

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»
дневной и заочной форм обучения*



Могилев 2026

УДК 004.3:519.8
ББК 32.973-018.2
М74

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления»
«28» апреля 2026 г., протокол № 9

Составитель канд. техн. наук, доц. В. А. Широченко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

Методические рекомендации содержат задания к выполнению практических работ по курсу «Математическое программирование» студентами специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии» дневной и заочной форм обучения. Приведены основные понятия, расчетные зависимости и примеры решения наиболее распространенных задач по рассматриваемым темам.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Ответственный за выпуск	А. И. Якимов
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать	. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л.	. Уч.-изд. л. . Тираж 21 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

Введение.....	4
1 Практическая работа № 1. Линейное программирование: постановка и решение задачи на примере моделирования производственного процесса.	5
2 Практическая работа № 2. Геометрическая интерпретация задач ЛП.	9
3 Практическая работа № 3. Построение и анализ двойственных задач. ...	11
4 Практическая работа № 4. Постановка и решение транспортных з адач.....	14
5 Практическая работа № 5. Постановка и решение задачи назначения. Параметрическое программирование.....	17
6 Практическая работа № 6. Динамическое программирование: разработка и оптимизация алгоритмов с использованием динамического подхода.....	20
7 Практическая работа № 7. Решение задач на основе теории игр.....	26
8 Практическая работа № 8. Сетевое программирование: построение и анализ сетевой модели для оптимизации графа.....	29
Список литературы	38

Введение

Целью дисциплины «Математическое программирование» является формирование профессиональных компетенций, необходимых в процессе применения моделей и методов оптимизации управления и принятия решений с использованием компьютерных технологий.

Математическое программирование – это раздел математики и оптимизации, занимающийся поиском наилучших решений (оптимальных) для задач, формулируемых в виде математических моделей. В основном оно включает в себя оптимизацию функций при наличии определённых ограничений.

В качестве основных аспектов математического программирования выступают следующие задачи.

Транспортная задача связана с оптимизацией транспортировки товаров из нескольких поставщиков (источников) к нескольким потребителям (пунктам назначения) с целью минимизации общих транспортных затрат.

Задача назначения (или задача о назначениях) фокусируется на распределении заданных ресурсов (например, работников) на выполнение заданий (например, рабочих мест) так, чтобы суммарные затраты, связанные с этим распределением, были минимальными.

Динамическое программирование – это метод решения сложных задач, который заключается в разбиении их на более простые подзадачи и запоминании уже найденных решений, чтобы избежать повторного вычисления одних и тех же результатов. Этот подход особенно полезен для оптимизации задач, которые могут быть описаны рекурсивно и имеют пересекающиеся подзадачи.

Теория игр – это область математики, которая изучает стратегические взаимодействия между рациональными агентами.

Сетевое планирование – это метод управления проектами, который использует графы для моделирования задач, их зависимостей и временных рамок выполнения. В сетевом планировании часто применяется метод критического пути (CPM) и метод оценки и анализа программ (PERT).

Математическое программирование применяется в различных областях, включая экономику, управление, инженерные науки, логистику и многие другие, где требуется оптимизация процессов или распределение ресурсов.

Практикум по дисциплине «Математическое программирование» состоит из практических работ по восьми темам, каждая из которых рассчитана на выполнение в течение 90 мин. В процессе выполнения практических работ необходимо изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект, получить задание у преподавателя и выполнить типовые задания. По окончании работы требуется оформить отчет, в котором необходимо указать цель практической работы; оформить результаты ее выполнения и сформулировать соответствующие выводы.

1 Практическая работа № 1. Линейное программирование: постановка и решение задачи на примере моделирования производственного процесса

Цель работы: изучить методику и получить практические навыки постановки задачи параметрической оптимизации на основе математических моделей линейного программирования и технологию их решения.

1.1 Теоретические сведения

При анализе и синтезе технических объектов широко используется моделирование. Как средство познания и преобразования материального мира, моделирование применяется в экспериментальных и теоретических научных исследованиях.

Моделирование представляет собой процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте. *Модель* – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта. Удобство проведения исследований может определяться различными факторами: легкостью и доступностью получения информации, сокращением сроков и уменьшением материальных затрат на исследование и др.

Различают моделирование предметное и абстрактное. При *предметном моделировании* строят *физическую модель*, которая соответствующим образом отображает основные физические свойства и характеристики моделируемого объекта. При анализе экономических объектов применение такого подхода крайне затруднительно.

