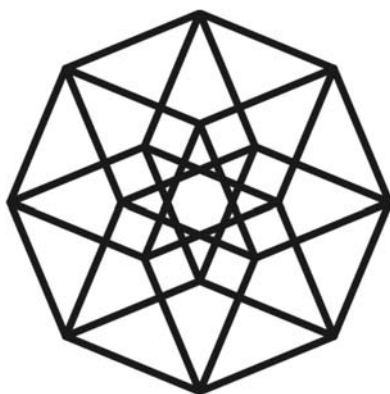


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения*



Могилев 2026

УДК 517.9
ББК 22.161.8
М18

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» апреля 2026 г.,
протокол № 8

Составитель канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат задания для практических занятий по дисциплине «Математическое программирование» для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», приведены задачи для самостоятельной работы на практических занятиях, а также перечень необходимой литературы.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Построение математических моделей некоторых задач математического программирования.....	4
2 Практическое занятие № 2. Основные формы записи задачи линейного программирования, переход от одной формы к другой.....	8
3 Практическое занятие № 3. Графический способ решения ЗЛП.....	9
4 Практическое занятие № 4. Нахождение оптимального плана ЗЛП симплексным методом.....	10
5 Практическое занятие № 5. Нахождение оптимального плана ЗЛП симплексным методом (решение М-задачи).....	13
6 Практическое занятие № 6. Пары двойственных задач. Прикладной аспект теорем двойственности.....	15
7 Практические занятия № 7–8. Решение транспортной задачи методом потенциалов (закрытая модель). Решение транспортной задачи методом потенциалов (открытая модель).....	16
8 Практическое занятие № 9. Анализ коэффициентов технологической матрицы.....	17
9 Практическое занятие № 10. Построение сетевого графика, расчет временных параметров сетевого графика.....	18
10 Практическое занятие № 11. Построение математических моделей задач дискретного программирования. Эвристические методы решения задач дискретного программирования.....	22
11 Практические занятия № 12–14. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Решение полностью целочисленной задачи линейного программирования методом Гомори.....	23
12 Практические занятия № 15–16. Построение математических моделей задач динамического программирования. Применение принципов оптимальности и погружения к решению задач динамического программирования.....	24
13 Практическое занятие № 17. Решение задач линейного программирования с параметром.....	26
Список литературы.....	29

1 Практическое занятие № 1. Построение математических моделей некоторых задач математического программирования

Задачи для самостоятельной работы

Составить экономико-математические модели задач 1–11ю

1 Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. р., а каждой тысячи мотоциклов – 3 тыс. р.

Найти такое сочетание выпусков продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

2 Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны пять типовых проектов. По каждому из проектов известны длительность закладки фундаментов и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома (таблица 1). Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий. Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 рабочих дней), при условии, что домов II типа должно быть построено не менее 10.

Таблица 1

Вид работы	Длительность выполнения, дн., для типового проекта				
	I	II	III	IV	V
Закладка фундамента	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь, м ³	3000	2000	5000	4000	6000

3 При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее: 30 кормовых единиц, 1 кг белка, 100 г кальция и 80 г фосфора. В таблице 2 приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого корма и себестоимость этих кормов.

Определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости.

4 Полосы листового проката длиной 200 см необходимо разрезать на заго-

товки трех типов: А, Б и В длиной соответственно 57, 82 и 101 см для производства 50 изделий. На каждое изделие требуется по четыре заготовки типов А и Б и пять заготовок типа В. Известны пять способов раскроя одной полосы. Количество заготовок, нарезаемых из одной полосы при каждом способе раскроя, приведено в таблице 3.

Таблица 2

Вид работы	Количество кормовых единиц	Компонент			Себестоимость, к./кг
		Белок, г/кг	Кальций, г/кг	Фосфор, г/кг	
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Определить, какое количество полос проката, нужно разрезать каждым способом для изготовления 50 изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими.

Таблица 3

Способ раскроя	Количество заготовок типа		
	А	Б	В
I	3	—	—
II	2	1	—
III	1	—	1
IV	—	2	—
V	—	1	1

5 Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены в таблице 4. По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы – 6 р., кукурузы – 4 р. Критерий оптимальности – максимум валовой продукции в денежном выражении.

Таблица 4

Культура	Урожайность участка, ц/га	
	I	II
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

6 Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 маш.-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего

для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 маш.-ч, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 у. е. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

7 В сплав может входить не менее 4 % никеля и не более 80 % железа. Для составления сплава используются три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. Стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих компонентов сплава представлены в таблице 5. Определить состав шихты таким образом, чтобы стоимость 1 кг сплава была минимальной.

