

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей*

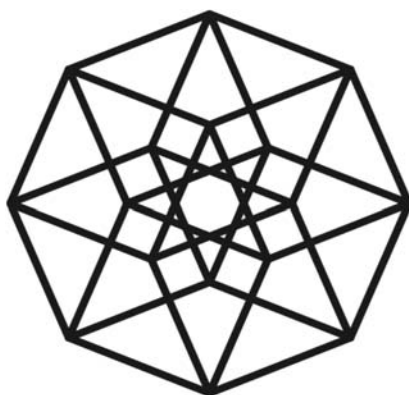
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»,

6-05-0611-04 «Электронная экономика»

и 6-05-0612-03 «Системы управления информацией»

дневной и заочной форм обучения

Часть 1



Могилев 2026

УДК 517
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «26» марта 2026 г., протокол № 7

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Математический анализ» предназначены для студентов специальностей 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», 6-05-0611-04 «Электронная экономика» и 6-05-0612-03 «Системы управления информацией» дневной и заочной форм обучения. Приведены примеры решения задач, предложены задания для самостоятельной работы на практических занятиях и задания для домашней работы.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать	. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л.	. Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

1 Множества и функции	4
2 Предел числовой последовательности.....	5
3 Предел и непрерывность функции	7
4 Сравнение функций	10
5 Свойства функций, непрерывных на отрезке.....	12
6 Комплексные числа.....	15
7 Многочлены и их делимость.....	19
8 Производная функции	20
9 Дифференцируемость функции. Дифференциал.....	23
10 Основные теоремы дифференциального исчисления.	
Правила Лопиталя	28
11 Формула Тейлора	30
12 Исследование функций и построение графиков	32
13 Предел, непрерывность и дифференцируемость функции	
многих переменных. Частные производные	34
14 неявная функция.....	37
15 Частные производные высших порядков. Формула Тейлора.....	38
16 Экстремумы функции многих переменных	41
17 Условный экстремум	44
Список литературы	46

1 Множества и функции

1.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Описать перечислением элементов множество

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ и } x \geq 0 \right\}.$$

Решение

Множество A есть множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x-3)(x^2-1) = 0$. Следовательно, $A = \{1, 3\}$.

Пример 2 – Найти область значений функции $y = \sin x + \cos x$.

Решение

Преобразуем функцию

$$y = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Так как $\left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1$, то $\left| \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$. Следовательно $|y| \leq \sqrt{2}$, а значит $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$.

Таким образом, область значений $y \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

1.2 Задания для самостоятельной работы

1 Заданные множества описать перечислением всех своих элементов:

$$1) A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \right\}; \quad 3) A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{4} \leq 2^x < 5 \right\}.$$

$$2) A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \leq 2 \text{ и } x > 0 \right\};$$

2 Доказать, что:

- 1) равенство $A \cap B = B$ верно в том и только в том случае, когда $B \subset A$;
- 2) равенство $A \cup B = B$ верно в том и только в том случае, когда $A \subset B$.

3 Пусть $A = (-1; 2]$ и $B = [1; 4)$. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и изобразить их на числовой оси.

4 Найти область определения функций:

$$1) y = \log_3 \sin x + \sqrt{4 - x^2}; \quad 2) y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{2x-1}{x+5}}; \quad 3) y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

5 Найти область значений функций:

$$1) y = \sqrt{3} \sin x + \cos x; \quad 2) y = \frac{x}{1+x^2}; \quad 3) y = \sqrt{-x^2 + x + 2}.$$

6 Определить четность (нечетность) функций:

$$1) y = x^3 \sin x; \quad 2) y = \lg \frac{1+x}{1-x}; \quad 3) y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

1.3 Домашнее задание

1 Заданные множества описать перечислением всех своих элементов:

$$1) A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0 \right\}; \quad 2) A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \log_{0,5} \frac{1}{x} < 2 \right\}.$$

2 Пусть A – множество всех точек плоскости, образующих стороны некоторого треугольника, вписанного в заданную окружность. Описать объединение и пересечение всех таких множеств, если:

- 1) треугольники произвольные; 3) треугольники прямоугольные.
2) треугольники правильные;

3 Найти $f(0,1)$, $f(1)$, $f(10)$, если $f(x) = \arccos(\lg x)$.

4 Найти область определения функций:

$$1) y = \sqrt[3]{x^4 + 5}; \quad 2) y = \arcsin \frac{x}{4}; \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}.$$

5 Выяснить, какая функция четная и какая нечетная:

$$1) f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}; \quad 2) f(x) = 2x^5 \cos x.$$

2 Предел числовой последовательности

2.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{5n^2 - n + 7}$.

Решение

Вынесем в числителе и знаменателе за скобки старшую степень n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{5n^2 - n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(5 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{5 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{2}{5},$$

так как при $n \rightarrow \infty$ дроби $\frac{3}{n} \rightarrow 0$, $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{7}{n^2} \rightarrow 0$.

Пример 2 – Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{n^2 - n})$.

Решение

Имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Умножим и разделим на выражение, сопряженное данному, и используем формулу $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{n^2 - n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3n - 1) - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt{n^2 - n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt{n^2 - n}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(4 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)} = \frac{4}{1 + 1} = 2. \end{aligned}$$

2.2 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить пределы:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 4n - 2}{8n^2 - 7n - 5};$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n + 2)!}{(n + 3)n! + (n + 1)!};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 3n}}{5};$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{10 + n\sqrt{n}};$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 + 3n - 1}}{\sqrt[3]{8n^3 + 4n - 7}};$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{n + 2} - \frac{1}{n^2 - 4} \right);$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{2n - 3} \right)^{1-n};$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3 \cdot 2^n}{3^{n+1} - 5^{n-1}}.$

Ответы: 1) 0,75; 2) 0,5; 3) ∞ ; 4) e^{-2} ; 5) ∞ ; 6) ∞ ; 7) 0; 8) -5 .

2 Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

2.3 Домашнее задание

1 Вычислить пределы:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 5n}{n^2 + 3n - 1}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n + 1} - n}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{3n-1} \right)^{4n-3}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n-3)!}{2n^2(n-3)! + (n-2)!}$.

Ответы: 1) ∞ ; 2) e^8 ; 3) -1 ; 4) $0,5$.

3 Предел и непрерывность функции

3.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2 – Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4}$.

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0} \right)$ умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})} = \frac{2}{4(2+2)} = \frac{1}{8}.$$

Пример 3 – Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$.

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x \cdot \cos 2x}{2x \cdot \sin 2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 2.$$

Пример 4 – Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x}$.

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{7x} &= (1)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x+5} - 1 \right)^{7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+5} \right)^{7x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-4}{2x+5} \right)^{\frac{2x+5}{-4}} \right)^{\frac{-4 \cdot 7x}{2x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-28x}{2x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-28x}{2x+5}} = e^{-14}. \end{aligned}$$

Здесь применили второй замечательный предел.

3.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти следующие пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$;

2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 10x + 24}{x^2 - 7x + 6}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{5-x}}{3 - \sqrt{5+x}}$;

4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$;

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 6x - 5x^2}{x^3 + x^2 + 1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$;

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Ответы: 1) -2 ; 2) $0,4$; 3) $0,75$; 4) 4 ; 5) 3 ; 6) -1 ; 7) 1 ; 8) -3 ; 9) 0 ; 10) $0,5$.

