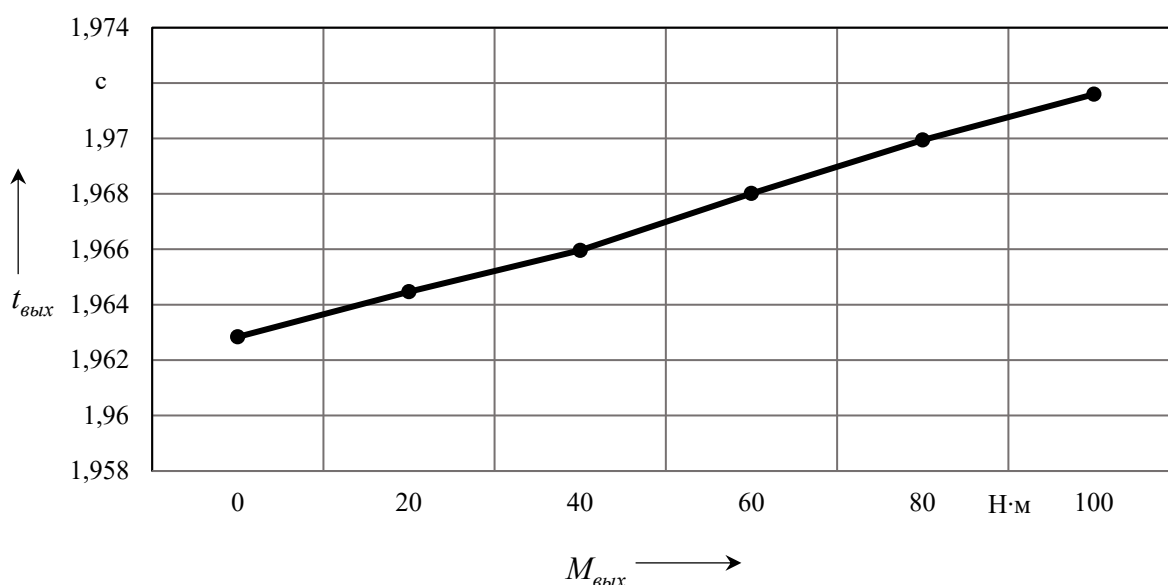


Рисунок 5.86 – График зависимости времени полного оборота ведомого вала двухступенчатого планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  от нагружающего момента

Из таблицы 5.10 и графика, приведенного на рисунке 5.88, видно, что КПД двухступенчатого планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  равен 70 % при нагрузке 100 Н·м. При этом средний КПД каждой ступени редуктора составит  $\approx 84$  %.

Так как нагрузки на первую и вторую ступени редуктора различны, а также различны частоты вращения валов каждой ступени, то КПД первой и второй ступеней будет неодинаковым. При бóльших нагрузках и бóльших частотах вращения валов (учитывая в зацеплении клиновой механизм) КПД передачи будет выше. Несмотря на более низкую скорость вращения, предположительно во второй ступени КПД будет несколько выше, чем в первой, за счет передачи большего вращающего момента. При рабочей нагрузке

ке 600 Н·м (передаваемая мощность редуктора составляет 1,5...2,0 кВт) КПД будет выше ( $\approx 75\%$ ). Повысить КПД редуктора можно за счет отделочных операций обработки многопериодных дорожек, а также за счет снижения кинематических погрешностей.

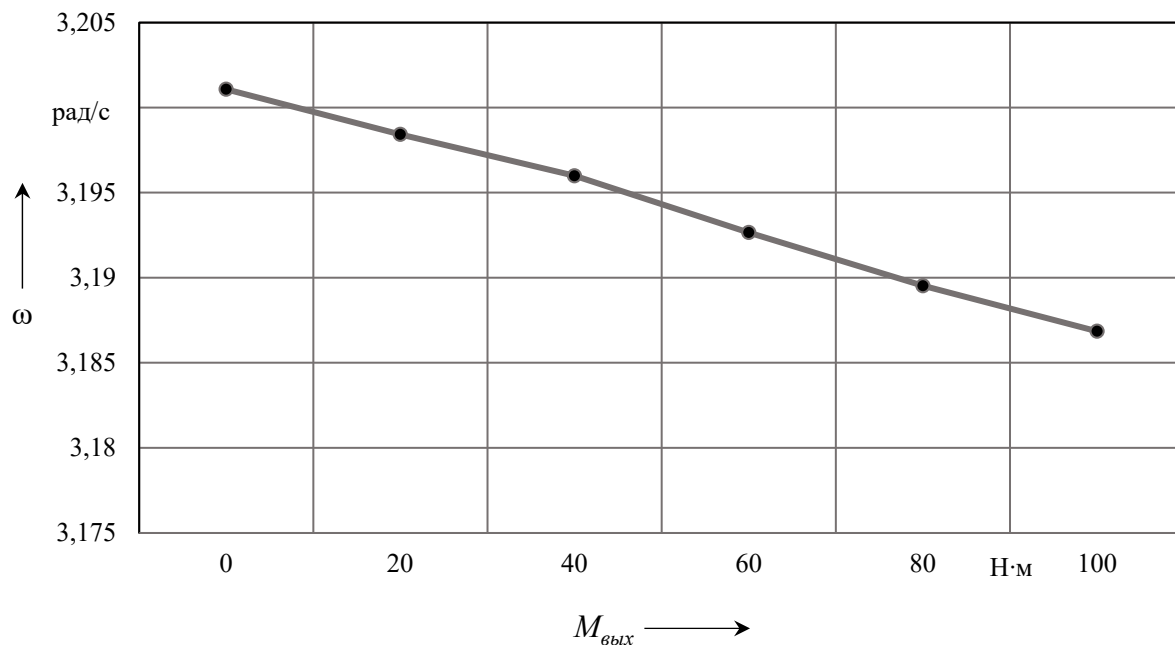


Рисунок 5.87 – График зависимости угловой скорости ведомого вала двухступенчатого планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  от нагружающего момента

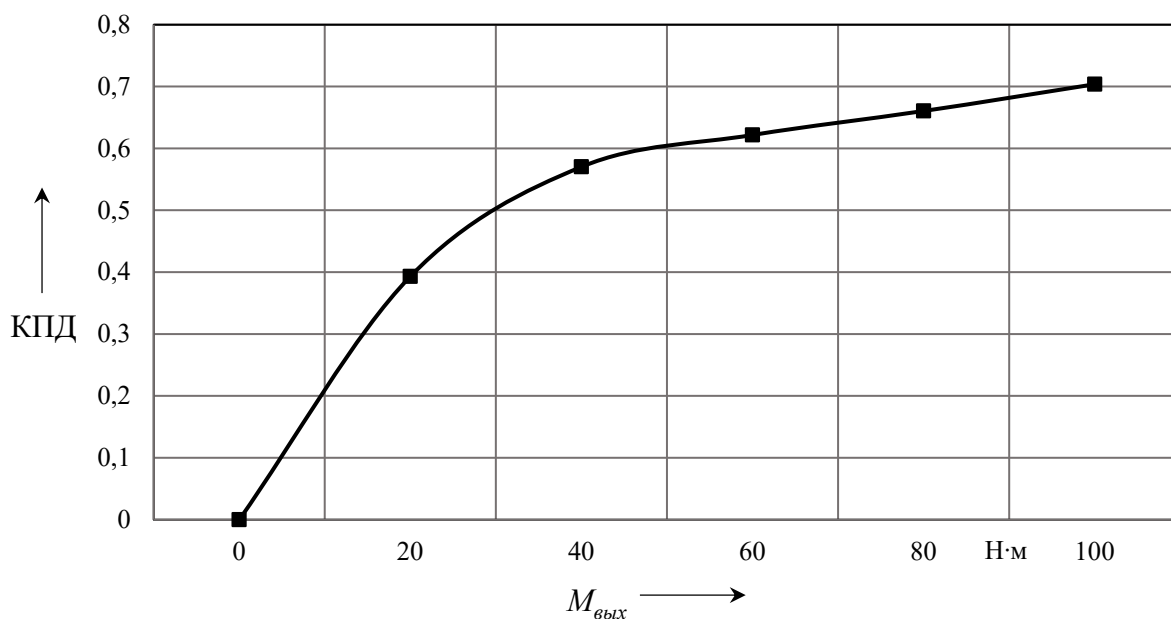


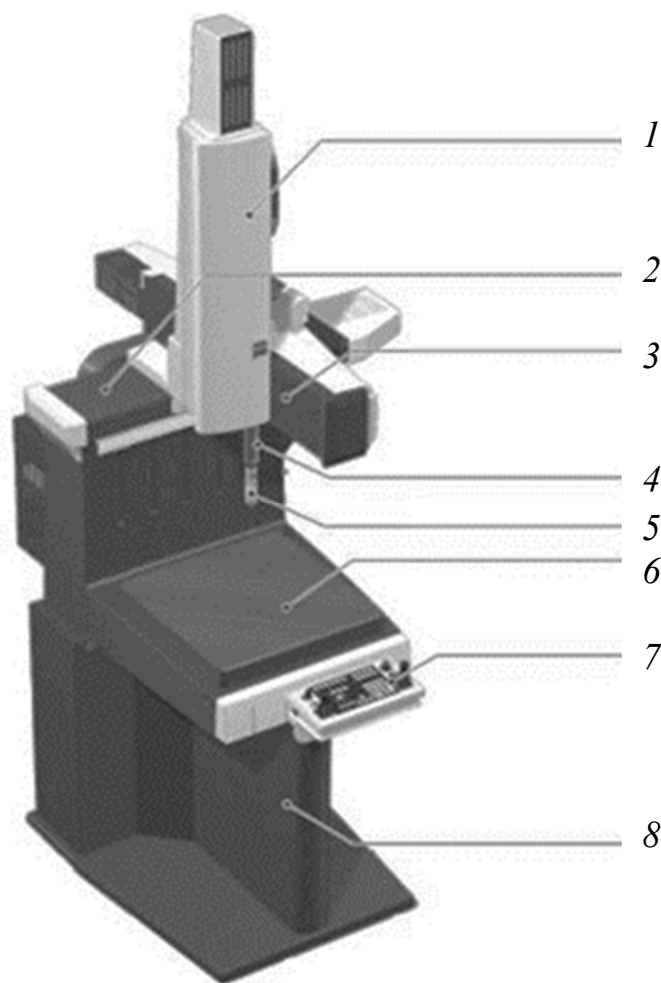
Рисунок 5.88 – График зависимости КПД двухступенчатого планетарного шарикового редуктора с  $i = 49$  от нагружающего момента

#### ***5.4 Методы экспериментальной оценки точности изготовления профиля беговых дорожек и ее влияния на кинематическую погрешность планетарных механизмов с телами качения***

Многопериодные беговые дорожки планетарных передач с телами качения являются важными элементами их конструкции. Они в наибольшей степени влияют на эксплуатационные характеристики передачи и поэтому к ним предъявляются высокие требования геометрической точности профиля, т. к. по поверхностям дорожек перемещаются сателлиты (шарики или ролики). Периодический профиль дорожки может быть образован фрезерованием концевой фрезой на обрабатывающих центрах. При фрезеровании ось фрезы может перемещаться по периодической кривой, описываемой одним из уравнений, представленных в разд. 3, или по упрощенному профилю, образованному прямыми и окружностями.

Разработаны методы оценки точности изготовления профиля многопериодной дорожки с использованием технологии координатных измерений на координатно-измерительной машине (КИМ) DuraMax (Zeiss). Методы заключаются в измерении на КИМ изготовленного реального профиля многопериодной дорожки с некоторым линейным шагом, получении массива координат точек профиля в результате измерений и проведении вычислений погрешностей профиля дорожки в соответствии с назначенными показателями точности, характеризующими угловое положение координат точек и линейное отклонение профиля дорожки. В среде VBA Excel разработаны компьютерные программы для обработки экспериментальных результатов измерений и расчета погрешностей, определяющих точность профиля многопериодной дорожки. Для оценки влияния точности изготовления профиля беговых дорожек на кинематическую погрешность планетарных механизмов с телами качения использовался гармонический анализ с построением амплитудно-частотных спектров кинематических погрешностей (установленных показателей) беговых дорожек.

На рисунке 5.89 изображена координатно-измерительная машина Carl Zeiss DuraMax 5/5/5 с программным обеспечением Calypso, которая использовалась для экспериментальной оценки точности многопериодных дорожек планетарных передач с промежуточными телами качения.



1 – кожух механизма привода и удлинителя измерительной головки (ось  $Z$ );  
 2 – гофрированный кожух механизма привода и направляющей  $X$  (ось  $X$ );  
 3 – гофрированный кожух механизма привода и направляющей  $Y$  (ось  $Y$ ); 4 – удлинитель измерительной головки; 5 – измерительная головка; 6 – измерительный стол; 7 – пульт управления; 8 – подставка

Рисунок 5.89 – Координатно-измерительная машина DuraMax 5/5/5

*5.4.1 Разработка методики измерений методом сканирования и оцифровки криволинейных поверхностей деталей с многопериодными дорожками с выводом координат опорных точек.*

Разработана методика сканирования криволинейных поверхностей детали с некоторым заданным линейным шагом точек кривой. Полученные точки (в зависимости от протяженности кривой и дискретности шага) могут быть выведены в текстовый ASCII-файл либо на печать. Координаты точек, выведенные в ASCII-файл, использованы для построения реального профиля кривой, например в CAD-программе, с целью дальнейшего наложения на график идеального профиля кривой и определения погрешностей изго-

товления как наибольшей разности между реальным и номинальным профилями.

Опорные точки кривой, соответствующей криволинейной поверхности детали, создаются элементом программы Calypso «Кривая». В САD-окне программы Calypso задаются скорость сканирования (2 или 3 мм/с), длина шага, прямоугольная система координат, стартовая и конечная точки кривой, толщина щупа радиусом 2,5 или 3 мм, пространственная ось – Z, направление обхода кривой. По окончании сканирования в САD-окне Calypso создается кривая (рисунок 5.90).

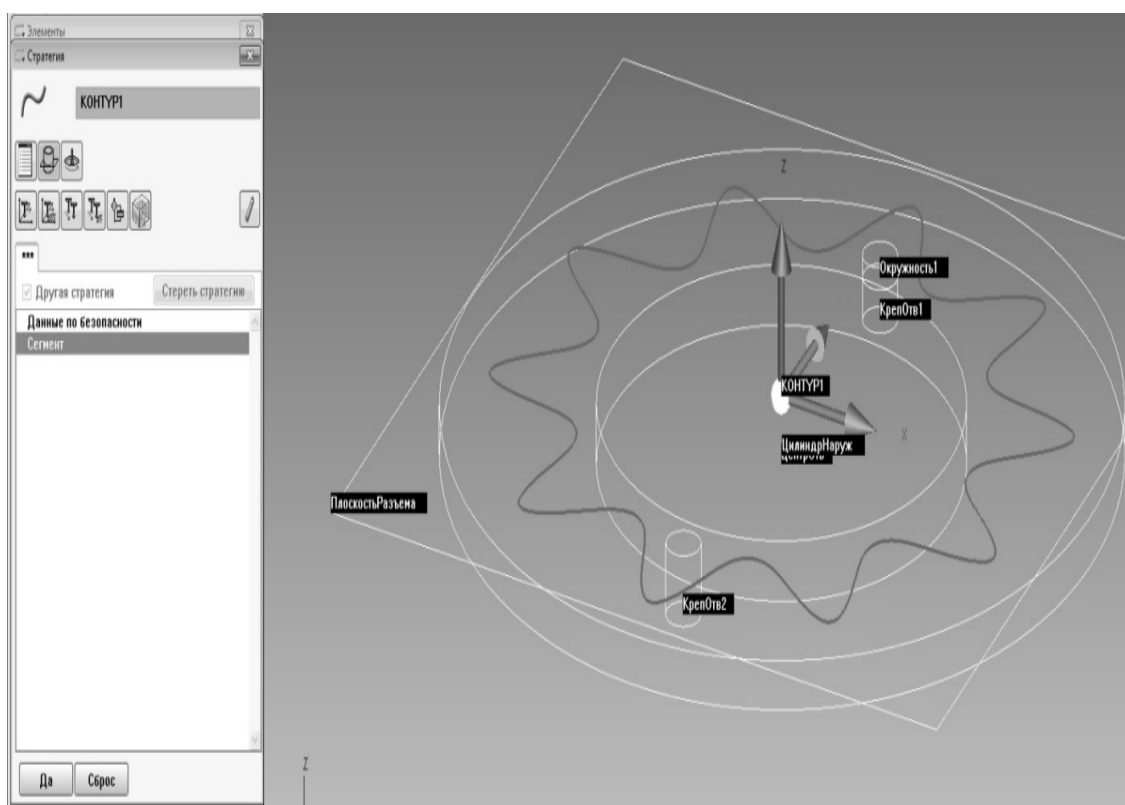
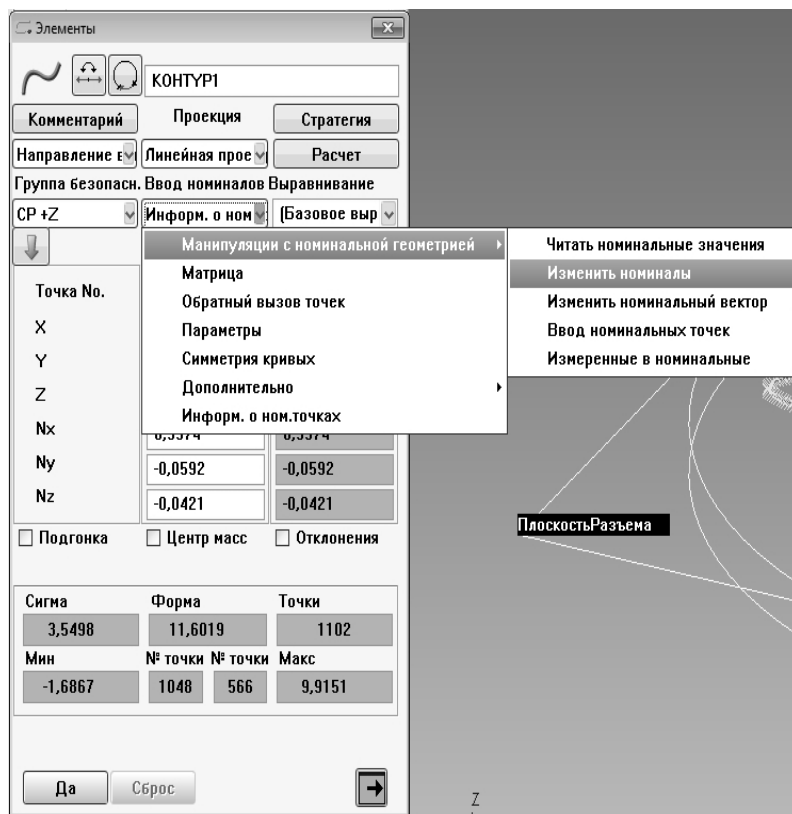


Рисунок 5.90 – Кривая профиля многопериодной дорожки детали передачи

Данная кривая представляет собой траекторию перемещения центра щупа, т. е. является эквидистантой реальной кривой. Для получения реальной кривой необходимо редактировать номинальные значения координат щупа. На рисунке 5.91, а показано окно, в котором выполняются настройки редактирования номинальных координат.

В окне «Изменить номиналы» (рисунок 5.91, б) выбираются метод изменения координат щупа – «В направлении вектора» (по умолчанию) и величина смещения. Величина смещения равна радиусу щупа. Поскольку кривую нужно сдвинуть в направлении, обратном вектору нормали, установлен, например, знак минус (–1,5) (см. рисунок 5.91, б).

а)



б)

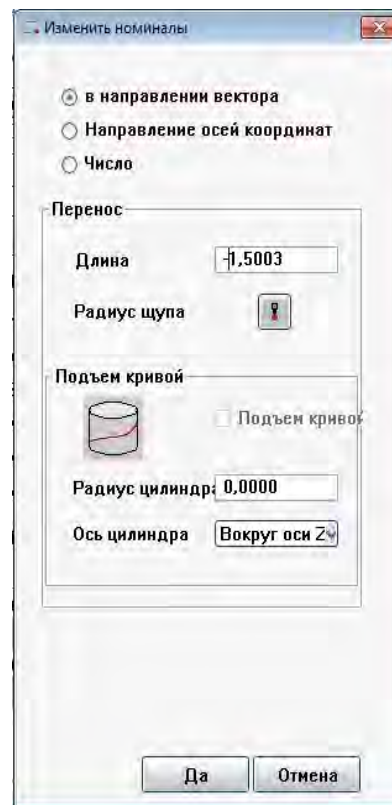


Рисунок 5.91 – Настройка координат

*5.4.2 Разработка метода и показателей для оценки точности углового положения координат точек профиля многопериодных дорожек после изготовления.*

На рисунке 5.92 показано кольцо с многопериодной дорожкой, которое входит в конструкции планетарных радиально-плунжерных шариковых редукторов с передаточными отношениями  $i = 8$  (одноступенчатый редуктор, см. рисунок 3.3) и  $i = 64$  (двухступенчатый редуктор). В двухступенчатом редукторе в конструкцию входит два кольца с многопериодной дорожкой в каждой ступени.

Детали с многопериодными дорожками в виде колец изготовлены из легированной стали 40X. Периодический профиль дорожки (см. рисунок 5.92) образован фрезерованием концевой фрезой на обрабатывающем центре Mazak Smart 100. При фрезеровании ось фрезы может перемещаться по кривым в виде синусоиды, циклоиды, смещенной окружности, представленным в разд. 2, или другим кривым с периодическим профилем, замкнутым на плоскости. Поверхность многопериодной дорожки (см. рисунок 5.92) имеет упрощенный периодический профиль. При этом деталь имеет наиболее технологичную форму профиля дорожки. Профиль криволинейной поверхности этой детали представляет собой сочетание окружностей

радиусом 17 мм и прямых с углом наклона 46 град, равным наибольшему углу подъема номинальной кривой. Профиль является менее затратным при проектировании и изготовлении.



Рисунок 5.92 – Кольцо с многопериодной дорожкой

Разработан метод для контроля и оценки точности изготовления многопериодных дорожек с установлением показателей точности, характеризующих угловые положения координат точек после изготовления многопериодной дорожки. Метод заключается в измерении на КИМ изготовленного реального профиля многопериодной дорожки в разных сечениях путем сканирования и оцифровки криволинейной поверхности многопериодной дорожки кольца с выводом координат опорных точек полученных кривых в ASCII-файл, получении массива координат точек в результате измерений, определяющего внутренний контур кольца после обработки, и проведении вычислений погрешностей профиля дорожки в соответствии с назначенными показателями точности. Координаты точек определялись следующим образом. Щуп координатно-измерительной машины, соприкасаясь с изготовленной многопериодной дорожкой и перемещаясь по ней, сканировал ее поверхность. С помощью встроенного программного обеспечения Calypso КИМ создавал точки реального (изготовленного) профиля многопериодной дорожки с заданным при предварительной настройке шагом, координаты

которых записывались в автоматическом режиме в текстовый файл. Получено 3272 точки, описывающие реальный профиль многопериодной дорожки после изготовления. Координаты полученных точек использовались в дальнейшем при расчете показателей точности многопериодных дорожек.

На рисунке 5.93 представлено окно программы Excel с полученными координатами реального профиля многопериодной дорожки после ее изготовления и графиком-круглограммой, построенным по полученным координатам.

х	у	φ	ρ
1,285222013	51,70795728	88,62110953	48,48229
1,209311154	51,71641991	88,70543667	48,51994
1,117164184	51,72813678	88,80780526	48,56576
1,030449294	51,73619261	88,90403855	48,60896
0,941902352	51,74179979	89,00222792	48,65314
0,842991078	51,74760531	89,11188403	48,70261
0,753593112	51,75219222	89,21096749	48,74741
0,655689816	51,7576092	89,31946883	48,79658
0,559482544	51,76257463	89,42606922	48,84499
0,461515863	51,77115137	89,53463721	48,89439
0,379055936	51,77537587	89,62597114	48,93602
0,286265713	51,77624171	89,72870797	48,98291
0,199533956	51,77807878	89,82474004	49,0268
0,098820831	51,77321654	89,93623089	49,07781
-0,032995853	51,77502513	89,9908846	49,10284
-0,093493581	51,77617175	90,05786474	49,13354
-0,215252641	51,77121026	90,19269386	49,19537
-0,316125463	51,77381639	90,30436697	49,24663
-0,407747638	51,77258181	90,40581837	49,29322
-0,50935769	51,77101367	90,51833363	49,34491
-0,601375494	51,76742279	90,62025724	49,39174
-0,694323443	51,76351183	90,72322541	49,43905
-0,794929504	51,75958804	90,83468395	49,49025
-0,898761224	51,75733771	90,94969223	49,54306

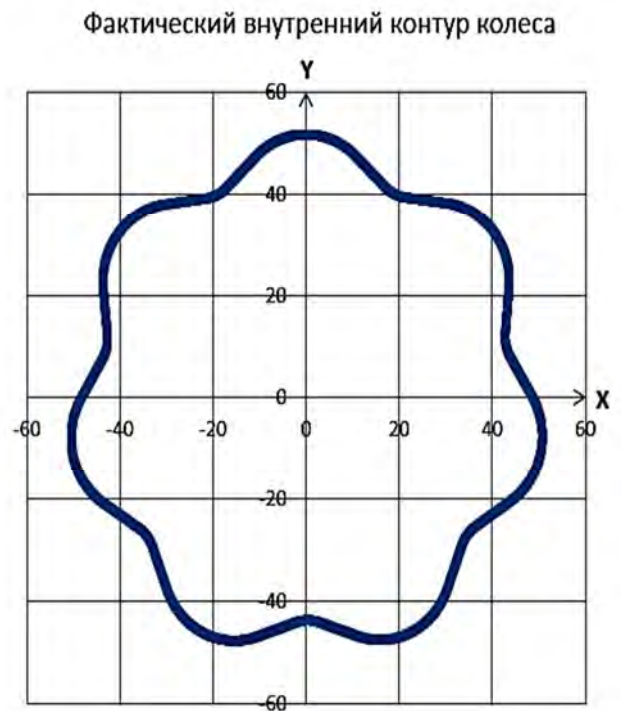


Рисунок 5.93 – Окно программы Excel с графиком периодического профиля дорожки

Разработанный метод предполагает установление показателей точности на основе полученных координат точек.

Для контроля и оценки точности изготовления деталей с многопериодными дорожками (МД) разработаны и предложены показатели, представленные в таблице 5.11.

Геометрические показатели многопериодной дорожки определяются по соотношениям

$$\rho_{\partial} = \sqrt{X_{\partial}^2 + Y_{\partial}^2}; \quad (5.1)$$

$$\rho_{\partial,ср} = \frac{\rho_{\partial(i+1)} + \rho_{\partial(i)}}{2}, \quad (5.2)$$

где  $i$  – номер измеряемой точки профиля МД,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  
 $n$  – число измеренных точек профиля МД;

$$\varphi_{\partial} = \arctg \frac{Y_{\partial}}{X_{\partial}}. \quad (5.3)$$

Таблица 5.11 – Геометрические и кинематические показатели точности беговой многопериодной дорожки (МД)

Название показателя	Обозначение показателя
Геометрический показатель	
Координаты действительных (экспериментальных) точек профиля МД	$X_{\partial}$ и $Y_{\partial}$
Радиус-вектор действительной (экспериментальной) точки профиля МД	$\rho_{\partial}$
Средний радиус-вектор действительной (экспериментальной) точки профиля МД	$\rho_{\partial.ср}$
Действительный (экспериментальный) угол между двумя точками профиля МД с координатами $X_{\partial}$ , $Y_{\partial}$	$\varphi_{\partial}$
Кинематический показатель	
Действительный угловой шаг точек профиля МД	$\Delta\varphi_{\partial}$
Номинальный средний угловой шаг точек профиля МД	$\Delta\varphi_{н.ср}$
Номинальный переменный угловой шаг точек профиля МД	$\Delta\varphi_{н.пер}$
Отклонение углового шага точек профиля МД	$\Delta\varphi_{проф}$
Накопленная погрешность углового шага точек профиля МД	$\Delta\varphi_{проф}^{нак}$
Номинальный переменный накопленный угловой шаг точек профиля МД	$\Delta\varphi_{н.пер}^{нак}$
Кинематическая погрешность МД	$F_{к.п}^{МД}$

Кинематические показатели многопериодной дорожки определяются по соотношениям

$$\Delta\varphi_{\partial(i)} = \varphi_{\partial(i+1)} - \varphi_{\partial(i)} = \arctg \left( \frac{Y_{\partial}}{X_{\partial}} \right)_{i+1} - \arctg \left( \frac{Y_{\partial}}{X_{\partial}} \right)_i, \quad i = 1, 2, 3 \dots n - 1; \quad (5.4)$$

$$\Delta\varphi_{н.ср} = \frac{2\pi}{n}; \quad (5.5)$$

$$\Delta\varphi_{н.пер} = \frac{l}{\rho_{д.ср}} - C, \quad (5.6)$$

где  $C$  – постоянная, учитывающая разность между номинальным средним угловым шагом и номинальным переменным угловым шагом точек профиля МД;

$l$  – шаг перемещения щупа КИМ,  $l = 0,1$  мм;

$$\Delta\varphi_{проф} = \Delta\varphi_{\delta} - \Delta\varphi_{н.пер}; \quad (5.7)$$

$$\Delta\varphi_{проф}^{нак}(i) = \Delta\varphi_{проф}(i) + \Delta\varphi_{проф}^{нак}(i-1), \quad i = 1, 2, 3 \dots n; \quad (5.8)$$

$$\Delta\varphi_{н.пер}^{нак}(i) = \Delta\varphi_{н.пер}(i) + \Delta\varphi_{н.пер}^{нак}(i-1), \quad i = 1, 2, 3 \dots n; \quad (5.9)$$

$$F_{к.п}^{МД} = \varphi_{\delta}^{нак} - \Delta\varphi_{н.пер}^{нак}. \quad (5.10)$$

В соответствии с разработанным методом и показателями точности, представленными математическими зависимостями (5.1)–(5.10), получены численные значения показателей в виде графиков. На рисунке 5.94 представлен график значений действительного углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{\delta}$ , рассчитанных по формулам (5.3) и (5.4). На рисунке 5.95 представлен график отклонения углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{проф}$ , рассчитанного по формулам (5.1)–(5.7). На рисунке 5.96 показан график значений накопленной погрешности углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{проф}^{нак}$ , рассчитанных по формулам (5.1)–(5.8). При этом полученные значения и графики кинематической погрешности МД совпадают со значениями и графиками значений накопленной погрешности углового шага точек профиля МД.

На графиках (см. рисунки 5.94–5.96) параметр  $n$  означает количество измеренных точек профиля дорожки в пределах угла  $2\pi$ . Графики получены с большой дискретностью измерений 3272 точки.

На графиках (см. рисунки 5.94–5.96) видны наибольшие и местные погрешности для разных точек поверхности дорожки. Также выделяется многопериодная синусоидальная кривая с числом периодов, равным числу полупериодов профиля дорожки кольца  $2z_2 = 14$ . Наибольшее значение действительного углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{\delta}$  (см. рисунок 5.94) составило 0,163 град. Наибольшее значение отклонения углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{проф}$  (см. рису-

нок 5.95) составило 0,166 град. Наибольшее значение накопленной погрешности углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{проф}^{нак}$  (см. рисунок 5.96), а также ее наибольшая кинематическая погрешность составили 0,775 град, что составляет 68 % от кинематической погрешности редуктора с передаточным отношением  $i = 64$ .