Таблица 5

Компонент сплава	Содержание компонентов для вида сырья, %		
	I	II	III
Железо	70	90	85
Никель	5	2	7
Прочие	25	8	8
Стоимость, к./кг	6	4	5

8 Металлургический цех выпускает три вида продукции: А, Б и В. Прибыль от тонны произведенной продукции каждого вида составляет соответственно 35, 25 и 40 р. Цех располагает необходимым оборудованием, каждый тип которого имеет свой фонд рабочего времени и производительность (таблица 6).

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

Таблица 6

Тип оборудования	Фонд времени, ч	Производительность, т/ч, вида продукции		
		А	Б	В
Печь обжига	2766	3,5	2,8	–
Травильный агрегат	624	0,083	0,083	0,104
Прокатный стан	416	0,067	0,1	0,083
Отделочный стан:				
№ 1	250	1	–	–
№ 2	1250	–	1	–
№ 3	1500	–	–	1

9 Требуется за 6 ед. времени выпустить 30 ед. продукции P_1 и 96 ед. продукции P_2 . Каждый из видов продукции может производиться машинами А и Б,

значения мощностей которых и затраты, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, заданы таблицей 7.

Требуется составить оптимальный план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин А и Б должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции P_1 и P_2 , чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной и в то же время был бы выполнен заданный план как по времени, так и по номенклатуре.

Таблица 7

Машина	Мощность машины для вида продукции		Затраты на производство продукции	
	P_1	P_2	P_1	P_2
А	6	24	4	47
Б	13	13	13	26

10 Совхоз отвел три земельных массива размерами в 5000, 8000 и 9000 га под посеvy ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по массивам указана в таблице 8. За 1 ц ржи совхоз получает 2 р. прибыли, за 1 ц пшеницы – 2,5 р., за 1 ц кукурузы – 1,4 р.

Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану он обязан сдать не менее 1 900 т ржи, 15 800 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

Таблица 8

Культура	Средняя урожайность массива, ц/га		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	15	22
Кукуруза	30	35	25

11 Три типа самолетов следует распределить между двумя авиалиниями. В таблице 9 заданы количество самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы. Требуется распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из них соответственно не менее 300 и 200 ед. груза.

Таблица 9

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям		Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям	
		I	II	I	II
№ 1	50	15	10	15	20
№ 2	20	30	25	70	28
№ 3	30	25	50	40	70

2 Практическое занятие № 2. Основные формы записи задачи линейного программирования, переход от одной формы к другой

Задачи для самостоятельной работы

1 Привести к канонической форме записи задачу:

$$\begin{aligned} f &= x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 = 2, \end{cases} \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

2 Записать в форме основной задачи линейного программирования задачу: найти максимум функции $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8, \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

3 Записать в форме основной задачи линейного программирования задачу, состоящую в минимизации функции $F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

4 Преобразовать задачу в симметричную форму таким образом, чтобы она содержала не более двух переменных: найти максимальное значение функции $Z = -16x_1 - x_2 + 5x_4 + 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \end{cases} \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

5 Составить задачу линейного программирования и преобразовать ее в симметричную форму таким образом, чтобы она содержала не более двух переменных: двум погрузчикам разной мощности не более чем за 24 ч нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй 168 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 10 т в час, на второй – 12 т. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т, первым погрузчиком на первой площадке 8 ден. ед., на второй 7 ден. ед., вторым погрузчиком на первой площадке 12 ден. ед., на второй 13 ден. ед. Нужно составить план работы, т. е. найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

3 Практическое занятие № 3. Графический способ решения ЗЛП

Задачи для самостоятельной работы

1 Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице 10. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 10

Вид сырья	Норма расхода сырья, кг, на одно изделие		Общее количество сырья, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, у. е.	30	40	

2 Графическим способом найти максимум и минимум функции $F = x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3 Графическим способом найти максимальное значение функции

$Z = -16x_1 - x_2 + 5x_4 + 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

4 Практическое занятие № 4. Нахождение оптимального плана ЗЛП симплексным методом

Задачи для самостоятельной работы

Симплекс-методом решить задачи 1–16.