2 Найти пределы, используя первый замечательный предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 7x}{\sin 5x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{\sin^2 9x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x^2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}.$$

Ответы: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{49}{81}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 12; 5) $-\frac{4}{5}$; 6) $\frac{2}{\pi}$; 7) $\frac{9}{98}$; 8) $\frac{1}{8}$.

3 Найти пределы, используя второй замечательный предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{\frac{x+1}{2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-1} \right)^{x^2-6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1} \right)^{-6x^3};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{3}{x}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-5) \cdot (\ln(x-3) - \ln x)).$$

Ответы: 1) e ; 2) e^4 ; 3) $e^{\frac{18}{5}}$; 4) e^3 ; 5) 1; 6) e^{-2} ; 7) e^6 ; 8) -3 .

3.3 Домашнее задание

1 Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 5x + 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 9} - 2x}{2 - \sqrt[3]{x^3 + 5}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{2x^2 - x} - x \right);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{\sqrt{x+2} - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3 (3x-2)^2}{x^5 + 5}.$$

Ответы: 1) -6 ; 2) $\frac{5}{11}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) -1 ; 6) ∞ ; 7) 0,5; 8) 72.

2 Найти пределы, используя первый замечательный предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 8x}{4x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 4x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}.$$

Ответы: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 8; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) 0.

3 Найти пределы, используя второй замечательный предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3x}{3x} \right)^{x-2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 6} \right)^x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x+1) \cdot (\ln(x+3) - \ln x)).$$

Ответы: 1) e^2 ; 2) $e^{\frac{2}{3}}$; 3) e^6 ; 4) 1; 5) e ; 6) e ; 7) e^6 ; 8) 6.

4 Сравнение функций

4.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Доказать, что порядок функции $\frac{x^3}{3-x}$ выше, чем порядок функции x^2 при $x \rightarrow 0$.

Решение

Найдем предел отношения двух функций при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2(3-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3-x} = 0.$$

Таким образом, функция $\frac{x^3}{3-x}$ есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем x^2 .

Пример 2 – С помощью замены эквивалентных бесконечно малых величин найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{e^{-2x}-1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}.$$

Решение

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \left[\frac{\ln(1+(\cos x-1)) \sim \cos x-1}{\sqrt[4]{1+x^2}-1 \sim \frac{x^2}{4}} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x-1}{\frac{x^2}{4}} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \right] = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2; \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{e^{-2x}-1} = \left[\frac{\operatorname{arctg} 7x \sim 7x}{e^{-2x}-1 \sim -2x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{-2x} = -\frac{7}{2};$$

3) $\sin 2x$, $\sin 5x$ – бесконечно малые величины, но x – не бесконечно малая величина. Введём бесконечно малую величину $\alpha = \pi - x$, тогда $x = \pi - \alpha$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2(\pi - \alpha)}{\sin 5(\pi - \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{\sin(5\pi - 5\alpha)} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\sin 2\alpha}{\sin 5\alpha} = \left[\frac{\sin 2\alpha \sim 2\alpha}{\sin 5\alpha \sim 5\alpha} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2\alpha}{5\alpha} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

4.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти пределы, применяя эквивалентные бесконечно малые величины:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \operatorname{tg} 7x}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}; \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2}; & \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}. \end{aligned}$$

Ответы: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 15; 3) $\frac{8}{7}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{5}{12}$; 6) $\frac{1}{3 \ln 2}$.

2 Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$ и $\beta(x) = x \operatorname{tg} x$ с бесконечно малой величиной $\gamma(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

3 Найти значения параметра a , удовлетворяющие равенствам:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{2x^2} = 8;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{4x} = 2;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{4x} = \frac{1}{2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos ax} = 2.$$

Ответы: 1) ± 4 ; 2) 2; 3) 8; 4) 1.

4.3 Домашнее задание

1 Найти пределы, применяя эквивалентные бесконечно малые величины:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \cdot \sin \frac{x}{2}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\sqrt{3x^3 + 1} - 1}.$$

Ответы: 1) -1 ; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) -2 ; 6) ∞ .

2 Сравнить бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$:

$$1) \alpha(x) = 1 - \cos x, \beta(x) = \frac{x^3}{3-x};$$

$$2) \alpha(x) = e^{2x} - e^x, \beta(x) = \sin^2 x.$$

5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

5.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Установить характер точки разрыва функции $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$.

Решение

Функция не определена в точке $x = -1$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1-0} (1-x+x^2) = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1+0} (1-x+x^2) = 3.$$

Так как $f(-1-0) = f(-1+0)$, но данная функция $f(x)$ в точке $x = -1$ не определена, то точка $x = -1$ есть точка устранимого разрыва.

Разрыв можно устранить, положив $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^3}{1+x}, & \text{если } x \neq -1, \\ 3, & \text{если } x = -1. \end{cases}$

Пример 2 – Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 2, \\ 4x - 7, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Решение

Данная функция определена на $\mathbb{R}$, непрерывна для $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Точкой разрыва может быть точка $x = 2$. Найдём односторонние пределы:

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 = 4; \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (4x - 7) = 1.$$

Точка $x = 2$ – точка разрыва первого рода (конечного скачка) (рисунок 1).

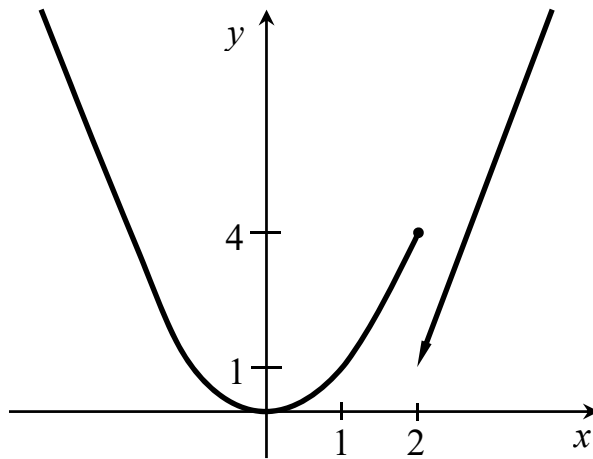


Рисунок 1

Пример 3 – Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Решение

Функция определена и непрерывна везде, кроме точки $x = -1$. Найдём односторонние пределы:

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = 0, \text{ т. к. } \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty;$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty, \text{ т. к. } \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, точка $x = -1$ – точка разрыва второго рода (бесконечного скачка).

Прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой. Построим схематично график функции (рисунок 2).

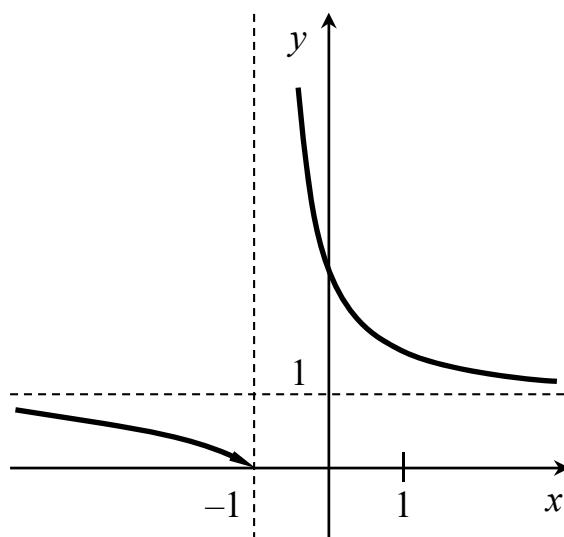


Рисунок 2

5.2 Задания для самостоятельной работы

1 Используя теорему Вейерштрасса, доказать, что среди вписанных в окружность единичного радиуса равнобедренных треугольников существует треугольник наибольшей площади.