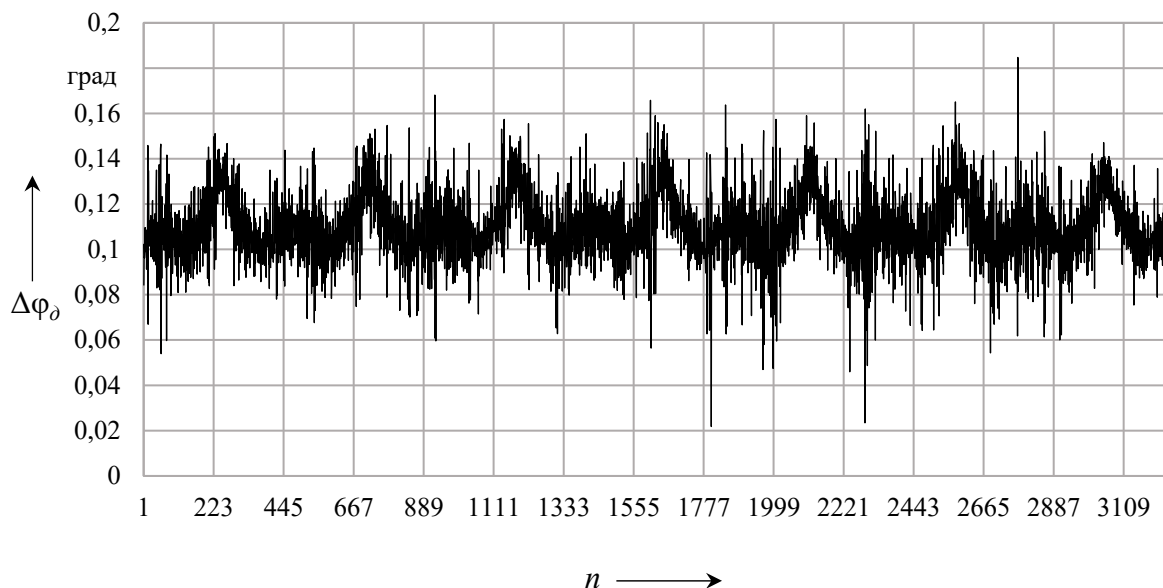


Рисунок 5.94 – График действительного углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{\delta}$

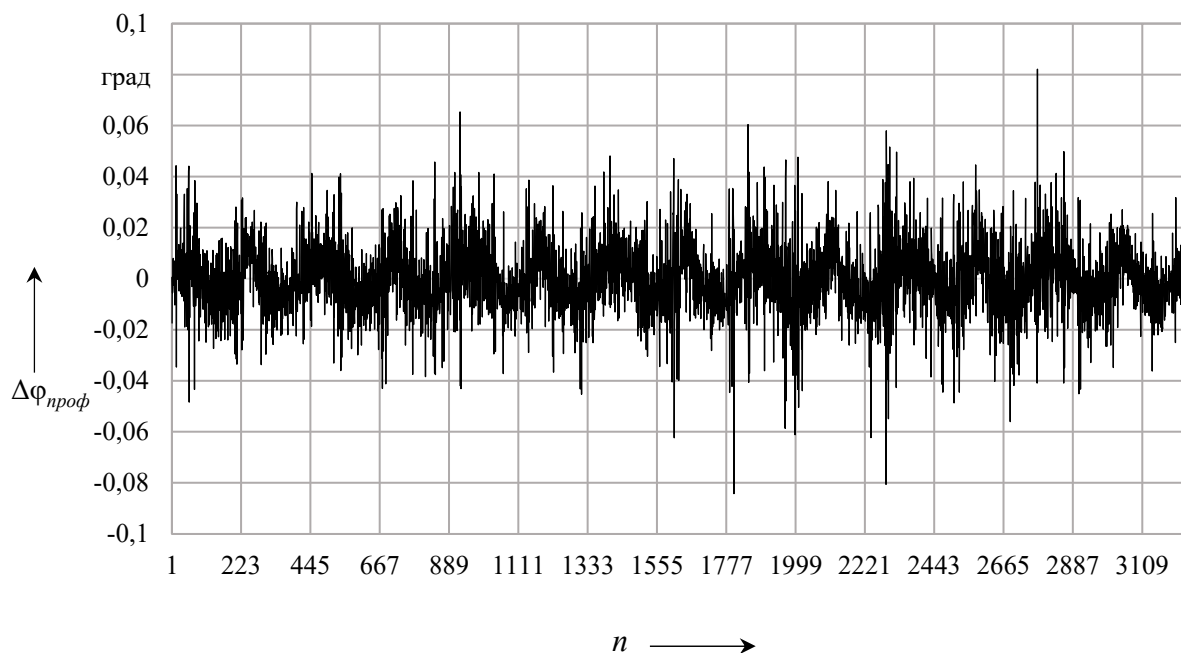


Рисунок 5.95 – График отклонения углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{проф}$

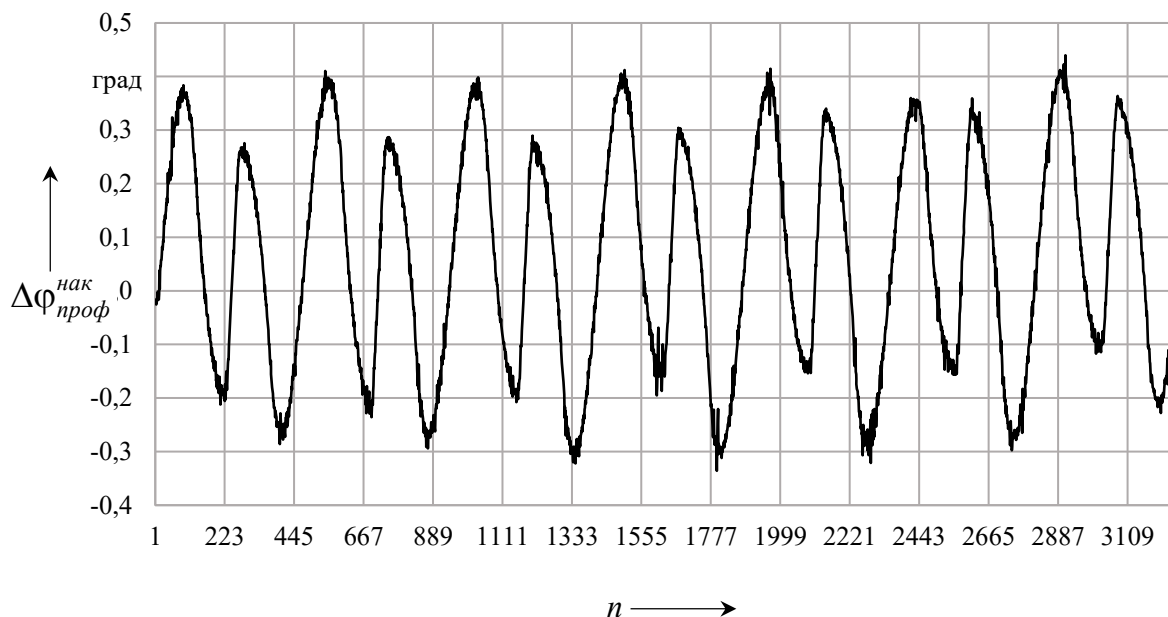


Рисунок 5.96 – Накопленная погрешность углового шага точек профиля многопериодной дорожки  $\Delta\varphi_{\text{проф}}^{\text{нак}}$

На графиках (см. рисунки 5.94–5.96) значения показателей точности представлены для всего профиля дорожки. При работе передачи спутники передают нагрузку только на рабочих участках профиля с углами подъема, соответствующими радиус-векторам, близким к среднему радиусу периодической кривой  $R$ . Поэтому действительные величины этих показателей, которые влияют на кинематическую точность передачи, будут меньше, чем полученные на графиках.

Гармонический анализ значений показателей точности многопериодных дорожек, представленных на графиках (см. рисунки 5.94–5.96), установленных экспериментально, позволяет установить частоту их изменения и влияние их на кинематическую погрешность передачи.

На рисунке 5.97 показан амплитудно-частотный спектр действительного углового шага точек профиля многопериодной дорожки, график которого приведен на рисунке 5.94.

На рисунке 5.98 приведен амплитудно-частотный спектр отклонения углового шага точек профиля многопериодной дорожки, график которого изображен на рисунке 5.95.

На рисунке 5.99 представлен амплитудно-частотный спектр накопленной погрешности углового шага точек профиля многопериодной дорожки, график которого показан на рисунке 5.96.

Амплитудно-частотные спектры (см. рисунки 5.97–5.99) включают 100 гармоник с номерами  $n$  и значениями амплитуд  $A$  в градусах. На

спектрах наибольшие амплитуды  $A$  имеют гармоники с номерами  $n$ , кратными числу периодов дорожки  $z_2 = 7$ . Наибольшие значения имеют гармоники 7, 14, 21, 35 и 42. Циклическую частоту этих гармоник с номерами больше единицы можно записать в виде  $z, 2z, 3z, 5z, 6z$ , а период их изменения соответственно как  $z^{-1}, \frac{1}{2}z^{-1}, \frac{1}{3}z^{-1}, \frac{1}{5}z^{-1}, \frac{1}{6}z^{-1}$ .

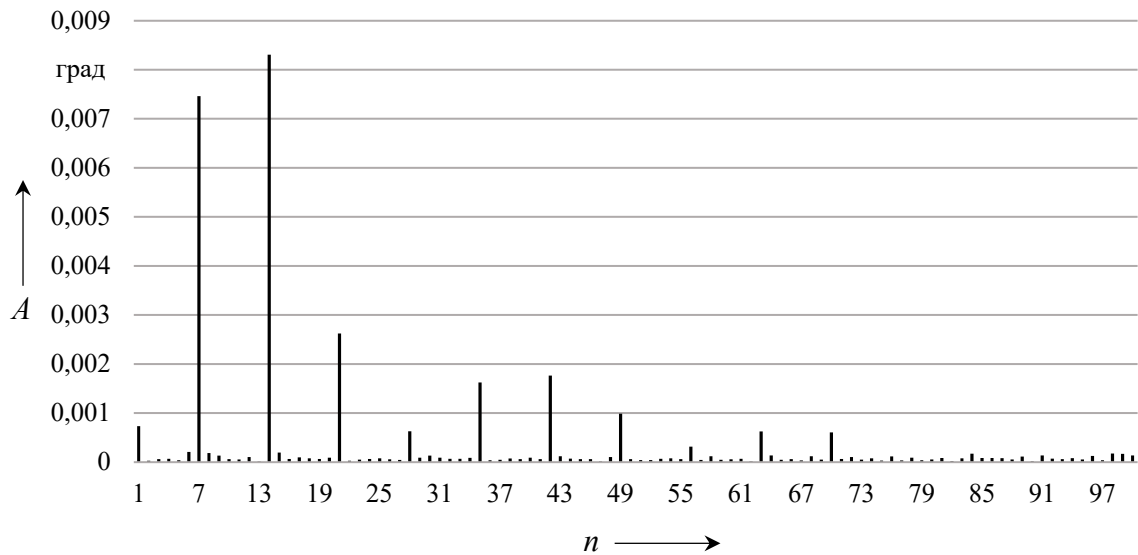


Рисунок 5.97 – Амплитудно-частотный спектр действительного углового шага точек профиля многопериодной дорожки

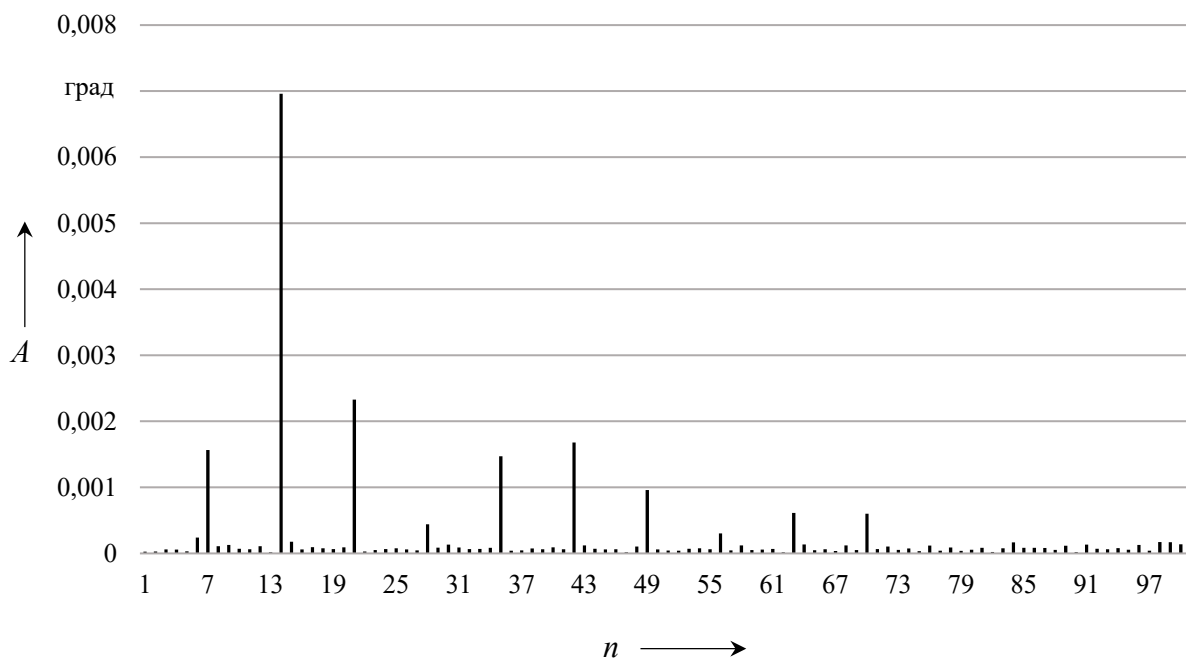


Рисунок 5.98 – Амплитудно-частотный спектр отклонения углового шага точек профиля многопериодной дорожки

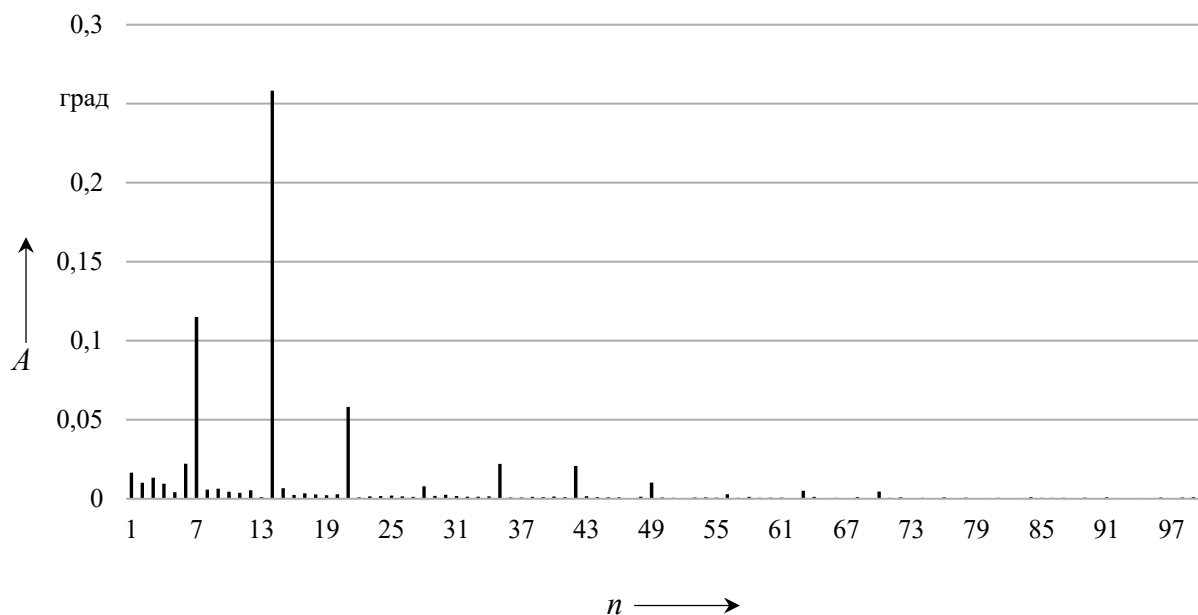


Рисунок 5.99 – Амплитудно-частотный спектр накопленной погрешности углового шага точек профиля многопериодной дорожки

Данный метод предполагает совмещение (привязку) координат действительных и номинальных точек при расчете угловых параметров, поэтому этот метод не учитывает возможные радиальные смещения детали с многопериодной дорожкой, которые характеризуют небольшие значения амплитуд первых гармоник на амплитудно-частотных спектрах (см. рисунки 5.97–5.99).

#### *5.4.3 Разработка метода и показателей для оценки точности линейного отклонения координат точек профиля многопериодных дорожек после изготовления.*

Разработаны метод и показатели для оценки точности линейного отклонения координат точек профиля многопериодных дорожек после их изготовления. Метод заключается в измерении на КИМ изготовленного реального профиля многопериодной дорожки в разных сечениях путем сканирования и оцифровки криволинейной поверхности многопериодной дорожки с выводом координат опорных точек, совмещении действительного профиля дорожки с номинальным и нахождении линейных отклонений действительных координат точек от их номинального положения.

На рисунке 5.100 приведена схема геометрических параметров профиля многопериодной дорожки 2 кольца, представленного на рисунке 5.92, и перемещающегося по оси дорожки 1 сателлита-шарика 3.

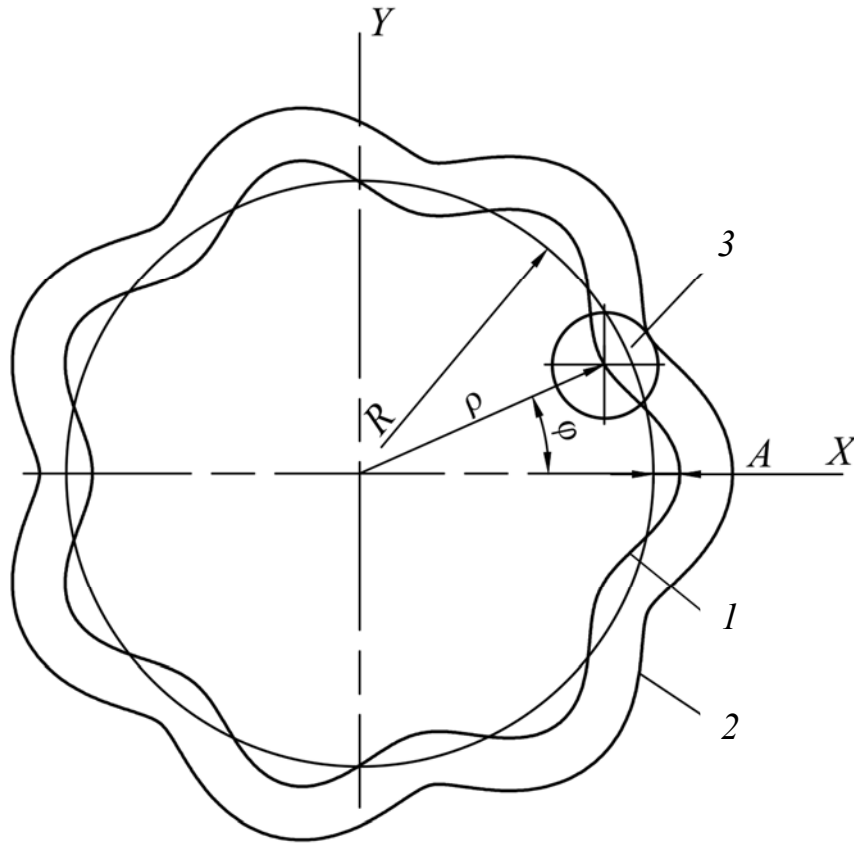


Рисунок 5.100 – Схема геометрических параметров многопериодной дорожки

В результате экспериментальных исследований криволинейной поверхности многопериодной дорожки на КИМ получен массив координат точек  $X_{экс}$ ,  $Y_{экс}$ , измеренных в плоскости торцового сечения детали с многопериодной дорожкой, т. е. получен действительный профиль многопериодной дорожки в виде экспериментальной кривой, изготовленной с упрощенной геометрией профиля в виде прямых линий и окружностей, как указано ранее. Действительный профиль кривой нужно совместить с номинальным. При этом криволинейная осевая линия 1 многопериодной дорожки (см. рисунок 5.100), эквидистантная кривой профиля беговой дорожки, может быть описана уравнениями синусоиды, циклоиды, смещенной окружности и другими кривыми, замкнутыми на плоскости. Наиболее технологичной при проектировании является конструкция осевой линии многопериодной дорожки, описываемая периодической кривой в виде окружности со смещением оси. Уравнения такой кривой приведены в разд. 3. Эта кривая принята в качестве номинальной.

Номинальная осевая кривая совпадает с осью фрезы при формообразовании многопериодной дорожки. Эта кривая эквидистантна реальной кривой после изготовления, описывающей профиль криволинейной поверхности детали, и отстает от нее на величину, равную радиусу фрезы. Найдем

координаты точек эквидистантной номинальной кривой в соответствии с [67]. На рисунке 5.101 показана схема для расчета координат точек эквидистантной кривой многопериодной дорожки.

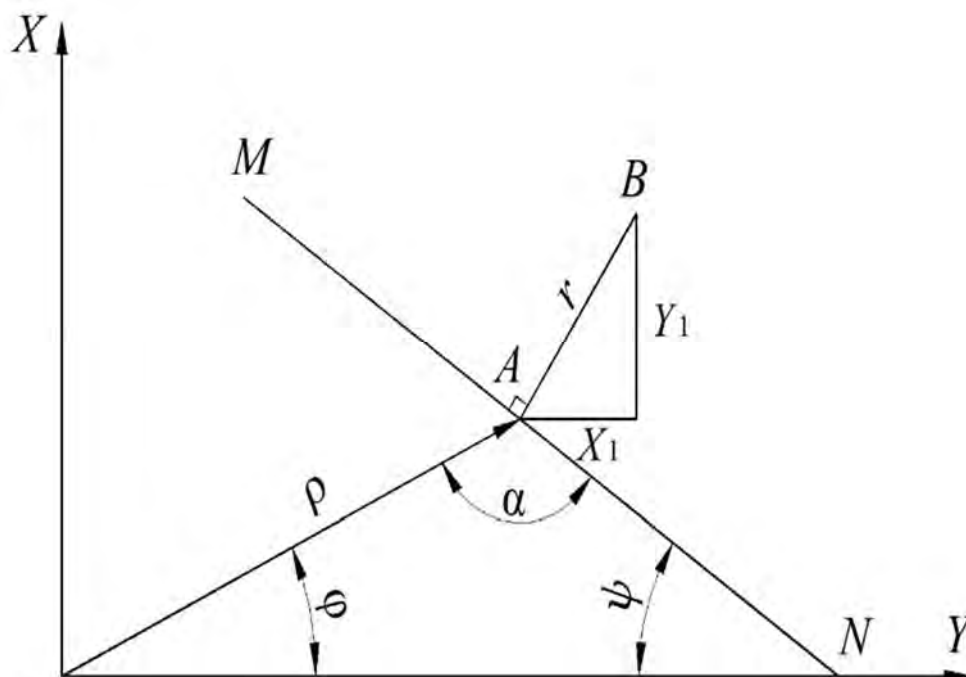


Рисунок 5.101 – Схема расчета координат точек эквидистантной кривой многопериодной дорожки

Номинальные координаты точек эквидистантной кривой многопериодной дорожки

$$X_{\text{экв}}^{\text{НОМ}} = x_1 + r \sin \psi; \quad (5.11)$$

$$Y_{\text{экв}}^{\text{НОМ}} = y_1 + r \cos \psi; \quad (5.12)$$

$$\psi = 2\pi - \varphi - \alpha, \quad (5.13)$$

где  $r$  – радиус фрезы, проведенный из точки  $A$  расчетной кривой к точке  $B$  эквидистантной кривой;

$\psi$  – угол наклона касательной  $MN$  к точке  $A$  расчетной кривой;

$\alpha$  – угол между направлением радиус-вектора  $\rho$  и касательной  $MN$ .

Угол  $\alpha$  найдем из соотношений [67]

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\rho}; \quad (5.14)$$

$$\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{\rho'}{\rho}. \quad (5.15)$$

Для кривой – смещенной окружности

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -Az \sin(z\varphi) \left( \frac{A \cos(z\varphi)}{\sqrt{R^2 - A^2 \sin^2(z\varphi)}} + 1 \right). \quad (5.16)$$

На рисунке 5.102 графически показаны номинальная осевая кривая 1, построенная эквидистанта этой кривой 2 и экспериментальная кривая 3, характеризующая действительный профиль многопериодной дорожки. Кривые 2 и 3 имеют разные начальные фазы, они не совмещены.

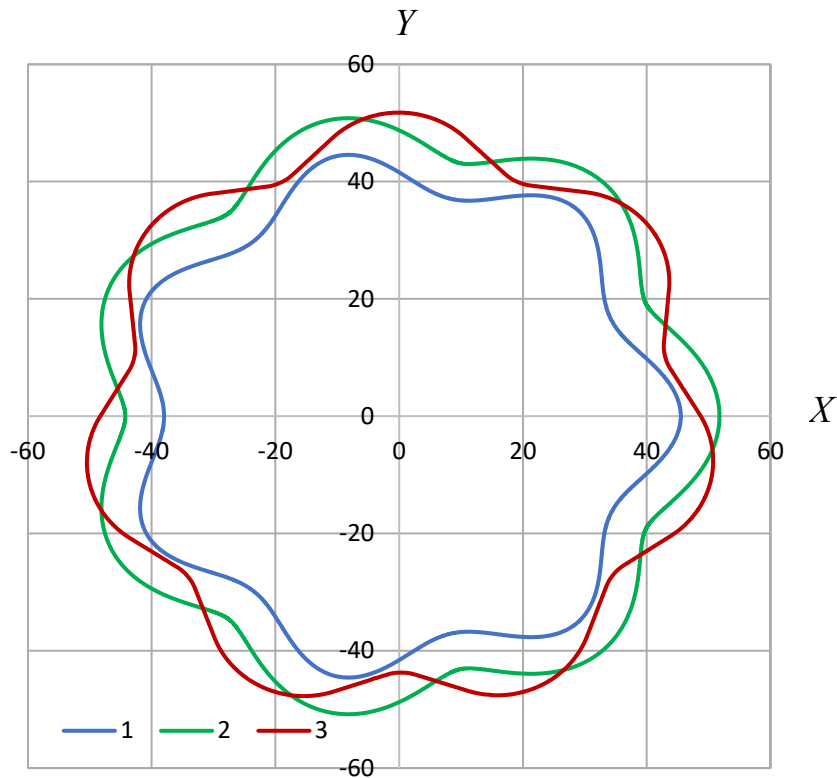


Рисунок 5.102 – Номинальная и действительная кривые профиля многопериодной дорожки

Так как начальные фазы действительной экспериментальной и номинальной осевой (расчетной) кривых могут не совпадать, то номинальную кривую нужно совместить с действительной кривой поворотом вокруг оси. Новые координаты кривой при повороте

$$X_1 = x \cos \gamma - y \sin \gamma; \quad (5.17)$$

$$Y_1 = x \sin \gamma + y \cos \gamma, \quad (5.18)$$

где  $\gamma$  – угол поворота кривой.

После совмещения кривых найдем отклонение действительного профиля дорожки от номинального  $\Delta h$  соотношением координат расчетной и экспериментальной кривых:

$$\Delta h = \sqrt{(X_{\text{экс}} - X_{\text{экс}}^{\text{ном}})^2 + (Y_{\text{экс}} - Y_{\text{экс}}^{\text{ном}})^2}. \quad (5.19)$$

Так как получено большое число измеренных точек (3272 точки) и, соответственно, рассчитано большое число отклонений  $\Delta h_i$  многопериодной дорожки, а также есть случайные точки, то  $\Delta h$  принималось как абсолютное среднее арифметическое значение отклонений  $\Delta h_i$  профиля многопериодной дорожки по формуле

$$\Delta h_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta h_i|}{n}. \quad (5.20)$$

Данный метод, в отличие от метода оценки точности углового положения координат точек профиля многопериодных дорожек, позволяет оценивать радиальные погрешности заготовки при ее обработке. Смещение оси детали с многопериодной дорожкой определялось по формуле

$$\Delta_o = \frac{\rho_{\text{экс}}^{\text{ср}} - R - r + h_{\text{щ}}}{2}, \quad (5.21)$$

где  $\rho_{\text{экс}}^{\text{ср}}$  – среднее значение радиус-векторов измеренных точек профиля многопериодной дорожки;

$R$  – средний радиус многопериодной дорожки;

$r$  – радиус сателлита;

$h_{\text{щ}}$  – толщина щупа при измерении на КИМ.

При работе передачи сателлиты передают наибольшую нагрузку на ограниченном участке контакта со средней частью полупериода беговой дорожки. Поэтому полупериод беговой дорожки был разделен условно на пять частей и на средней пятой части каждого полупериода был рассчитан параметр  $\Delta h$ , который принят как среднее значение отклонений профилей полупериодов многопериодной дорожки  $\Delta h_n$ .

На основе разработанного метода предложены показатели точности линейного отклонения координат точек профиля многопериодных дорожек, которые представлены в таблице 5.12.

Таблица 5.12 – Показатели точности линейного отклонения координат точек профиля многопериодных дорожек

Название показателя	Обозначение показателя	Значение показателя, мм
Отклонение профиля многопериодной дорожки	$\Delta h$	0,402
Среднее абсолютное отклонение профиля многопериодной дорожки	$\Delta h_{cp}$	0,168
Смещение оси детали с многопериодной дорожкой	$\Delta_o$	0,055
Отклонение профилей полупериодов многопериодной дорожки	$\Delta h_n$	0,163

При гармоническом анализе на амплитудно-частотных спектрах значений показателей, рассчитанных и приведенных в таблице 5.12, так же как и при исследованиях методом оценки точности углового положения координат точек профиля многопериодных дорожек, выделяются гармоники с номерами, кратными числу периодов беговой дорожки. Данный метод позволяет рассчитать радиальное смещение оси детали с многопериодной дорожкой, которое проявляется в первой гармонике спектра.

*5.4.4 Разработка метода и показателей для оценки точности линейного и углового отклонения координат точек профиля многопериодных дорожек на основе расчета наименьших значений.*

Разработан метод оценки точности линейного и углового отклонения координат точек профиля многопериодных дорожек на основе расчета наименьших значений. Метод заключается в нахождении минимальных расстояний между точками профиля многопериодной дорожки, полученными экспериментально при измерениях на КИМ, и номинальными точками профиля, полученными по уравнениям кривых, представленным в разд. 3.

На рисунке 5.103 изображены диск с закрытой многопериодной дорожкой, замкнутой на плоскости (см. рисунок 5.103, а), и его компьютерная модель (см. рисунок 5.103, б).

Диск имеет многопериодную беговую дорожку с числом периодов  $z_2 = 10$ , амплитудой  $A = 10$  мм, средним радиусом  $R = 60$  мм и входит в конструкцию одноступенчатого планетарного роликового редуктора с передаточным отношением  $i = 11$ , построенным по шестой кинематической схеме классификации [3]. Материал диска – сталь 40Х. Схема редуктора представ-

лена на рисунке 3.4. Многопериодная дорожка в виде криволинейной канавки получена черновым и чистовым фрезерованием концевой фрезой на обрабатываемом центре. Ширина канавки  $h = 8$  мм, глубина – 8 мм. Ось фрезы при обработке перемещалась по координатам, полученным по уравнениям (3.66) и (3.68). Профиль беговой дорожки представляет периодическую кривую, находящуюся на расстоянии радиуса сателлита от эквидистантной периодической смещенной окружности, являющейся криволинейной осью перемещения центра сателлита и оси фрезы.