1 Найти максимум функции $z = 5x_1 + 3x_2$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2 Найти максимум функции $z = 2x_1 + 5x_2$ при системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3 Найти максимум функции $z = 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 6x_4$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq -4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

4 Найти минимум функции $z = -3x_1 + x_2$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

5 Найти минимум функции $z = -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4$ при системе ограничений

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0, \\ x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

6 Найти минимум функции $z = -2x_1 - 4x_2$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 1700, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1600, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

7 Найти минимум функции $z = -x_1 - x_2$ при системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

8 Найти максимум функции $z = 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 6x_4$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq -4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

9 Пусть на предприятии выпускается продукция четырех видов $\Pi_1 - \Pi_4$ с использованием ресурсов, виды и нормы расхода по которым, а также уровень получаемой от их реализации прибыли приведен в таблице 11. Необходимо изучить вариант оптимального плана производства по критерию максимума прибыли.

10 Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м^2 материала, а для полки типа В – 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного

времени, а для изготовления одной полки типа В – 30 мин; машину можно использовать 160 ч в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 ден. ед., а от полок типа В – 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

Таблица 11

Ресурс	Норма затрат сырья на единицу продукции				Располагаемый ресурс
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	
Трудовой	1	1	1	1	20
Сырье	2	3	4	3	60
Оборудование	4	6	10	12	40
Прибыль с единицы продукции	60	40	80	100	

11 Найти максимум функции $z = -3x_1 + x_2 + 4x_3$ при системе ограничений

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

12 Найти максимум функции $z = 2x_1 + 3x_2 - x_4$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

13 Найти максимум функции $z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ при системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

14 Найти минимум функции $z = -3x_1 - 2x_2$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 4x_1 + x_2 \leq 8, \\ 4x_1 - x_2 \leq 9, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

15 Найти максимум функции $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$ при системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 47, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

16 Найти минимум функции $z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

5 Практическое занятие № 5. Нахождение оптимального плана ЗЛП симплексным методом (решение М-задачи)

Задачи для самостоятельной работы

Симплекс-методом (путем введения искусственного базиса) решить задачи 1–11.

1 $\min f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

3 $\min f = 4x_1 + x_2;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

2 $\min f = 2x_1 + x_2 - 2x_3;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ -2x_1 - 8x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

4 $\min f = 4x_1 - x_2 + x_3;$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq -1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

$$5 \min f = -7x_1 + 7x_2 - 2x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

$$8 \min f = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

$$6 \min f = -3x_1 - 4x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10, \\ x_2 \geq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

$$9 \min f = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

$$7 \max f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

$$10 \min f = -2x_1 + x_2 - x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

11 Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с примесью пепла не более 3,25 %. Доступны три сорта угля А, В, С по следующим ценам за 1 т (таблица 12)/

Таблица 12

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси пепла, %	Цена, р.
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

Как их следует смешать, чтобы удовлетворить ограничениям на примеси и минимизировать цену?

6 Практическое занятие № 6. Пары двойственных задач. Прикладной аспект теорем двойственности

Задачи для самостоятельной работы

Составить двойственные задачи к задачам 1–10.

1 $\max Z = x_1 - 2x_2 + 5x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 19, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

5 $\max Z = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 18, \\ 4x_1 - 5x_3 \leq 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 14, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

2 $\max Z = 6x_1 - x_2 + 3x_3;$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

6 $\min Z = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

3 $\min Z = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

7 $\max Z = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

4 $\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

8 $\max Z = x_1 + x_2 + 2x_3;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_3 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

$$9 \min Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$$

$$10 \max Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5;$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \leq 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

7 Практические занятия № 7–8. Решение транспортной задачи методом потенциалов (закрытая модель). Решение транспортной задачи методом потенциалов (открытая модель)

Задачи для самостоятельной работы

Имеется три поставщика и пять потребителей некоторой продукции. Количество груза a_i , которое может отгрузить поставщик i ($i = \overline{1,3}$), потребности в грузе b_j ($j = \overline{1,5}$) и стоимость перевозки из пункта i в пункт j единицы груза c_{ij}

заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & a_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & a_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \end{pmatrix}.$$

В задачах 1–8 требуется:

- 1) составить экономико-математическую модель задачи;
- 2) составить начальный опорный план задачи методом северо-западного угла;
- 3) найти методом потенциалов оптимальный план перевозок продукции, при котором общие транспортные затраты будут наименьшими;
- 4) вычислить суммарные транспортные затраты $Z_{\min}$.