2 Показать, что функция $f(x) = \sin x + \cos x$ принимает значение $c = \frac{1}{3}$ на отрезке $[0; \pi]$.

3 Пользуясь теоремой Больцано – Коши, показать, что уравнение $3^x + x = 3$ имеет только одно решение на отрезке $[0; 1]$.

4 Определить точки разрыва функции, их характер и построить схематичный график функции:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < -1, \\ x^2+1, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ 3-x, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \geq -1, \\ \frac{x}{x+4}, & \text{если } x < -1; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4};$$

$$4) f(x) = \frac{4}{(x-3)^2};$$

$$6) f(x) = 4^{\frac{1}{x-3}} + 1.$$

5.3 Домашнее задание

1 Исследовать функции на непрерывность и построить их графики:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x < -1, \\ x-1, & \text{если } -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{1}{\pi-x}, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \frac{x-5}{x+3};$$

$$4) f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}} + 2.$$

6 Комплексные числа

6.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Записать комплексное число $z = -2 + 2i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение

Для записи комплексного числа в тригонометрической и показательной формах $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$ необходимо найти его модуль и аргумент (главное значение аргумента).

Находим модуль комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Для того чтобы найти аргумент комплексного числа, определим четверть. Число z расположено во второй четверти, следовательно,

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{В результате } z = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Пример 2 – Найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Решение

Воспользуемся формулой извлечения корня n -й степени из комплексного числа в тригонометрической форме:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $k = 1$ имеем $z_1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1$.

При $k = 2$ имеем $z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Корни расположены в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом $R = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{1} = 1$ (рисунок 3).

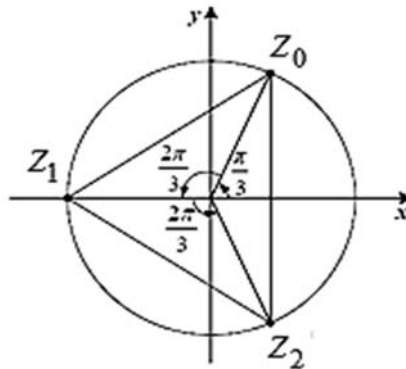


Рисунок 3

Пример 3 – Комплексные числа заданы в виде $z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Выполнить действия: **1)** $z_1 + z_2$, **2)** $z_1 - z_2$, **3)** $\frac{z_1^2}{z_2}$.

Решение

Запишем комплексные числа во всех формах и будем брать соответствующую форму для выполнения указанных действий.

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i,$$

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Имеем

$$1) z_1 + z_2 = (1 + i) + (-1 + i\sqrt{3}) = (1 - 1) + i(1 + \sqrt{3}) = i(1 + \sqrt{3});$$

$$2) z_1 - z_2 = (1 + i) - (-1 + i\sqrt{3}) = (1 + 1) + i(1 - \sqrt{3}) = 2 + i(1 - \sqrt{3});$$

3) для умножения, деления и возведения в натуральную степень воспользуемся тригонометрической формой чисел:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^2}{z_2} &= \frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

6.2 Задания для самостоятельной работы

1 Выполнить действия, указать действительную и мнимую части комплексного числа:

$$1) i^{48}; \quad 2) i^{391}; \quad 3) (1 + 2i)^2; \quad 4) \frac{2-i}{1+i}; \quad 5) \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Ответы: 1) 1; 2) $-i$; 3) $-3 + 4i$; 4) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$; 5) i .

2 Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах и изобразить его на комплексной плоскости:

$$\begin{array}{lll} 1) z = -i; & 4) z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; & 7) z = \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}; \\ 2) z = -5; & 5) z = \frac{1-i}{1+i}; & 8) z = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{7\pi}{4}; \\ 3) z = 1 - i\sqrt{3}; & 6) z = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}; & 9) z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{array}$$

Ответы: 1) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$; 2) $5e^{i\pi}$; 3) $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$; 4) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$; 5) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$; 6) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$; 7) $e^{i\frac{\pi}{6}}$; 8) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$; 9) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3 Вычислить, используя формулу Муавра:

$$1) \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} + (1+i)^{96}}; \quad 2) \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{100}.$$

Ответы: 1) -2 ; 2) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4 Найти все значения корней из комплексного числа:

$$1) \sqrt[3]{1}; \quad 2) \sqrt{i}; \quad 3) \sqrt{-1}; \quad 4) \sqrt{-1+i\sqrt{3}}; \quad 5) \sqrt[4]{-1}.$$

Ответы: 1) $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $\pm i$; 4) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$;

$$5) \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

5 Решить уравнения:

$$1) z^3 + 8 = 0;$$

$$3) z^2 + 2z + 5 = 0;$$

$$2) z^2 - 6z + 34 = 0;$$

$$4) z^2 + 6iz - 13 = 0.$$

Ответы: 1) $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$; 2) $3 \pm 5i$; 3) $-1 \pm 2i$; 4) $\pm 2 - 3i$.

6 Установить, при каком действительном значении a комплексное число $z = 3i^3 - 2ai^2 + (1-a)i + 5$ будет:

1) действительным; 2) чисто мнимым; 3) равным нулю.

Ответы: 1) -2 ; 2) $-2,5$; 3) ни при каком.

7 Вычислить двумя способами $z_1 \cdot \bar{z}_2$ и $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2} \right)^2$, если $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Ответы: $-4i$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

6.3 Домашнее задание

1 Вычислить $i^{17} - 5i^{14} + 10i^7 + 9i^5 - 4$.

Ответ: 1.

2 Комплексные числа заданы в виде $z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

Выполнить действия:

$$1) z_1 + z_2; \quad 2) z_1 - z_2; \quad 3) \frac{z_1^2}{z_2}; \quad 4) \bar{z}_1 \cdot z_2^2; \quad 5) \sqrt[3]{z_2}.$$

Ответы: 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; 3) $-\frac{1}{2}i$; 4) $-4i$; 5) $\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right)$,
 $\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right)$, $\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right)$.

3 Вычислить $(1+i)^{10}$, используя формулу Муавра.

Ответ: $32i$.

4 Решить уравнения:

1) $z^4 + 16 = 0$;

2) $4z^2 - 8z + 5 = 0$.

Ответы: 1) $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$; 2) $1 \pm \frac{1}{2}i$.

7 Многочлены и их делимость

7.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

Решение

Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни 3-й степени из -1 :

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При этом каждый корень имеет кратность $k = 2$. Разложение этого многочлена на линейные множители имеет вид

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2.$$

Объединяя последние две скобки в один сомножитель, получим разложение на множители с действительными коэффициентами

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 (z^2 - z + 1)^2.$$

7.2 Задания для самостоятельной работы

1 Следующие многочлены разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

1) $z^4 - 1$;

2) $z^4 + z^2 + 1$;

3) $z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$, известен двукратный корень $z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

4) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$, известен корень $z_1 = 1 + 2i$.

Ответы: 1) $(z-1)(z+1)(z^2+1)$; 2) $(z^2-z+1)(z^2+z+1)$; 3) $(z-1)(z^2+z+1)^2$; 4) $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$.