Абстрактное моделирование связано с построением *абстрактной модели*. Такая модель представляет собой математические соотношения, графы, схемы, диаграммы и т. п. Наиболее мощным и универсальным методом абстрактного моделирования является математическое моделирование. Оно широко используется как в научных исследованиях, так и при проектировании.

Математическое моделирование позволяет посредством математических символов и зависимостей составить описание функционирования экономического объекта в окружающей внешней среде, определить выходные параметры и характеристики, получить оценку показателей эффективности и качества, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта. Одним из основных компонентов проведения экономического анализа в этом случае становится математическая модель.

Математическая модель – это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства исследуемого объекта. В качестве математических объектов выступают числа, переменные, множества, векторы, матрицы и т. п. Процесс формирования

математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется *математическим моделированием*. Под математическим моделированием обычно понимается процесс построения математической модели, а проведение исследований на модели в процессе анализа называют *вычислительным экспериментом*.

Для осуществления вычислительного эксперимента на ЭВМ разрабатывается алгоритм реализации математической модели.

Под *техническим объектом* в дальнейшем понимается система – автомобиль, производственное оборудование, компьютер; производство (завод), цех, участок, а также любой их компонент, выделяемый в процессе проектирования путем *декомпозиции* (деления) структуры целостного объекта на отдельные блоки, части, элементы и т. п.

Современные методы анализа базируются на *системном подходе*. Технический объект при системном подходе рассматривается как сложная система, состоящая из взаимосвязанных, целенаправленно функционирующих элементов и находящаяся во взаимодействии с окружающей внешней средой. Это позволяет учесть все факторы, влияющие на его функционирование, и обеспечить получение высоких показателей эффективности и качества.

Одно из важнейших требований системного подхода заключается в необходимости рассматривать существование и функционирование технического объекта во времени и в пространстве.

Декомпозиция приводит к выделению составных частей объекта (блоков), иерархических уровней, аспектов. Это позволяет сложную задачу анализа свести к решению более простых задач с учетом взаимодействия между ними. Каждая задача решается на основе локальной оптимизации, но декомпозиция критериев при этом осуществляется таким образом, чтобы локальные цели были подчинены конечной цели. Следовательно, концепция системности выражается не только в выделении взаимозависимых и взаимодействующих элементов экономического объекта как системы, но и в единстве целей их функционирования. Кроме того, технический объект, в свою очередь, рассматривается как элемент более сложной системы (надсистемы), в состав которой входит ряд объектов внешней среды, взаимодействующих с данным экономическим объектом.

1.2 Структура и параметры экономических объектов

Структура – это упорядоченное множество элементов и их отношений.

Технический объект при системном подходе рассматривается как система, состоящая из взаимодействующих элементов, составляющих упорядоченное множество.

Структура технического объекта характеризуется качественным и количественным составом элементов и их взаиморасположением или взаимосвязями. Качественное различие элементов определяется их физическими свойствами. Количественно физические свойства элементов выражаются некоторыми скалярными величинами, называемыми *параметрами элементов*.

Характеристики функционирования технического объекта зависят от его физических свойств и внешних воздействий окружающей среды.

Физические свойства объекта определяются его структурой и параметрами элементов, из которых он состоит. Внешние воздействия зависят от физических свойств внешней среды и характера ее взаимодействия с экономическим объектом. Физические свойства внешней среды также определяются ее параметрами.

Параметр – это величина, характеризующая свойства или режим функционирования объекта. Под объектом здесь понимается как отдельный элемент технической системы, так и вся система в целом. В этой связи следует отметить, что параметрами технической системы являются *показатели качества и эффективности*: производительность, объем выпуска продукции, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость и др. Эти параметры называют *выходными параметрами технического объекта*.

Если структура технического объекта определена, то его выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешней среды. В этой связи различают внутренние и внешние параметры.

Внутренние параметры – это параметры элементов, из которых состоит технический объект. Например, т. к. двигатель и трансмиссия являются элементами автомобиля, то выходные параметры их – мощность двигателя, передаточные числа трансмиссии – это внутренние параметры автомобиля.

Выходные параметры характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры – свойства его элементов.

При переходе к новому иерархическому уровню внутренние параметры могут стать выходными и наоборот.