$$1 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 & 2 & 4 & 320 \\ 6 & 4 & 5 & 8 & 5 & 360 \\ 9 & 8 & 4 & 5 & 6 & 220 \\ 190 & 150 & 200 & 200 & 160 & \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 300 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 6 & 260 \\ 6 & 6 & 6 & 3 & 6 & 340 \\ 190 & 170 & 180 & 220 & 140 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{3} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 9 & 3 & 320 \\ 10 & 2 & 9 & 7 & 3 & 220 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 1 & 360 \\ 160 & 190 & 200 & 200 & 150 & \end{pmatrix} & \mathbf{6} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 & 3 & 1 & 310 \\ 5 & 8 & 6 & 4 & 5 & 360 \\ 1 & 5 & 1 & 8 & 10 & 230 \\ 160 & 200 & 190 & 150 & 200 & \end{pmatrix} \\
\\
\mathbf{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 3 & 300 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 4 & 280 \\ 3 & 6 & 10 & 5 & 3 & 320 \\ 140 & 190 & 170 & 180 & 220 & \end{pmatrix} & \mathbf{7} \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 10 & 2 & 300 \\ 5 & 8 & 4 & 5 & 6 & 280 \\ 3 & 1 & 6 & 6 & 10 & 320 \\ 220 & 180 & 170 & 190 & 140 & \end{pmatrix} \\
\\
\mathbf{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 3 & 310 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & 4 & 360 \\ 3 & 6 & 5 & 10 & 3 & 230 \\ 160 & 200 & 190 & 150 & 200 & \end{pmatrix} & \mathbf{8} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 1 & 2 & 320 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 6 & 360 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 220 \\ 200 & 190 & 160 & 210 & 140 & \end{pmatrix}
\end{array}$$

8 Практическое занятие № 9. Анализ коэффициентов технологической матрицы

Задачи для самостоятельной работы

1 Для изготовления четырех видов продукции предприятие использует три типа ресурсов. Нормы расхода ресурсов каждого типа на единицу продукции, их наличие в распоряжении предприятия, а также цена единицы продукции представлена в таблице 13.

Требуется:

1) сформулировать двойственную задачу и найти оптимальные планы прямой и двойственной задач;

2) найти интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурса каждого типа;

3) выявить изменения общей стоимости изготавливаемой продукции, определяемой оптимальным планом ее производства при уменьшении количества ресурса I типа на 60 ед., и увеличении количества ресурсов II и III типов соответственно на 120 и 160 ед.;

4) провести анализ возможного изменения общей стоимости продукции как при изменении объемов каждого из ресурсов по отдельности, так и при их одновременном изменении в указанных объемах.

Таблица 13

Тип ресурса	Норма расхода ресурса на единицу продукции				Наличие ресурса
	A	B	C	D	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена единицы продукции, у. е.	9	6	4	7	

2 Для изготовления трех видов продукции: А, Б, В используются три вида ресурсов: I, II, III. Наличие ресурсов, нормы их расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в таблице 14. В распоряжении предприятия находятся 500 ед. ресурса I, 550 – ресурса II и 200 – ресурса III. Прибыль от реализации единицы продукции А составляет 3 р., продукции Б – 4 р., продукции В – 1 р.

Требуется:

а) определить оптимальный план производства продукции по критерию максимума прибыли;

б) составить и решить двойственную задачу;

в) оценить целесообразность закупки 250 ед. ресурса II вида по цене $c_2 = 0,7$ р. за единицу;

г) оценить целесообразность введения в план четвертого вида продукции Г, нормы затрат ресурсов на единицу которого равны 3, 1 и 2, а прибыль от его реализации 5 р.;

д) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов: I – на +70, II – на +200, III – на –40 единиц. Оценить раздельное и суммарное влияния этих изменений.

Таблица 14

Ресурс	Выпускаемая продукция			Объем ресурсов
	A	B	B	
I	2	1	1	240
II	1	0	2	60
III	1	2	1	300
Прибыль, ден. ед.	4	2	3	

9 Практическое занятие № 10. Построение сетевого графика, расчет временных параметров сетевого графика

Задачи для самостоятельной работы

1 Для заданной сетевой модели (рисунок 1) некоторого комплекса работ определить время и критический путь.

2 Издатель имеет контракт с автором на издание его книги. В таблице 15

представлена последовательность (упрощенная) процессов, приводящая к реализации проекта издания книги. Необходимо разработать сеть для этого проекта.