7.3 Домашнее задание

1 Следующие многочлены разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

1) $z^4 + 1$; 2) $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$, известен корень $z_1 = -1 + i$.

Ответы: 1) $(z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)$; 2) $(z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$.

8 Производная функции

8.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти производную функции $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

Решение

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+e^x}{1-e^x} \right)' &= \frac{(1+e^x)' \cdot (1-e^x) - (1+e^x) \cdot (1-e^x)'}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (1-e^x) + e^x \cdot (1+e^x)}{(1-e^x)^2} = \\ &= \frac{e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}. \end{aligned}$$

Пример 2 – Найти производную функции $y = \cos^2 x$.

Решение

$$(\cos^2 x)' = 2 \cos x \cdot (\cos x)' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x.$$

Пример 3 – Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение

Логарифмируя данную функцию, получим

$$\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin 2x.$$

Дифференцируем обе части равенства по x :

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln \sin 2x + \operatorname{tg} x \cdot (\ln \sin 2x)', \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln \sin 2x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2, \\ y' &= y \cdot \left(\frac{\ln \sin 2x}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y' = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln \sin 2x}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x \right).$$

8.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти значения производных следующих функций в указанных точках:

1) $y = 2x^7 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}$, $y'(-1)$;

6) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[4]{x}}$, $y'(\pi)$;

2) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^5} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$, $y'(1)$;

7) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, $y'(\pi)$;

3) $y = x - \frac{2}{x} + \cos x$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

8) $y = \ln x + x \cdot e^x$, $y'(1)$;

4) $y = 3x^2 \cdot \ln x$, $y'(1)$;

9) $y = (x^3 + 2^x) \cdot \operatorname{tg} x$, $y'(0)$;

5) $y = x^3 \cdot \arccos x$, $y'(0)$;

10) $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$, $y'(0)$.

Ответы: 1) 1; 2) $-\frac{25}{6}$; 3) $\frac{8}{\pi^2}$; 4) 3; 5) 0; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$; 7) 2; 8) $2e + 1$; 9) 1; 10) 1.

2 Найти значения производных сложных функций в указанных точках:

1) $y = \sin^3 x$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $y = x \cdot \ln^2 x$, $y'(1)$;

2) $y = \sqrt{x^4 + 1}$, $y'(0)$;

4) $y = e^{-2\sin^2 5x}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

$$5) y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, y'(2);$$

$$8) y = (x^9 + 1) \cdot \cos^2 3x, y'(0);$$

$$6) y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}, y'(1);$$

$$9) y = \sqrt[4]{1+e^{4x}} + 7^{\cos x}, y'(0);$$

$$7) y = \ln^3 \frac{1}{x}, y'(1);$$

$$10) y = e^{-\sqrt{x^2+2x+2}}, y'(-1).$$

Ответы: 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{8}{15}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) 0; 8) 0; 9) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$; 10) 0.

3 Расстояние, пройденное материальной точкой за время t , равно $S = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t_1 = 0$ с; $t_2 = 1$ с; $t_3 = 2$ с.

Ответ: $v_1 = 2$ м/с; $v_2 = 2$ м/с; $v_3 = 6$ м/с.

4 Найти производные следующих функций:

$$1) y = x^{\cos x};$$

$$3) y = (\arccos 5x)^{\ln x};$$

$$2) y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$4) y = \frac{(x-2)^3(x-1)^4}{(x+5)^2}.$$

Ответы: 1) $y' = x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$; 2) $y' = (\sin x)^{\ln x} \left(\ln x \operatorname{ctg} x + \frac{\ln \sin x}{x} \right)$;

$$3) y' = (\arccos 5x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \arccos 5x}{x} - \frac{5 \ln x}{\sqrt{1-25x^2} \arccos 5x} \right);$$

$$4) y' = \frac{(x-2)^2(x-1)^3(5x^2+30x-59)}{(x+5)^3}.$$

8.3 Домашнее задание

1 Найти значения производных следующих функций в указанных точках:

$$1) y = (x^2 + 5x + 4) \ln x, y'(1);$$

$$5) y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}, y'(\pi);$$

$$2) y = \frac{x^5 - 1}{x^5 + 1}, y'(1);$$

$$6) y = \ln(\sin^4 3x), y'\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

$$3) y = \sqrt{x^3 - 4}, y'(2);$$

$$7) y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}, y'(2);$$

$$4) y = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x, y'(0);$$

$$8) y = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, y'\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Ответы: 1) 10; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 3; 4) 1; 5) $-\frac{4}{9}$; 6) 0; 7) $-\frac{1}{5}$; 8) -1.

2 Найти производные следующих функций:

1) $y = (\cos 3x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}};$

2) $y = (\ln(x+3))^{\sin \frac{1}{x}}.$

Ответы: 1) $y' = (\cos 3x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \left(\frac{\ln \cos 3x}{2\sqrt{x}(1+x)} - 3 \operatorname{tg} 3x \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right);$

2) $y' = (\ln(x+3))^{\sin \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \ln(\ln(x+3)) + \frac{\sin \frac{1}{x}}{(x+3) \ln(x+3)} \right).$

9 Дифференцируемость функции. Дифференциал

9.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти производную n -го порядка функции $y = \sin x$.

Решение

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y'' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = \cos \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

...

$$y^{(n)} = \cos \left(x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

Пример 2 – Найти производную десятого порядка функции $y = e^x \cdot (x^3 - 2)$.

Решение

Применяя формулу Лейбница, получим

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= \left[e^x \cdot (x^3 - 2) \right]^{(10)} = (e^x)^{(10)} \cdot (x^3 - 2) + 10 \cdot (e^x)^{(9)} \cdot (x^3 - 2)' + \\ &+ \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot (e^x)^{(8)} \cdot (x^3 - 2)'' + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2} \cdot (e^x)^{(7)} \cdot (x^3 - 2)'''. \end{aligned}$$

Все последующие слагаемые равны нулю, т. к. все высшие производные от функции $x^3 - 2$, начиная с четвертой, равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= e^x \cdot (x^3 - 2) + 30 \cdot e^x \cdot x^2 + 45 \cdot e^x \cdot 6x + 120 \cdot 6 \cdot e^x = \\ &= e^x \cdot (x^3 + 30x^2 + 270x + 718). \end{aligned}$$

Пример 3 – Задана функция $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$. Найти y'' .

Решение

Дифференцируем заданное соотношение и находим y' :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 &= 0, \\ y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 &= 0, \\ y' &= \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3} \cdot y' = -\frac{2}{y^3} \cdot \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Пример 4 – Найти производную второго порядка функции $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение

Дифференцируем исходные соотношения:

$$x'_t = \cos t, \quad y'_t = -\sin t.$$

Отсюда

$$y'_x = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, \quad (y'_x)'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Таким образом,

$$y''_{xx} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}.$$

Пример 5 – Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение

Находим производную второго порядка функции:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Следовательно,

$$d^2 y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx^2.$$

Пример 6 – Найти приближенное значение $\sqrt[3]{26,19}$.