а)



б)

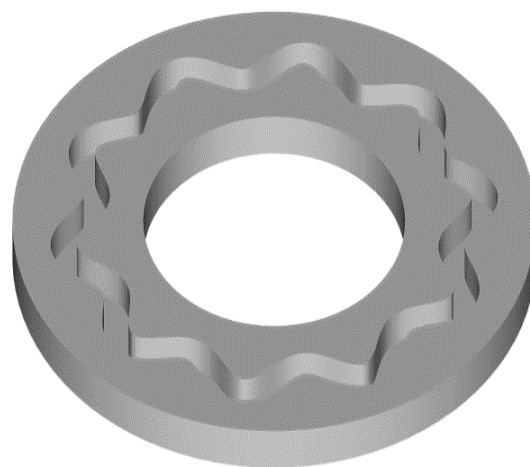


Рисунок 5.103 – Диск с многопериодной дорожкой и его компьютерная модель

По измеренным на КИМ координатам точек профиля беговой дорожки и расчетным координатам точек, полученным с помощью компьютерного моделирования в среде AutoCAD, с помощью разработанных компьютерных программ в среде VBA Excel рассчитывались минимальные расстояния между действительными (экспериментальными) и номинальными (расчетными) точками, которые характеризуют отклонения действительного профиля от номинального. Алгоритм расчета минимальных расстояний между точками можно описать следующей математической зависимостью:

$$h_{\min} = \sqrt{\left(X_{\text{экс}(i)} + X_{p(j)}\right)^2 + \left(Y_{\text{экс}(i)} + Y_{p(j)}\right)^2}, \quad (5.22)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n; \quad j = 1, 2, 3 \dots n,$$

где  $X_{\text{экс}(i)}$ ,  $Y_{\text{экс}(i)}$  – координаты экспериментальных точек действительного профиля беговой дорожки;

$X_{p(j)}, Y_{p(j)}$  – координаты расчетных точек номинального профиля беговой дорожки;

$n$  – число точек беговой дорожки.

В формуле (5.22) из каждого  $i$ -го значения вычитаются все  $j$ -е значения. Наименьшие расстояния  $h_{\min}$ , полученные по формуле (4.63), являются наибольшим отклонением  $\Delta h_{\max}$  действительного профиля беговой дорожки от номинального.

В результате измерений и расчетов погрешности профиля многопериодной дорожки диска (см. рисунок 5.103) на основе разработанного метода получены следующие значения: для внешнего профиля  $\Delta h_{\max} = 0,248$  мм, а для внутреннего профиля  $\Delta h_{\max} = 0,554$  мм. На рисунке 5.104 представлены графики погрешностей профиля внешней и внутренней многопериодных дорожек диска (см. рисунок 5.103) с числом периодов  $z_2 = 10$ , полученных экспериментально измерениями на КИМ.

Для анализа погрешностей профиля дорожек (см. рисунок 5.104) получены амплитудно-частотные спектры, представленные на рисунке 5.105.

На амплитудно-частотных спектрах (см. рисунок 5.105) наибольшие амплитуды имеют первая гармоника и гармоники с номерами, равными, кратными и близкими числу периодов дорожки  $z_2 = 10$ .

Учитывая большое количество измеренных точек (5515) и возможные случайные точки, входящие в  $\Delta h_{\max}$ , целесообразно рассматривать не наибольшее, а среднее отклонение  $\Delta h_{cp}$  действительного профиля многопериодной дорожки, которое, как показали исследования, в 2,5–3 раза меньше, чем наибольшее отклонение  $\Delta h_{\max}$ .

На рисунках 5.106 и 5.107 показаны графики-круглограммы экспериментальных кривых внешнего и внутреннего профилей многопериодной дорожки с точками пересечения этих кривых со средней окружностью радиусом  $R$ . Расстояние между одноименными точками пересечения соседних полупериодов с окружностью можно рассматривать как угловой или линейный шаг многопериодной дорожки, измеренный по дуге окружности.

На рисунке 5.108 представлены графики погрешностей углового шага  $\Delta\varphi_{ш}$  и накопленного углового шага  $\Delta\varphi_{ш}^{нак}$  на основе рассчитанных точек пересечения экспериментальных кривых внешней и внутренней поверхностей многопериодной дорожки диска со средней окружностью (см. рисунки 5.106 и 5.107). Точки пересечения определялись численным методом с использованием разработанной компьютерной программы в среде VBA Excel.

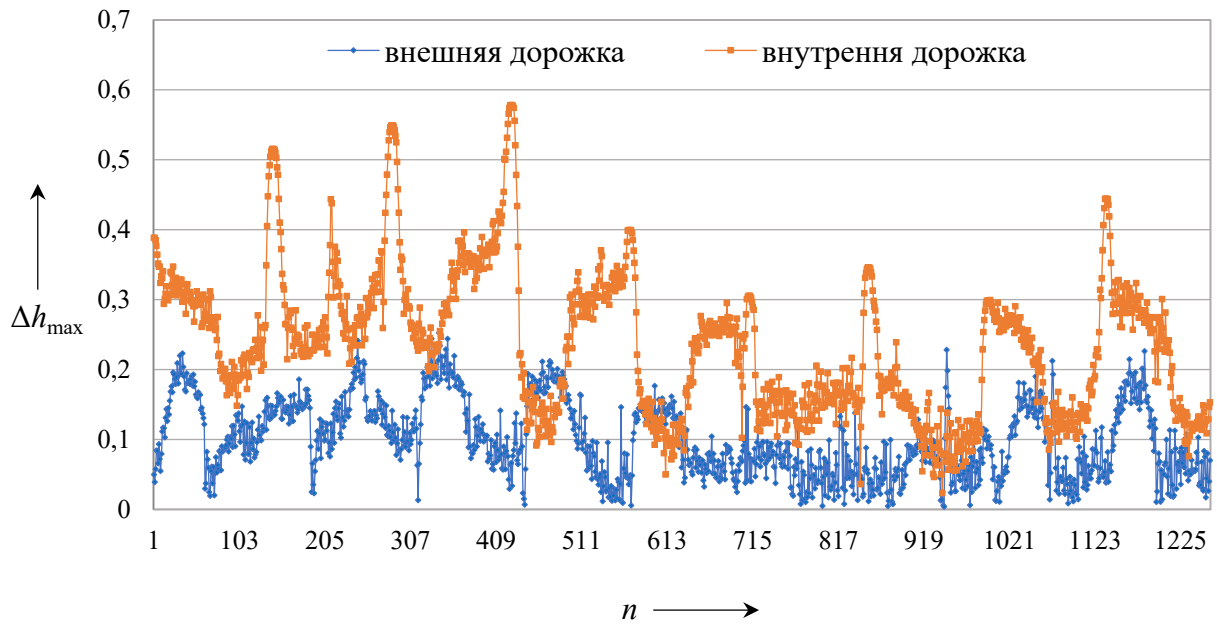


Рисунок 5.104 – Экспериментальные графики погрешностей профиля внешней и внутренней многопериодных дорожек диска



Рисунок 5.105 – Амплитудно-частотные спектры погрешностей профиля многопериодной дорожки диска

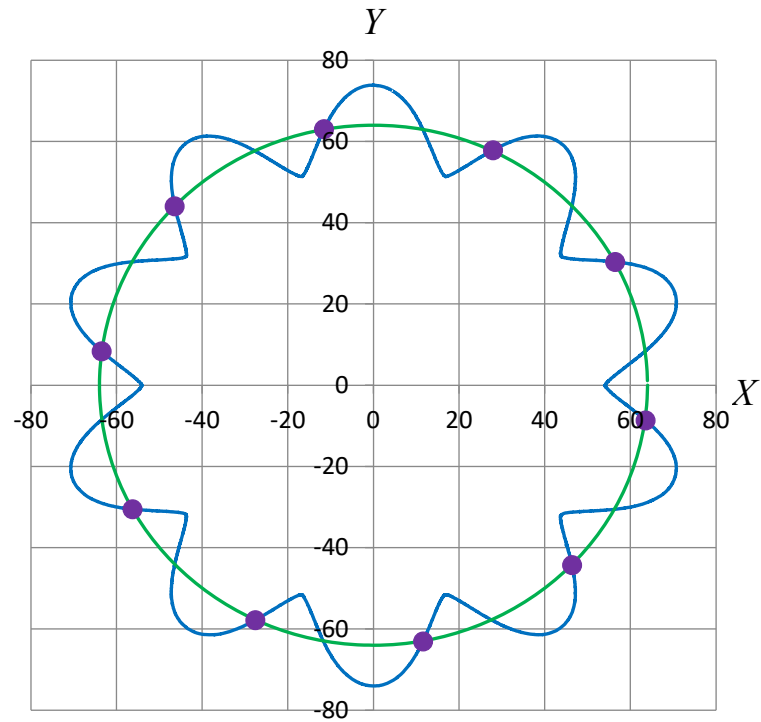


Рисунок 5.106 – График экспериментальной кривой внешнего профиля многопериодной дорожки с точками пересечения кривой со средней окружностью радиусом  $R$

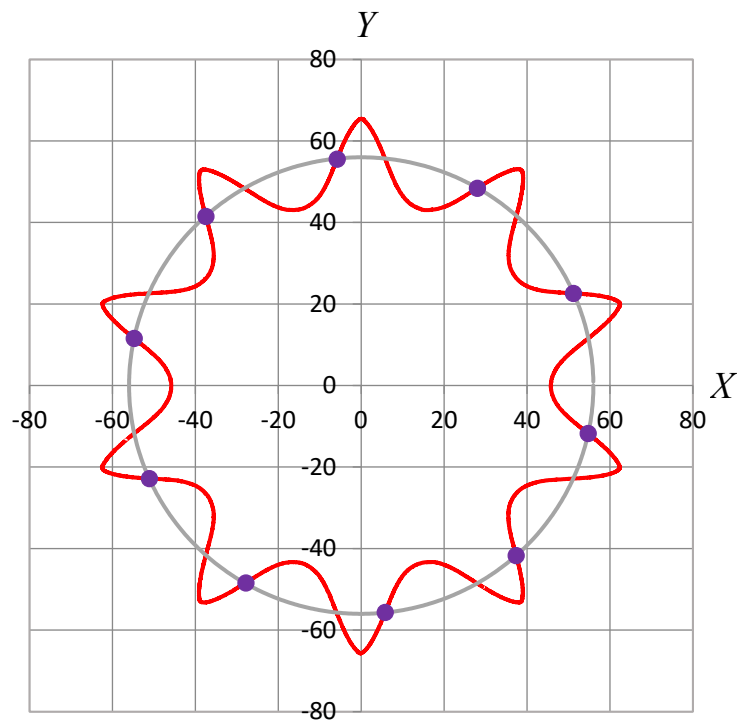


Рисунок 5.107 – График экспериментальной кривой внутреннего профиля многопериодной дорожки с точками пересечения кривой со средней окружностью радиусом  $R$

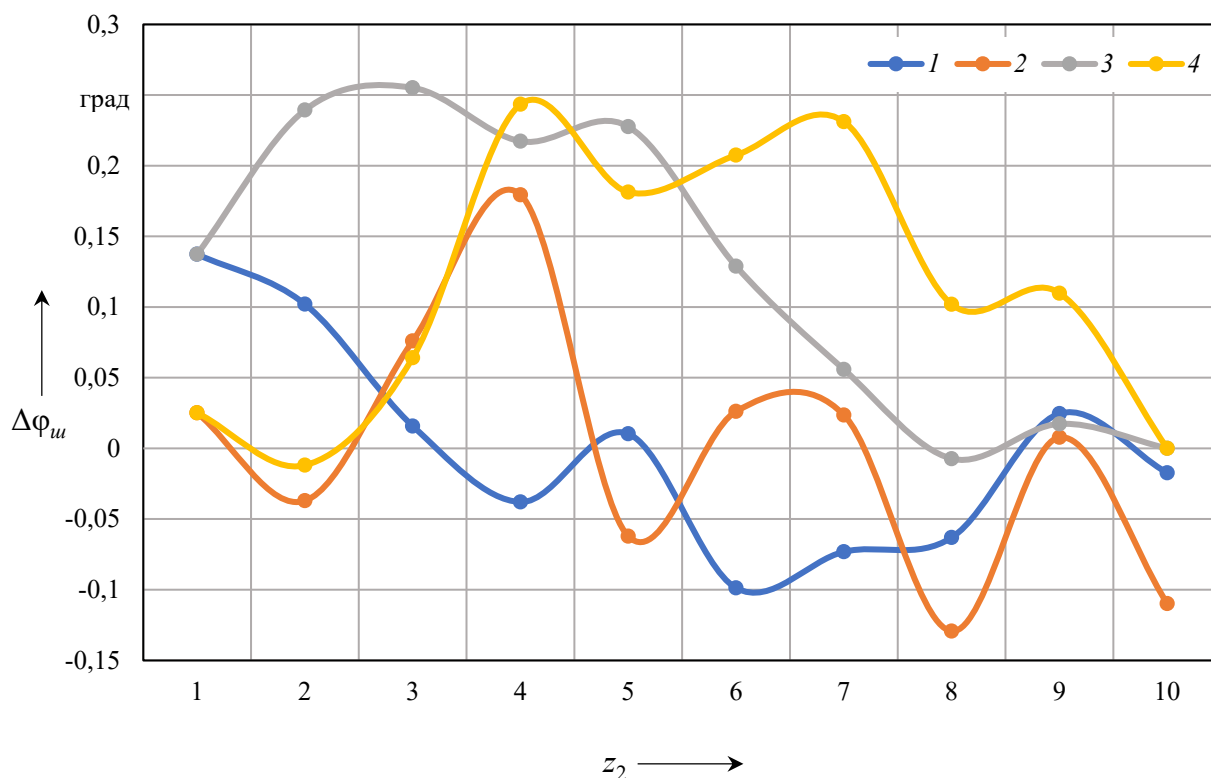


Рисунок 5.108 – Графики погрешностей углового шага и накопленного углового шага

На графике (см. рисунок 5.108) обозначено: 1 и 2 – погрешности углового шага внешней и внутренней поверхностей многопериодной дорожки диска соответственно; 3 и 4 – накопленные погрешности углового шага внешней и внутренней поверхностей многопериодной дорожки диска соответственно.

Проводились экспериментальные исследования оценки точности изготовления спроектированного профиля деталей планетарных шариковых и роликовых передач с разным числом периодов беговых дорожек. Результаты оценки с применением разработанных методов имеют единую закономерность, которая представлена ранее зависимостями на графиках и гармоническими составляющими амплитудно-частотных спектров. Численные значения погрешностей профиля дорожек значительно зависят от их геометрии. Так, профиль многопериодной дорожки, спроектированный по уравнениям кривых, замкнутых на плоскости (см. разд. 3), повышает точность после изготовления в 2–3 раза.

## **6 Общая система нормирования точности механических передач**

Для разработанных и используемых в мировой промышленности различных видов зубчатых передач и построенных на их основе механизмов используются показатели точности их изготовления на основе стандартов ГОСТ, ISO, DIN, ANSI/AGMA [71–87]. В этих стандартах есть различия в назначенных показателях. Также отличаются и численные значения аналогичных показателей в разных стандартах. В мировой практике не разработано общих показателей и их численных значений для разных типов передач с зубчатым, шариковым, роликовым и другим зацеплением. При эксплуатации механизмов должны обеспечиваться требуемые показатели точности приводов независимо от их конструкций. Поэтому различные по конструкции механизмы должны иметь единые показатели точности и численные значения этих показателей. Такая унификация основных показателей для оценки точности механизмов позволяет использовать единый подход к контролю и обеспечению точности различных по конструкции механизмов, но требует разработки общей системы нормирования точности механических передач.

За основу системы нормирования точности приняты стандарты на зубчатые передачи ведущих стран в области машиностроения. Из этих стандартов базовыми приняты ГОСТы на допуски цилиндрических и конических зубчатых, а также червячных передач. Только в этих стандартах, в отличие от международных и стандартов других стран, разработаны показатели точности не только для зубчатых колес, но и для передачи. Основным стандартом для расчета допусков на показатели точности механических передач принят ГОСТ 1643–81 на допуски цилиндрических зубчатых передач. Разработанные показатели, методика их расчета и их численные значения имеют отличия от методик и допусков, приведенных в ГОСТах на зубчатые и червячные передачи. Эти отличия основаны на анализе стандартов и последующих выводах.

Результаты анализа ГОСТов на зубчатые и червячные передачи:

– допуски установлены таблично с большим диапазоном размеров делительного диаметра, т. е. для значительно отличающихся размеров приведены одни и те же допуски;

– в ГОСТах на допуски зубчатых и червячных передач показатели в основном относятся к колесам, установленным на рабочих осях. При этом не указаны допуски монтажа или допуски на показатели передачи без монтажа на технологических осях;

- известные методы расчета кинематической погрешности, с учетом погрешностей монтажа, не согласуются с результатами расчета в ГОСТах на допуски зубчатых и червячных передач;

- при определении кинематической погрешности передачи не учтены циклические погрешности гармонического спектра, которые имеют частоты, отличные от частот показателей, входящих в формулы расчета;

- предлагается один комплекс контроля, в котором контроль выполняется по двум или одному показателю, что не позволяет выявить все основные радиальные и тангенциальные погрешности и оценить качество изготовления колес и передач;

- кинематическая точность колеса и передачи оценивается и контролируется только по 8-ю степень и не предусмотрены допуски для более грубых степеней точности;

- для разных степеней точности предложены разные показатели, что не позволяет сравнивать точность колес и передач с разными степенями точности по допускам показателей;

- стандарты не предусматривают контроль точности изготовления передачи в сборе с учетом погрешностей монтажа.

В международных и зарубежных стандартах приведены допуски на показатели зубчатых колес и не рассматриваются показатели точности для передачи в сборе.

Исходя из требований современного производства, предлагается идея и необходимость создания общей системы нормирования точности для механических передач любых типов и конструкций, основанной на следующих основных положениях:

- установить для всех степеней точности одни и те же базовые показатели с добавлением показателей для точных передач;

- увеличить количество показателей в комплексах контроля, по сравнению с комплексами для зубчатых передач, и установить единый комплекс с базовыми показателями и добавлениями показателей для точных передач;

- ввести для любых типов передач в сборе (с погрешностями монтажа) следующие комплексные показатели по нормам кинематической точности и плавности работы: кинематическая погрешность, наибольшая кинематическая погрешность, среднее абсолютное значение кинематической погрешности, местная кинематическая погрешность, наибольшая местная кинематическая погрешность, среднее абсолютное значение местной кинематической погрешности, циклическая погрешность;

- ввести для любых типов передач в сборе (с погрешностями монтажа) следующие показатели по нормам плавности работы, контакта и бокового зазора: изменение коэффициента торцового перекрытия (из-за кинематической погрешности), отклонение от расположения осей валов передачи

(отклонение от параллельности, перекос осей, несоосность осей), наибольший боковой зазор, мертвый ход;

- предложить методику расчета редуцирующих механизмов с расчетом погрешностей монтажа;

- предложить единую систему нормирования точности любых типов механических передач, основанную на определении и способах суммирования гармонических составляющих амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности передачи;

- ввести единые допуски в линейных и угловых величинах на комплексные показатели точности для любых типов механических передач и их конструкций в зависимости от их основного расчетного геометрического параметра.

Для обеспечения вышепредставленных положений, установления предлагаемых показателей точности и расчета для них допусков в качестве базовых теоретических положений принят стандарт ГОСТ 1643–81, который имеет наибольшее количество показателей точности, по сравнению с другими международными и зарубежными стандартами, и является базовым стандартом установления допусков в ГОСТах не только для цилиндрических, но и конических, гипоидных и червячных передач.

В разработанной системе нормирования точности приняты 12 степеней точности и нормы, аналогичные ГОСТу: кинематической точности, плавности работы, контакта деталей в зацеплении, зазора в зацеплении (бокового зазора). Допуски рассчитаны и предложены для 3–12 степени. Допуски на показатели точности могут быть рассчитаны для передачи с разными нагрузкой и частотой вращения. Установлены математические зависимости между кинематической погрешностью передачи и ее КПД.

Разработанные комплексные показатели являются исходным звеном в размерной цепи, включающей размеры и допуски на изготовление деталей передачи, которые можно рассчитать, используя размерный анализ конструкции механизма.

Единый подход к назначению допусков для разных конструкций передач и механизмов позволяет разрабатывать более технологичные конструкции с оптимальным количеством элементов звеньев и использовать менее затратные вероятностные методы взаимозаменяемости при проектировании и изготовлении. Разработанная система нормирования также позволяет унифицировать методы и средства проектирования, изготовления и контроля механических передач разных типов, уменьшив при этом затраты и повысив их качество.

## **6.1 Теоретическое обоснование разработки общих показателей и допусков по нормам кинематической точности и плавности работы механических передач**

### **6.1.1 Теоретические принципы разработки методов расчета кинематической погрешности передачи.**

Для различных типов зубчатых передач в ГОСТах приведены разные математические формулы для расчета кинематической погрешности. Так, в ГОСТ 1643–81, включающем требования к допускам на цилиндрические зубчатые передачи, кинематическая погрешность передачи определяется суммой допусков на кинематическую погрешность ее зубчатых колес, т. е. колес, находящихся в зацеплении. При этом допуск на кинематическую погрешность колеса определяется суммой допусков на накопленную погрешность шага  $F_p$  и погрешность профиля зуба  $f_f$ :

$$F_{io} = F_{i1} + F_{i2} = F_{p1} + f_{f1} + F_{p2} + f_{f2}, \quad (6.1)$$

где  $F_{io}$  – допуск на кинематическую погрешность передачи;

$F_{i1}$  – допуск на кинематическую погрешность ведущего колеса (шестерни);

$F_{i2}$  – допуск на кинематическую погрешность ведомого колеса;

$F_{p1}$  – допуск на накопленную погрешность ведущего колеса;

$f_{f1}$  – допуск на погрешность профиля ведущего колеса;

$F_{p2}$  – допуск на накопленную погрешность ведомого колеса;

$f_{f2}$  – допуск на погрешность профиля ведомого колеса.

По ГОСТ 1758–81, в котором приводятся нормы взаимозаменяемости и допуски на передачи зубчатые конические и гипоидные, кинематическая погрешность передачи рассчитывается также суммированием кинематических погрешностей ведущего и ведомого зубчатых колес. При этом допуск на кинематическую погрешность колеса определяется по формуле, отличной от формулы (6.1), и допуск на кинематическую погрешность передачи можно записать в виде

$$F_{io} = F_{i1} + F_{i2} = F_{p1} + 1,15f_{c1} + F_{p2} + 1,15f_{c2}, \quad (6.2)$$

где  $f_{c1}$  – допуск на погрешность обката зубцовой частоты ведущего звена;

$f_{c2}$  – допуск на погрешность обката зубцовой частоты ведомого звена.

В стандарте ГОСТ 3675–81, описывающем нормы взаимозаменяемости и допуски червячных цилиндрических передач, кинематическая погрешность передачи рассчитывается по формуле

$$F_{io} = F_p + f_{zzo}, \quad (6.3)$$

где  $F_p$  – допуск на накопленную погрешность шага червячного колеса;

$f_{z\omega}$  – допуск на циклическую погрешность зубцовой частоты в червячной передаче.

В международном стандарте ГОСТ ISO 1328-1–2017 *Передачи зубчатые цилиндрические* допуск на кинематическую погрешность зубчатого колеса  $F_{isT}$  определяется по формуле

$$F_{isT} = F_{pT} + f_{isT, \max}, \quad (6.4)$$

где  $F_{pT}$  – допуск на накопленную погрешность шага зубчатого колеса;

$f_{isT, \max}$  – допуск местной кинематической погрешности зубчатого колеса.

Формула для расчета кинематической погрешности зубчатой пары в этом стандарте не представлена. Приводится формула для расчета измерений на испытательном приборе, включающая углы поворота шестерни и колеса,

$$\theta_e = \theta_2 - \frac{z_1}{z_2} \theta_1, \quad (6.5)$$

где  $\theta_e$  – кинематическая погрешность зубчатой пары в угловых величинах;

$\theta_2$  – угол поворота колеса;

$z_1$  – число зубьев шестерни;

$z_2$  – число зубьев колеса;

$\theta_1$  – угол поворота шестерни.

Анализ вышеприведенных стандартов и формул позволяет сделать определенные выводы. Формулы (6.1)–(6.5) не полностью характеризуют кинематическую погрешность передачи, что видно из гармонического анализа амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности при теоретических и экспериментальных исследованиях. В формуле (6.1) учитываются накопленная погрешность шага  $F_{p2}$  ведомого колеса, которая в амплитудно-частотном спектре проявляется в гармониках с номерами от 1 до  $0,5p_\Sigma$ , где  $p_\Sigma$  – сумма шагов за оборот или число зубьев колеса, и накопленная погрешность шага  $F_{p1}$  ведущего колеса, которая проявляется в гармониках с номерами, кратными, умноженными на передаточное отношение, гармоникам ведомого колеса. Накопленная погрешность шага зависит от радиального биения зубчатого венца (1-я и 2-я гармоники амплитудно-частотного спектра) и погрешности обката или колебания длины общей нормали (от 2-й до  $0,5p_\Sigma$  гармоники), которые связаны с отклонением углового шага или шага зацепления. Показатель  $F_p$  не характеризует зубцовую частоту и кратные частоты, которые проявляются в спектре кинематической погрешности передачи в зацеплении пары колес.

Формула (6.2) учитывают накопленную погрешность шага  $F_p$  ведущего и ведомого колес и зубцовую частоту ведомого звена, но не учитывает зубцовые частоты, кратные числу зубьев ведомого колеса, и погрешности профиля ведущего и ведомого зубчатых колес, которые проявляются в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности передачи в значимых гармониках с разными частотами.

Формула (6.3) не учитывает погрешность профиля червячного колеса и циклические погрешности зубцовой частоты, кратные числу зубьев червячного колеса.

В вышеприведенных стандартах ГОСТ и формулах из этих стандартов (6.1)–(6.3) не учитываются погрешности монтажа при сборке передачи или редуктора.

Формула (6.4) учитывает погрешность шага и местную кинематическую погрешность колеса. Формула (6.4), с учетом формулы (6.5), используется для расчета кинематической погрешности передачи. В допуске на местную кинематическую погрешность требуется учитывать погрешности монтажа валов, подшипников, корпуса в собранной передаче, однако стандарт не приводит методик расчета и численных значений этих погрешностей. Местная кинематическая погрешность включает в основном погрешности шага и профиля, согласно стандартам ГОСТ, и не может выделить погрешность зубцовой частоты, которая наиболее полно характеризует плавность работы передачи. Кроме того, местную кинематическую погрешность сложно разложить на гармонические составляющие с разными частотами и выделить их в амплитудно-частотном спектре при экспериментальных исследованиях или контроле.

Стандарт ГОСТ 21098–82 представляет кинематические цепи и методы расчета их точности для определения кинематической погрешности передачи и погрешностей ее монтажа. Методики расчета и математические зависимости в этом стандарте дают численные значения при расчетах, которые не согласуются со значениями, полученными из таблиц и формул, приведенных в ГОСТах.

Зарубежные и международные стандарты, устанавливающие показатели точности и допуски на изготовление зубчатых передач: ISO 1328-1:2013, ISO 1328-2:2020, немецкие (DIN 3962, DIN 3963, DIN 3965, DIN ISO 1328-1–2018, DIN ISO 1328-2–2021), стандарты США (ANSI/AGMA ISO 1328-1-B14, ANSI/AGMA ISO 1328-2-A21), японские (JIS B 1702-1-98, JIS B 1702-2-98, JIS B 1702-3–2008, JIS B 1705–2013), английские (BS ISO 1328-1:2013, BS ISO 1328-2–2020), французский (NF ISO 1328-1–1995) применимы только к отдельным зубчатым колесам или к паре колес и не применимы к передаче в сборе. Они не содержат математических зависимостей, связывающих между собой отдельные показатели точности колеса или передачи, как в ГОСТах.

В зарубежных и международных стандартах допуски на показатели точности рассчитываются только с учетом геометрических параметров зубчатых колес. Поэтому эти стандарты нельзя применить к расчету и оценке кинематической погрешности собранной передачи, учитывая допуски на показатели точности.

Разработка уравнений кинематической погрешности, с учетом показателей точности деталей зацепления или гармонических составляющих амплитудно-частотного спектра, позволяет установить исходные (базовые) допуски на кинематическую погрешность передачи и причинно-следственные связи между показателями точности, гармоническими составляющими и кинематической погрешностью передачи, а также установить зависимости этих показателей от погрешностей изготовления деталей зацепления любой механической передачи.

Учитывая приведенные выводы по результатам изучения и анализа стандартов, методов расчета и оценки точности зубчатых передач, предложены математические зависимости, методы и методики расчета, представляющие собой систему нормирования кинематической погрешности механической передачи.

Предполагается, что для любого типа механической передачи в сборе (редуктора), независимо от конструкции и кинематики, можно создать универсальную общую систему допусков на кинематическую погрешность передачи (редуктора), рассматриваемую как наиболее комплексный показатель точности.

В дальнейшем под понятием «механическая передача» понимается любой тип передачи (с зубчатым, шариковым, роликовым или другим зацеплением) независимо от конструкции.

Система показателей точности и допусков для механических передач построена на базе ГОСТов на зубчатые передачи. При этом в расчетах базовыми приняты допуски из ГОСТ 1643–81 на цилиндрические зубчатые передачи. Эти передачи наиболее широко используются в промышленности в Республике Беларусь, Российской Федерации и странах СНГ, а допуски из ГОСТ 1643–81 наиболее широко используются в этих странах при контроле зубчатых цилиндрических колес.

При расчете *допуска на кинематическую погрешность механической передачи* на основе формулы расчета цилиндрических зубчатых передач по ГОСТ 1643–81 базовыми приняты допуски составляющих показателей кинематической погрешности цилиндрического зубчатого колеса  $F_{ir}'$ : допуск на накопленную погрешность шага зубчатого колеса  $F_p$  и допуск на погрешность профиля зуба  $f_f$ . По ГОСТ 1643–81 допуски  $F_p$  и  $f_f$  входят в формулу для расчета допуска на кинематическую погрешность  $F_i'$  каждого зубчатого колеса отдельно и каждое зубчатое колесо контролируют с

эталонным колесом, а для расчета допуска на кинематическую погрешность передачи  $F'_{io}$  показатели  $F'_i$  двух зубчатых колес суммируются. Поэтому ГОСТ 1643–81 не может учитывать и не учитывает циклические погрешности зубцовой частоты, которые значительно влияют на плавность работы зубчатой передачи, при зацеплении зубчатой пары или передачи в сборе.

При разработке формулы расчета допуска на кинематическую погрешность механической передачи и предполагаемом контроле передачи в сборе, а также учитывая, что накопленная погрешность шага  $F_{pr}$  при расчете кинематической погрешности колеса  $F'_{ir}$  не характеризует в гармоническом спектре зубцовую частоту, а последняя может иметь большие амплитуды гармоник с разной частотой, равной или кратной числу зубьев колеса, и определяет плавность работы передачи, необходимо, кроме базовых допусков  $F_p$  и  $f_f$ , в разрабатываемую формулу расчета допуска на кинематическую погрешность передачи ввести допуски на *показатели циклической погрешности зубцовой частоты ведомого колеса  $f_{z2or}$*  с частотой гармоник  $k = z_2, 2z_2, 3z_2, 4z_2$  (по ГОСТ 1643–81). Кроме того, учитывая методы размерных цепей, приведенные в стандарте ГОСТ 21098–82, и то, что в этом стандарте допуски на показатели точности  $F_p$  и  $f_f$  принимаются из других стандартов на зубчатые передачи при расчете кинематической погрешности передачи  $F'_{io}$  *от технологической оси зубчатого колеса без погрешностей монтажа*, принято в разрабатываемую формулу расчета допуска на кинематическую погрешность механической передачи ввести еще *погрешности монтажа ведущего (шестерни) и ведомого колес  $E_{\Sigma M}$* .