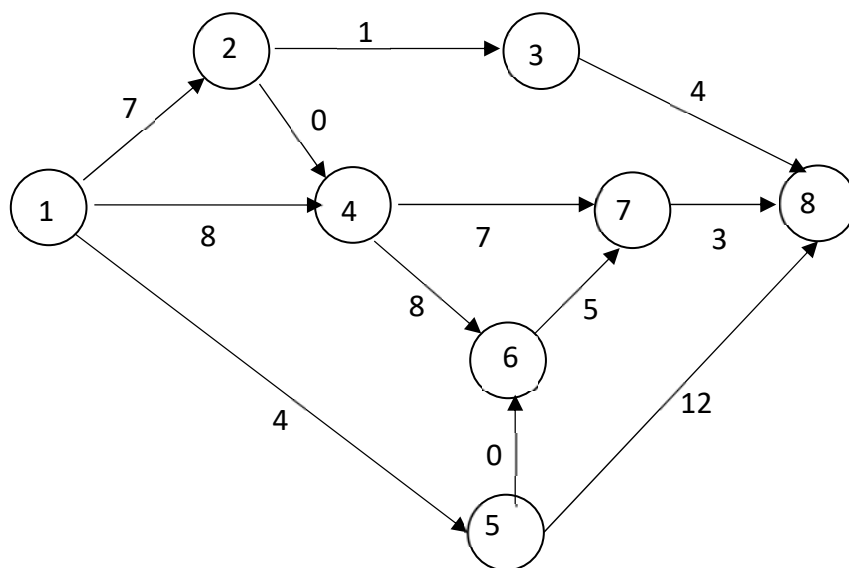


Рисунок 1

Таблица 15

Проект	Предшествующий процесс	Длительность (неделя)
А: Прочтение рукописи редактором	—	3
В: Пробная верстка отдельных страниц книги	—	2
С: Разработка обложки книги	—	4
Д: Подготовка иллюстраций	—	3
Е: Просмотр автором редакторских правок и сверстаных страниц	А, В	2
Ф: Верстка книги (создание макета книги)	Е	4
Г: Проверка автором макета книги	Ф	2
Н: Проверка автором иллюстраций	Д	1
І: Подготовка печатных форм	Г, Н	2
Ј: Печать и брошюровка книги	С, І	4

3 По заданным перечню и продолжительности работ (таблица 16):

- построить сетевой график;
- определить продолжительности полных путей графика;
- определить и выделить критический путь;
- определить резерв времени каждого пути;
- определить коэффициенты напряженности пути;
- определить ранние и поздние сроки начала и окончания работы;
- определить полный резерв времени каждой работы.

$L_1 : 0 - 1, 1 - 2, 2 - 5, 5 - 7, 7 - 8;$
 $L_2 : 0 - 1, 1 - 4, 4 - 7, 7 - 8;$
 $L_3 : 0 - 1, 1 - 4, 4 - 5, 5 - 7, 7 - 8;$
 $L_4 : 0 - 1, 1 - 3, 3 - 6, 6 - 7, 7 - 8.$

Таблица 16

Путь	0-1	1-2	1-3	1-4	2-5	3-6	4-5	4-7	5-7	6-7	7-8
Продолжительность работ	3,0	3,0	3,0	4,0	4,0	5,0	3,5	6,0	4,5	5,5	1,0

4 Рассчитать параметры сетевого трафика по данным таблицы 17.

Таблица 17

Работа сети $i-j$	Список непосредственно предшествующих работ $h-j$	Трудоемкость (длительность) выполнения данной работы t_{ij}	$P_{ij}(S=6)$
A	—	5	5
B	—	7	2
C	—	2	3
D	A	8	3
E	A	5	2
F	C	3	4
G	C	5	2
H	B, E, F	4	3

5 На сетевом графике (рисунок 2) найти ранние и поздние сроки наступления событий, определить критический путь и резервы времени каждого события.