Решение

В данном случае

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Полагая, что $x = 27$, $\Delta x = -0,81$, получим

$$\sqrt[3]{26,19} = \sqrt[3]{27 - 0,81} \approx \sqrt[3]{27} - \frac{0,81}{3 \cdot \sqrt[3]{27^2}} = 3 - \frac{0,81}{3 \cdot 9} = 2,97.$$

9.2 Задания для самостоятельной работы

1 Для данных функций найти производные второго порядка:

$$1) y = (1 + 4x^2) \cdot \operatorname{arctg} 2x; \quad 2) y = (1 + x^2) \cdot \ln(1 + x^2).$$

Ответы: 1) $y'' = 8 \operatorname{arctg} 2x + \frac{16x}{1+4x^2}$; 2) $y'' = \frac{4x^2}{1+x^2} + 2 \ln(1+x^2) + 2$.

2 Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$:

$$1) y = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; \quad 4) y = (2x+1)^5, \quad x_0 = 1;$$

$$2) y = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1; \quad 5) y = x \cdot \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$3) y = \ln(x^2 + 2), \quad x_0 = 0; \quad 6) y = 2^{x^2}, \quad x_0 = 1.$$

Ответы: 1) 0; 2) 0,5; 3) 0; 4) 4320; 5) 1; 6) $8 \ln 2 + 16 \ln^2 2 + 16 \ln^3 2$.

3 Найти производные третьего порядка от функций:

1) $r = a(\varphi - \sin \varphi)$; 2) $s = a \sin 4t$.

Ответы: 1) $r''' = a \cos \varphi$; 2) $s''' = -64a \cos 4t$.

4 Записать формулу для производной n -го порядка:

1) $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$; 2) $y = x^\alpha$.

Ответы: 1) $y^{(n)} = (-1)^n \cdot 3 \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$; 2) $y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$.

5 Найти y'' от неявно заданных функций:

1) $\ln y - \frac{x}{y} = 0$; 2) $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 0$.

Ответы: 1) $y'' = -\frac{y^2}{(x+y)^3}$; 2) $y'' = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)$.

6 Найти y''_{xx} от следующих функций:

1) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \ln \sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \cos^{-1} t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{cases} y''_{xx} = 4t^2, \\ x = \ln t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y''_{xx} = -\frac{2\cos^2 t}{\sin^4 t}, \\ x = \ln \cos t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y''_{xx} = -\operatorname{ctg}^3 t, \\ x = \cos^{-1} t. \end{cases}$

7 Найти дифференциалы первого порядка функции:

1) $y = \operatorname{tg}^2 2x$; 4) $y = x \operatorname{tg}^3 x$;
2) $y = e^{\sin 4x}$; 5) $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$;
3) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; 6) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} + (\arcsin 2x)^2$.

Ответы: 1) $dy = \frac{4\sin 2x}{\cos^3 2x} dx$; 2) $dy = 4\cos 4x e^{\sin 4x} dx$; 3) $dy = \frac{2}{x^3} dx$;

4) $dy = \left(\operatorname{tg}^3 x + \frac{3x \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$; 5) $dy = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} dx$;

6) $dy = \left(\frac{1}{2(x^2 + 1)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} + \frac{4\arcsin 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \right) dx$.

8 Найти $d^2 y$ и $d^3 y$ функции:

1) $y = \ln x^{10}$; 2) $y = e^{-3x} \cos 2x$.

Ответы: 1) $d^2 y = -\frac{10}{x^2} dx^2$, $d^3 y = \frac{20}{x^3} dx^3$; 2) $d^2 y = e^{-3x} (5 \cos 2x + 12 \sin 2x) dx^2$,
 $d^3 y = e^{-3x} (9 \cos 2x - 46 \sin 2x) dx^3$.

9 Вычислить приближенно:

1) $\operatorname{arctg} 1,05$;

3) $\ln 1,01$;

2) $e^{0,2}$;

4) $\sin 31^\circ$.

Ответы: 1) 0,81; 2) 1,2; 3) 0,01; 4) 0,515.

9.3 Домашнее задание

1 Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = -\frac{1}{9} x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$;

4) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

2) $y = (1 + x^4) \ln(1 + x^4)$;

5) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

3) $y = e^{-3x} (\cos 2x + \sin 2x)$;

6) $y = \sqrt{1 - 4x^2} \cdot \arcsin 2x$.

Ответы: 1) $y'' = x \sin 3x$; 2) $y'' = 12x^2 \ln(1 + x^4) + 12x^2 + \frac{16x^6}{1 + x^4}$;

3) $y'' = e^{-3x} (-7 \cos 2x + 17 \sin 2x)$; 4) $y'' = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$; 5) $y'' = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$;

6) $y'' = -\frac{8x}{1 - 4x^2} - \frac{4 \arcsin 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} - \frac{16x^2 \arcsin 2x}{\sqrt{(1 - 4x^2)^3}}$.

2 Найти y'' от неявно заданных функций:

1) $x + y + \operatorname{arctg} y = 0$;

2) $\operatorname{arctg}(x + y) = x$.

Ответы: 1) $y'' = -2(y^{-3} + y^{-5})$; 2) $y'' = 2(x + y)(1 + (x + y)^2)$.

3 Найти y''_{xx} функции $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = (2t + 1) \cos t. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y''_{xx} = (2t - t^2 - 2t^3) \cos t - (t + 6t^2) \sin t, \\ x = \ln t. \end{cases}$

4 Найти дифференциалы второго порядка функций:

1) $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$;

3) $y = 4^{-x^2}$;

2) $y = \cos 2x$;

4) $y = x \cdot \sin x$.

Ответы: 1) $d^2 y = (80x^3 - 14) dx^2$; 2) $d^2 y = -4 \cos 2x dx^2$;

3) $d^2 y = -2 \ln 4 \cdot 4^{-x^2} (1 - 2x^2 \ln 4) dx^2$; 4) $d^2 y = (2 \cos x - x \sin x) dx^2$.

5 Найти $d^3 y$ от функции $y = \frac{\ln x}{x}$.

Ответ: $d^3 y = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4} dx^3$.

6 Вычислить приближённо, используя понятие дифференциала:

1) $\sqrt[6]{67,84}$;

2) $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{0,99}{1,01}}$.

Ответы: 1) 2,02; 2) 0,78.

10 Основные теоремы дифференциального исчисления. Правила Лопиталя

10.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - 5x}{4x^2 + 7x}$.

Решение

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, следовательно, можно применить правило Лопиталя.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - 5x}{4x^2 + 7x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x \sin x - 5x)'}{(4x^2 + 7x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x + e^x \sin x - 5}{8x + 7} = -\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Пример 2 – Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x$.

Решение

Имеем неопределённость вида 0^0 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x &= (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1 - \cos x)} = (0 \cdot \infty) = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{x}}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - \cos x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\cos x - 1}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin x)'}{(\cos x - 1)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{-\sin x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x \sin x + x^2 \cos x)'}{(-\sin x)'}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x}{-\cos x}} = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

10.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3};$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x};$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}.$

Ответы: 1) $-\frac{2}{5}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 3; 4) $\frac{1}{3}$; 5) ∞ ; 6) 0; 7) $\frac{\pi^2}{2}$; 8) 0.

2 Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\pi - 2x} \right);$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right);$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right);$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x;$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \ln x).$

Ответы: 1) ∞ ; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) ∞ ; 6) 0.

3 Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x};$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}};$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right)^x;$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}.$

Ответы: 1) 1; 2) 1; 3) e^2 ; 4) 1; 5) 2; 6) $e^{-\frac{1}{3}}.$

10.3 Домашнее задание

1 Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x \cdot \sin 7x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Ответы: 1) 2; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0; 5) $\frac{2}{\pi}$; 6) e^{-1} ; 7) 1; 8) e^{-2} .