Таким образом, для расчета допуска на кинематическую погрешность механической передачи из ГОСТ 1643–81 к параметрам  $F_p$  и  $f_f$  добавлены допуски на циклические погрешности зубцовой частоты для передачи  $f_{z2o}$  (по ведомому колесу  $z_2$ )  $f_{z2o}$  ( $k = z_2$ ),  $0,5f_{z2o}$  ( $k = 2z_2$ ),  $0,4f_{z2o}$  ( $k = 3z_2$ ) и  $0,35f_{z2o}$  ( $k = 4z_2$ ), а также погрешности монтажа шестерни и колеса  $E_{\Sigma M1}$  и  $E_{\Sigma M2}$ . При этом накопленная погрешность колеса  $F_{pr2}$  характеризует в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности передачи гармоники с 1-й по  $z_2/2$  (основные гармоники – 1, 2 и 3); накопленная погрешность шестерни  $F_{pr1}$  характеризует гармоники с 1-й по  $z_2/2$ , умноженные на передаточное отношение  $i$  (основные гармоники –  $i, 2i$  и  $3i$ ). Погрешность профиля зуба  $f_{fi}$  может проявляться в гармонике с номером, равным числу зубьев, т. е. так же, как и циклическая погрешность зубцовой частоты, и также иметь частоты, кратные числу зубьев колеса (гармоники более высокой частоты, чем зубцовая частота). Показатель  $f_{z2or}$  характеризует жесткий контакт при вхождении зубьев в зацепление, что происходит в основном из-за погрешности шага и создает дополнительное колебание зубьев и угловое перемещение или перемещение по дуге делительной окружности.

На основе вышепредставленного обоснования выведена формула для расчета допуска на кинематическую погрешность механической передачи

$$\begin{aligned} \vec{F}_{к.н} = & \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{f}_{f1} + \vec{f}_{f2} + \vec{f}_{zzo} + 0,5\vec{f}_{zzo} + \\ & + 0,4\vec{f}_{zzo} + 0,35\vec{f}_{zzo} + \vec{E}_{\Sigma M1} + \vec{E}_{\Sigma M2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В формуле (6.6) учтены все допуски на показатели, рассмотренные ранее. Параметры  $\vec{F}_{p1}$ ,  $\vec{F}_{p2}$ ,  $\vec{E}_{\Sigma M1}$ ,  $\vec{E}_{\Sigma M2}$  характеризуют в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности, определяемой за полный оборот ведомого вала передачи, низкочастотный участок гармоник с частотой повторяемости за оборот ведомого вала  $k = 1 \dots z_2/2$  и среднечастотный участок гармоник  $k = 1 \dots z_1/2$ , где  $z_1$  и  $z_2$  – число зубьев шестерни и колеса соответственно. Параметры  $\vec{f}_{zzo}$ ,  $0,5\vec{f}_{zzo}$ ,  $0,4\vec{f}_{zzo}$ ,  $0,35\vec{f}_{zzo}$  характеризуют участок гармоник высокой частоты с  $k = z_2$ ,  $k = 2z_2$ ,  $k = 3z_2$ ,  $k = 4z_2$ . Параметры  $\vec{f}_{f1}$  и  $\vec{f}_{f2}$  характеризуют участок гармоник также высокой частоты с  $k \geq z_1$  и  $k \geq z_2$ .

Предложено нормировать кинематическую погрешность механической передачи, применяя методы взаимозаменяемости: максимума-минимума с арифметическим суммированием допусков на показатели и вероятностный метод с геометрическим суммированием, основанный на законах относительного рассеяния параметров. При использовании метода максимума-минимума предложены допуски на кинематическую погрешность передачи с *нормальной точностью А*. При применении вероятностного метода предложены допуски на кинематическую погрешность передачи с *повышенной точностью В*.

Тогда формула для расчета допуска на кинематическую погрешность механической передачи с *нормальной точностью А* на основе формулы (6.6) имеет вид

$$\begin{aligned} F_{к.н} = & F_{p1} + F_{p2} + f_{f1} + f_{f2} + f_{zzo} + 0,5f_{zzo} + \\ & + 0,4f_{zzo} + 0,35f_{zzo} + E_{\Sigma M1} + E_{\Sigma M2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

При вероятностном методе предложено геометрически суммировать только допуски на показатели, характеризующие низкочастотный и среднечастотный участки гармоник с близкими частотами в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности передачи. К таким показателям

относятся  $F_{p1}$ ,  $F_{p2}$ ,  $E_{\Sigma M1}$ ,  $E_{\Sigma M2}$ . Показатели  $f_{zzo}$ ,  $0,5f_{zzo}$ ,  $0,4f_{zzo}$ ,  $0,35f_{zzo}$ ,  $f_{f1}$ ,  $f_{f2}$ , характеризующие высокочастотный участок гармоник со значительной разницей частот в 2 и более раза, предложено суммировать арифметически. Формула для расчета допуска на кинематическую погрешность механической передачи с повышенной точностью  $B$  на основе формулы (6.6) имеет вид

$$F_{к.н} = k\sqrt{F_{p1}^2 + E_{\Sigma M1}^2} + k\sqrt{F_{p2}^2 + E_{\Sigma M2}^2} + f_{zzo} + \\ + 0,5f_{zzo} + 0,4f_{zzo} + 0,35f_{zzo} + f_{f1} + f_{f2}. \quad (6.8)$$

### 6.1.2 Разработка системы допусков на кинематическую погрешность механических передач.

На основе разработанных методов расчета кинематической погрешности механической передачи и формул (6.6)–(6.8) разработана система допусков на наибольшую кинематическую погрешность механических передач.

При разработке системы допусков в качестве базовой принята система допусков на цилиндрические зубчатые колеса и передачи в соответствии с ГОСТ 1643–81, т. к. этот стандарт создан на основе фундаментальной науки и практики и в наибольшей степени подходит к созданию теории норм взаимозаменяемости для любых типов механических передач в сборе.

Разработанная система допусков включает 12 степеней точности, начиная с 3-й степени точности по 12-ю, так же как и для зубчатых передач. В качестве расчетной принята 7-я степень точности, соответствующая 7-й степени точности зубчатых передач.

Известно, что при изготовлении деталей механизмов машин допуски зависят от размеров деталей и механизмов. Поэтому при установлении допусков на кинематическую погрешность передачи, независимо от ее конструкции, т. е. для любых типов существующих передач и новых создаваемых, принят общий геометрический параметр – *расчетный размер*. Для зубчатых передач расчетным размером может быть делительный диаметр или расчетный диаметр ведомого колеса; для планетарных передач с телами качения – средний радиус беговой дорожки ведомого звена. Расчетный размер позволяет дифференцировать допуски в зависимости от геометрических размеров деталей зацепления передачи. При этом большему размеру соответствует больший допуск. В разработанной системе допусков приняты интервалы, в которые входят расчетные размеры, на основе интервалов делительных диаметров зубчатых колес в соответствии с ГОСТ 1643–81. При этом проведено округление расчетных размеров до целых чисел. Количество интервалов увеличено, по сравнению с таблицами из ГОСТ 1643–81, а коэффициенты отношения наибольшего размера к наименьшему размеру интер-

вала составляют 1,4; 1,5 и 1,6. Сокращение интервалов позволяет получать более точное соответствие устанавливаемых допусков в угловых величинах расчетным размерам и, соответственно, геометрическим параметрам деталей зацепления и передачи.

В таблице 6.1 представлена разработанная система допусков на наибольшую кинематическую погрешность для 7-й степени точности механической передачи в соответствии с вышеприведенными положениями. В каждом интервале расчетных размеров (см. таблицу 6.1), кроме первого интервала, первое число интервала не входит в интервал, второе число интервала входит в интервал. Расчетный размер в каждом интервале принимается для ведомого звена. Значения наибольшей кинематической погрешности механической передачи в каждом интервале рассчитаны в соответствии с разработанными теоретическими положениями и формулами (6.6)–(6.8). Значения допусков на показатели точности (см. таблицу 6.1) для расчета наибольшей кинематической погрешности механической передачи взяты из ГОСТ 1643–81. Для расчета допусков  $F_{p1}$  и  $f_{f1}$  шестерни (ведущее звено) принимаются допуски  $F_{p2}$  и  $f_{f2}$  для колеса (ведомое звено), умноженные на 0,8. Значения допусков  $f_{f1}$ ,  $f_{f2}$ ,  $f_{zzo}$ ,  $0,5f_{zzo}$ ,  $0,4f_{zzo}$  и  $0,35f_{zzo}$  взяты из ГОСТ 1643–81 для модуля свыше 3,5 до 6,3 мм как наиболее часто используемого при производстве зубчатых колес.

Наибольшая кинематическая погрешность механической передачи (см. таблицу 6.1), выраженная в линейных величинах, относится к длине дуги расчетной окружности, соответствующей расчетному размеру. Для расчета наибольшей кинематической погрешности в угловых величинах расчетный размер (расчетный радиус  $R$ , соответствующий расчетной окружности) взят из меньших значений интервалов расчетных размеров, чтобы обеспечить технологический запас точности, если будет взят расчетный размер в интервале больше минимального. В этом случае при тех же допусках на показатели точности будут получены меньшие значения наибольшей кинематической погрешности в угловых величинах. Или можно увеличить допуски на показатели точности с сохранением значения наибольшей кинематической погрешности, относящейся к минимальному расчетному размеру.

Коэффициенты соответствия допусков (см. таблицу 6.1) показывают, что допуски, соответствующие предложенному уровню нормальной точности А, больше допусков, соответствующих предложенному уровню повышенной точности В, в 1,16–1,23 раза.

В таблице 6.2 представлена разработанная система допусков на наибольшую кинематическую погрешность для степеней точности от 3-й по 12-ю для интервалов размеров механической передачи на основе разработанной системы допусков для 7-й степени точности.



Окончание таблицы 6.1

Номер интервала расчетного размера											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кинематическая погрешность передачи в линейных величинах, мкм. Уровень А – Нормальная точность											
137	148	155	163	194	194	232	232	285	285	356	429
Кинематическая погрешность передачи в линейных величинах, мкм. Уровень В – Повышенная точность											
114	123	129	136	158	158	194	194	245	245	299	371
Коэффициент соответствия, А/В											
1,21	1,21	1,20	1,20	1,23	1,23	1,20	1,20	1,16	1,16	1,19	1,16
Кинематическая погрешность передачи в угловых величинах. Уровень А – Нормальная точность											
град											
0,0229	0,0228	0,0148	0,0102	0,0076	0,0054	0,0046	0,0032	0,0028	0,0020	0,0018	0,0013
град											
1,3111	1,3054	0,8474	0,5819	0,4357	0,3086	0,2608	0,1847	0,1626	0,1151	0,1016	0,0772
угл. мин											
78,7	78,3	50,8	34,9	26,1	18,5	15,7	11,1	9,8	6,9	6,1	4,6
Кинематическая погрешность передачи в угловых величинах. Уровень В – Повышенная точность											
град											
0,0189	0,0189	0,0123	0,0085	0,0062	0,0044	0,0038	0,0027	0,0024	0,0017	0,0015	0,0012
град											
1,0853	1,0833	0,7057	0,4867	0,3547	0,2513	0,2176	0,1541	0,1396	0,0988	0,0854	0,0668
угл. мин											
65,1	65,0	42,3	29,2	21,3	15,1	13,1	9,3	8,4	5,9	5,1	4,0

Таблица 6.2 – Система допусков на наибольшую кинематическую погрешность механической передачи для степеней точности

Степень точности	Номер интервала расчетного размера											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Расчетный размер, мм											
До 13	13...21	21...32	32...51	51...72	72...102	102...144	144...201	201...284	284...401	401...637	637...1019	
угл. мин												
Уровень А – Нормальная точность												
3	19,7	19,6	12,7	8,7	6,5	4,6	3,9	2,8	2,4	1,7	1,5	1,2
4	27,8	27,7	18,0	12,3	9,2	6,5	5,5	3,9	3,5	2,4	2,2	1,6
5	39,3	39,2	25,4	17,5	13,1	9,3	7,8	5,5	4,9	3,5	3,0	2,3
6	55,6	55,4	36,0	24,7	18,5	13,1	11,1	7,8	6,9	4,9	4,3	3,3
7	<b>78,7</b>	<b>78,3</b>	<b>50,8</b>	<b>34,9</b>	<b>26,1</b>	<b>18,5</b>	<b>15,7</b>	<b>11,1</b>	<b>9,8</b>	<b>6,9</b>	<b>6,1</b>	<b>4,6</b>
8	111,3	110,8	71	49,4	37,0	26,2	22,1	15,7	13,8	9,8	8,6	6,6
9		101,7	101,7	69,8	52,3	37,0	31,3	22,2	19,5	13,8	12,2	9,3
10		143,8	143,8	98,8	74,0	52,4	44,3	31,4	27,6	19,5	17,2	13,1
11			139,7	139,7	104,6	74,1	62,6	44,3	39,0	27,6	24,	18,5
12					147,9	104,8	88,5	62,7	55,2	39,1	34,5	26,2
Уровень В – Повышенная точность												
3	16,3	16,3	10,6	7,3	5,	3,8	3,3	2,3	2,1	1,5	1,3	1,0
4	23,0	23,0	15,0	10,3	7,5	5,3	4,6	3,3	3,0	2,1	1,8	1,4
5	32,6	32,5	21,2	14,6	10,6	7,5	6,5	4,6	4,2	3,0	2,6	2,0
6	46,0	46,0	29,9	20,7	15,1	10,7	9,2	6,5	5,9	4,2	3,6	2,8
7	<b>65,1</b>	<b>65,0</b>	<b>42,3</b>	<b>29,2</b>	<b>21,3</b>	<b>15,1</b>	<b>13,1</b>	<b>9,3</b>	<b>8,4</b>	<b>5,9</b>	<b>5,1</b>	<b>4,0</b>
8	92,1	91,9	59,9	41,3	30,1	21,3	18,5	13,1	11,8	8,4	7,3	5,7
9	130,2	130,0	84,7	58,4	42,6	30,2	26,1	18,5	16,8	11,9	10,3	8,0
10			119,8	82,6	60,2	42,6	36,9	26,2	23,7	16,8	14,5	11,3
11				116,8	85,1	60,3	52,2	37,0	33,5	23,7	20,5	16,0
12					120,4	85,3	73,9	52,3	47,4	33,5	29,0	22,7

При переходе от одной степени точности к другой в таблице 6.2 использовался коэффициент, равный  $\sqrt{2}$ , такой же, как в международном стандарте на допуски зубчатых колес. Допуск для искомой степени точности в каждом интервале определяется путем умножения значения допуска для 7-й степени точности на  $(\sqrt{2})^{(C-7)}$ , где  $C$  – искомая степень точности.

Допуски (см. таблицы 6.1 и 6.2) уровня В повышенной точности меньше допусков уровня А нормальной точности приблизительно на  $\sqrt[4]{2}$ , что составляет  $\frac{1}{2}$  степени точности. При проектировании и контроле допуски нормальной точности уровня А рекомендуется использовать при больших передаточных отношениях  $u$  механизма,  $u > 7$ , т. к. при этом в передаче возникает значительная разница в геометрических параметрах ведущего и ведомого звеньев, а также в частотах гармонических составляющих амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности передачи, которые суммируются при этом арифметически. Допуски повышенной точности уровня В рекомендуется использовать при небольших передаточных отношениях  $u$  механизма,  $u \leq 3$ , т. к. при этом передача содержит близкие геометрические параметры ведущего и ведомого звеньев, а также гармонические составляющие амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности передачи с близкими частотами, которые суммируются вероятностными методами. Для механизмов с передаточными отношениями  $3 < u \leq 7$  в равной степени достоверно использовать любой из уровней точности, при этом можно повысить точность передачи на  $1/2$  степени за счет использования уровня В.

Для многозвенных механизмов с несколькими и более степенями наибольшую кинематическую погрешность передачи можно рассчитать по формуле

$$F_{к.н} = \sum_{i=1}^n \frac{F_{к.н.i}}{\prod u_j}, \quad (6.9)$$

где  $i$  – номер текущей степени;

$j$  – номера ступеней, следующих за текущей степенью  $i$ . Если текущая степень последняя, то  $u_j = 1$ ;

$u$  – передаточное отношение степени;

$n$  – число ступеней механизма.

На рисунках 6.1 и 6.2 представлены графики зависимостей допусков на наибольшую кинематическую погрешность механической передачи от интервалов расчетных размеров для степеней точности, полученных при

расчете методом максимума-минимума и вероятностным методом. Графики наглядно представляют допуски в угловых минутах от интервалов расчетных размеров.

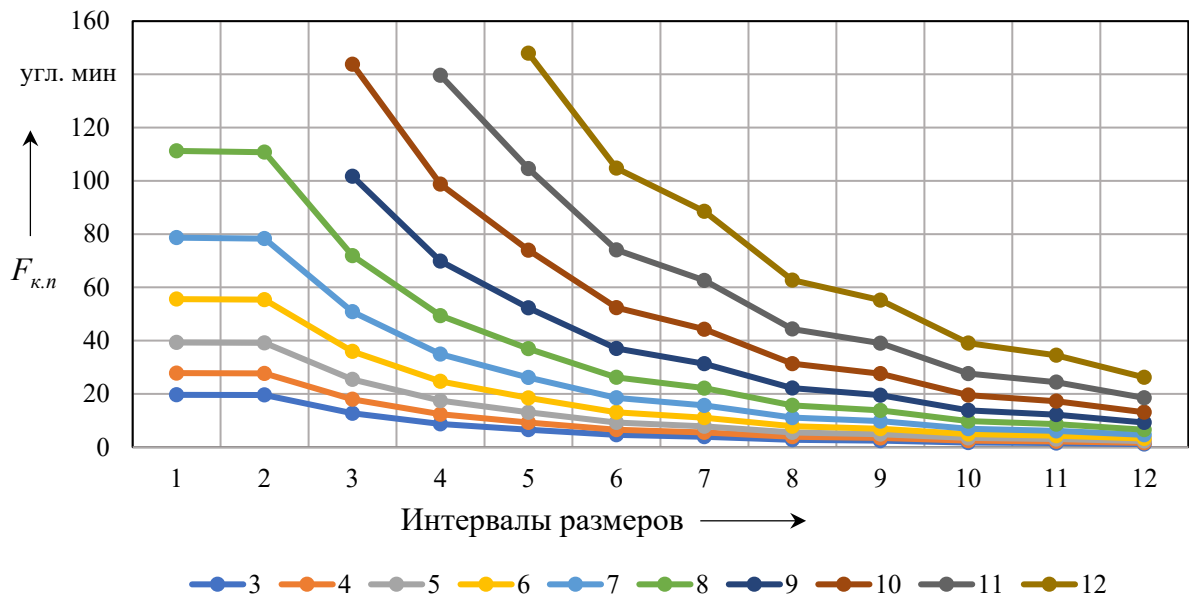


Рисунок 6.1 – Графики зависимостей допусков на наибольшую кинематическую погрешность механической передачи от интервалов расчетных размеров для степеней точности, полученных при расчете методом максимума-минимума

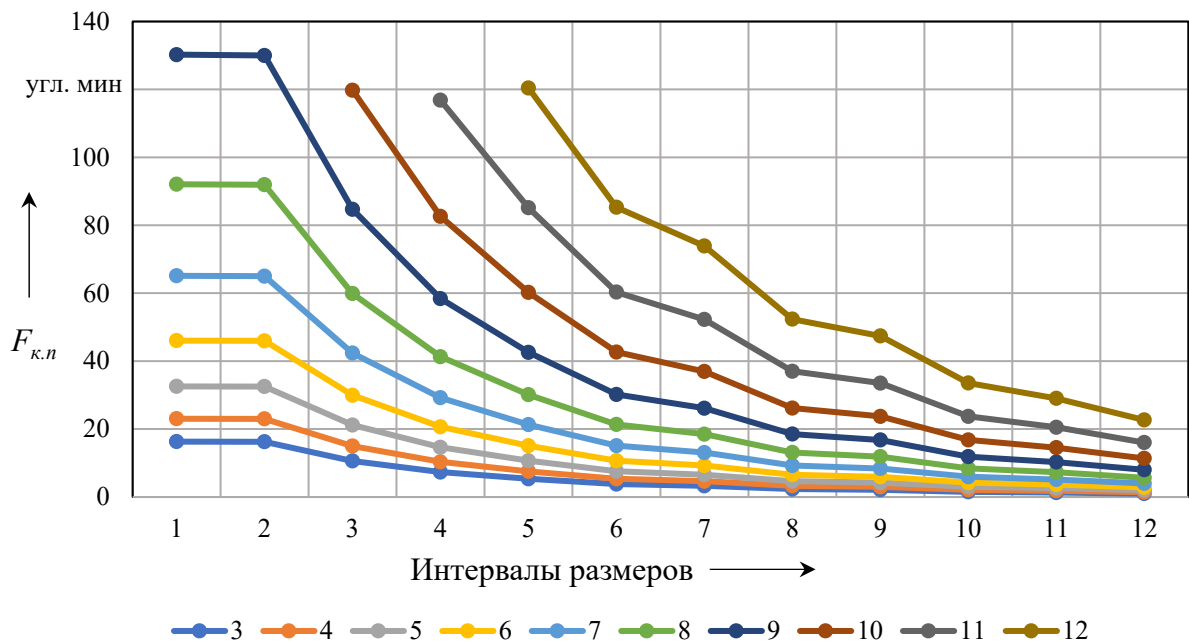


Рисунок 6.2 – Графики зависимостей допусков на наибольшую кинематическую погрешность механической передачи от интервалов расчетных размеров для степеней точности, полученных при расчете вероятностным методом

### 6.1.3 Методика определения погрешностей монтажа механической передачи.

Погрешности монтажа механической передачи возникают при сборке ее основных деталей – деталей зацепления с валами, подшипниками, корпусом и другими деталями. Эти погрешности в основном связаны с радиальным смещением деталей при сборке и могут быть представлены как радиальные биения при расчете кинематической погрешности передачи.

Для определения погрешностей монтажа рассматривалась кинематическая схема цилиндрической зубчатой передачи, которая может иметь любые геометрические параметры. На основе этой обобщенной передачи проанализированы и предложены составляющие погрешностей монтажа:

$E_{en1}$  – радиальное биение ступени ведущего вала, сопрягаемой с подшипником;

$E_{en2}$  – радиальное биение ступени ведомого вала, сопрягаемой с подшипником;

$E_{вш}$  – радиальное биение ступени вала, сопрягаемой с шестерней;

$E_{вк}$  – радиальное биение ступени вала, сопрягаемой с колесом;

$E_{ш}$  – радиальное биение шестерни из-за зазора в посадке на вал;

$E_{к}$  – радиальное биение колеса из-за зазора в посадке на вал;

$E_{n1}$  – допуск на радиальное биение внутреннего кольца подшипника на ведущем валу;

$E_{n2}$  – допуск на радиальное биение внутреннего кольца подшипника на ведомом валу.

Суммарная погрешность монтажа шестерни механической передачи для расчета ее кинематической погрешности, приведенная к длине дуги делительной окружности, определяется следующим образом:

– методом максимума-минимума:

$$E_{\Sigma M1} = (E_{en1} + E_{вш} + E_{ш} + E_{n1}) \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.10)$$

где  $\alpha$  – угол зацепления в зубчатой передаче;

– вероятностным методом:

$$E_{\Sigma M1} = k \sqrt{E_{en1}^2 + E_{вш}^2 + E_{ш}^2 + E_{n1}^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.11)$$

Суммарную погрешность монтажа колеса механической передачи для расчета ее кинематической погрешности, приведенную к длине дуги делительной окружности, можно найти:

– методом максимума-минимума:

$$E_{\Sigma M2} = (E_{gn2} + E_{вк} + E_{к} + E_{n2}) \operatorname{tg} \alpha; \quad (6.12)$$

– вероятностным методом:

$$E_{\Sigma M2} = k \sqrt{E_{gn2}^2 + E_{вк}^2 + E_{к}^2 + E_{n2}^2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.13)$$

Все представленные погрешности рассматриваются от рабочей оси передачи.

На основе предложенных составляющих погрешностей по формулам (6.10)–(6.13) выполнены расчеты суммарных погрешностей монтажа  $E_{\Sigma M1}$  и  $E_{\Sigma M2}$  для цилиндрической зубчатой передачи, выбранной в качестве базовой, с заданными параметрами: мощность на ведомом валу – 8 кВт; передаточное отношение  $u = 3,6$ . Размеры валов и подшипников для монтажа определялись из расчета на прочность и нагрузочную способность.

Приняты базовые расчетные значения суммарных погрешностей монтажа, полученные: методом максимума-минимума для уровня А (нормальной точности) наибольшей кинематической погрешности механической передачи  $E_{\Sigma M1}^P = 22$  мкм,  $E_{\Sigma M2}^P = 23$  мкм; вероятностным методом для уровня В (повышенной точности) наибольшей кинематической погрешности механической передачи  $E_{\Sigma M1}^P = 19$  мкм,  $E_{\Sigma M2}^P = 20$  мкм. При этом базовым принят интервал расчетных размеров (см. таблицу 6.1) свыше 51 и до 401 мм. В этом интервале расчетных размеров суммарные погрешности монтажа могут быть постоянными во всем интервале. При переходе к другим интервалам использовался коэффициент  $\sqrt{2}$ . Так, в интервале расчетных размеров до 51 мм суммарная погрешность монтажа определяется по формуле  $E_{\Sigma M} = E_{\Sigma M}^P / \sqrt{2}$ , а в интервале расчетных размеров свыше 401 мм суммарная погрешность монтажа определяется по формуле  $E_{\Sigma M} = E_{\Sigma M}^P \sqrt{2}$ . Численные значения суммарной погрешности монтажа для каждого интервала расчетных размеров, в соответствии с вышепредставленными формулами, приведены в таблице 6.1.

Предложенная методика определения погрешностей монтажа передачи для определения ее наибольшей кинематической погрешности, а также полученные при этом вышеприведенные базовые численные значения и значения, представленные в таблице 6.1, могут быть использованы для любых типов механических передач.

#### 6.1.4 Методы расчета кинематической погрешности передачи в зависимости от циклических погрешностей.

К циклическим погрешностям передачи относятся показатели точности зубчатых и червячных передач, а также гармонические составляющие (гармоники) кинематической погрешности с разной частотой, соответствующей номерам гармоник.

Можно рассматривать несколько методов расчета кинематической погрешности передачи. Первый метод заключается в использовании в качестве расчетных параметров показателей точности, имеющих причинно-следственные связи с гармоническими составляющими амплитудно-частотного (гармонического) спектра кинематической погрешности передачи. Этот метод представлен ранее в теории, результатах (см. таблицы 6.1 и 6.2), графиках (см. рисунок 6.2) и формулах (6.8), (6.11) и (6.13) при расчете кинематической погрешности передачи вероятностным методом. Этот метод показан на примере цилиндрической зубчатой передачи.

Второй метод заключается в использовании показателей точности – циклических погрешностей передачи и радиального биения зубчатого ведомого колеса  $F_r$ , которое рассматривается как первая гармоника в амплитудно-частотном спектре кинематической погрешности. Этот метод также разработан на примере зубчатых передач, но может быть применен и для передач разных типов. Согласно методу, допуск на наибольшую кинематическую погрешность передачи можно определить следующим образом:

$$F_{к.н} = k\sqrt{(F_{r1}\operatorname{tg}\alpha)^2 + (f_{zk2}^{6x})^2 + (f_{zk3}^{6x})^2 + (E_{\Sigma M1})^2} + \\ + k\sqrt{(F_{r2}\operatorname{tg}\alpha)^2 + (f_{zk2}^{6blx})^2 + (f_{zk3}^{6blx})^2 + (E_{\Sigma M2})^2} + \sum f_{zZO} + \sum f_f; \quad (6.14)$$

$$\sum f_{zZO} = f_{zZO} + 0,5f_{zZO} + 0,4f_{zZO} + 0,35f_{zZO}; \quad (6.15)$$

$$\sum f_f = f_{f1} + f_{f2}, \quad (6.16)$$

где  $k$  – коэффициент относительного рассеяния расчетных параметров;

$F_{r1}$  – радиальное биение ведущего звена;

$F_{r2}$  – радиальное биение ведомого звена;

$f_{zk2}^{6x}$  – циклическая погрешность ведущего звена с частотой  $k = 2$ ;

$f_{zk3}^{6x}$  – циклическая погрешность ведущего звена с частотой  $k = 3$ ;

$f_{zk2}^{6blx}$  – циклическая погрешность ведомого звена с частотой  $k = 2$ ;

$f_{zk3}^{6blx}$  – циклическая погрешность ведомого звена с частотой  $k = 3$ .

Метод расчета кинематической погрешности по уравнениям (6.14)–(6.16) схож с методом, представленным уравнениями (6.8), (6.11) и (6.13). Во втором методе вместо накопленной погрешности шага  $F_p$  зубчатого колеса используются его радиальное биение  $F_r$  и циклические погрешности  $f_{zk}$ . Как известно, накопленная погрешность шага включает радиальное биение и погрешность шага и циклические погрешности низкой частоты характеризуют погрешность шага. Поэтому использование этих показателей точности в разных методах равнозначно.

При расчете вторым методом допуска на кинематическую погрешность зубчатых передач составляющие расчетные параметры в уравнениях (6.15) и (6.16) принимаются из стандартов на зубчатые колеса и передачи [71–76]. При расчете этим методом допусков на кинематическую погрешность передач, на которые не разработано стандартов точности, например для передач не с зубчатым зацеплением, допуски на циклические погрешности можно принимать равными удвоенным амплитудам гармонических составляющих амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности. При этом амплитуды гармонических составляющих можно определять экспериментально или с использованием разработанных допусков на циклические погрешности, представленные далее.

Третий метод заключается в том, что в качестве расчетных параметров принимаются непосредственно гармонические составляющие кинематической погрешности передачи. Метод основан на установленной закономерности, которая заключается в постоянстве значимых (с наибольшими амплитудами) низкочастотных гармонических составляющих амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности механической передачи, независимо от ее типа, а также постоянстве связи среднечастотных и высокочастотных гармонических составляющих кинематической погрешности с основными геометрическими параметрами передачи. Согласно установленной закономерности, номера значимых гармонических составляющих, кроме низкочастотных, соответствуют численным значениям основных геометрических параметров, а величина амплитуд этих гармонических составляющих зависит от неточностей основных геометрических параметров, связанных с погрешностями изготовления и упругими деформациями. Основными геометрическими параметрами, связанными с гармоническими составляющими, являются: число зубьев деталей разных типов передач, имеющих зубчатое зацепление; число периодов беговой дорожки для планетарных передач с телами качения или другой аналогичный параметр для передач с незубчатым зацеплением; передаточное отношение; угловой шаг, окружной

шаг, шаг зацепления. Так как указанные геометрические параметры подходят для разных типов передач, то разработанный метод и установленная закономерность применимы независимо от типа передачи.

Для расчета кинематической погрешности передачи третьим методом выбраны наиболее значимые гармоники, связанные геометрическими параметрами, а также гармоники с низкой частотой планетарных передач с телами качения. Для определения значимых гармоник были проведены теоретические исследования, представленные в разд. 3, и многократные серии экспериментов планетарных редукторов с телами качения с разными передаточными отношениями в диапазоне расчетных размеров 72...144 мм. По результатам экспериментальной оценки кинематической погрешности редукторов установлены гармоники с наибольшими амплитудами и рассчитаны их средние значения. Средняя кинематическая погрешность испытуемых редукторов соответствовала 10-й степени точности по разработанной таблице 6.2, что соответствует такой же степени точности зубчатых передач в таком же интервале делительных диаметров с модулем 3.5...6,3 мм. Для испытаний выбраны редукторы невысокой точности с целью выделить погрешности изготовления и, соответственно, выделить больше значимых гармоник.