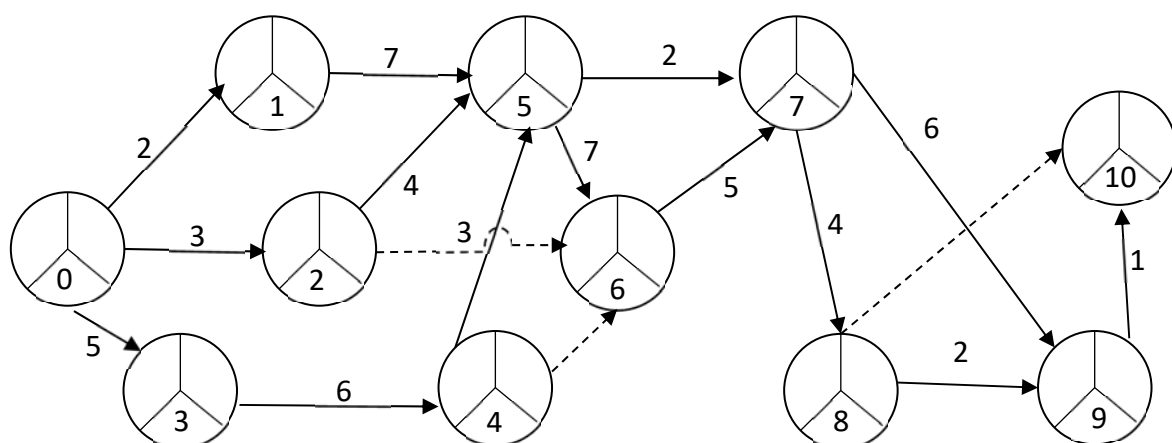


Рисунок 2

6 По данным таблицы 18 построить сетевой график. Решить задачу оптимального распределения ресурсов по работам при постоянных интенсивностях.

Наличие ресурса $R = 10$. Работы не допускают перерыва в их выполнении.

Таблица 18

Работа	Продолжительность работ t_{ij}	Интенсивность выполнения работ β_{ij}
I, B	3	6
I, E	1	4
B, H	4	6
E, H	3	3
E, K	5	4
H, P	6	6
H, M	4	4
M, K	3	3
P, C	6	4
K, C	4	5

7 По данным из таблицы 19 построить сетевую модель, определить критические пути модели, провести максимально возможное уменьшение сроков выполнения проекта при минимально возможных дополнительных нагрузках.

Таблица 19

Работа	Нормальная длительность	Нормальная стоимость	Сокращенная длительность	Повышенная стоимость
A	7	9	2	14
B	6	16	1	18
C	8	4	3	8
D	9	11	4	12
E	10	14	4	18
F	11	9	6	11
G	5	13	1	19
H	9	8	2	9
I	12	15	5	17
J	6	12	2	12
$N = 13$ чел.		$Co = 149,00$ р.		$Ck = 1,3$ р./день

10 Практическое занятие № 11. Построение математических моделей задач дискретного программирования. Эвристические методы решения задач дискретного программирования

Задачи для самостоятельной работы

1 Составить с помощью алгоритма Джонсона модель задачи по определению оптимального плана обработки шести деталей ($k = \overline{1,6}$) на двух станках ($i = \overline{1,2}$) при условии, что каждая деталь сначала обрабатывается на первом, затем на втором станке со следующими данными о времени обработки t_{ik} на каждом станке (таблица 20).

Таблица 20

i	k					
	1	2	3	4	5	6
1	5	12	4	20	18	14
2	9	12	15	6	12	5

2 Найти оптимальный план обработки 10 деталей на двух станках при следующих значениях t_{ik} (таблица 21).

Таблица 21

i	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	15	14	12	20	25	5	9	16	30	8
2	23	18	10	17	8	40	16	6	20	12

3 Фабрика может производить k различных продуктов ($k = \overline{1,3}$), располагая для этого двумя видами ресурсов в количестве 1200 и 800. Для производства продуктов могут быть использованы два технологических способа ($j = \overline{1,2}$). В таблице 22 заданы величины a'_{ik} , характеризующие нормы расхода i -го ресурса на единицу k -го продукта при изготовлении его j -м способом, и цены $p_1 = 12$, $p_2 = 25$, $p_3 = 8$ ед. k -го продукта.

Составить модель задачи по определению оптимального набора продуктов и способов их производства из условия максимизации товарной продукции при дополнительном условии, согласно которому любой k -й продукт либо должен производиться в количестве не меньшем 30 ед., либо совсем не производиться.

Таблица 22

Ресурс	Способ 1			Способ 2		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1200	15	6	9	12	8	10
800	10	10	12	16	8	6

11 Практические занятия № 12–14. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Решение полностью целочисленной задачи линейного программирования методом Гомори

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1–4 приведены матрицы расстояний между городами, которые должен посетить коммивояжер, причем он должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины методом ветвей и границ.