11 Формула Тейлора

11.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Вычислить число e с абсолютной погрешностью $\varepsilon \leq 0,001$.

Решение

Применяя формулу Маклорена к функции $f(x) = e^x$, получаем

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Наименьшее значение n , удовлетворяющее условию $\frac{e^\theta}{(n+1)!} < 0,001$, где $0 < \theta < 1$, равно $n_0 = 6$. Следовательно,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} = 2,718.$$

Пример 2 – Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3}$

Решение

Так как $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, а $5x^2 + 7x^3 \sim 5x^2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)}{5x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)}{5x^2} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$.

Окончательно получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \frac{3}{10}.$$

11.2 Задания для самостоятельной работы

1 Многочлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ разложить по степеням двучлена $x + 1$.

Ответ: $-9 + 17(x + 1) - 9(x + 1)^2 + 2(x + 1)^3$.

2 Пусть $P(x)$ – многочлен 4-й степени, $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{(4)}(2) = 24$. Вычислить $P(-1)$, $P'(0)$, $P''(1)$.

Ответы: $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(1) = 26$.

3 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ в точке $a = 0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

Ответ: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdot \frac{90x + 60^3 x^3}{(1 - \theta^2 x^2)^{\frac{7}{2}}}$.

4 Вычислить с абсолютной погрешностью $\varepsilon \leq 0,001$, приближенные значения следующих чисел:

1) $\sin 1$;

2) $\sqrt{e}$;

3) $\ln 1,05$.

Ответы: 1) 0,842; 2) 1,648; 3) 0,049.

5 Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}$.

11.3 Домашнее задание

1 Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $a = 0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 2-й степени.

Ответ: $x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1 + 2\sin^3 \theta x}{\cos^4 \theta x}$.

2 Вычислить с абсолютной погрешностью $\varepsilon \leq 0,001$ приближенное значение числа $\sqrt[5]{33}$.

Ответ: 2,012.

12 Исследование функций и построение графиков

12.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ и построить её график.

Решение

1 $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2 Функция имеет точку разрыва $x = 2$ и непрерывна для всех x из области определения.

3 $y(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x) - 6}{-x - 2} = \frac{x^2 + x - 6}{-x - 2} = -\frac{x^2 + x - 6}{x + 2} \neq -y(x) \neq y(x)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодическая.

4 С осью Ox :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x - 2 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2.$$

Точки $A(3; 0)$ и $B(-2; 0)$ – точки пересечения графика с осью Ox .

С осью Oy :

$$x = 0 \Rightarrow y = 3.$$

Точка $C(0; 3)$ – точка пересечения графика с осью Oy .

5 Находим первую производную:

$$y'(x) = \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2} \right)' = \frac{(2x - 1)(x - 2) - (x^2 - x - 6) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 8}{(x - 2)^2};$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm 2i.$$

Корни комплексно-сопряженные, следовательно, числитель в нуль не обращается ни при каких $x \in \mathbb{R}$. Так как $y'(x) > 0$, то функция возрастает на всей области определения и экстремумов не имеет.

6 Находим вторую производную:

$$y''(x) = \left(\frac{x^2 - 4x + 8}{(x - 2)^2} \right)' = \frac{(2x - 4) \cdot (x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 8) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = -\frac{8}{(x - 2)^3}.$$

Критических точек второго рода нет, следовательно, нет точек перегиба. $y''(x) > 0$ при $x < 2$, значит, на интервале $(-\infty; 2)$ кривая вогнута. $y''(x) < 0$ при $x > 2$, значит, на интервале $(2; +\infty)$ кривая выпукла.

7 Вертикальной асимптотой является прямая $x = 2$, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = -\infty.$$

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{y}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 6}{x - 2} = 1.$$

Прямая $y = x + 1$ – наклонная асимптота.

8 По полученным данным строим график функции (рисунок 4).

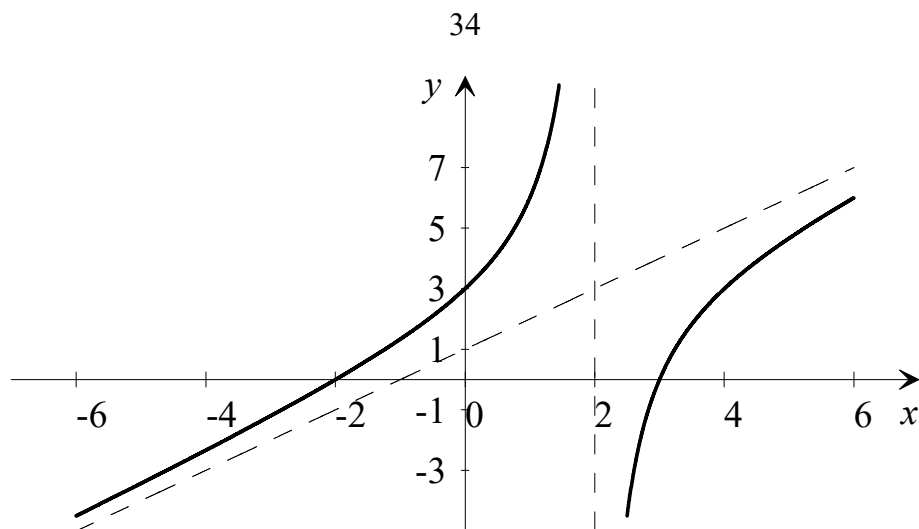


Рисунок 4

12.2 Задания для самостоятельной работы

1 Провести полное исследование и построить графики функций:

$$\begin{array}{lll} 1) y = \frac{x}{x^2 + 1}; & 3) y = \frac{3 - 2x}{(x - 2)^2}; & 5) y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}; \\ 2) y = x + \frac{4}{x^2}; & 4) y = x^3 e^{-x}; & 6) y = \frac{x^3}{1 - x^2}. \end{array}$$

12.3 Домашнее задание

1 Провести полное исследование и построить графики функций:

$$\begin{array}{lll} 1) y = x^2 + \frac{2}{x}; & 2) y = e^{\frac{1}{x+2}}; & 3) y = x \cdot \ln x. \end{array}$$

13 Предел, непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные

13.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin(x + 3y - 4)}{(x + 3y)^2 - 16}$.

Решение

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin(x + 3y - 4)}{(x + 3y)^2 - 16} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin(x + 3y - 4)}{(x + 3y - 4)(x + 3y + 4)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin(x+3y-4) \sim x+3y-4 \\ \text{при } x \rightarrow 1, y \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+3y-4}{(x+3y-4)(x+3y+4)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1}{x+3y+4} = \frac{1}{8}.$$

Пример 2 – Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } O(0; 0).$$

Решение

Проверяем условия непрерывности функции в точке $O(0; 0)$.

1 Функция $f(x, y)$ определена в окрестности этой точки.

2 Предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$, т. к. $x+y \rightarrow 0$, а $\sin \frac{1}{x^2+y^2}$ ограничена.

3 Предел в точке $O(0; 0)$ равен значению функции в этой точке.

Следовательно, функция непрерывна в точке $O(0; 0)$.