По результатам проведенных теоретических и экспериментальных исследований разработана общая математическая зависимость, характеризующая возможное влияние максимального количества амплитуд значимых гармоник,

$$\begin{aligned}
 F_{\kappa.n}^{\max} = & k_1 \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} + k_2 \sqrt{A_{z-1}^2 + A_z^2 + A_{z+1}^2} + k_3 \sqrt{A_{u-1}^2 + A_u^2 + A_{u+1}^2} + \\
 & + k_4 \sqrt{A_{2z-1}^2 + A_{2z}^2 + A_{2z+1}^2} + k_5 \sqrt{A_{2u-1}^2 + A_{2u}^2 + A_{2u+1}^2} + \\
 & + k_6 \sqrt{A_{3z-1}^2 + A_{3z}^2 + A_{3z+1}^2} + k_7 \sqrt{A_{3u-1}^2 + A_{3u}^2 + A_{3u+1}^2} + \\
 & + \dots + k_m \sqrt{A_{mz-1}^2 + A_{mz}^2 + A_{mz+1}^2} + k_m \sqrt{A_{mu-1}^2 + A_{mu}^2 + A_{mu+1}^2}, \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_m$  – коэффициенты относительно рассеяния параметров;

$i$  – номер низкочастотной гармоники;

$n$  – количество низкочастотных гармоник в спектре;

$A_i$  – амплитуда  $i$ -й низкочастотной гармоники;

$z$  – число зубьев или аналогичный параметр;

$u$  – передаточное отношение;

$A_{z-1}, A_z, A_{z+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $z - 1, z, z + 1$ ;

$A_{u-1}, A_u, A_{u+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $u - 1, u, u + 1$ ;

$A_{2z-1}, A_{2z}, A_{2z+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $2z - 1, 2z, 2z + 1$ ;

$A_{2u-1}, A_{2u}, A_{2u+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $2u - 1, 2u, 2u + 1$ ;

$A_{3z-1}, A_{3z}, A_{3z+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $3z - 1, 3z, 3z + 1$ ;

$A_{3u-1}, A_{3u}, A_{3u+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $3u - 1, 3u, 3u + 1$ ;

$A_{mz-1}, A_{mz}, A_{mz+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $mz - 1, mz, mz + 1$ ;

$A_{mu-1}, A_{mu}, A_{mu+1}$  – амплитуды гармоник с номерами  $mu - 1, mu, mu + 1$ ;

$m$  – число гармоник в спектре, кроме низкочастотных.

Если номера гармоник  $z + 1$  и  $u - 1$ , или  $z - 1$  и  $u + 1$ , или  $z$  и  $u$  и их кратные номера совпадают, то в выражении (6.17) принимается один из двух параметров.

Приняв единый коэффициент относительно рассеяния параметров, можно выражение (6.17) записать как

$$F_{к.н}^{\max} = k \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} + \sum_{j=1}^m \sqrt{A_{jz-1}^2 + A_{jz}^2 + A_{jz+1}^2} \right), \quad (6.18)$$

где  $j$  – коэффициент номера гармоники,  $j = 1, 2, 3 \dots m$ .

В результате экспериментальной оценки кинематической погрешности редукторов установлено, что гармоники с частотой  $z + 1, z - 1, u + 1, u - 1$  и кратной частотой, т. е. с частотой, близкой значениям основных геометрических параметров передачи  $z$  и  $u$  и кратной им, можно не учитывать, если их амплитуды значительно меньше амплитуд гармоник с частотой  $z, u, 2z, 2u, 3z, 3u, \dots, mz, mu$ . Гармоники высокой частоты с коэффициентом номера гармоники  $j > 2$  также имеют небольшие амплитуды. В экспериментальных редукторах, которые использовались для оценки кинематической погрешности передачи, номера гармоник, равные  $z$  и  $u$ , отличаются на единицу и их номера находятся рядом в амплитудно-частотном спектре, поэтому амплитуды этих гармоник должны суммироваться геометрически. С учетом вышесказанного, на основе математической зависимости (6.17), скорректированной по результатам экспериментальных исследований, без учета гармоник с коэффициентом номера гармоники  $j > 2$ , получены следующие математические зависимости:

– для одноступенчатого редуктора

$$F_{к.н}^{\max} = k \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} + \sqrt{A_z^2 + A_u^2} + \sqrt{A_{2z}^2 + A_{2u}^2} \right) + A_{zu}; \quad (6.19)$$

– для двухступенчатого редуктора

$$F_{к.п}^{\max} = k \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} + \sqrt{A_z^2 + A_{u2}^2} + \sqrt{A_{2z}^2 + A_{2u2}^2} \right) + A_{zu2} + A_{2u} + A_{zu}, \quad (6.20)$$

где  $n$  – количество низкочастотных гармоник в спектре,  $n = 4$ ;

$u_2$  – передаточное отношение второй ступени;

$u$  – передаточное отношение редуктора.

Значения наибольшей кинематической погрешности передачи, рассчитанные по математическим зависимостям (6.19) и (6.20), отличаются от установленных значений (см. таблицы 6.1 и 6.2), а также от усредненных значений, полученных экспериментально, не более чем на 5,2 %.

### 6.1.5 Разработка системы допусков на циклические погрешности (гармонические составляющие) механических передач.

На основе математических зависимостей (6.19) и (6.20) построены таблицы допусков на амплитуды гармонических составляющих кинематической погрешности. В таблице 6.3 представлены значения допусков на амплитуды значимых гармонических составляющих кинематической погрешности передачи для 7-й степени точности (уровень В). При установлении допусков на амплитуды гармоник по формулам (6.19) и (6.20) базовой принята 10-я степень точности, полученная по результатам экспериментальных исследований с одноступенчатыми и двухступенчатыми планетарными передачами (редукторами) с промежуточными телами качения с передаточными отношениями 7, 11, 13, 25, 49, 64 и 121 с расчетными размерами (аналог делительного диаметра зубчатых колес) 72...144 мм. Редукторы были изготовлены с экономической точностью, которая соответствует 10-й степени точности зубчатых колес с теми же геометрическими параметрами и 10-й степени точности по разработанным таблицам 6.1 и 6.2.

На рисунке 6.3 представлена диаграмма амплитуд  $A$  значимых гармонических составляющих кинематической погрешности, полученных после проведения экспериментальных исследований, усреднения экспериментальных значений амплитуд значимых гармоник и расчета по формулам (6.19) и (6.20).

Значения амплитуд гармоник на диаграмме соответствуют 10-й степени точности, установленной в таблице 6.2, и интервалу расчетных размеров 72...101 мм. Эти значения явились базовыми для расчета значений амплитуд гармоник в других интервалах и степенях точности.

Таблица 6.3 – Система допусков на гармонические составляющие кинематической погрешности механической передачи для 7-й степени точности (уровень В)

Гармоники	Номер интервала расчетного размера											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Расчетный размер, мм											
До 13	13...21	21...32	32...51	51...72	72...102	102...144	144...201	201...284	284...401	401...637	637..1019	
угл. мин												
Одноступенчатая передача												
A1	7,940	7,906	5,132	3,524	2,639	1,869	1,580	1,119	0,985	0,697	0,615	0,468
A2	5,842	5,816	3,776	2,593	1,942	1,375	1,162	0,823	0,725	0,513	0,453	0,344
A3	1,534	1,527	0,992	0,681	0,510	0,361	0,305	0,216	0,190	0,135	0,119	0,090
A4	1,810	1,802	1,170	0,803	0,602	0,426	0,360	0,255	0,225	0,159	0,140	0,107
Az	3,179	3,166	2,055	1,411	1,057	0,749	0,633	0,448	0,394	0,279	0,246	0,187
Au	1,880	1,871	1,215	0,834	0,625	0,443	0,374	0,265	0,233	0,165	0,146	0,111
A2z	6,107	6,081	3,947	2,710	2,030	1,438	1,215	0,861	0,758	0,536	0,473	0,360
A2u	2,043	2,035	1,321	0,907	0,679	0,481	0,407	0,288	0,254	0,179	0,158	0,120
Azu	1,386	1,380	0,896	0,615	0,461	0,326	0,276	0,195	0,172	0,122	0,107	0,082
Двухступенчатая передача												
A2u	1,319	1,314	0,853	0,586	0,439	0,311	0,263	0,186	0,164	0,116	0,102	0,078
Azu	5,971	5,945	3,859	2,650	1,985	1,406	1,188	0,841	0,741	0,524	0,463	0,352

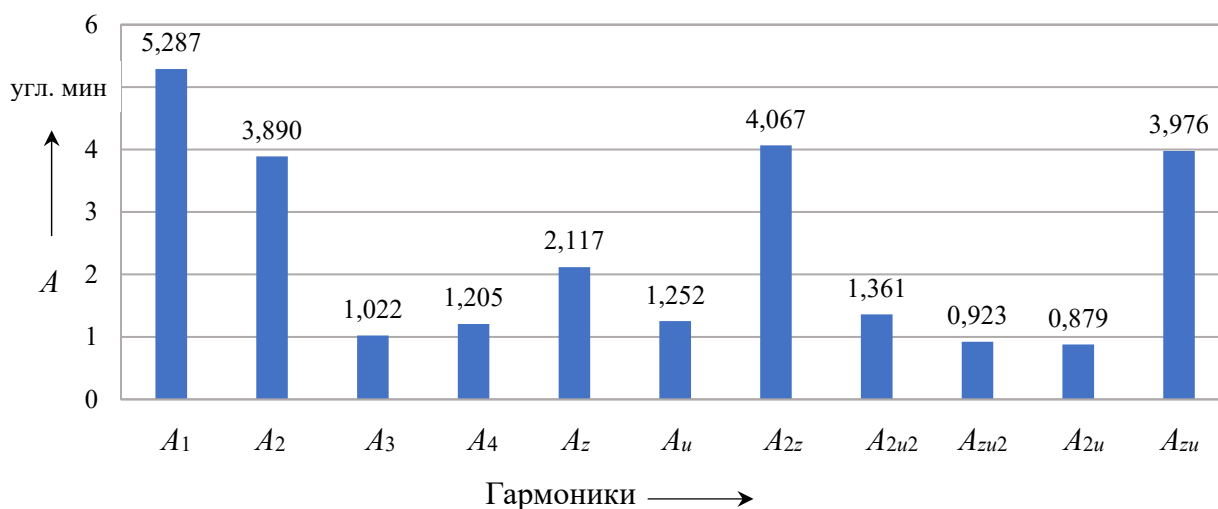


Рисунок 6.3 – Диаграмма базовых гармонических составляющих кинематической погрешности передачи

При переходе значений амплитуд гармоник от 10-й к другой степени точности использовался коэффициент  $\sqrt{2}$ , повышающий значения для 11-й и 12-й степеней точности и понижающий для 3–9-й степени точности. При переходе значений амплитуд гармоник к другим интервалам от базового использовался коэффициент пропорциональности между значениями кинематической погрешности передачи в разных интервалах одной степени точности (см. таблицу 6.2).

Испытания редукторов проводились под нагрузкой, чтобы лучше выделить значимые гармоники в спектре кинематической погрешности.

При экспериментальной оценке кинематической погрешности без нагрузки значение кинематической погрешности может превышать значения, приведенные в таблицах 6.1 и 6.2. Кроме того, без нагрузки в спектре кинематической погрешности не устанавливается четкая закономерность проявления значимых гармоник, выделяется меньше значимых гармоник. В основном это низкочастотные гармоники, амплитуды которых больше, чем под нагрузкой. Это связано с зазорами в зацеплении и в сопрягаемых деталях, которые не выбираются без нагрузки и не позволяют четко выделить значимые гармоники.

При испытаниях частота вращения ведущего вала составляла  $n_1 = 1500$  об/мин, нагружающий момент на ведомом валу редуктора принимался  $M = 40 \dots 100$  Н·м. Поэтому допуски, приведенные в таблицах 6.1 и 6.2, рассчитаны при условиях  $n_1 = 1500$  об/мин и  $M = 40 \dots 100$  Н·м.

На основе разработанных теоретических положений нормы на допуски амплитуд гармонических составляющих кинематической погрешности применимы для любых типов механических передач.

### 6.1.6 Методы расчета и нормирования средних абсолютных значений кинематической погрешности передачи.

Наибольшая кинематическая погрешность передачи показывает лишь размах, определяемый как разность наибольшего и наименьшего значений. При этом значения кинематической погрешности за полный оборот выходного звена передачи могут быть в основном небольшими и только значение наибольшего выброса будет определять наибольший размах и, соответственно, наибольшую кинематическую погрешность. Поэтому разработаны показатели, которые могут в значительной степени исключать влияние случайных или некоторых местных скачков значений кинематической погрешности и ее более объективно оценивать: *среднее арифметическое абсолютных значений кинематической погрешности передачи и стандартное отклонение значений кинематической погрешности передачи.*

Среднее арифметическое абсолютных значений кинематической погрешности передачи  $F_{к.п.ср}$  определяется за полный оборот выходного вала экспериментально или теоретическим моделированием следующим образом. Находят все положительные значения кинематической погрешности передачи, их суммируют и делят на их количество, т. е. находят среднее арифметическое положительных значений. Аналогично определяют среднее арифметическое модулей отрицательных значений. Затем складывают среднее положительное и средний модуль отрицательных значений и получают среднее арифметическое значение кинематической погрешности передачи за оборот выходного вала, которое можно представить математической зависимостью

$$F_{к.п.ср} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^m |\psi_i|}{m}, \quad (6.21)$$

где  $\varphi_i$  – текущее положительное  $i$ -е значение кинематической погрешности;

$\psi_i$  – текущее отрицательное  $i$ -е значение кинематической погрешности;

$n$  – число положительных значений кинематической погрешности;

$m$  – число модулей отрицательных значений кинематической погрешности.

По формуле (6.21) рассчитаны наибольшие значения показателя  $F_{к.п.ср}$ , которые можно рассматривать как допуски на показатель  $F_{к.п.ср}$ , в процентах от наибольшей кинематической погрешности на основе усредненных экспериментальных значений  $F_{к.п.ср}$  при оценке  $\varphi_i$  и  $|\psi_i|$  кинематической погрешности планетарных передач с промежуточными телами качения с разными передаточными отношениями с шариковым и роликовым зацеплением. Кинематическая погрешность передач соответствовала 7–9-й степени

точности в системе допусков (см. таблицу 6.1) с уровнем точности А. Показатель  $F_{к.п.ср}$  рассчитан с учетом разных частот вращения ведущего вала и с различным нагружающим моментом на ведомом валу передачи. На рисунке 6.4 представлен график наибольших средних арифметических значений кинематической погрешности передачи  $F_{к.п.ср}$  в процентах от наибольшей кинематической погрешности  $F_{к.п}$  в зависимости от частоты вращения ведущего вала  $n_1$  без нагрузки, а на рисунке 6.5 – в зависимости от нагружающего момента  $M$  на ведомом валу при усредненной частоте вращения.

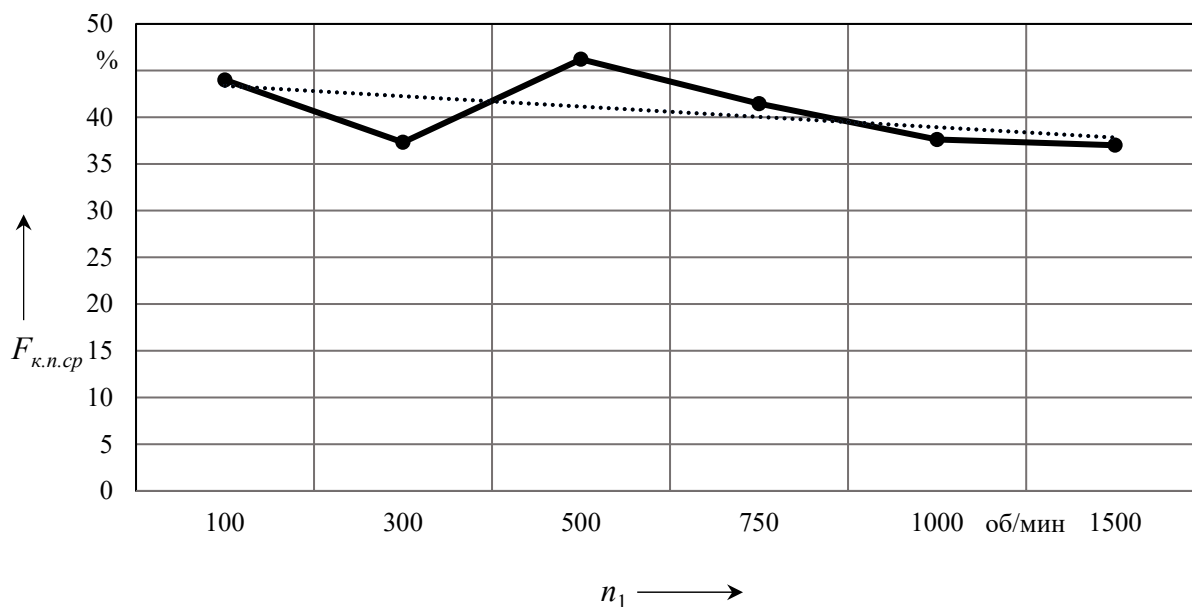


Рисунок 6.4 – Наибольшее среднее арифметическое абсолютных значений в процентах от наибольшей кинематической погрешности передачи в зависимости от частоты вращения

График и линейная линия тренда (см. рисунок 6.4) показывают, что процентное соотношение между наибольшим средним арифметическим абсолютных значений кинематической погрешности передачи  $F_{к.п.ср}$  и ее наибольшей кинематической погрешностью  $F_{к.п}$  без нагрузки мало зависит от частоты вращения ведущего звена. Усредненное отношение показателя  $F_{к.п.ср}$  в процентах к показателю  $F_{к.п}$  на графике (см. рисунок 6.4) составляет 40,65 %.

Анализ графиков (см. рисунок 6.5) показывает, что с увеличением нагрузки от 0 до 100 Н·м процентное отношение показателя  $F_{к.п.ср}$  к показателю  $F_{к.п}$  уменьшается в среднем от 42 % до 32 %, а графики, представленные на рисунке 6.6, показывают, что под нагрузкой от 20 до 100 Н·м процентное отношение показателя  $F_{к.п.ср}$  к показателю  $F_{к.п}$  практически не изменяется, т. е. не изменяется под нагрузкой и в среднем составляет 29,5 %.

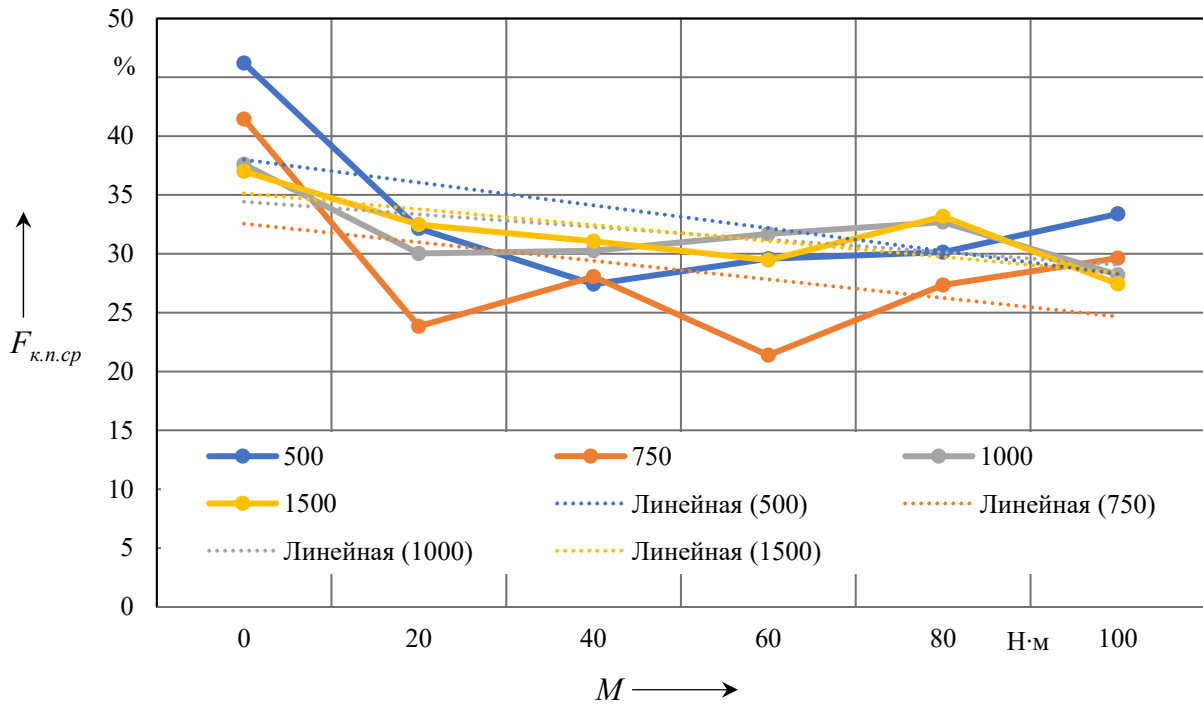


Рисунок 6.5 – Наибольшее среднее арифметическое абсолютных значений в процентах от наибольшей кинематической погрешности передачи в зависимости от нагрузки

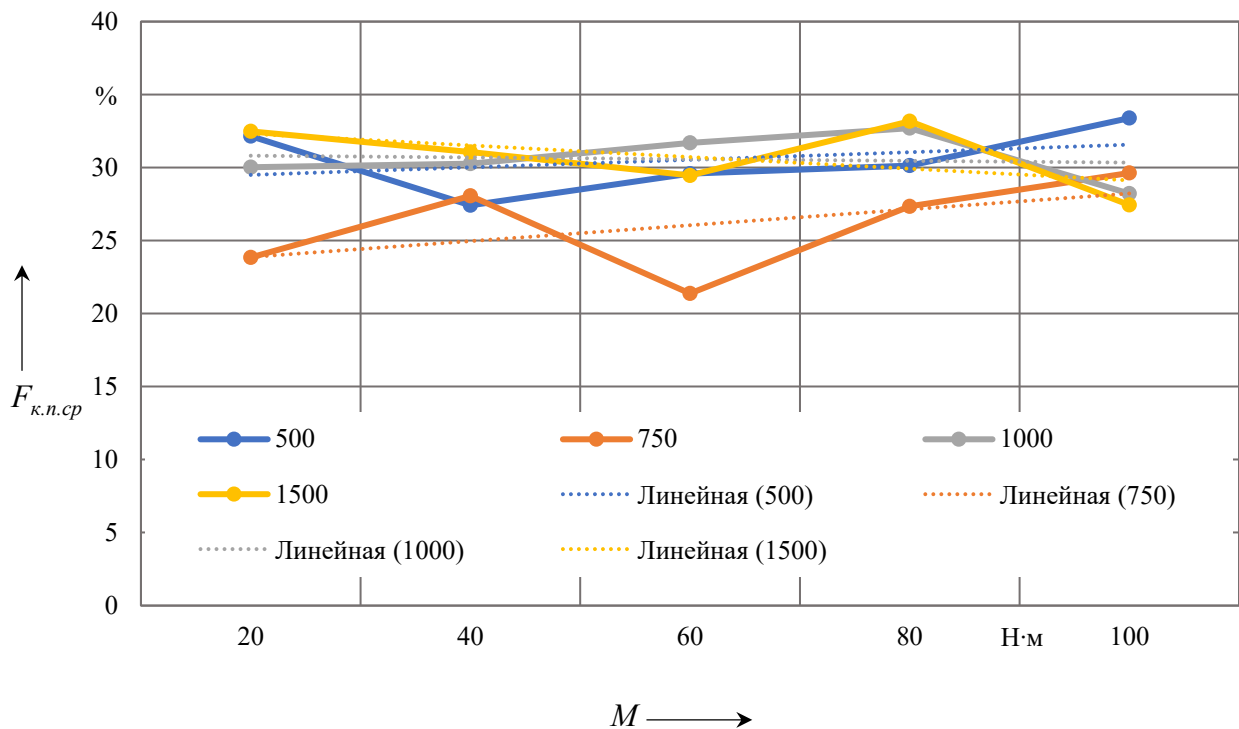


Рисунок 6.6 – Наибольшее среднее арифметическое абсолютных значений в процентах от наибольшей кинематической погрешности передачи в зависимости от нагрузки 20...100 Н·м

Разработанный метод расчета с использованием экспериментальных результатов исследований позволил сделать следующие выводы и установить нормы для разработанного показателя точности  $F_{к.н.ср}$ .

Наибольшее среднее арифметическое абсолютных значений кинематической погрешности передачи  $F_{к.н.ср}$  принимается в долях от наибольшей кинематической погрешности передачи  $F_{к.н}$ :

– без нагрузки с частотой вращения ведущего вала  $n_1 \leq 1500$  мин<sup>-1</sup> принимается коэффициент соотношения  $k = 0,4$ . Тогда  $F_{к.н.ср} = 0,4F_{к.н}$ ;

– с нагрузкой 20...100 Н·м и  $n_1 \leq 1500$  мин<sup>-1</sup> принимается коэффициент соотношения  $k = 0,3$ . Тогда  $F_{к.н.ср} = 0,3F_{к.н}$ .

Коэффициент  $k$  под нагрузкой меньше, чем без нагрузки, т. к. под нагрузкой уменьшается наибольшая кинематическая погрешность  $F_{к.н}$  за счет уменьшения амплитуд низкочастотных гармоник.

Показатель  $F_{к.н.ср}$  характеризует средний размах кинематической погрешности передачи. Чем меньше значение наибольшей кинематической погрешности передачи  $F_{к.н}$ , тем меньше ее среднее арифметическое абсолютных значений  $F_{к.н.ср}$ . Показатель  $F_{к.н.ср}$  связан с наиболее значимыми гармониками на каждом участке амплитудно-частотного спектра кинематической погрешности передачи. Поэтому гармоники в спектре, которые имеют наибольшие амплитуды, характеризуют величину показателя  $F_{к.н.ср}$ . Так как показатель  $F_{к.н.ср}$  связан с наибольшей кинематической погрешностью  $F_{к.н}$ , то при малых значениях показателя  $F_{к.н.ср}$  после приработки механизма значение показателя  $F_{к.н}$  также может значительно уменьшиться в случае, если наибольшее значение кинематической погрешности определяет случайный выброс или несколько местных погрешностей. Таким образом, оценка кинематической погрешности не одним показателем  $F_{к.н}$ , а несколькими показателями, в том числе и показателем  $F_{к.н.ср}$ , дает более объективную оценку кинематической погрешности передачи или механизма за полный оборот выходного вала.

Для повышения точности оценки кинематической погрешности при измерениях на стенде необходимо преобразовать полученные экспериментальные графики относительно среднего значения, исключив при этом неточности математической обработки. Для преобразования графика кинематической погрешности передачи нужно определить среднее экспериментальное значение кинематической погрешности  $\varphi_{ср}$  по формуле

$$\varphi_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i}{n}, \quad (6.22)$$

где  $\varphi_i$  – текущее  $i$ -е значение кинематической погрешности;

$n$  – число значений (измерений) кинематической погрешности.

Преобразованные значения кинематической погрешности определяются по формуле

$$\varphi'_i = \varphi_i - \varphi_{cp}. \quad (6.23)$$

На рисунке 6.7 представлен график кинематической погрешности  $F_{к.н}$  (в радианах) планетарного редуктора [60] за один оборот выходного вала, полученный при  $N$  измерениях на стенде без преобразования с частотой вращения ведущего вала  $n_1 = 750 \text{ мин}^{-1}$  и нагружающим моментом на ведомом валу  $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . График (см. рисунок 6.7) имеет смещение относительно нулевой линии к отрицательным значениям, т. к. значения кинематической погрешности, полученные после измерения, рассчитываются с разными начальными фазами действительного и номинального углов поворота (из-за невозможности экспериментально установить начальную фазу, равную номинальной), что приводит к несимметричному расположению значений на графике. После преобразования графика, изображенного на рисунке 6.7, по формулам (6.22) и (6.23) получен график, исключаяющий смещение относительно его среднего значения. Этот график после преобразования представлен на рисунке 6.8.

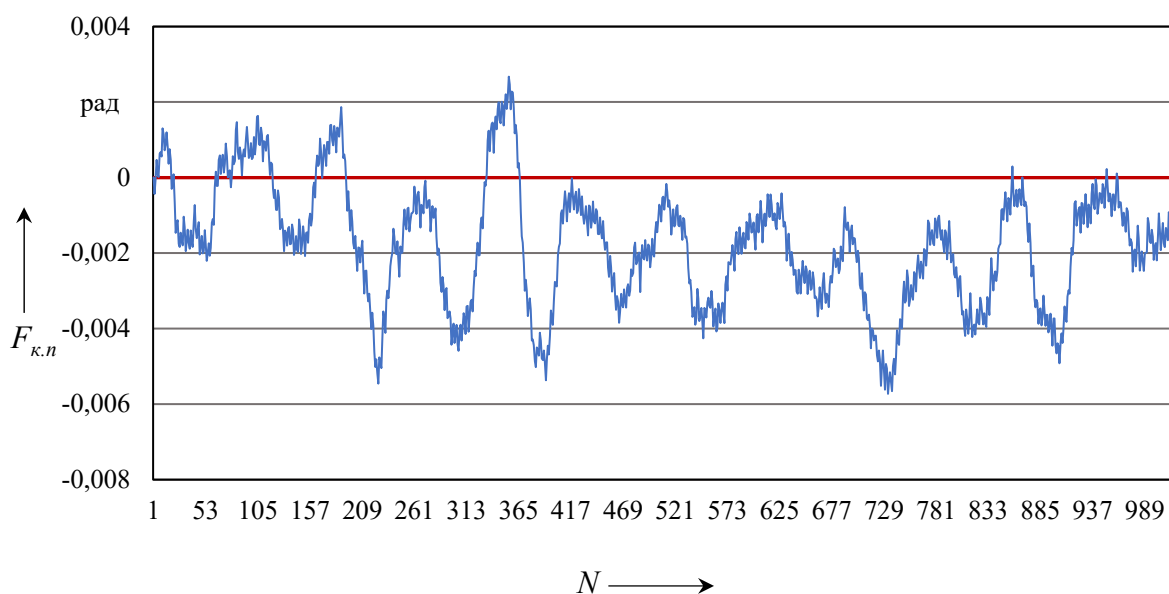


Рисунок 6.7 – График кинематической погрешности редуктора без преобразования

На графике (см. рисунок 6.7) без его преобразования при измеренных и рассчитанных 1024 значениях кинематической погрешности получено 138 положительных и 886 отрицательных значений. Показатель  $F_{к.н} = 28,9$  угл. мин,

$F_{к.н.ср} = 10,6$  угл. мин, что составляет 36,5 %  $F_{к.н.ср}$  от  $F_{к.н.}$ . Верхнее отклонение составило (+3,1) угл. мин, нижнее отклонение составило (-7,5) угл. мин.

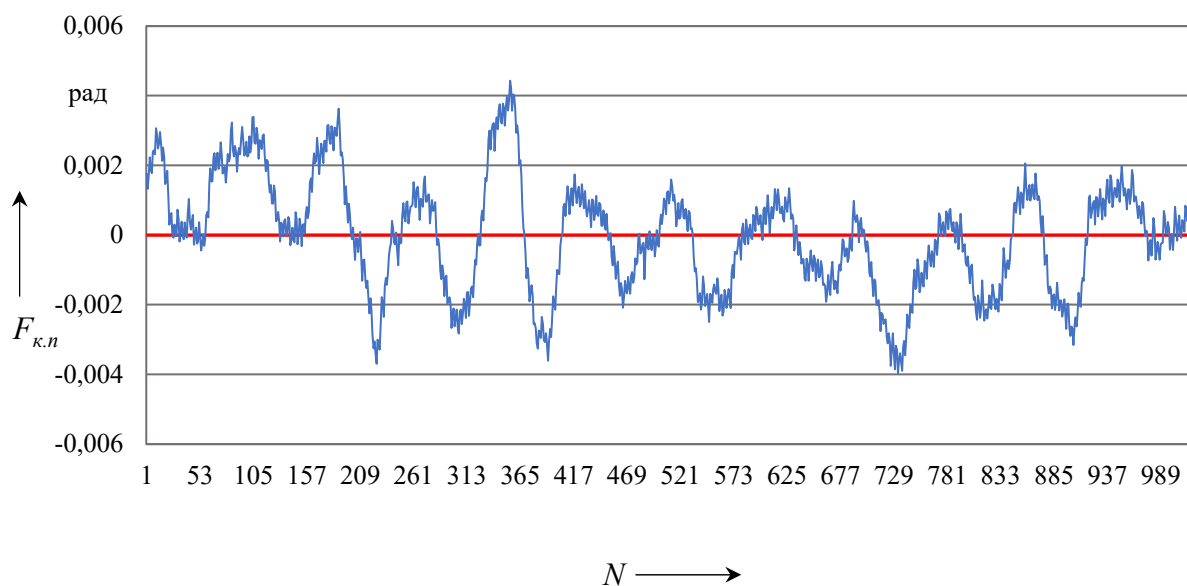


Рисунок 6.8 – График кинематической погрешности редуктора после преобразования

На графике (см. рисунок 6.8) после его преобразования при измеренных и рассчитанных 1024 значениях кинематической погрешности получено 537 положительных и 487 отрицательных значений. Показатель  $F_{к.н.} = 28,9$  угл. мин, значение не изменилось,  $F_{к.н.ср} = 8,8$  угл. мин, что составляет 30,6 % от  $F_{к.н.}$ , значения этих показателей уменьшились. Верхнее отклонение составило (+4,2) угл. мин, нижнее отклонение составило (-4,6) угл. мин, значения близки по модулю.