$$1 \quad \begin{bmatrix} \infty & 16 & 9 & 12 & 11 \\ 8 & \infty & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & \infty & 12 & 7 \\ 12 & 9 & 10 & \infty & 14 \\ 11 & 8 & 9 & 15 & \infty \end{bmatrix}$$

$$3 \quad \begin{bmatrix} \infty & 24 & 25 & 19 & 15 \\ 18 & \infty & 17 & 20 & 17 \\ 18 & 19 & \infty & 21 & 25 \\ 26 & 18 & 21 & \infty & 20 \\ 15 & 17 & 18 & 21 & \infty \end{bmatrix}$$

$$2 \quad \begin{bmatrix} \infty & 8 & 12 & 7 & 11 \\ 14 & \infty & 11 & 10 & 9 \\ 10 & 9 & \infty & 12 & 7 \\ 12 & 11 & 9 & \infty & 8 \\ 10 & 8 & 9 & 13 & \infty \end{bmatrix}$$

$$4 \quad \begin{bmatrix} \infty & 5 & 9 & \infty & 10 \\ 8 & \infty & 7 & 6 & 9 \\ 5 & 6 & \infty & 9 & 7 \\ 11 & 9 & 7 & \infty & 9 \\ 12 & 8 & 9 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$

5 Методом Гомори найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции $Z = x_1 + 4x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}), \\ x_j - \text{целые} \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

6 Методом Гомори найти максимальное значение целевой функции $Z = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases}$$

7 Методом Гомори решить задачу: на приобретение оборудования для нового производственного участка выделена 21 тыс. р. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 37 м². Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа А стоимостью 3 тыс. р., требующие производственную площадь 6 м² (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность 7 тыс. ед. продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. р., занимающие площадь 3 м² и дающие за смену 4 тыс. ед. продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий при данных ограничениях максимум общей производительности участка.

8 Методом ветвей и границ решить задачу об оптимизации поставок крупногабаритной продукции:

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2, \\ \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \leq 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 36, \end{cases} \\ x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \\ x_j &- \text{целые } (j = \overline{1, 2}). \end{aligned}$$

12 Практические занятия № 15–16. Построение математических моделей задач динамического программирования. Применение принципов оптимальности и погружения к решению задач динамического программирования

Задачи для самостоятельной работы

1 Требуется перевезти груз из города А в город В. Сеть дорог, связывающая эти города, изображена на рисунке 3. Стоимость перевозки груза из города город проставлена над соответствующими ребрами сети. Необходимо найти маршрут, связывающий города А и В, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими.

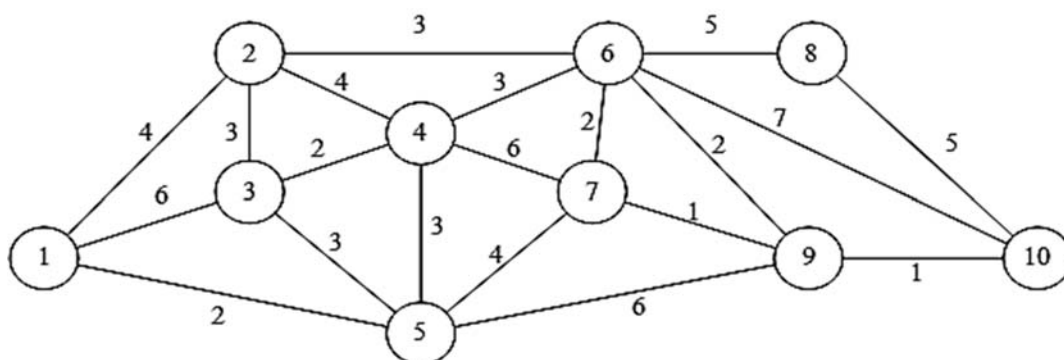


Рисунок 3

2 На данной сети дорог (рисунок 4) указаны стоимости доставки единицы груза из пункта в пункт. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