Пример 3 – Найти полный дифференциал функции $u = \ln^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

Решение

Полный дифференциал найдем по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Определяем частные производные функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot 2x = \frac{4x \cdot \ln(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2 - z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot 2y = \frac{4y \cdot \ln(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2 - z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2 \ln(x^2 + y^2 - z^2) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot (-2z) = -\frac{4z \cdot \ln(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

Тогда

$$du = \frac{4 \ln(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2 - z^2} \cdot (x dx + y dy - z dz).$$

13.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти пределы функций:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2};$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

Ответы: 1) 1; 2) 2.

2 Исследовать на непрерывность функции:

$$1) z = \frac{x^2 + 3y}{x^2 + y^2 - 1};$$

$$2) u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

3 Найти частные производные функций:

$$1) z = x^3 y^2 - x^2 + 4y - 2;$$

$$3) z = \ln(x^2 - 3xy + 2y);$$

$$2) z = y \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

$$4) u = \sin \frac{y}{xz}.$$

Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + 4$;

$$2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \frac{x}{y} - \frac{x}{y \cdot \cos^2 \frac{x}{y}}; 3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 3y}{x^2 - 3xy + 2y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x + 2}{x^2 - 3xy + 2y};$$

$$4) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 z} \cos \frac{y}{xz}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{xz} \cos \frac{y}{xz}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{xz^2} \cos \frac{y}{xz}.$$

4 Найти полные дифференциалы функций:

$$1) z = yx^y;$$

$$2) z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$3) z = x^2 y \cos x - 3y^2.$$

Ответы: 1) $dz = y^2 x^{y-1} dx + (x^y + yx^y \ln x) dy$; 2) $dz = 0$;

$$3) dz = (2xy \cos x - x^2 y \sin x) dx + (x^2 \cos x - 6y) dy.$$

13.3 Домашнее задание

1 Найти пределы функций:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 5}} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin xy^2}{x^2 y}.$$

Ответы: 1) e^3 ; 2) 0.

2 Найти частные производные и полные дифференциалы функций:

$$1) z = x^5 + 2y^4 - 5x^3 y^2;$$

$$2) z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$$

$$3) z = \frac{\cos^2 y}{x}.$$

Ответы: 1) $dz = (5x^4 - 15x^2 y^2) dx + (8y^3 - 10x^3 y) dy$;

$$2) \, dz = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} dy; \, 3) \, dz = -\frac{\cos^2 y}{x^2} dx - \frac{2\cos y \sin y}{x} dy.$$

3 Показать, что функция $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

14 Неявная функция

14.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $2 + xy^2 - \ln(e^x - e^y) = 0$.

Решение

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = 2 + xy^2 - \ln(e^x - e^y).$$

Найдём её частные производные:

$$f'_x = y^2 - \frac{e^x}{e^x - e^y} = \frac{y^2 e^x - y^2 e^y - e^x}{e^x - e^y},$$

$$f'_y = 2xy - \frac{-e^y}{e^x - e^y} = \frac{2xy e^x - 2xy e^y + e^y}{e^x - e^y}.$$

В результате производной заданной функции будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y^2 e^x - y^2 e^y - e^x}{2xy e^x - 2xy e^y + e^y}.$$

Пример 2 – Найти производные функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^3 + 4x^2 yz^3 - 3xz + 4y^2 z - 5 = 0$.

Решение

Рассмотрим функцию

$$F(x, y, z) = x^3 + 4x^2 yz^3 - 3xz + 4y^2 z - 5.$$

Найдём её частные производные:

$$F'_x = 3x^2 + 8xyz^3 - 3z, \quad F'_y = 4x^2z^3 + 8yz, \quad F'_z = 12x^2yz^2 - 3x + 4y^2.$$

В результате производными заданной функции будут

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 8xyz^3 - 3z}{12x^2yz^2 - 3x + 4y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{4x^2z^3 + 8yz}{12x^2yz^2 - 3x + 4y^2}. \end{cases}$$

14.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением:

1) $x^2 - 4y^2 = 4$; 2) $2\cos(x - 2y) = 2y - x$; 3) $xy + \ln y + \ln x = 0$.

2 Найти производные функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; 3) $z \ln(x + y) - \frac{xy}{z} = 0$.

2) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$;

3 Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x + y + z = e^z$.

14.3 Домашнее задание

1 Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\frac{xy}{\sin x} + \ln \frac{y}{x} + e^{xy} = 0$.

2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3y + 2y^3z^2 + 4xz^3 - 3xy^2z - 2xy + z - 23 = 0$.

15 Частные производные высших порядков. Формула Тейлора

15.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти все частные производные второго порядка для функции $z = x^3 + 2x^2y + y^2$.

Решение

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 2y.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 + 4xy)'_x = 6x + 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 4xy)'_y = 4x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x^2 + 2y)'_y = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2x^2 + 2y)'_x = 4x.$$

Пример 2 – Найти дифференциал второго порядка функции $z = 3yx^2 - 2xy^3$.

Решение

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x - 6y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12xy.$$

Таким образом, имеем

$$d^2z = 6ydx^2 + 12(x - y^2)dxdy - 12xydy^2.$$

15.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти все частные производные второго порядка и проверить равенство смешанных частных производных:

$$1) z = 2x^4y^3 - 3xy^2 + 5x^2 - y; \quad 2) z = \ln(x^2 + y^2); \quad 3) z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

Ответы: 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x^2y^3 + 10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24x^3y^2 - 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^4y - 6x$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{\sqrt{(2xy + y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(2xy + y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x^2}{\sqrt{(2xy + y^2)^3}}$.

2 Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ для функции $z = \sin(x + \cos y)$.

Ответ: $\sin y \cdot \cos(x + \cos y)$.

3 Найти дифференциал второго порядка функций:

$$1) z = x^2 y^3; \quad 2) z = x - \frac{y}{x}; \quad 3) z = (x^2 + y^2)^3.$$

Ответы: 1) $d^2 z = 2y^3 dx^2 + 6xy^2 dx dy - 6x^2 y dy^2$; 2) $d^2 z = -\frac{2y}{x^3} dx^2 + \frac{2}{x^2} dx dy$;

$$3) d^2 z = 6(x^2 + y^2)((5x^2 + y^2)dx^2 + 4xy dx dy + (x^2 + 5y^2)dy^2).$$

4 Найти дифференциал третьего порядка функции $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

Ответ: $d^3 z = 6(dx^3 + dy^3)$.

5 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (2;1) функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$.

Ответ:

$$f(x, y) = 12 + 15(x - 2) + 6(x - 2)^2 + 3(x - 2)(y - 1) - 6(y - 1)^2 + (x - 2)^3 - 2(y - 1)^3.$$

6 Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = e^y \cos x$.

Ответ: $f(x, y) = 1 + y + \frac{1}{2!}(y^2 - x^2) + \frac{1}{3!}(y^3 - 3x^2 y) + o(\rho^3)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

15.3 Домашнее задание

1 Найти требуемую частную производную или дифференциал:

$$1) z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3, \quad d^2 z; \quad 4) z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$2) z = x^2 \ln(x+y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad 5) u = x^3 y^5 z^7, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}.$$

$$3) z = x \ln \frac{y}{x}, \quad d^2 z;$$

Ответы: 1) $(24x + 6y)dx^2 + 12(x + y)dxdy + (6x - 6y)dy^2$; 2) $\frac{x^2 + 2xy}{(x + y)^2}$;

$$3) -\frac{dx^2}{x} + \frac{2dxdy}{y} - \frac{xdy^2}{y^2}; \quad 4) 0; \quad 5) 105x^2 y^4 z^6.$$

16 Экстремумы функции многих переменных

16.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти экстремум функции $z = x^3 + 6xy + y^2 - 3x - 6y$.