Из полученных графиков, представленных на рисунках 6.7 и 6.8, рассчитанных и приведенных значений их показателей, а также из большого количества экспериментальных графиков и полученных показателей для разных конструкций передач можно сделать вывод, что после преобразования графика относительно среднего значения разница между количеством положительных и отрицательных значений на графике уменьшается, а верхнее и нижнее отклонения значительно меньше отличаются по модулю. При этом среднее арифметическое значение  $F_{к.н.ср}$  после преобразования уменьшается до 10 %, по сравнению со значением этого показателя до преобразования, в зависимости от величины смещения графика, т. к. графики, полученные после эксперимента на стенде, дают несколько завышенное значение показателя  $F_{к.н.ср}$ .

Учитывая, что на графике кинематической погрешности есть положительные и отрицательные значения, показатель  $F_{к.н.ср}$  можно определять как верхнее отклонение со знаком «+» и нижнее отклонение со знаком «-». После

преобразования графика полученные верхнее и нижнее отклонения при их разных значениях в абсолютных величинах характеризуют несимметричность амплитуд положительной и отрицательной полуволн низкочастотных гармоник в амплитудно-частотном спектре, что может привести к некоторому дисбалансу (биениям) при работе передачи. Причиной разных абсолютных значений верхнего и нижнего отклонений является погрешность формы деталей зацепления, например овальность, несимметричная огранка делительной окружности зубчатого колеса или средней окружности беговой дорожки передачи.

На основе проведенных исследований предложена математическая зависимость, устанавливающая расхождение в процентах между верхним и нижним отклонениями показателя  $F_{к.н.ср}$  для разных степеней точности и интервалов расчетных размеров, приведенных в таблице 6.2. При этом базовой выбрана 7-я степень точности передачи с расхождением верхнего и нижнего отклонений в 10 %.

Математическая зависимость имеет вид

$$\Delta_{к.н.ср}^{6.н} = 10 \left( \sqrt[4]{2} \right)^{(C-7)} \left( \sqrt[4]{2} \right)^{(N-6)}, \quad (6.24)$$

где  $\Delta_{к.н.ср}^{6.н}$  – расхождение в процентах между верхним и нижним отклонениями показателя  $F_{к.н.ср}$ ;

$C$  – степень точности передачи;

$N$  – номер интервала расчетного размера (см. таблицу 6.2).

Разработан и предложен показатель  $F(S)$  – стандартное отклонение значений кинематической погрешности передачи. Стандартное отклонение  $S$  (среднеквадратическое отклонение) на основании смещенной оценки дисперсии [23, 24]

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.25)$$

где  $x_i$  – текущее  $i$ -е значение кинематической погрешности за оборот ведомого вала;

$\bar{x}$  – среднее значение кинематической погрешности за оборот ведомого вала;

$n$  – число значений кинематической погрешности за оборот ведомого вала.

Стандартное отклонение  $S_0$  на основании несмещенной оценки дисперсии

$$S_0 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.26)$$

где  $x_i$  – текущее  $i$ -е значение выборки значений кинематической погрешности;  
 $\bar{x}$  – среднее значение выборки значений кинематической погрешности;  
 $n$  – число значений выборки.

Стандартное отклонение характеризует величину рассеяния (разброса) значений кинематической погрешности относительно ее нулевого значения после преобразования по формулам (6.22) и (6.23). Оно показывает, насколько близко рассеиваются значения относительно центра их группирования, представляющего на графике кинематической погрешности нулевую линию (рисунки 6.7 и 6.8), т. е. характеризует величину среднего размаха кинематической погрешности и позволяет определять местные скачки ее значений, которые после приработки могут сглаживаться и значительно уменьшать показатели  $F_{к.п}$  и  $F_{к.п.ср}$ . Стандартное отклонение также позволяет по выборке определять показатели  $F_{к.п}$  и  $F_{к.п.ср}$  вероятностным методом, что сокращает время контроля и натурных экспериментов.

По результатам проведенных экспериментальных исследований кинематической погрешности редукторов с промежуточными телами качения с шариковым и роликовым зацеплением установлено, что стандартное отклонение, так же как и среднее арифметическое значение кинематической погрешности, мало зависит от частоты вращения ведущего вала при  $n_1 \leq 1500$  мин<sup>-1</sup> без нагрузки и мало зависит от нагрузки при  $M = 20 \dots 100$  Н·м в пределах  $n_1 \leq 1500$  мин<sup>-1</sup>.

Для разработанного показателя  $F(S)$  установлены нормы точности.

Стандартное отклонение значений кинематической погрешности передачи  $F(S)$  принимается в долях от наибольшего среднего арифметического значения кинематической погрешности передачи  $F_{к.п.ср}$  и рассчитывается по формуле (6.25) с учетом всех измеренных значений за оборот выходного вала, представляемых на графиках, и по формуле (6.26) с учетом выборки из всех измеренных значений. Для соотношения показателей  $F(S)$  и  $F_{к.п.ср}$  рассчитаны коэффициенты:

- без нагрузки с частотой вращения ведущего вала  $n_1 \leq 1500$  мин<sup>-1</sup> принимается коэффициент соотношения  $k = 0,58$ . Тогда  $F(S) = 0,58F_{к.п.ср}$ ;
- с нагрузкой  $20 \dots 100$  Н·м и  $n_1 \leq 1500$  мин<sup>-1</sup> принимается коэффициент соотношения  $k = 0,45$ . Тогда  $F(S) = 0,45F_{к.п.ср}$ .

### 6.1.7 Разработка системы допусков на местную кинематическую погрешность механических передач.

В стандартах ГОСТ на допуски местной кинематической погрешности зубчатых колес и передач не учитываются угловая скорость колес и вращение под нагрузкой. Допуски по этим стандартам на практике применяются без учета погрешностей монтажа. Также в стандартах не указано число значений кинематической погрешности на графике за полный оборот ведомого колеса.

В ГОСТах местная кинематическая погрешность определяется как наибольшая разность между местными соседними экстремальными значениями кинематической погрешности передачи. Однако для любых типов передач определение местных экстремальных значений на графике кинематической погрешности дает неоднозначные результаты и вызывает трудности в достоверном определении экстремальных значений. Поэтому предложен метод, который заключается в том, чтобы рассчитывать местную кинематическую погрешность как наибольшую разность по модулю между соседними, но не экстремальными, значениями кинематической погрешности за полный оборот ведомого вала. Такой расчет местной кинематической погрешности представляется простым и удобным при ее определении и обработке экспериментальных данных, т. к. в этом случае не требуется сложное нахождение экстремальных значений, а осуществляется однозначный выбор текущего и предыдущего рассчитанного после измерения значений кинематической погрешности передачи. Предложенный метод подобен на расчет угловой скорости численным методом. При экспериментальных исследованиях кинематической погрешности механических передач на каждом графике получено 1024 значения, что позволило наиболее полно оценивать наибольшую и местную кинематические погрешности передачи, а также строить амплитудно-частотный спектр кинематической погрешности с необходимым и достаточным количеством гармонических составляющих на всех частотных участках спектра. Для расчета местной кинематической погрешности предложенным методом принято 1000 значений кинематической погрешности передачи. Допуск на местную кинематическую погрешность  $f_{io}$ , используя обозначения ГОСТа, можно рассчитать по формуле

$$f_{io} = \max|\varphi_{i+1} - \varphi_i|, \quad (6.27)$$

где  $\varphi_{i+1}$ ,  $\varphi_i$  – следующее и текущее  $i$ -е угловые значения кинематической погрешности передачи.

На основе формулы (6.27) разработана компьютерная программа, которая преобразовывает все значения кинематической погрешности, полученной экспериментально, в абсолютные значения и рассчитывает их

наибольшую разность и, соответственно, допуск на местную кинематическую погрешность.

По результатам экспериментальных исследований планетарных передач с промежуточными телами качения, указанных ранее, получены усредненные значения местной кинематической погрешности при разных скоростях вращения ведущего звена и различном нагружении ведомого звена. На основе этих значений выведены коэффициенты, устанавливающие зависимости местной кинематической погрешности от частоты вращения и нагрузки. Основываясь на многократных экспериментах и расчетах по разработанному методу, установлено, что местная кинематическая погрешность по отношению к наибольшей кинематической погрешности для средних диаметров беговой дорожки планетарных передач с промежуточными телами качения (расчетных размеров передачи (см. таблицу 6.2)) 51...201 мм составляет 12 %...44 % в зависимости от частоты вращения и нагрузки. При этом без нагрузки с частотой вращения ведущего вала  $n_1 \leq 1500 \text{ мин}^{-1}$  отношение местной  $f_{io}$  к наибольшей  $F_{io}$  кинематической погрешности составляет 12 %...15 %, а под нагрузкой 20...100 Н·м и  $n_1 \leq 1500 \text{ мин}^{-1}$  составляет 15,5 %...44 %. В соответствии с этими зависимостями принят базовый (минимальный) коэффициент соотношения  $k_b = 0,12$  при частоте вращения ведущего вала  $n_1 \leq 750 \text{ мин}^{-1}$  без нагрузки для расчетных размеров передачи 51...201 мм. Тогда  $f_{io} = 0,12F_{io}$ . На рисунке 6.9 представлен график, показывающий коэффициент соотношения  $k$  между местной и наибольшей кинематическими погрешностями в зависимости от частоты вращения без нагрузки для расчетных размеров передачи 51...201 мм.

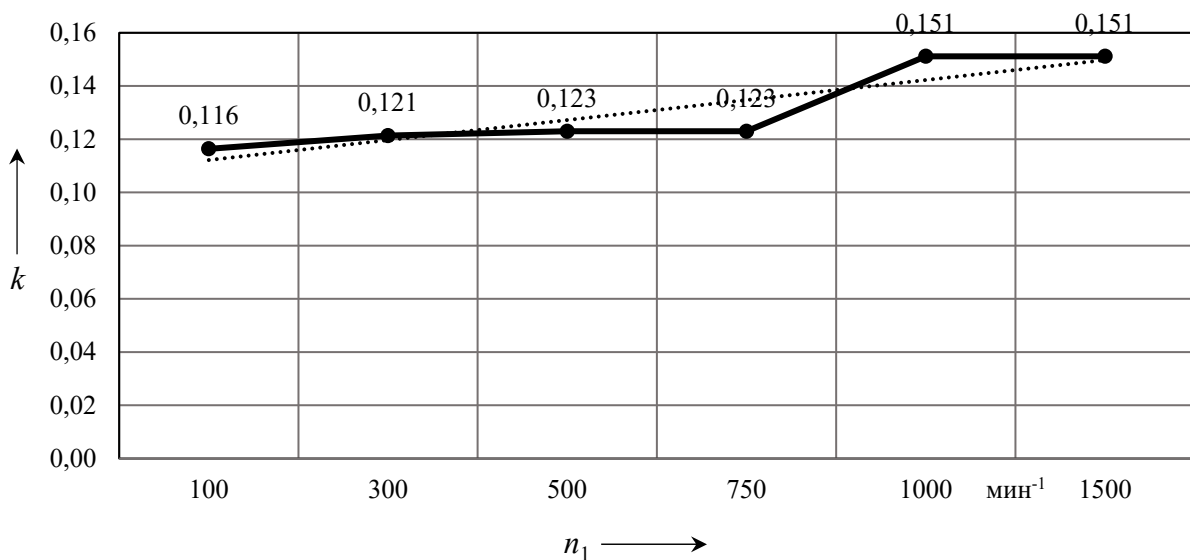


Рисунок 6.9 – Коэффициент соотношения между местной и наибольшей кинематическими погрешностями в зависимости от частоты вращения без нагрузки

На основе графика (см. рисунок 6.9) при увеличении частоты вращения от 100 до 1500 мин<sup>-1</sup> получен коэффициент частоты вращения (скорости)  $k_c = 1,3$ . Если принять на графике для 100 мин<sup>-1</sup>  $k_c = 1,0$ , то тогда можно принять для 300 мин<sup>-1</sup>  $k_c = 1,04$ , для 500 и 750 мин<sup>-1</sup>  $k_c = 1,06$ , для 1000 и 1500 мин<sup>-1</sup>  $k_c = 1,3$ . Линия тренда на графике показывает увеличение коэффициента  $k_c$  от частоты вращения  $n_1$ . При увеличении частоты вращения ведущего вала коэффициент скорости  $k_c$  умножается на базовый коэффициент  $k_\delta = 0,12$  и тогда местная кинематическая погрешность, с учетом частоты вращения ведущего вала,  $f_{io} = k_\delta k_c F_{io}$ , где  $k = k_\delta k_c = 0,12 k_c$ .

Получен линейный полином для расчета коэффициента соотношения  $k$  в пределах от 100 до 1500 мин<sup>-1</sup>, описывающий линию тренда на графике,

$$k = 0,00003 n_1 + 0,11175 . \quad (6.28)$$

Также получены коэффициенты для расчета местной кинематической погрешности, учитывающие нагрузку.

На рисунке 6.10 представлен график, показывающий коэффициент нагрузки  $k_n$ , учитывающий увеличение местной кинематической погрешности под нагрузкой ведомого вала в зависимости от частоты вращения ведущего вала для расчетных размеров передачи 51...201 мм.

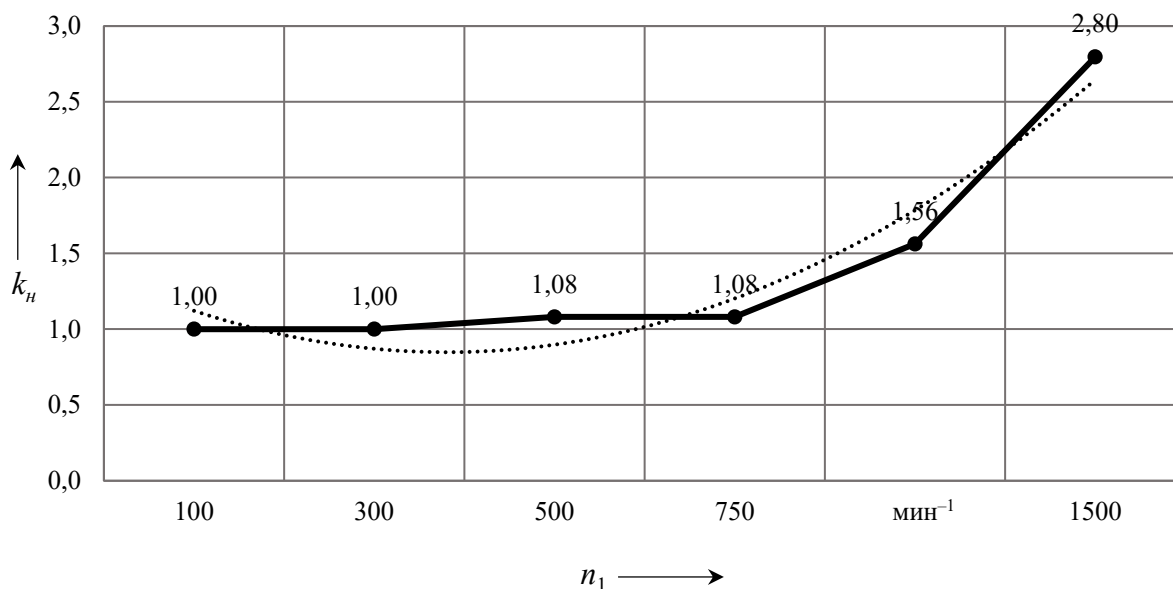


Рисунок 6.10 – Коэффициент нагрузки в зависимости от частоты вращения ведущего вала

На графике (см. рисунок 6.10) обозначены коэффициенты  $k_n$  в зависимости от частоты вращения. График получен из процентного соотношения местной к наибольшей кинематической погрешности под нагрузкой. Так как

минимальный и максимальный проценты местной от наибольшей кинематической погрешности с нагрузкой составляют 15,5 % и 44 % соответственно, то отношение этих процентов дает наибольший коэффициент на графике  $k_n = 2,8$ . Из графика также видно, что для частоты вращения  $n_1$  от 100 до 750 мин<sup>-1</sup> коэффициент нагрузки практически не изменяется и при частотах вращения 1000 и 1500 мин<sup>-1</sup> увеличивается в 1,56 и 2,8 раза.

При экспериментальных исследованиях планетарных передач с промежуточными телами качения установлено (см. разд. 5), что с увеличением нагружающего момента  $M$  от 20 до 100 Н·м на ведомом валу передачи и при одной и той же частоте вращения ведущего вала местная кинематическая погрешность мало изменяется и может значительно изменяться при любом нагружении от 20 до 100 Н·м, но с разной частотой вращения ведущего вала (рисунки 5.68–5.71). Таким образом, местная кинематическая погрешность передачи с нагрузкой зависит от частоты вращения.

На графике (см. рисунок 6.10) показана линия тренда, которую описывает полиномиальное уравнение второй степени

$$k_n = 0,000001 n_1^2 - 0,000952 n_1 + 1,125251. \quad (6.29)$$

Таким образом, местную кинематическую погрешность с коэффициентами  $k_c$  и  $k_n$ , учитывающими частоту вращения ведущего звена  $n_1$  и нагружающий момент  $M$  на ведомом звене для расчетных размеров передачи 51...201 мм, можно рассчитать по формуле

$$f_{io} = 0,12 F_{io} k_c k_n. \quad (6.30)$$

На основе предложенного метода и разработанных математических зависимостей разработана система допусков для расчета местной кинематической погрешности механической передачи для 12 интервалов расчетных размеров и степеней точности от 3-й по 12-ю. В таблице 6.4 представлены допуски на местную кинематическую погрешность механической передачи с  $n_1 \leq 750$  мин<sup>-1</sup> без нагрузки с коэффициентами  $k = 0,12$ ,  $k_c = 1,0$  и  $k_n = 1,0$ .

В таблице 6.4 базовой расчетной степенью принята 7-я степень точности, так же как и для наибольшей кинематической погрешности. Базовыми интервалами, для которых вначале проводился расчет, приняты интервалы 5–8 с расчетными размерами передачи 51...201 мм (см. таблицу 6.4). Расчеты для базовых параметров выполнялись по формуле (6.30) с коэффициентами  $k_c = 1,0$  и  $k_n = 1,0$ . Между степенями точности использовался коэффициент  $\sqrt{2}$  по аналогии с международными стандартами.

Таблица 6.4 – Система допусков на местную кинематическую погрешность механической передачи с  $n_1 \leq 750$  мин<sup>-1</sup> без нагрузки

Степень точности		Номер интервала расчетного размера											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		До 13	13...21	21...32	32...51	51...72	72...102	102...144	144...201	201...284	284...401	401...637	637...1019
Рис. 6.4													
угл. мин													
Уровень А – Нормальная точность													
3	2,81	2,79	1,81	1,25	0,78	0,56	0,47	0,33	0,25	0,17	0,15	0,12	0,12
4	3,97	3,95	2,56	1,76	1,11	0,78	0,67	0,47	0,35	0,25	0,22	0,16	0,16
5	5,62	5,59	3,62	2,49	1,57	1,11	0,94	0,67	0,49	0,35	0,31	0,23	0,23
6	7,94	7,90	5,13	3,52	2,21	1,57	1,33	0,94	0,70	0,49	0,44	0,33	0,33
7	<b>11,23</b>	<b>11,17</b>	<b>7,25</b>	<b>4,98</b>	<b>3,13</b>	<b>2,22</b>	<b>1,88</b>	<b>1,33</b>	<b>0,99</b>	<b>0,70</b>	<b>0,62</b>	<b>0,46</b>	<b>0,46</b>
8	15,88	15,80	10,25	7,04	4,43	3,14	2,66	1,88	1,40	0,98	0,87	0,66	0,66
9	22,46	22,35	14,50	9,96	6,26	4,44	3,77	2,66	1,98	1,39	1,23	0,93	0,93
10	31,77	31,60	20,50	14,09	8,86	6,28	5,33	3,77	2,80	1,97	1,74	1,31	1,31
11	44,92	44,70	29,00	19,92	12,53	8,88	7,54	5,33	3,96	2,79	2,46	1,86	1,86
12	63,53	63,21	41,01	28,17	17,72	12,56	10,66	7,53	5,59	3,94	3,48	2,63	2,63
Уровень В – Повышенная точность													
3	2,32	2,32	1,51	1,04	0,64	0,45	0,39	0,28	0,21	0,15	0,13	0,10	0,10
4	3,28	3,28	2,13	1,47	0,90	0,64	0,56	0,39	0,30	0,21	0,18	0,14	0,14
5	4,65	4,64	3,02	2,08	1,28	0,91	0,79	0,56	0,42	0,30	0,26	0,20	0,20
6	6,57	6,56	4,27	2,95	1,81	1,28	1,11	0,79	0,60	0,42	0,36	0,29	0,29
7	<b>9,29</b>	<b>9,28</b>	<b>6,04</b>	<b>4,17</b>	<b>2,56</b>	<b>1,81</b>	<b>1,57</b>	<b>1,12</b>	<b>0,85</b>	<b>0,60</b>	<b>0,51</b>	<b>0,40</b>	<b>0,40</b>
8	13,14	13,12	8,54	5,89	3,61	2,56	2,22	1,58	1,20	0,84	0,73	0,57	0,57
9	18,58	18,55	12,07	8,33	5,11	3,62	3,14	2,23	1,70	1,19	1,03	0,81	0,81
10	26,28	26,24	17,07	11,79	7,23	5,13	4,45	3,16	2,40	1,68	1,46	1,14	1,14
11	37,16	37,10	24,15	16,67	10,22	7,25	6,29	4,46	3,39	2,38	2,06	1,61	1,61
12	52,55	52,47	34,15	23,57	14,46	10,25	8,89	6,31	4,79	3,37	2,91	2,28	2,28

В стандартах ГОСТ с увеличением делительного диаметра колеса увеличивается допуск на местную кинематическую погрешность. В соответствии с этим принято для разработанной системы допусков использовать коэффициент  $\sqrt[4]{2}$ , т. к. он близок к соотношениям между интервалами делительных диаметров в таблицах стандартов ГОСТ на допуски зубчатых колес и передач.

При этом для интервалов 1–4 (см. таблицу 6.4) местная кинематическая погрешность определялась по соотношению  $f_{io} = 0,12\sqrt[4]{2}$ , для интервалов 5–8  $f_{io} = 0,12$ , для интервалов 9–12  $f_{io} = 0,12/\sqrt[4]{2}$ .

По разработанному и предложенному методу допуски (см. таблицу 6.4) (с частотой вращения ведущего вала  $n_1 \leq 750$  мин<sup>-1</sup> без нагрузки) на местную кинематическую погрешность, а также процент соотношения между местной и наибольшей кинематическими погрешностями меньше в среднем в 1,7–2 раза, чем по стандартам ГОСТ для зубчатых колес и передач. Это связано с тем, что по стандартам ГОСТ местная кинематическая погрешность определяется как разность между соседними экстремальными значениями кинематической погрешности передачи, которые в стандартах ГОСТ принимаются не ближайшими значениями кинематической погрешности, а значениями с угловым шагом, связанным с погрешностью шага и зубцовой частоты. Так как по стандартам ГОСТ при определении местной кинематической погрешности принимались значения кинематической погрешности не ближайшие, а приблизительно равные шагу, то местная кинематическая погрешность в этом случае будет больше и будет иметь больший процент от наибольшей кинематической погрешности, чем по новому разработанному методу, по которому местная кинематическая погрешность передачи определялась как разность ближайших значений кинематической погрешности передачи, полученных на основе измерений.

В экспериментальных исследованиях и по разработанному методу оценки местной кинематической погрешности передачи учитывались погрешности монтажа (в отличие от стандартов ГОСТ), которые могут увеличивать наибольшую кинематическую погрешность за счет низкочастотных гармоник, не увеличивая значения местной кинематической погрешности, что также понижает процент соотношения между местной и наибольшей кинематическими погрешностями разработанным методом в сравнении со стандартами ГОСТ.

При определении как наибольшей, так и местной кинематической погрешности в стандартах ГОСТ не указано число измеряемых значений. Также не учтены и не приведены допуски для разной частоты вращения колес и с учетом нагрузки.

Предложено местную, так же как и наибольшую кинематическую, погрешность при контроле оценивать по 1000 измеряемым значениям с отклонениями в плюс и минус от 1000 значений не более 5 %. Допуски на местную кинематическую погрешность с частотами вращения более  $750 \text{ мин}^{-1}$  и по  $1500 \text{ мин}^{-1}$  без нагрузки можно рассчитать по формуле (6.30) с  $k_c$ , указанными ранее для разной частоты вращения, и  $k_n = 1,0$ . Допуски на местную кинематическую погрешность с нагрузкой  $20 \dots 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и разной частотой вращения также рассчитываются по формуле (6.30) с  $k_c$ , указанным ранее для разной частоты вращения, и  $k_n$ , определяемым по графику (см. рисунок 6.10).

По усредненным результатам проведенных экспериментальных исследований и математической обработке полученных экспериментальных данных установлены зависимости и коэффициенты, связывающие местную кинематическую погрешность как наибольшую и среднее арифметическое ее абсолютных значений. Показатель *среднее арифметическое абсолютных значений местной кинематической погрешности передачи*  $f_{iocr}$  определяется за полный оборот выходного вала. Показатель  $f_{iocr}$  может использоваться для высокоточных и точных передач 3–6-й степени точности и рассчитываться такими же методами, как и *среднее арифметическое абсолютных значений кинематической погрешности передачи*  $F_{к.п.ср}$ .

На рисунке 6.11 показан график процентного отношения среднего арифметического абсолютных значений местной кинематической погрешности  $f_{iocr}$  к ее наибольшему значению  $f_{io}$  в зависимости от частоты вращения без нагрузки, полученный по усредненным значениям экспериментальных исследований планетарных передач с промежуточными телами качения.

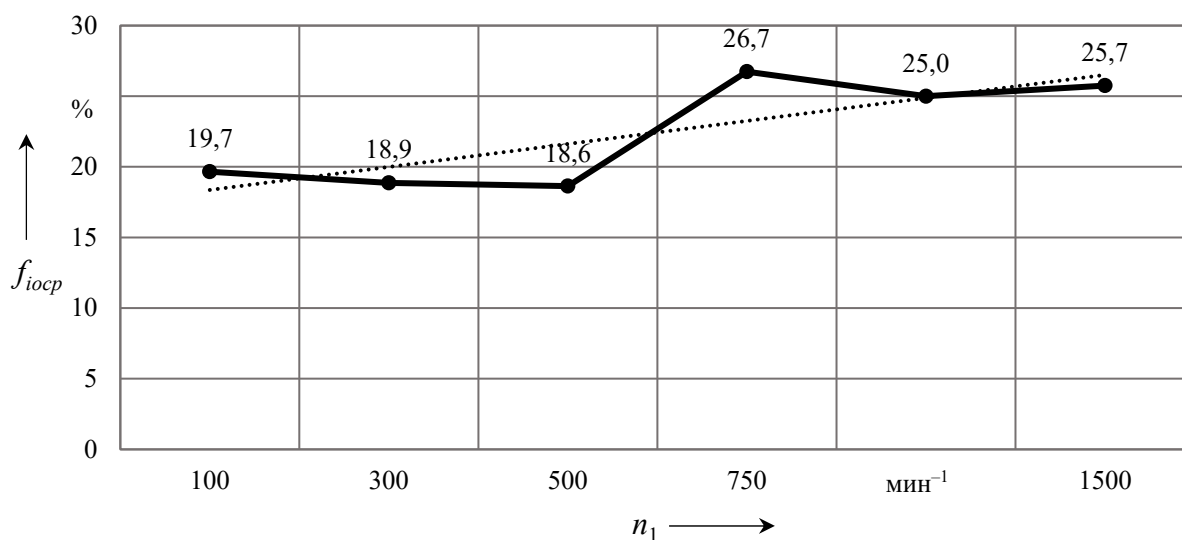


Рисунок 6.11 – График процентного отношения среднего арифметического абсолютных значений местной кинематической погрешности к ее наибольшему значению

Из графика (см. рисунок 6.11) видно, что для частот вращения 100, 300 и 500 мин<sup>-1</sup> ведущего вала процентные отношения  $f_{iocr}$  к  $f_{io}$  близки по значениям и их среднее значение равно 19 %. Для частот вращения 750, 1000 и 1500 мин<sup>-1</sup> процентные отношения  $f_{iocr}$  к  $f_{io}$  также приблизительно одинаковы и их среднее значение равно 26 %. Исходя из этих процентных соотношений приняты коэффициенты скорости для показателя  $f_{iocr}$ : для частоты вращения  $n_1 = 100...500$  мин<sup>-1</sup>  $k_c = 0,19$ ; для частоты вращения  $n_1$  свыше 500 по 1500 мин<sup>-1</sup>  $k_c = 0,26$ .

На рисунке 6.12 показан график, представляющий коэффициент нагрузки  $k_n$ , учитывающий нагружающий момент  $M$  в пределах 20...100 Н·м на выходном валу передачи для показателя  $f_{iocr}$  в зависимости от частоты вращения  $n_1$ .

Среднее арифметическое местной кинематической погрешности передачи  $f_{iocr}$  определяется по формуле

$$f_{iocr} = f_{io} k_c k_n, \quad (6.31)$$

где значения  $k_c$  представлены ранее, а значения  $k_n$  выбираются из графика, приведенного на рисунке 6.12.