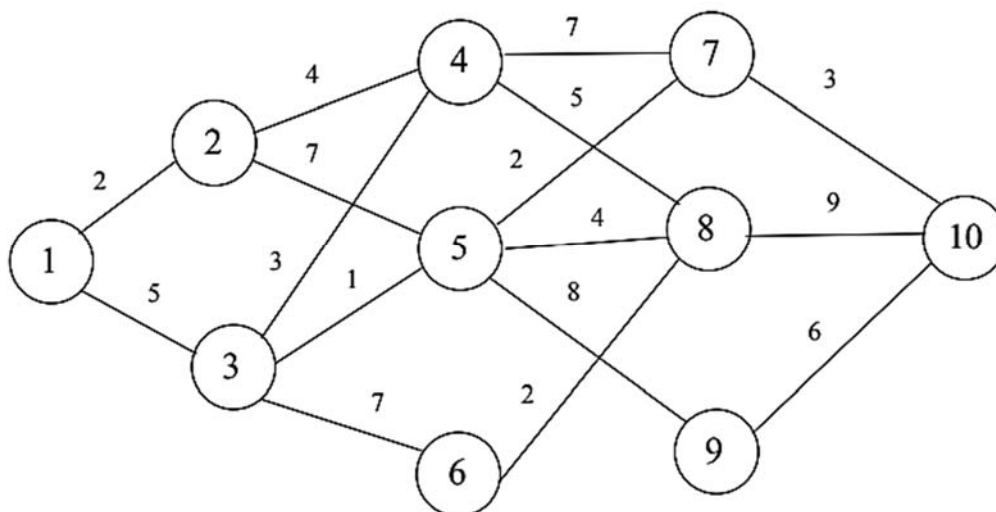


Рисунок 4

3 В определенный момент времени на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в таблице 23. Зная, что затраты связанные с приобретением и установкой оборудования, идентичного установленному рядом, составляют 40 у. е., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение 5 лет, при котором общая прибыль за данный период времени была бы максимальной.

4 Составить оптимальный план замены оборудования в условиях задачи 3 при исходных данных о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание, приведенных в таблице 24. Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, а стоимость нового оборудования равна 10 тыс. у. е.

Таблица 23

Затраты	Время τ , в течение которого используется оборудование, лет					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $R(t)$ в стоимостном выражении, у. е.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты $Z(\tau)$, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, у. е.	20	25	30	35	45	55

Таблица 24

Затраты	Время τ , в течение которого используется оборудование, лет									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Годовой выпуск продукции $R(t)$ на оборудовании возраста τ лет, тыс. у. е.	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования $Z(\tau)$, тыс. у. е.	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

13 Практическое занятие № 17. Решение задач линейного программирования с параметром

Задачи для самостоятельной работы

Используя геометрическую интерпретацию задачи параметрического программирования и считая, что $-\infty < t < +\infty$, найти решение задач 1 и 2.

$$1 \quad \max Z = 6x_1 + (4+t)x_3 + (12-t)x_4; \quad 2 \quad \max Z = 5x_1 - (3+t)x_3 + (4+t)x_4;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

3 Для каждого значения параметра t ($-\infty < t < +\infty$) найти максимальное значение функции $\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

4 Найти максимальное значение функции $Z = (8 - 5t)x_1 + (9 - 3t)x_2 + (-3 + 5t)x_3 - (2 + 4t)x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -18 + 10t, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}), \\ t \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

Считая, что $-\infty < t < +\infty$, найти решение задач 5–10.

5 Найти максимальное значение функции $Z = -(1 - t)x_1 + (4 - t)x_2 - (2 - t)x_3 + (2 - t)x_4 + (3 - 2t)x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

6 Найти максимальное значение функции $Z = 2x_1 + 5x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 + 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 8 - 3t, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

7 Найти максимальное значение функции $Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 2t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 + t, \\ 3x_1 + x_5 = 3 - t, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

8 Найти максимальное значение функции $Z = (2 - 3t)x_1 - 4tx_2 + (2 + 6t)x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + 8t, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 + 12t, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

9 Найти максимальное значение функции $Z = (2 + t)x_1 - (3 - t)x_2 + 3(2 + 4t)x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 + 6t, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 - 12t, \\ x_1 - x_2 + x_5 = -8 + 9t, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

10 Для производства трех видов изделий предприятие использует три вида сырья, нормы расхода которых определяются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предприятие может использовать сырья первого вида не более 20 ед., второго вида – не более 42 ед., третьего вида – не более 36 ед. Цена единицы продукции каждого вида линейно зависит от некоторого параметра t , и эта зависимость соответственно имеет вид $2 + t, 12 - t, 6 + t$ ($0 \leq t \leq 10$). Для каждого значения параметра t ($0 \leq t \leq 10$) найти такой план выпуска продукции, реализация которого обеспечит максимальный выпуск изделий в стоимостном выражении.

Список литературы

1 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – СПб. : Лань, 2013. – 352 с.

2 **Кузнецов, А. В.** Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Выш. шк., 1978. – 256 с.

3 **Мину, М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М. : Наука, 1990. – 486 с.

4 **Калихман, И. Л.** Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М. : Высш. шк., 1975. – 270 с.

5 **Акулич, И. Л.** Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие / И. Л. Акулич. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 352 с.