Решение

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 2y - 6.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y - 3 = 0, \\ 6x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили критические точки $M_1(5; -12)$ и $M_2(1; 0)$. Далее находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Вычисляем значения частных производных второго порядка и составляем определитель Δ для каждой из критических точек.

Для точки M_1

$$A = 30, \quad B = 6, \quad C = 2 \Rightarrow \Delta = 30 \cdot 2 - 6^2 = 24.$$

Так как $\Delta > 0$, $A > 0$, то M_1 является точкой локального минимума. При этом

$$z_{\min} = z(5; -12) = -34.$$

Для точки M_2

$$A = 6, \quad B = 6, \quad C = 2 \Rightarrow \Delta = 6 \cdot 2 - 6^2 = -24.$$

Так как $\Delta < 0$, то M_2 не является точкой экстремума.

Пример 2 – Для функции $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 4y + 1$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D , ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

Решение

Построим область D (рисунок 5).

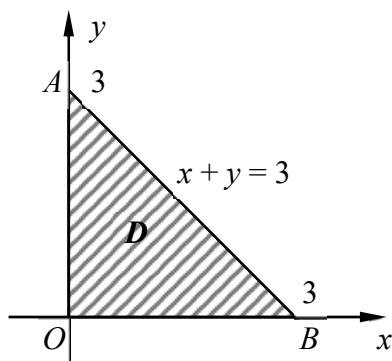


Рисунок 5

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 4.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ -4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Получили критическую точку $M_0(1; 1)$, лежащую внутри области D . Вычислим значение функции в точке M_0 : $z(1; 1) = 2$.

Исследуем функцию на границах области D . Рассмотрим сторону OA :

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow z = -2y^2 + 4y + 1, \quad y \in [0; 3]; \\ z' &= -4y + 4, \quad -4y + 4 = 0, \quad y = 1 \in [0; 3]; \\ z(0) &= 1, \quad z(1) = 3, \quad z(3) = -5. \end{aligned}$$

Рассмотрим сторону OB :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow z = x^2 - 2x + 1, \quad x \in [0; 3]; \\ z' &= 2x - 2, \quad 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \in [0; 3]; \\ z(0) &= 1, \quad z(1) = 0, \quad z(3) = 4. \end{aligned}$$

Рассмотрим сторону AB :

$$y = 3 - x \Rightarrow z = -x^2 + 6x - 5, \quad x \in [0; 3];$$

$$z' = -2x + 6, \quad -2x + 6 = 0, \quad x = 3 \in [0; 3];$$

$$z(0) = -5, \quad z(3) = 4.$$

Сравнивая найденные значения, получаем

$$\max_D z = \max \{2; 1; 3; -5; 0; 4\} = 4 = z(3; 0),$$

$$\min_D z = \min \{2; 1; 3; -5; 0; 4\} = -5 = z(0; 3).$$

16.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти экстремум функции:

1) $z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$;

3) $z = (x-1)^2 - 2y^2$;

2) $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$;

4) $\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2x + z = 0$.

Ответы: 1) $z_{\max} = z(1; -4) = -14$; 2) $z_{\max} = z(-1; -1) = 82$, $z_{\min} = z(1; 1) = -82$;

3) экстремума нет; 4) $z_{\min} = z\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

2 Для функции $z = f(x, y)$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D , ограниченной указанными линиями:

1) $z = 1 + x + 2y$; $D: x = 0, y = 0, x - y - 1 = 0$;

2) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$; $D: x = 1, x = 4, y = -3, y = 2$;

3) $z = x^2 - y^2$; $D: x^2 + y^2 = 1$.

Ответы: 1) $\max_D z = z(1; 0) = 2$, $\min_D z = z(0; -1) = -1$; 2) $\max_D z = z(1; 2) = 9$, $\min_D z = z(3; -2) = -11$; 3) $\max_D z = z(1; 0) = z(-1; 0) = 1$, $\min_D z = z(0; 1) = z(0; -1) = -1$.

16.3 Домашнее задание

1 Найти экстремум функции:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$;

3) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

2) $z = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + y$;

Ответы: 1) $z_{\min} = z(7; -2) = -39$; 2) $z_{\max} = z(-1; -1) = -4$, $z_{\min} = z(1; 1) = 4$;

3) $z_{\min} = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 4$.

2 Для функции $z = f(x, y)$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D , ограниченной указанными линиями:

1) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$; $D: x = 0, y = 0, x + y + 5 = 0$;

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$;

3) $z = x^2 + 2xy - 10$; $D: y = 0, y = x^2 - 4$.

Ответы: 1) $\max_D z = z(0; -5) = 41$, $\min_D z = z(-2; -1) = -3$; 2) $\max_D z = z(2; -1) = 13$,

$\min_D z = z(1; 1) = z(0; -1) = -1$; 3) $\max_D z = z\left(-\frac{4}{3}; -\frac{20}{9}\right) = -\frac{62}{27}$, $\min_D z = z(1; -3) = -15$.

17 Условный экстремум

17.1 Примеры решения задач

Пример 1 – Найти экстремум функции $z = xy$ при условии $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение

Составляем функцию Лагранжа:

$$L = xy + \lambda \cdot (2x + 3y - 5).$$

Найдём частные производные первого порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda.$$

Необходимые условия экстремума примут вид:

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы является точка $M_0\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}; -\frac{5}{12}\right)$.

Найдём частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциалом второго порядка функции Лагранжа будет

$$d^2L = 2dxdy.$$

Выразим x через y из уравнения связи и найдём его дифференциал:

$$dx = -\frac{3}{2}dy.$$

Отсюда получаем, что $d^2L = -3dy^2 < 0$. Следовательно, в точке M_0 функция имеет условный максимум, причём

$$z_{\max} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}.$$

17.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при заданном условии:

1) $z = e^{xy}$ при $x + y = 1$; 3) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$;

2) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$; 4) $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Ответы: 1) $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$; 2) $z_{\max} = z\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$, $z_{\min} = z(1; 0) = 0$;

3) $z_{\max} = z(1; 2) = 5$, $z_{\min} = z(-1; -2) = -5$; **4)** $z_{\min} = z\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$.

17.3 Домашнее задание

1 Найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при заданном условии:

1) $z = xy$ при $x + y = 1$; 3) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 4$.

2) $z = -\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y - \frac{1}{5}$ при $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 34 = 0$;

Ответы: 1) $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; 2) $z_{\max} = z(-9; 11) = 4$, $z_{\min} = z(-5; -1) = 0$;

3) $z_{\min} = z(2; 2) = 1$.

Список литературы

- 1 **Астровский, А. И.** Высшая математика: учебник: в 2 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. – Мн. : БГЭУ, 2022. – Ч. 1 – 415 с.
- 2 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Мн. : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с.
- 3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Мн. : Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 383 с.
- 4 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа: учебник: в 2 т. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 424 с.
- 5 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.
- 6 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2019. – 608 с.
- 7 Сборник задач по высшей математике: учебник и практикум для вузов: в 4 ч. / под ред. А. С. Поспелова. – М. : Юрайт, 2026. – Ч. 1 – 355 с.
- 8 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – М. : ИНФРА-М, 2023. – 479 с.