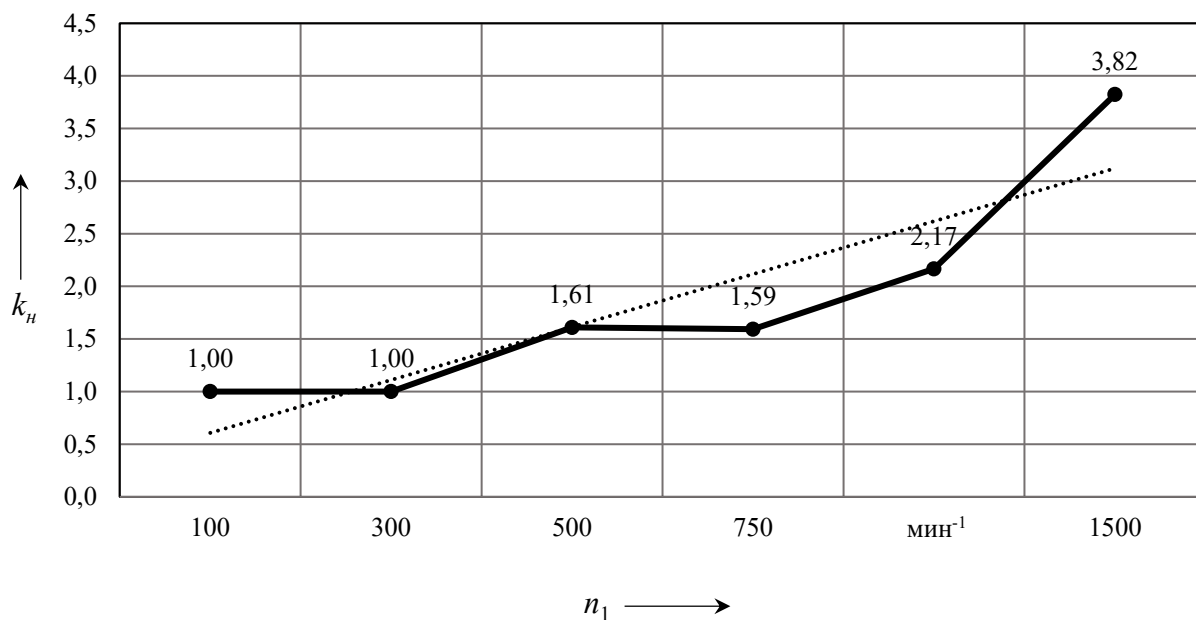


Рисунок 6.12 – Коэффициент нагрузки, учитывающий нагружающий момент на выходном валу передачи

## **6.2 Теоретическое обоснование разработки общих показателей и допусков по нормам контакта и бокового зазора механических передач**

### **6.2.1 Теоретические принципы разработки методов расчета показателей по нормам контакта механической передачи.**

В соответствии со стандартами ГОСТ на допуски зубчатых передач для норм контакта зубьев зубчатых колес в передаче установлены допуски на показатели: отклонение от параллельности осей  $f_{xr}$  и перекос осей  $f_{yr}$ . В стандартах указано, что допуски на эти показатели установлены от рабочих осей зубчатых колес, т. е. с погрешностями монтажа. Однако значения допусков на показатели  $f_{xr}$  и  $f_{yr}$  слишком малы для того, чтобы их относить к суммарным допускам с учетом монтажа подшипников и валов в корпус. Технологически их можно обеспечить только для точности зубчатого колеса. Так, например, по ГОСТ 1643–81 на показатели  $f_{xr}$  и  $f_{yr}$  при ширине зубчатого венца 40...100 мм установлены следующие допуски: для 7-й степени точности  $f_x = 16$  мкм,  $f_y = 8$  мкм; для 8-й степени точности  $f_x = 25$  мкм,  $f_y = 12$  мкм. Такие небольшие допуски для этих не самых высоких степеней точности могут относиться только к изготовлению зубчатых колес без учета погрешностей изготовления и сборки валов, отверстий корпуса и подшипников. Поэтому предложено на основе зубчатых цилиндрических передач для показателей  $f_{xr}$  и  $f_{yr}$  по нормам контакта разработать методику расчета погрешностей монтажа, относящихся к погрешностям изготовления и сборки других деталей передачи, кроме зубчатых колес, для любого типа механических передач. При этом предложено полученные допуски на погрешности монтажа суммировать с допусками на показатели  $f_{xr}$  и  $f_{yr}$  по ГОСТ 1643–81 и ввести суммарные показатели  $f_{\Sigma x}$  и  $f_{\Sigma y}$  и допуски на эти показатели  $f_{\Sigma xT}$  и  $f_{\Sigma yT}$ . При расчете погрешностей монтажа и предложенных суммарных показателей  $f_{\Sigma x}$  и  $f_{\Sigma y}$  учитывались методы расчета случайных величин [23, 24], а также методы, представленные в ГОСТ 21098–82. Показатели по нормам контакта зубьев зубчатых колес в передаче (отклонение от параллельности осей  $f_{xr}$  и перекос осей  $f_{yr}$ ) характеризуют точность зубчатых передач по нормам контакта и могут использоваться для любого типа механической передачи.

Суммарное пятно контакта в разработанной системе нормирования точности не рассматривается, т. к. этот показатель не является универсальным для любого типа механических передач (для передач с малой поверхностью контакта или большим количеством деталей в зацеплении) и контроль по этому показателю вызывает трудности для некоторых типов передач.

### 6.2.2 Методика определения погрешностей монтажа механической передачи для показателей норм контакта.

Для расчета погрешностей монтажа для норм контакта любой механической передачи в качестве базовой принята зубчатая цилиндрическая передача, в которой рассматриваются погрешности изготовления и сборки поверхностей подшипников, валов и корпуса, влияющие на контакт зубьев зубчатых колес. Установлены следующие погрешности монтажа механической передачи для норм контакта:

- $\Delta_{\epsilon 1}$  – погрешность от торцового биения заплечика ведущего вала, приводящая к отклонению от перпендикулярности оси шестерни;
- $\Delta_{\epsilon 2}$  – погрешность от торцового биения заплечика ведущего вала, приводящая к отклонению от перпендикулярности оси колеса;
- $\Delta_{c1}$  – отклонение от соосности двух отверстий корпуса под подшипники ведущего вала;
- $\Delta_{c2}$  – отклонение от соосности двух отверстий корпуса под подшипники ведомого вала;
- $\Delta_{\epsilon 1}$  – зазор между наружным кольцом подшипника, установленного на ведущем валу, и отверстием корпуса (при перекосе подшипников при сборке);
- $\Delta_{\epsilon 2}$  – зазор между наружным кольцом подшипника, установленного на ведомом валу, и отверстием корпуса (при перекосе подшипников при сборке);
- $\Delta_{n12}$  – отклонение от параллельности осей отверстий корпуса для ведущего и ведомого валов с подшипниками.

Суммарную погрешность монтажа механической передачи, с учетом вышеописанных погрешностей, можно рассчитать по формуле

$$E_{\Sigma M} = k k_p \sqrt{\Delta_{\epsilon 1}^2 + \Delta_{\epsilon 2}^2 + \Delta_{c1}^2 + \Delta_{c2}^2 + \Delta_{\epsilon 1}^2 + \Delta_{\epsilon 2}^2 + \Delta_{n12}^2}, \quad (6.32)$$

где  $k$  – коэффициент относительного рассеяния случайных величин;

$k_p$  – коэффициент фазовой компенсации.

Коэффициенты  $k$  и  $k_p$  в формуле учитываются в соответствии с [23, 24].

Если разложить суммарную погрешность монтажа  $E_{\Sigma M}$  по координатным осям  $X$  и  $Y$ , то получим формулы суммарных погрешностей монтажа в направлении осей  $X$  и  $Y$  для расчета показателей  $f_x$  и  $f_y$

$$E_{\Sigma Mx} = k k_p \sqrt{\Delta_{\epsilon 1x}^2 + \Delta_{\epsilon 2x}^2 + \Delta_{c1x}^2 + \Delta_{c2x}^2 + \Delta_{\epsilon 1x}^2 + \Delta_{\epsilon 2x}^2 + \Delta_{n12x}^2}; \quad (6.33)$$

$$E_{\Sigma My} = k k_p \sqrt{\Delta_{\epsilon 1y}^2 + \Delta_{\epsilon 2y}^2 + \Delta_{c1y}^2 + \Delta_{c2y}^2 + \Delta_{\epsilon 1y}^2 + \Delta_{\epsilon 2y}^2 + \Delta_{n12y}^2}, \quad (6.34)$$

где  $x$  – индекс для погрешностей монтажа механической передачи в направлении оси  $X$ ;

$y$  – индекс для погрешностей монтажа механической передачи в направлении оси  $Y$ .

### 6.2.3 Разработка системы допусков на показатели норм контакта механических передач.

Система допусков на показатели норм контакта механических передач основана на математических зависимостях (5.32)–(5.34). При расчете допусков для разных степеней точности и разных геометрических размеров зубчатых колес исходной расчетной степенью точности принята 8-я степень точности цилиндрических зубчатых передач. Погрешности монтажа, приведенные в формуле (6.32), деталей передачи рассчитывались для размеров по 7-му качеству точности, для отклонений расположения поверхностей по 6-й степени точности, что соответствует рекомендациям для обеспечения 8-й степени точности зубчатой передачи. Расчетным размером принят размер на ширину зубчатого венца. Исходной расчетной принята ширина зубчатого венца в интервале 40...100 мм, что соответствует интервалу таблиц стандартов ГОСТ на допуски зубчатых передач и делительным диаметрам в интервале 50...200 мм. При расчете по формуле (6.32), с учетом вышеуказанной точности размеров и отклонений расположения поверхностей, получены следующие значения исходных погрешностей монтажа:  $\Delta_{\delta 1} = 25$  мкм,  $\Delta_{\delta 2} = 25$  мкм,  $\Delta_{c1} = 16$  мкм,  $\Delta_{c2} = 16$  мкм,  $\Delta_{\beta 1} = 14$  мкм,  $\Delta_{\beta 2} = 14$  мкм,  $\Delta_{n12} = 20$  мкм. В формулах (6.32)–(6.34) принят коэффициент  $k = 1$ , т. к. слагаемые в формулах, являясь случайными величинами, близки по значениям, независимы и рассеяние этих параметров может подчиняться закону нормального распределения. В формулах (6.32)–(6.34) принят коэффициент  $k_p = 0,82$ , учитывающий фазовую компенсацию при близких частотах колебаний погрешностей монтажа, проявляющихся в кинематической погрешности передачи при вращении. После расчетов по формулам (6.32)–(6.34) с полученными исходными погрешностями в заданном интервале ширины зубчатого венца 40...100 мм для 8-й степени точности исходные погрешности монтажа составили:  $E_{\Sigma M} = 41$  мкм,  $E_{\Sigma Mx} = 37$  мкм,  $E_{\Sigma My} = 18$  мкм. При расчете погрешностей монтажа в направлении осей  $X$  и  $Y$  для расчета допусков  $f_{\Sigma xT}$  и  $f_{\Sigma yT}$  принято соотношение  $E_{\Sigma Mx}/E_{\Sigma My} \approx 2$ , что соответствует соотношению допусков  $f_x$  и  $f_y$  в таблицах, приведенных в ГОСТ 1643–81.

На основе вышепредставленного обоснования и допусков  $f_x$  и  $f_y$  на показатели точности  $f_{xr}$  и  $f_{yr}$ , соответствующих стандартам ГОСТ, для механических передач с параллельными осями предложено введенные

допуски  $f_{\Sigma xT}$  и  $f_{\Sigma yT}$  на показатели – суммарное отклонение от параллельности осей  $f_{\Sigma x}$  и суммарный перекос осей  $f_{\Sigma y}$  рассчитывать по формулам

$$f_{\Sigma xT} = \sqrt{f_x^2 + E_{\Sigma Mx}^2}; \quad f_{\Sigma yT} = \sqrt{f_y^2 + E_{\Sigma My}^2}. \quad (6.35)$$

Для механических передач с соосным расположением валов предложено ввести показатель – суммарное отклонение от соосности осей  $f_{\Sigma xy}$  и допуск на этот показатель  $f_{\Sigma xyT}$ , который можно рассчитать по формуле

$$f_{\Sigma xyT} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + E_{\Sigma M}^2}. \quad (6.36)$$

В показателях  $f_{\Sigma x}$ ,  $f_{\Sigma y}$ ,  $f_{\Sigma xy}$  рассматриваются рабочие оси, т. е. оси валов механизмов (редукторов).

В таблице 6.5 представлены значения погрешностей монтажа  $E_{\Sigma M}$ ,  $E_{\Sigma Mx}$ ,  $E_{\Sigma My}$  и значения допусков на показатели  $f_{\Sigma xy}$ ,  $f_{\Sigma x}$ ,  $f_{\Sigma y}$  для норм контакта деталей зацепления в механической передаче, рассчитанные по формулам (6.32)–(6.36) и вышеприведенным обоснованиям.

Таблица 6.5 – Система допусков на показатели  $f_{\Sigma x}$ ,  $f_{\Sigma y}$ ,  $f_{\Sigma xy}$  для норм контакта и погрешности монтажа  $E_{\Sigma M}$ ,  $E_{\Sigma Mx}$ ,  $E_{\Sigma My}$

Степень точности	Номер интервала					
	1	2	3	4	5	6
	Расчетный размер, мм					
	до 40	<b>40...100</b>	100...160	160...250	250...400	400...630
Допуск $f_x$ на отклонение от параллельности осей по ГОСТ 1643–81, мкм						
8	18	<b>25</b>	32	40	45	56
Допуск $f_y$ на перекос осей по ГОСТ 1643–81, мкм						
8	9	<b>12</b>	16	20	22	28
Погрешность монтажа $E_{\Sigma M}$ механической передачи с соосным расположением валов, мкм						
8	33	<b>41</b>	52	65	82	103
Погрешность монтажа $E_{\Sigma Mx}$ механической передачи с параллельными осями валов, мкм						
8	29	<b>37</b>	47	59	74	93

Продолжение таблицы 6.5

Степень точности	Номер интервала					
	1	2	3	4	5	6
	Расчетный размер, мм					
	до 40	<b>40...100</b>	100...160	160...250	250...400	400...630
Погрешность монтажа $E_{\Sigma\mu}$ механической передачи с параллельными осями валов, мкм						
8	15	<b>19</b>	23	29	37	47
Допуск $f_{\Sigma yT}$ на суммарное отклонение от соосности валов (для механической передачи с соосным расположением валов), мкм						
8	39	<b>49</b>	62	79	99	125
Допуск $f_{\Sigma xT}$ на суммарное отклонение от параллельности осей (для механической передачи с параллельными осями), мкм						
8	35	<b>45</b>	56	71	89	113
Допуск $f_{\Sigma yT}$ на суммарный перекося осей (для механической передачи с параллельными осями), мкм						
8	18	<b>22</b>	28	35	44	56
Допуск $f_{\Sigma yT}$ на суммарное отклонение от соосности валов (для механической передачи с соосным расположением валов), мкм						
3	7	9	11	14	18	22
4	10	12	16	20	25	31
5	14	18	22	28	35	44
6	20	25	31	39	49	62
7	28	35	44	56	70	88
8	39	<b>49</b>	62	79	99	125
9	56	70	88	111	140	176
10	79	99	125	157	198	249
11	111	140	176	222	280	353
12	157	198	249	314	396	499
Допуск $f_{\Sigma xT}$ на суммарное отклонение от параллельности осей (для механической передачи с параллельными осями), мкм						
3	6	8	10	13	16	20
4	9	11	14	18	22	28
5	13	16	20	25	32	40
6	18	22	28	35	45	56
7	25	32	40	50	63	80
8	35	<b>45</b>	56	71	89	113
9	50	63	80	100	126	159

Окончание таблицы 6.5

Степень точности	Номер интервала					
	1	2	3	4	5	6
	Расчетный размер, мм					
	до 40	<b>40...100</b>	100...160	160...250	250...400	400...630
10	71	89	113	142	179	225
11	100	126	159	200	25	318
12	142	179	225	284	357	450
Допуск $f_{\Sigma UT}$ на суммарный перекос осей (для механической передачи с параллельными осями), мкм						
3	3	4	5	6	8	10
4	4	6	7	9	11	14
5	6	8	10	12	16	20
6	9	11	14	18	22	28
7	12	16	20	25	31	39
8	18	<b>22</b>	28	35	44	56
9	25	31	39	50	62	79
10	35	44	56	70	88	111
11	50	62	79	99	125	157
12	70	88	111	140	176	222

В таблице 6.5 расчетным размером является ширина зубчатого колеса или аналогичный параметр для любой механической передачи. Например, для планетарных передач с промежуточными телами качения расчетным параметром принята ширина многопериодной дорожки. Базовым расчетным интервалом принят интервал № 2 (40...100 мм). Значения в этом интервале получены по формулам (6.32)–(6.36). В таблице 6.5 при расчете допусков между интервалами использовался коэффициент  $k = \sqrt[3]{2}$ , соответствующий соотношениям между допусками в интервалах таблицы по ГОСТ 1643–81 для показателей  $f_x$  и  $f_y$ . В таблице 6.5 базовой расчетной принята 8-я степень точности зубчатых передач. Для расчета каждого значения в таблице 6.5 между степенями точности принят коэффициент  $k = \sqrt{2}$ .

В результате исследований и разработки норм точности для показателей  $f_{\Sigma xy}$ ,  $f_{\Sigma x}$ ,  $f_{\Sigma y}$  установлены некоторые зависимости. Так, для передач с соосными валами отклонение от соосности валов приводит к радиальному смещению деталей зацепления. Радиальное смещение зубчатого колеса или другой детали приводит к заклиниванию в зацеплении и несогласованности

вращения звеньев и относится к нормам кинематической точности. Поэтому для передач с соосными валами, например для планетарных передач, предложенный показатель  $f_{\Sigma xy}$  может относиться к нормам контакта и к нормам кинематической точности передачи. Для соосных передач предложено ввести показатель  $f_c$  и допуск на этот показатель  $f_{cT}$  как геометрическую сумму допусков  $f_x$  и  $f_y$  по ГОСТ 1643–81 без учета погрешностей монтажа  $E_{\Sigma M}$ :

$$f_{cT} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (6.37)$$

Для передач с соосными валами отклонение от соосности валов можно рассматривать как источник радиального смещения ведущего звена, равного  $F_{rc} = 2f_{cT}/i$ , где  $i$  – передаточное отношение. Тогда кинематическую погрешность в линейных величинах (мкм) от  $f_{cT}$  можно определить по формуле

$$F_{к.н}(f_{cT}) = \frac{2f_{cT} \operatorname{tg} \alpha}{i}, \quad (6.38)$$

где  $\alpha$  – угол зацепления для зубчатых передач и угол подъема беговой дорожки для планетарных передач с промежуточными телами качения.

При больших передаточных отношениях кинематическая погрешность  $F_{к.н}(f_{cT})$  для передачи может быть незначительной, но может значительно влиять на надежность работы ведущего звена. Для планетарных передач с промежуточными телами качения показатель  $f_{\Sigma xy}$  также влияет на количество сателлитов, передающих нагрузку и, соответственно, на нагрузочную способность передачи.

Для зубчатых передач с параллельными осями показатели  $f_{\Sigma x}$  и  $f_{\Sigma y}$  не только характеризуют полноту контакта и относятся к нормам контакта зубьев зубчатых колес в передаче, уменьшая или увеличивая поверхности сопряжения зубьев колес и удельные силы, но также эти показатели характеризуют циклические погрешности зубцовой частоты, которые зависят от полноты сопряжения и контактных сил при вхождении зубьев в зацепление и относятся к нормам плавности работы передачи и к ее кинематической погрешности.

#### 6.2.4 Разработка метода расчета коэффициента торцового перекрытия с учетом погрешностей изготовления зубьев.

Плавность зацепления цилиндрической прямозубой передачи зависит от количества пар сопряженных зубьев, находящихся одновременно в зацеплении, и оценивается коэффициентом торцового перекрытия зубчатой передачи, с учетом угловых величин,

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varphi_{\alpha}}{\tau}, \quad (6.39)$$

где  $\varphi_{\alpha}$  – угол торцового перекрытия за интервал времени зацепления одной пары зубьев;

$\tau$  – угловой шаг, определяющий угловое расстояние между смежными зубьями колеса,  $\tau = 360^{\circ}/z_2$ , где  $z_2$  – число зубьев колеса.

В расчетах коэффициента торцового перекрытия учитываются только номинальные геометрические параметры зубчатых колес и не учитываются их погрешности изготовления, которые приводят к изменению (увеличению или уменьшению) геометрических размеров зубьев. Так, погрешности шага зацепления возникают из-за неточностей изготовления, приводящих к неодинаковой толщине зубьев в пределах допуска на изготовление и неравномерному угловому расположению зубьев. Чтобы учесть погрешности изготовления при проектировании зубчатых передач, предложено разработать метод расчета коэффициента торцового перекрытия на основе известных методов и методик расчета с добавлением погрешностей изготовления и провести анализ влияния погрешностей изготовления на коэффициент торцового перекрытия.

Формулу (6.39) можно представить в линейных величинах следующим образом:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varphi_{\alpha} r_b}{\tau r_b} = \frac{L_{\alpha}}{L_{\tau}}, \quad (6.40)$$

где  $r_b$  – радиус основной окружности;

$L_{\alpha}$  – длина дуги, соответствующая углу  $\varphi_{\alpha}$ ;

$L_{\tau}$  – длина дуги, соответствующая углу  $\tau$ .

В соответствии с зависимостями, приведенными в [28, 29], длины дуг в формуле (6.40) можно представить как

$$L_{\alpha} = \frac{mz_1}{2} \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + \frac{mz_2}{2} \cos (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w); \quad (6.41)$$

$$L_{\tau} = p_b = \pi m \cos \alpha, \quad (6.42)$$

где  $m$  – модуль зубчатого колеса (шестерни);

$z_1$  – число зубьев шестерни;

$z_2$  – число зубьев колеса;

$\alpha_{a1}$  – профильный угол на вершинах эвольвентных зубьев шестерни;

$\alpha_{a2}$  – профильный угол на вершинах эвольвентных зубьев колеса;

$\alpha_w$  – основной угол зацепления;

$\alpha$  – угол зацепления;

$p_b$  – шаг по основной окружности колеса или шестерни (шаг зацепления).

Подставив выражения (6.41) и (6.42) в формулу (6.40), с учетом допусков на отклонение шага зацепления шестерни и колеса, получим

$$\varepsilon_\alpha = \frac{m \cos \alpha [z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)]}{2(\pi m \cos \alpha \pm \Sigma f_{pb})}, \quad (6.43)$$

$$\Sigma f_{pb} = f_{pb1} + f_{pb2}, \quad (6.44)$$

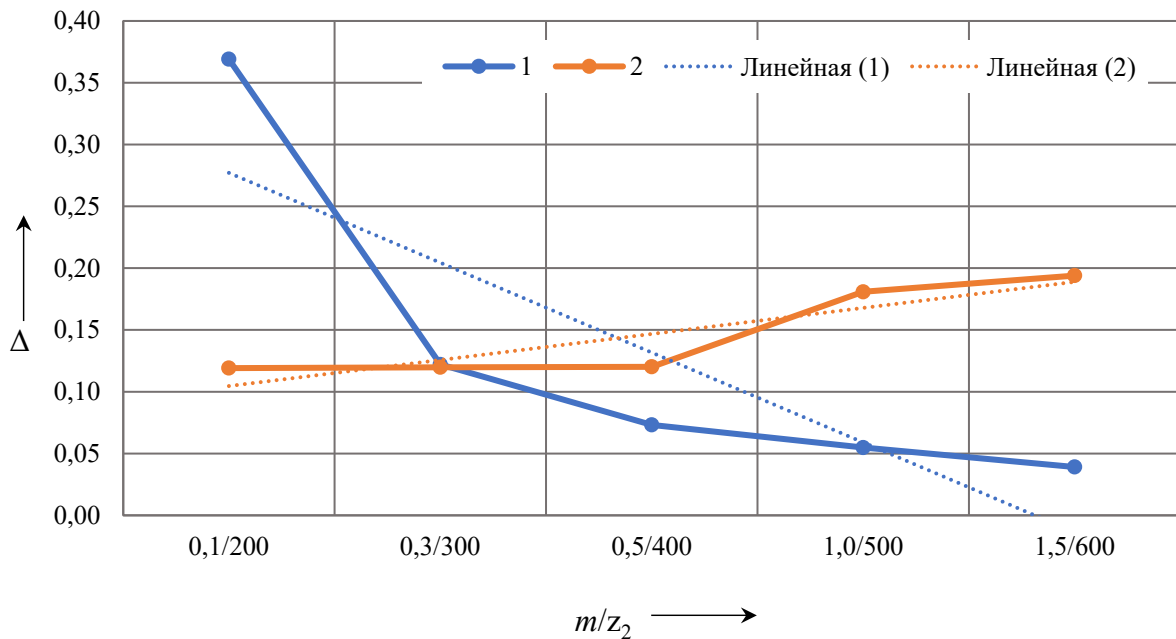
где  $\Sigma f_{pb}$ ,  $f_{pb1}$ ,  $f_{pb2}$  – допуск на отклонение шага зацепления суммарного, шестерни, колеса соответственно.

В математической зависимости (6.43) допуск на отклонение суммарного шага зацепления задается в «+» и «-» по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81. Расчетами при заданных геометрических параметрах получены значения коэффициента торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha(+)$  и  $\varepsilon_\alpha(-)$  и их разность  $\Delta = \varepsilon_\alpha(-) - \varepsilon_\alpha(+)$ .

Из (6.43) и (6.44) следует, что коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  за полный оборот колеса изменяется в пределах  $\Delta$ . На рисунке 6.13 представлены графики изменения  $\Delta$  коэффициента торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  с учетом погрешностей изготовления, нормируемых допусками на отклонение шага зацепления  $\Sigma f_{pb}$  и его предельными отклонениями.

На графике 1 (см. рисунок 6.13) показана зависимость изменения коэффициента торцового перекрытия  $\Delta$ , с учетом предельных отклонений шага зацепления  $\pm \Sigma f_{pb}$ , от модуля  $m$ : 0,1; 0,3; 0,5; 1,0 и 1,5 мм. Видно, что для колес с мелким модулем (менее 1,0 мм) колебание  $\Delta$  коэффициента торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  за полный оборот колеса из-за отклонения шага зацепления  $\Sigma f_{pb}$  может значительно влиять на коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ , который для цилиндрических прямозубых колес рекомендуется в пределах 1,05...2,0. Для колес с модулем 1,0...1,5 мм значения  $\Delta$  также влияют на изменение  $\varepsilon_\alpha$ . На графике 2 показана зависимость  $\Delta$  от числа зубьев колеса  $z_2$ : 200, 300, 400, 500, 600. Видно, что с увеличением числа зубьев  $\Delta$  незначительно увеличивается. Графики (см. рисунок 6.13) построены по полученным зависимостям (6.39)–(6.44). При построении графика 1 приняты следующие геометрические параметры:  $z_1 = 200$  и  $z_2 = 400$ . При построении графика 2 приняты следующие геометрические параметры:  $z_1 = 100$  и  $m = 0,3$  мм. Допуск на отклонение шага зацепления задавался по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81

для 8-й степени точности по нормам плавности для соответствующих делительных диаметров шестерни, колеса и модуля.



1 – зависимость от модуля  $m$  шестерни и колеса; 2 – зависимость от числа зубьев колеса  $z_2$

Рисунок 6.13 – Графики изменения коэффициента торцового перекрытия с учетом предельных отклонений шага зацепления

Таким образом, установлено, что отклонение коэффициента торцового перекрытия при наличии отклонения шага зацепления в основном зависит от модуля и может значительно влиять на коэффициент торцового перекрытия для мелко модульных колес. Отклонение коэффициента торцового перекрытия при наличии отклонения шага зацепления также зависит от числа зубьев колес. С уменьшением модуля и увеличением числа зубьев отклонение коэффициента торцового перекрытия увеличивается, что нужно учитывать при расчетах и проектировании механических передач.

*6.2.5 Разработка метода расчета бокового зазора в зубчатой передаче с учетом обоснований погрешностей изготовления и показателей точности.*

Наибольший боковой зазор на основе положений ГОСТ 1643–81 должен содержать гарантированный (минимальный)  $j_{n \min}$ , учитывающий размещение смазки и температурные деформации при работе передачи, а также зазор  $k_j$ , компенсирующий погрешности изготовления зубчатых колес и погрешности монтажа передачи. Зазоры  $j_{n \min}$  и  $k_j$  уменьшают общий (наибольший) боковой зазор.

В стандартах ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81 сказано, что зазор  $k_j$  учитывает погрешности изготовления и монтажа зубчатой передачи. Однако в этих ГОСТах не приведены погрешности монтажа и не указано, как их рассчитывать и учитывать. Судя по небольшим допускам (которые трудно обеспечить технологически, если учитывать погрешности изготовления колес и погрешности монтажа), представленным в ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81 на показатели точности  $f_x$  и  $f_y$  и входящим в формулу  $k_j$ , приведенную в этих же ГОСТах, погрешности монтажа в эти допуски не заложены. Кроме того, в ГОСТ 21098–82, разработанном после ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81, предложена методика расчета бокового зазора, в которой погрешности монтажа нужно прибавлять к допускам ГОСТ 1643–81. Тем самым ГОСТ 21098–82 учитывает допуски ГОСТ 1643–81 как установленные не от рабочей оси, т. е. без погрешностей монтажа. При этом ГОСТ 21098–82 не приводит методики их расчета. Таким образом, можно сделать вывод, что при определении бокового зазора в стандартах ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81 приведены допуски только на погрешности изготовления зубчатых колес и не приведены допуски и методики расчета погрешностей монтажа.

Допуски на боковой зазор  $T_{jn}$  в стандартах ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81 напрямую не приведены. Они приводятся через допуски на дополнительное смещение исходного контура  $T_H$ , длину и среднюю длину общей нормали  $T_w$  и  $T_{wm}$ , толщину зуба  $T_c$ , размер по роликам  $T_M$ . Эти допуски, как указано в этих стандартах, зависят от допуска на радиальное биение зубчатого венца  $F_r$  и вида сопряжения. Указано, что  $T_H > F_r$ . При этом нет обоснований получения допуска  $T_H$ , не указаны ограничения наибольшего его значения, значения допуска  $T_H$  необоснованно завышены (превосходят радиальное биение  $F_r$  в 2–3 раза) и в то же время они не учитывают погрешности монтажа.

Методика определения показателей и допусков, обеспечивающих необходимый боковой зазор в передаче по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81, сложная, использует большое количество таблиц и показателей, требует дополнительных разъяснений.

Однако учитывая, что разработанные методы нормирования бокового зазора, приведенные в ГОСТах, являются основными для использования при производстве зубчатых колес и передач и основаны на фундаментальных теориях, то для настоящего времени с совершенствованием технологий и технологического оборудования для обеспечения высокого качества продукции принято взять за основу положения известных теорий и соответствующих им ГОСТов с разработкой теоретических положений, включающих методы расчета, позволяющие приблизить допуски на показатели точности к более реальным значениям современного производства, упростить систему оценки и назначения показателей и допусков на боковой зазор и разработать универсальную систему расчета для определения этих показателей и

допусков, которую можно взять за основу для любых типов механических передач.

На основе известных теорий [23, 24, 71–73] наибольший расчетный боковой зазор в передаче  $J_{n \max}$  можно представить в векторной форме как

$$\begin{aligned} \vec{J}_{n \max} = & \vec{J}_{n \min} + \Delta \vec{f}_a + \vec{f}_{pb1} + \vec{f}_{pb2} + \vec{F}_{\beta 1} + \vec{F}_{\beta 2} + \vec{f}_x + \\ & + \vec{f}_y + \vec{E}_{\Sigma Mx} + \vec{E}_{\Sigma My} + \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} + \vec{E}_{\Sigma M1} + \vec{E}_{\Sigma M2}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

где  $J_{n \min}$  – гарантированный боковой зазор;

$\Delta f_a$  – нижнее отклонение межосевого расстояния в средней плоскости передачи;

$f_{pb1}$  – отклонение шага зацепления шестерни;

$f_{pb2}$  – отклонение шага зацепления колеса;

$F_{\beta 1}$  – допуск на направление зуба шестерни;

$F_{\beta 2}$  – допуск на направление зуба колеса;

$f_x$  – допуск параллельности осей;

$f_y$  – допуск на перекося осей;

$E_{\Sigma Mx}$  – погрешности монтажа передачи вдоль оси  $X$ ;

$E_{\Sigma My}$  – погрешности монтажа передачи вдоль оси  $Y$ ;

$F_{r1}$  – допуск на радиальное биение зубчатого венца шестерни;

$F_{r2}$  – допуск на радиальное биение зубчатого венца колеса;

$E_{\Sigma M1}$  – погрешности монтажа шестерни в радиальном направлении;

$E_{\Sigma M2}$  – погрешности монтажа колеса в радиальном направлении.

Исходя из зависимости (6.45), в векторной форме можно записать наименьшее смещение исходного контура для передачи  $\vec{E}_H$  в виде

$$\vec{E}_H = \vec{J}_{n \min} + \Delta \vec{f}_a + \vec{f}_{pb1} + \vec{f}_{pb2} + \vec{F}_{\beta 1} + \vec{F}_{\beta 2} + \vec{f}_x + \vec{f}_y + \vec{E}_{\Sigma Mx} + \vec{E}_{\Sigma My}, \quad (6.46)$$

а допуск на наименьшее смещение исходного контура для передачи  $\vec{T}_H$  как

$$\vec{T}_H = \vec{T}_{H1} + \vec{T}_{H2} = \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} + \vec{E}_{\Sigma M1} + \vec{E}_{\Sigma M2}, \quad (6.47)$$

где  $\vec{T}_{H1}$ ,  $\vec{T}_{H2}$  – допуски на наименьшее смещение исходного контура для шестерни и колеса соответственно.

Наименьшее смещение исходного контура (смещение инструмента при формообразовании зубьев колес для обеспечения бокового зазора) включает

минимальный боковой зазор, а также погрешности изготовления пары зубчатых колес и погрешности их монтажа, которые можно представить на основе зависимостей (6.45) и (6.46) в скалярной форме в виде зазора  $k_j$ :

$$k_j = \sqrt{(\Delta f_a 2 \sin \alpha)^2 + f_{pb1}^2 + f_{pb2}^2 + F_{\beta 1}^2 + F_{\beta 2}^2 + (0,5 f_x 2 \sin \alpha)^2 + (f_y \cos \alpha)^2 + (0,5 E_{\Sigma Mx} 2 \sin \alpha)^2 + (E_{\Sigma My} \cos \alpha)^2}. \quad (6.48)$$

В формуле (6.48) принимается половина допуска параллельности осей  $0,5 f_x$  и половина погрешности монтажа передачи  $E_{\Sigma Mx}$ , т. к. допуск межосевого расстояния относится к средней плоскости передачи [73].

В соответствии с [24, 71–73] наименьшее смещение исходного контура для передачи  $E_H$  и наименьшее смещение исходного контура каждого из пары зубчатых колес  $E_{Hi}$  определяются по формулам

$$E_H = \frac{J_{n \min} + k_j}{2 \sin \alpha}; \quad E_{Hi} = \frac{J_{n \min} + k_j}{4 \sin \alpha}. \quad (6.49)$$

Формулы для расчета допуска  $T_H$  на наименьшее смещение исходного контура для передачи и допуска  $T_{Hi}$  на наименьшее смещение исходного контура для каждого из пары зубчатых колес, с учетом радиального биения зубчатого венца, а также с учетом введенных ранее погрешностей монтажа, могут быть представлены в следующем виде:

$$T_H = T_{H1} + T_{H2} = \pm k \left( \sqrt{F_{r1}^2 + E_{\Sigma M1}^2} + \sqrt{F_{r2}^2 + E_{\Sigma M2}^2} \right); \quad (6.50)$$

$$T_{Hi} = \pm k \left( \sqrt{F_{ri}^2 + E_{\Sigma Mi}^2} \right), \quad (6.51)$$

где  $T_{H1}$ ,  $T_{H2}$  – допуски на наименьшее смещение исходного контура для шестерни и колеса соответственно;

$k$  – коэффициент относительного рассеяния случайных величин;

$F_{ri}$  – допуск на радиальное биение зубчатого венца шестерни или колеса;

$\pm$  – отклонения от середины поля допуска, т. к. настройка производящего инструмента может проводиться посередине поля допуска  $T_H$  или  $T_{Hi}$ .

В соответствии с [24, 73] после сборки наибольший боковой зазор  $J_{n \max}$ , характеризующий мертвый ход передачи  $J_t$ , можно определить по формуле

$$J_{n \max} = J_t = J_{n \min} + (T_H + 2 f_a) 2 \sin \alpha, \quad (6.52)$$

где  $f_a$  – отклонение межосевого расстояния.

Минимальный мертвый ход (минимальная люфтовая погрешность) в угловых величинах (рад)

$$\Delta\varphi_{\min} = \frac{2J_{n\min} 10^{-3}}{d \cos \alpha}. \quad (6.53)$$

Наибольший мертвый ход (наибольшая люфтовая погрешность) в угловых величинах

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{2J_{n\max} 10^{-3}}{d \cos \alpha}. \quad (6.54)$$

С учетом вышепредставленных теоретических положений и математических зависимостей (6.45)–(6.51) рассчитаны значения наименьшего смещения исходного контура колеса  $E_{Hi}$  и допуска на наименьшее смещение исходного контура колеса  $T_{Hi}$ , которые предложено использовать при назначении бокового зазора для его обеспечения в передаче. В таблице 6.6 приведены значения на наименьшее смещение исходного контура колеса  $E_{Hi}$ .

В таблице 6.7 представлены допуски на наименьшее смещение исходного контура колеса  $T_{Hi}$ .

В качестве базовых приняты параметры  $E_{Hi}$  и  $T_{Hi}$ , рассчитанные для вида сопряжения  $B$  и 8-й степени точности зубчатых колес и передач в соответствии с [74]. При расчете этих параметров минимальный (гарантированный) боковой зазор  $J_{n\min} = 160$  мм для вида сопряжения  $B$  и межосевого расстояния  $a_w = 150$  мм принят из [74]. Базовые значения параметров  $E_{Hi}$  и  $T_{Hi}$  для вида сопряжения  $B$  и межосевого расстояния  $a_w = 150$  мм рассчитаны по формулам (6.48)–(6.51). При этом значения погрешностей монтажа  $E_{\Sigma Mx}$ ,  $E_{\Sigma My}$  приняты из разработанной таблицы 6.1 для 8-й степени точности и делительных диаметров шестерни  $d_{ш} = 100$  мм и колеса  $d_k = 200$  мм. Значения погрешностей монтажа  $E_{\Sigma Mx1}$ ,  $E_{\Sigma M2}$ , приведенные к 8-й степени точности, приняты из разработанной таблицы 6.5 для ширины зубчатого колеса 70 мм.

Для перехода к другим интервалам делительных диаметров и степеням точности в таблицах 6.6 и 6.7 приняты следующие коэффициенты: между интервалами  $k = 1,09$ ; между степенями точности  $k = \sqrt{2}$ . Для перехода к видам сопряжения  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  предложен коэффициент  $k = \sqrt{2}$ . При этом для сопряжения  $B$   $k_B = 1$ , для сопряжения  $A$   $k_A = k_B \sqrt{2}$ , для сопряжения  $C$   $k_C = \sqrt{2,56}^{(-1)}$ , для сопряжения  $D$   $k_D = \sqrt{2,56}^{(-2)}$ , для сопряжения  $E$   $k_E = \sqrt{2,56}^{(-3)}$ .

Таблица 6.6 – Наименьшее смещение исходного контура колеса  $E_{Ni}$ 

Степень точности	Делительный диаметр $d$ , мм										
	до 80	80...125	125...180	180...250	250...315	315...400	400...500	500...630	630...800	800...1000	
	мкм										
3–6	140	160	182	208	237	270	308	351	400	456	
7	153	174	199	227	258	294	336	383	436	497	
8	167	<b>190</b>	217	247	281	321	366	417	475	542	
9	182	207	236	269	307	350	399	455	518	591	
10	198	226	257	293	334	381	435	495	565	644	
11	216	246	281	320	365	416	474	540	616	702	
12	235	268	306	349	397	453	516	589	671	765	

Таблица 6.7 – Допуск на наименьшее смещение исходного контура колеса  $T_{Ni}$ 

Степень точности	Делительный диаметр $d$ , мм										
	до 80	80...125	125...180	180...250	250...315	315...400	400...500	500...630	630...800	800...1000	
	мкм										
3–6	55	60	65	71	78	85	92	101	110	120	
7	78	85	92	101	110	120	131	142	155	169	
8	110	<b>120</b>	131	143	15	169	185	201	219	239	
9	156	170	185	202	220	240	261	285	310	338	
10	220	240	262	285	311	339	369	403	439	478	
11	311	339	370	403	440	479	522	569	620	676	
12	440	480	523	570	622	678	739	805	87	956	

Разработанная теория расчета бокового зазора, построенная на основе известных методов, принятых в стандартах ГОСТ, позволяет приблизить расчетные значения параметров, характеризующих боковой зазор, к их действительным значениям за счет однозначного определения показателей точности и разработанных методов расчета погрешностей монтажа, а также учета степеней точности при определении всех составляющих бокового зазора. Разработанные математические зависимости определения показателей бокового зазора и предложенные в таблицах 6.1 и 6.5 результаты расчетов могут быть взяты за основу для любых механических передач.

## Список литературы

- 1 **Игнатищев, Р. М.** Синусошариковый редуктор / Р. М. Игнатищев // *Механика машин.* – 1981. – № 58. – С. 95–98.
- 2 **Игнатищев, Р. М.** Синусошариковые редукторы / Р. М. Игнатищев. – Мн. : Выш. шк., 1983. – 107 с.
- 3 **Пашкевич, М. Ф.** Планетарные шариковые и роликовые редукторы и их испытания / М. Ф. Пашкевич, В. В. Геращенко. – Мн. : БелНИИНТИ, 1992. – 248 с.
- 4 Планетарные кулачково-плунжерные передачи. Проектирование, контроль и диагностика / М. Ф. Пашкевич, В. М. Пашкевич, А. М. Пашкевич, С. В. Чертков. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2003. – 221 с.
- 5 **Лустенков, М. Е.** Передачи с промежуточными телами качения: определение и минимизация потерь мощности : монография / М. Е. Лустенков. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2010. – 274 с.
- 6 **Пашкевич, М. Ф.** Торцовые шариковые редукторы и их кинематика / М. Ф. Пашкевич // *Вестник машиностроения.* – 1985. – № 7. – С. 23–26.
- 7 **Пашкевич, М. Ф.** Теоретические и экспериментальные основы проектирования планетарных шариковых и роликовых передач : дис. ... д-ра техн. наук : 05.02.02 / Пашкевич Михаил Федорович ; Могилев. машиностроительный ин-т. – Могилев, 1993. – 575 л.
- 8 **Пашкевич, М. Ф.** Планетарные передачи с повышенной нагрузочной способностью для реверсивной работы в приводах строительных и дорожных машин / М. Ф. Пашкевич, О. Е. Печковская // *Вестник Могилевского государственного технического университета.* – 2005. – № 2. – С. 127–131.
- 9 Патент ВУ 4985 С1, МПК F 16Н 25/06, 1/32. Планетарная роликовая передача : № а 19990482 : заявлено 13.05.1999 : опубл. 30.03.2003 / Пашкевич А. М., Пашкевич М. Ф. ; заявитель и патентообладатель Могилев. машиностроительный ин-т.
- 10 Патент ВУ 254 U, МПК F 16Н 1/32. Планетарная передача : № u 20000121 : заявлено 09.08.2000 : опубл. 30.03.2001 / Пашкевич М. Ф., Пашкевич В. М., Соколов М. В. ; заявитель и патентообладатель Могилев. гос. техн. ун-т.
- 11 Патент ВУ 1616 U, МПК F 16Н 13/08. Фрикционный двухступенчатый шарикоподшипниковый редуктор : № u 20040112 : заявлено 12.03.2004 : опубл. 30.12.2004 / Пашкевич М. Ф., Давыденко Д. В. ; заявитель и патентообладатель Бел.-Рос. ун-т.
- 12 Патент ВУ 3258 U, МПК В 66В 5/02. Шариковое редукторное устройство для ручного перемещения кабины лифта : № u 20060362 : заявлено 05.06.2006 : опубл. 30.12.2006 / Рудник П. М., Тюков А. В., Балабанов И. Н.,

Грибов С. С., Миронов С. В., Пашкевич М. Ф., Пашкевич В. М., Пашкевич А. М.; заявитель РУП завод «Могилевлифтмаш».

13 Патент ВУ 5092 С1, МПК7 F 16 Н1/28. Планетарная передача : № 19981087 : заявлено 30.11.1998 : опубл. 30.03.2003 / Пашкевич А. М., Пашкевич В. М., Геращенко В. В., Пашкевич М. Ф. ; заявитель и патенто-обладатель Могилев. гос. техн. ун-т.

14 Патент ВУ 199 U, МПК7 F 16Н 1/00, 1/28. Планетарная эксцентриксовая передача : № u 20040542 : заявлено 30.11.2004 : опубл. 30.06.2005 / Пашкевич М. Ф., Печковская О. Е., Забелин Д. А.; заявитель и патенто-обладатель Бел.-Рос. ун-т.

15 Патент ВУ 7773, МПК F 16Н 1/00, F 16Н 3/00. Червячная передача : № u 20110389 : заявлено 18.05.2011 : опубл. 30.12.2011 / Сотников В. И., Чернов Н. Г., Подымако М. Э., Рогачевский Н. И., Пашкевич М. Ф. ; заявитель и патентообладатель РУП завод «Могилевлифтмаш».

16 Методы формообразования и 3D-моделирование профилей зубьев сателлита планетарного эксцентрикового редуктора / А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич, Д. В. Непша, С. Н. Хатетовский // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2014. – № 4. – С. 13–20.

17 Автоматизированное проектирование конструкций малогабаритных радиально-плунжерных редукторов с использованием современных САПР / А. В. Капитонов, К. В. Сасковец, А. И. Касьянов [и др.] // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2015. – № 3 (48). – С. 25–32.

18 **Капитонов, А. В.** Компьютерное 3D-моделирование конструкций и кинематических параметров планетарных малогабаритных передач / А. В. Капитонов, К. В. Сасковец, А. И. Касьянов // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2016. – № 11. – С. 34–40.

19 **Капитонов, А. В.** Планетарная радиально-плунжерная передача с улучшенными эксплуатационными характеристиками / А. В. Капитонов, К. В. Сасковец, А. И. Касьянов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2017. – № 3 (56). – С. 27–34.

20 **Капитонов, А. В.** Исследование эксплуатационных характеристик планетарных эксцентриковых передач с модифицированным профилем зубьев / А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2015. – № 3 (47). – С. 34–39.

21 Jiangsu Lanmec Technology Co., Ltd. : [сайт]. – URL: [https://ru.made-in-china.com/co\\_lanlingjidian/company\\_info.html?pv\\_id=1itkva893aaa&faw\\_id=1itkvabds458](https://ru.made-in-china.com/co_lanlingjidian/company_info.html?pv_id=1itkva893aaa&faw_id=1itkvabds458) (date of access: 13.06.2025).

22 Стенд для испытания редукторов и трансмиссий : [сайт]. – URL: <https://www.atestman.com/product/reducer-and-transmission-test-bench-13.html> (дата обращения: 13.06.2025).

23 Справочник технолога-машиностроителя : в 2 т. / под ред. А. Г. Косиловой, Р. Г. Мещерякова. – М. : Машиностроение, 1986. – Т. 1. – 655 с.

24 **Якушев, А. И.** Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения / А. И. Якушев. – М. : Машиностроение, 1979. – 352 с.

25 Технологическая оснастка : учебник для студентов машиностроительных спец. вузов / М. Ф. Пашкевич, Ж. А. Мрочек, Л. М. Кажуро, В. М. Пашкевич. – Мн. : Адукацыя і выхаванне, 2002. – 320 с.

26 **Пашкевич, М. Ф.** Управление точностью планетарных роликовых передач на основе их моделирования и спектрального анализа кинематических погрешностей / М. Ф. Пашкевич // Известия Белорусской академии наук. – Мн., 2002. – № 1 (13). – С. 45–52.

27 **Марков, Л. Н.** Высшая математика : учеб. пособие : в 2 ч. / Л. Н. Марков, Г. П. Размыслович. – Мн. : Амалфея, 1999. – Ч. 1 : Элементы линейной алгебры и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии. – 208 с.

28 **Фролов, К. В.** Теория механизмов и механика машин : учебник для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов ; под ред. К. В. Фролова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Выш. шк., 1998. – 196 с.

29 **Машков, А. А.** Теория машин и механизмов : учеб. пособие / А. А. Машков. – Мн. : Выш. шк., 1971. – 469 с.

30 Технология автоматизированного машиностроения. Специальная часть / под ред. А. А. Жолобова. – Мн. : Дизайн ПРО, 1997. – 384 с.

31 **Тайц, Б. А.** Точность и контроль зубчатых колес / Б. А. Тайц. – М. : Машиностроение, 1972. – 367 с.

32 **Толстов, Г. П.** Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

33 **Капитонов, А. В.** Математическое моделирование кинематических погрешностей планетарных роликовых передач / А. В. Капитонов // Вестник Могилевского государственного технического университета. – 2003. – № 2 (10). – С. 44–48.

34 Исследование кинематической погрешности планетарного эксцентрикового редуктора / А. В. Капитонов, Д. В. Непша, М. В. Гончаров [и др.] // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2014. – № 3. – С. 14–24.

35 **Капитонов, А. В.** Методика оценки и анализ кинематических погрешностей планетарных роликовых передач / А. В. Капитонов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2009. – № 2. – С. 88–97.

36 **Капитонов, А. В.** Исследование кинематической точности планетарных роликовых передач методами гармонического анализа и контроля в сборе / А. В. Капитонов, С. Г. Черняков // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2011. – № 4. – С. 40–50.

37 **Иванов, М. Н.** Детали машин : учебник для студентов машиностроительных спец. вузов / М. Н. Иванов, В. А. Финогенов. – 10-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2006. – 408 с.

38 **Капитонов, А. В.** Кинематические и массогабаритные характеристики ресурсоэффективных механических передач. Компьютерное моделирование, экспериментальная оценка : монография / А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2017. – 248 с.

39 **Капитонов, А. В.** Влияние кинематических погрешностей на КПД малогабаритных механизмов приводов с телами качения / А. В. Капитонов, О. А. Капитонов // Современные проблемы машиностроения : сб. тр. XIV Междунар. науч.-техн. конф. / Томский политехн. ун-т. – Томск, 2021. – С. 32–33.

40 **Капитонов, А. В.** Разработка динамической модели для расчета кинематической погрешности и оценки ее влияния на КПД планетарных механизмов с телами качения / А. В. Капитонов // Механика машин, механизмов и материалов. – 2023. – № 4 (65). – С. 16–24.

41 **Капитонов, А. В.** Повышение КПД шариковых и роликовых передач путем оптимизации геометрических параметров деталей зацепления / А. В. Капитонов // Транспортное машиностроение. – 2024. – № 3 (27). – С. 20–30.

42 **Кузьмин, А. В.** Расчеты деталей машин : учеб. пособие / А. В. Кузьмин. – Мн. : Выш. шк., 1986. – 400 с.

43 **Федосеев, В. И.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Федосеев. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

44 **Pleguezuelos, M.** Analytical Expressions of the Efficiency of Standard and High Contact Ratio Involute Spur Gears / M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero, M. B. Sánchez // Mathematical Problems in Engineering. – 2013. – Vol. 2013. – P. 14.

45 **Dobrev, A.** Research of gear drives / A. Dobrev, V. Dobrev, G. Mollova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. The XXXI-st SIAR International Congress of Automotive and Transport Engineering «Automotive and Integrated Transport Systems» (AITS 2021). – Chisinau, Republic of Moldova, 28th–30th October. – 2021. – Vol. 1220. – P. 5.

46 Transmission Efficiency of Cycloid–Pinion System Considering the Assembly Dimensional Chain / N. Jiang, S. Wang, A. Yang [et al.] // Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12. – P. 21.

47 **Черемнов, А. В.** Синтез пространственной передачи с промежуточными телами качения с улучшенными качественными характеристиками / А. В. Черемнов, А. И. Кан, О. П. Ивкина // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – № 2. – С. 26–30.

48 **Pabiszczak, S.** Effect of Manufacturing Errors on the Operation of the Eccentric Rolling Transmission / S. Pabiszczak, W. Ptaszynski // *Advances in Science and Technology – Research Journal*. – 2020. – Vol. 14 (3). – P. 213–222.

49 **Lustenkova, E. S.** Experimental estimation of efficiency and kinematic accuracy of a spherical roller transmission / E. S. Lustenkova // *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. International Conference on Mechanical Engineering and Modern Technologies (MEMT 2020)*. – Tomsk, Russia, 26th–30th October 2020. – Vol. 1118. – P. 6.

50 **Громыко, П. Н.** Использование удлиненной эпициклоиды для формообразования зубчатых поверхностей передач эксцентрикового типа / П. Н. Громыко, С. Н. Хатетовский, В. Л. Юркова // *Вестник Белорусско-Российского университета*. – 2019. – № 1 (62). – С. 14–21.

51 **Пашкевич, М. Ф.** Стенды для испытания редукторов / М. Ф. Пашкевич, В. В. Геращенко. – Мн. : БелНИИТИ, 1991. – 44 с.

52 Методы экспериментальных исследований кинематической точности планетарных передач с промежуточными телами качения и контроля профиля беговых дорожек / А. В. Капитонов, С. Г. Черняков, К. В. Сасковец, А. И. Касьянов // *Вестник Белорусско-Российского университета*. – 2016. – № 2 (51). – С. 41–50.

53 Патент ВУ 4341 С1 ВУ, МПК G 01М 13/02. Устройство для контроля кинематической точности зубчатых передач : № а 19980949 : заявлено 21.10.1998 : опубл. 30.03.2002 / Пашкевич М. Ф., Геращенко В. В., Пашкевич В. М., Капитонов А. В., Пашкевич А. М. ; заявитель и патентообладатель Могилев. машиностроительный ин-т.

54 Повышение точности механических передач на основе компьютерного моделирования и использования технологий искусственного интеллекта : монография / В. М. Пашкевич, М. Ф. Пашкевич, Д. А. Забелин, Ю. В. Козлов. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2011. – 139 с.

55 Патент ВУ 4858, МПК G 01М 13/02. Стенд для контроля кинематической точности передач : № 19981066 : заявлено 26.11.1998 : опубл. 03.12.2002 / Пашкевич М. Ф., Геращенко В. В., Пашкевич В. М., Пашкевич А. М., Капитонов А. В. ; заявитель Могилев. машиностроительный ин-т.

56 Патент ВУ 4341, МПК G 01М 13/02. Устройство для контроля кинематической точности зубчатых передач : № 19980949 : заявлено 21.10.1998 : опубл. 30.03.2002 / Пашкевич М. Ф., Геращенко В. В., Пашкевич В. М., Пашкевич А. М., Капитонов А. В. ; заявитель Могилев. гос. техн. ун-т.

57 Патент ВУ 24475, МПК G 01М 13/02 (2019.01). Устройство для определения значений кинематических погрешностей механической передачи : № 20220272 : заявлено 31.10.2022 : опубл. 20.12.2024 / Капитонов А. В., Пашкевич В. М., Капитонов О. А. ; заявитель Бел.-Рос. ун-т.

58 Патент ВУ 24474, МПК G 01M 13/02 (2019.01). Стенд для испытания механической передачи : № 20220271 : заявлено 31.10.2022 : опубл. 20.12.2024 / Капитонов А. В., Пашкевич В. М., Капитонов О. А. ; заявитель Бел.-Рос. ун-т.

59 **Капитонов, А. В.** Методы оценки точности малогабаритных планетарных передач с промежуточными телами качения / А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – Мн., 2020. – Вып. 9. – С. 51–54.

60 **Капитонов, А. В.** Точность и контроль малогабаритных планетарных механизмов : монография / А. В. Капитонов. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2021. – 160 с.

61 **Капитонов, А. В.** Совершенствование стенда и методики для контроля кинематических и точностных параметров редуцирующих механизмов / А. В. Капитонов, В. М. Пашкевич, О. А. Капитонов // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – Мн., 2022. – Вып. 11. – С. 53–56.

62 **Пашкевич, В. М.** Математическое обеспечение геометрического контроля сложных периодических профилей с использованием КИМ Dura Max фирмы «Карл Цейс» (Carl Zeiss) / В. М. Пашкевич // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2014. – № 4. – С. 42–48.

63 **Пашкевич, В. М.** Функциональные семантические сети для обеспечения точности механической обработки / В. М. Пашкевич, М. Н. Миронова. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2015. – 200 с.

64 **Капитонов, А. В.** Применение современных систем автоматизированного проектирования обработки и контроля деталей с периодическими дорожками / А. В. Капитонов, А. М. Калентионок, А. М. Пашкевич // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2017. – № 4. – С. 41–49.

65 **Kapitonov, A. V.** Optimization of geometrical parameters and estimation of kinematic accuracy of resource effective planetary transmission. Advances in Engineering Research / A. V. Kapitonov // International Conference on AviaMechanical Engineering and Transport (AviaENT 2018). – 2018. – Vol. 158. – P. 165–168.

66 **Сасковец, К. В.** Новые конструкции и методы оценки точности планетарных радиально-плунжерных передач / К. В. Сасковец, А. В. Капитонов, М. В. Лебедев // Вестник Гомельского государственного технического университета им. П. О. Сухого. – 2019. – № 1 (76). – С. 3–9.

67 **Капитонов, А. В.** Методика оценки точности изготовления криволинейных поверхностей деталей малогабаритных планетарных передач / А. В. Капитонов // Автоматизированное проектирование в машиностроении. – 2022. – № 12. – С. 60–64.

68 **Капитонов, А. В.** Методы оценки точности профиля беговых дорожек планетарных механизмов с телами качения / А. В. Капитонов // Перспективные направления инновационного развития и подготовки кадров : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 31 окт. – 2 нояб. 2024 г. – Брест, 2024. – С. 37–51.

69 Патент ВУ 22377, МПК F 16H 25/06 (2006.01). Планетарная передача : № 20170187 : заявлено 29.05.2017 : опубл. 30.12.2018 / Капитонов А. В., Пашкевич В. М., Сасковец К. В. ; заявитель Бел.-Рос. ун-т.

70 Патент ВУ 22484, МПК F 16H 25/06 (2006.01), F 16H 13/08 (2006.01). Планетарный мотор-редуктор : № 20170412 : заявлено 04.11.2017 : опубл. 30.12.2018 / Капитонов А. В., Пашкевич В. М. ; заявитель Бел.-Рос. ун-т.

71 **Калашников, С. Н.** Производство зубчатых колес : справочник / С. Н. Калашников, А. С. Калашников, Г. И. Коган ; под общ. ред. Б. А. Тайца. – М. : Машиностроение, 1990. – 464 с.

72 **Марков, А. Л.** Измерение зубчатых колес / А. Л. Марков. – Л. : Машиностроение, 1977. – 275 с.

73 **Тайц, Б. А.** Точность и контроль зубчатых передач / Б. А. Тайц, Н. Н. Марков. – Л. : Машиностроение, 1978. – 136 с.

74 Передачи зубчатые цилиндрические. Допуски : ГОСТ 1643–81. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 68 с.

75 Передачи зубчатые конические и гипоидные. Допуски : ГОСТ 1758–81. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 31 с.

76 Передачи червячные цилиндрические. Допуски : ГОСТ 3675–81. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 45 с.

77 Приборы для измерения цилиндрических зубчатых колес. Типы и основные параметры. Нормы точности : ГОСТ 5368–81. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 23 с.

78 Приборы для измерения радиального биения зубчатого венца. Технические условия : ГОСТ 8137–81. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 2 с.

79 Приборы для измерения цилиндрических червяков червячных колес и червячных передач. Типы и основные параметры. Нормы точности : ГОСТ 9776–82. – М. : Изд-во стандартов, 1982. – 10 с.

80 Станки контрольно-обкатные для конических зубчатых колес. Нормы точности : ГОСТ 16473–80. – М. : Изд-во стандартов, 1980. – 9 с.

81 **Капитонов, А. В.** Метод повышения точности планетарных передач на основе спектрального анализа экспериментальной оценки и математического моделирования кинематических погрешностей / А. В. Капитонов, В. С. Дроздов // Materials and Technologies. – 2025. – № 1 (15). – С. 29–39.

82 Влияние погрешности звеньев прецессионной передачи на кинематическую погрешность / С. Н. Хатетовский, П. Н. Громыко, Р. А. Калентионок

[и др.] // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2017. – № 4. – С. 109–117.

83 **Пашкевич, А. М.** Инструменты для отделочной обработки цилиндрических поверхностей, оценка точности и качества обработки / А. М. Пашкевич, М. Ф. Пашкевич, А. В. Капитонов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2018. – № 1 (58). – С. 53–60.

84 **Капитонов, А. В.** Разработка показателей для контроля точности изготовления многопериодных дорожек планетарных передач с телами качения / А. В. Капитонов // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – Мн., 2021. – Вып. 10. – С. 7–12.

85 **Капитонов, А. В.** Метод расчета параметров точности изготовления колес с многопериодными дорожками планетарных шариковых передач / А. В. Капитонов, Р. Г. Якубовский // Вестник Витебского государственного технологического университета. – 2022. – № 1 (42). – С. 43–52.

86 **Капитонов, А. В.** Методика расчета и математическое моделирование кинематических погрешностей механизмов с телами качения от влияния погрешностей изготовления / А. В. Капитонов // Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. / Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – Мн., 2023. – Вып. 12. – С. 56–61.

87 **Капитонов, А. В.** Расчет и компьютерное моделирование напряжений и деформаций планетарных шариковых и роликовых передач / А. В. Капитонов // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2024. – № 1 (133). – С. 120–124.

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	3
<b>1 Методы расчета точности изготовления деталей с беговыми многопериодными дорожками планетарных передач с промежуточными телами качения.....</b>	6
1.1 Разработка теории и методов расчета суммарной погрешности обработки деталей с многопериодными дорожками.....	6
1.2 Расчет суммарной погрешности обработки и ее спектральный анализ деталей с многопериодными дорожками.....	15
1.3 Компьютерное моделирование упругих деформаций при проектировании способов обработки деталей с беговыми дорожками.....	28
<b>2 Разработка математических моделей и методов кинематического расчета погрешностей механических передач.....</b>	38
2.1 Метод кинематического расчета механических передач с использованием матриц преобразований.....	38
2.2 Метод расчета и математическая модель кинематических погрешностей механических передач на основе спектрального анализа...	47
2.3 Преобразование уравнений кривых для проектирования многопериодных дорожек.....	54
2.4 Математическая модель кинематических погрешностей механизмов с телами качения с учетом погрешностей изготовления.....	67
<b>3 Разработка динамической модели для расчета кинематических погрешностей механических передач.....</b>	90
3.1 Уравнения движения планетарных механизмов с учетом кинематических погрешностей.....	90
3.2 Оценка влияния кинематических погрешностей на КПД планетарных передач с промежуточными телами качения.....	94
3.3 Расчет контактных напряжений и деформаций в звеньях механизмов с телами качения.....	99
3.4 Расчет напряжений и деформаций при изгибе и кручении узлов механизмов с телами качения.....	105
3.5 Результаты расчетов напряжений и деформаций и оценка их влияния на кинематическую точность и нагрузочную способность механизмов с телами качения.....	108

3.6 Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния в роликовом зацеплении планетарных механизмов с промежуточными телами качения.....	115
<b>4 Разработка методологии экспериментальной оценки точности и технологического контроля механизмов с телами качения.....</b>	<b>120</b>
4.1 Метод комплексной оценки точности передач с промежуточными телами качения.....	120
4.2 Дифференцированный метод исследования точности изготовления ответственных деталей планетарных передач с промежуточными телами качения.....	123
4.3 Метод оценки точности передачи с использованием спектрального анализа.....	126
4.4 Комбинированный метод исследования и оценки точности механических передач.....	128
4.5 Новые средства и методики оценки точности и контроля механизмов с телами качения.....	129
<b>5 Экспериментальная оценка и анализ кинематических характеристик механизмов с телами качения.....</b>	<b>154</b>
5.1 Экспериментальная оценка и анализ кинематических характеристик одноступенчатых планетарных редуцирующих механизмов.....	154
5.2 Экспериментальная оценка и анализ кинематических характеристик двухступенчатых планетарных редуцирующих механизмов.....	176
5.3 Экспериментальные результаты на основе метода расчета КПД механических передач с использованием автоматизированной информационно-измерительной системы .....	211
<b>6 Общая система нормирования точности механических передач.....</b>	<b>237</b>
6.1 Теоретическое обоснование разработки общих показателей и допусков по нормам кинематической точности и плавности работы механических передач.....	240
6.2 Теоретическое обоснование разработки общих показателей и допусков по нормам контакта и бокового зазора механических передач.....	278
<b>Список литературы.....</b>	<b>294</b>

Научное издание

**Капитонов Александр Валентинович**  
**Пашкевич Виктор Михайлович**

# **РАСЧЕТ И НОРМИРОВАНИЕ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ**

Редакторы *И. В. Голубцова, А. Т. Червинская*

Художественное оформление обложки *А. А. Емельянова*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевничая*

Подписано в печать 15.05.2026. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 17,67. Уч.-изд. л. 19,00. Тираж 100 экз. Заказ № 360.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.