Внешние параметры – это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта. Например, внешней средой для автомобиля является дорога и воздушная среда. Параметры дороги: углы продольного и поперечного уклонов, коэффициенты сопротивления качению и сцепления колес с дорогой. Параметры воздушной среды: плотность и относительная влажность воздуха.

Анализ экономического объекта – это изучение его физических свойств, характеризующихся выходными параметрами. При анализе не создаются новые объекты, а исследуются заданные на основе изучения процессов их функционирования. Для этого проводятся вычислительные эксперименты с использованием математических моделей объектов.

Синтез экономического объекта – это создание новых вариантов, обеспечивающих заданный алгоритм функционирования и выполнение заданных требований к объекту.

Различают *синтез структурный* и *параметрический*. Цель структурного синтеза – получение структуры экономического объекта, а параметрического – определение параметров элементов объекта.

Если определяют наилучшие в некотором смысле структуру и параметры, то синтез называют оптимизацией. При определении оптимальных значений параметров говорят о *параметрической оптимизации*. Задачу выбора оптимальной структуры называют *структурной оптимизацией*.

В общем случае задачей синтеза является определение структуры и параметров технического объекта. В связи с различием математических моделей непрерывных и дискретных объектов методы решения задач их синтеза различны.

Формализовать и автоматизировать процедуру синтеза структуры в большинстве случаев весьма сложно, поэтому синтез структуры объекта обычно осуществляется путем перебора возможных вариантов, генерируемых эвристическими методами. Для каждого варианта структуры формируется своя математическая модель и выбираются исходные значения внутренних параметров. Сравнивать альтернативные варианты структур можно лишь после определения оптимальных параметров элементов объекта. При этом для каждого варианта осуществляется имитация процесса функционирования объекта и определяются его *выходные параметры – показатели качества и эффективности*, которые используются для оценки оптимальности анализируемого варианта.

Математические описания элементов структуры проектируемого объекта известны и хранятся в базе данных. В результате формирование математической модели представляет собой, по существу, синтез абстрактной модели объекта. Процедура синтеза при этом легко формализуется и может быть автоматизирована.

Оптимизации подлежат обычно не все параметры объекта, а только некоторая их часть. Это обусловлено тем, что при проектировании технических объектов широко используются стандартные и унифицированные элементы, параметры которых не могут быть изменены. Параметры элементов объекта, подлежащие оптимизации, называют *управляемыми параметрами*.

1.3 Постановка оптимизационной задачи

Результатом анализа технического объекта являются проектное решение, содержащее информацию о структуре и выходных параметрах технического объекта и о параметрах его элементов (внутренних параметрах объекта) при заданных внешних параметрах.

В общем случае задача синтеза имеет следующую математическую формулировку: *определить структуру и внутренние параметры технического объекта, доставляющие экстремум некоторой скалярной функции $F(\vec{X})$ при заданных ограничениях $F(\vec{X}) > 0, \vec{\psi}(\vec{X}) = 0$, где $\vec{X}$ – вектор оптимизируемых параметров.*

Функцию $F(\vec{X})$ называют *целевой функцией* или *функцией качества*. Она количественно выражает качество технического объекта. Эффективность и качество функционирования объекта характеризуются его выходными параметрами, поэтому они выступают в роли *критериев оптимальности*. Так как физические свойства объекта характеризуются множеством выходных параметров, то задача оказывается *многокритериальной*.

Процедура постановки задачи синтеза технического объекта носит неформальный характер и включает следующие этапы: *определение объекта и*

выявления его внутренних, выходных и внешних параметров, выбор из выходных параметров критериев оптимальности, выбор из внутренних параметров управляемых (оптимизируемых) параметров, формирование целевой функции, назначение ограничений, нормирование управляемых и выходных параметров.

Задание

Получить у преподавателя словесное описание задачи с числовыми данными. Выполнить варианты постановки задачи анализа экономического объекта. Определить внешние и внутренние параметры, определить критерии оценки, выбрать управляемые параметры, назначить ограничения, сформировать целевую функцию.

Оформить лист книги Excel с постановкой задачи. Определить все возможные варианты решения (построить матрицу возможных решений).

Контрольные вопросы

- 1 Какими параметрами описывается объект?
- 2 Из каких параметров выбираются критерии оценки?
- 3 Из каких параметров выбираются управляемые параметры?
- 4 Как формируется целевая функция?
- 5 На какие параметры накладываются ограничения?
- 6 Какого вида бывают ограничения?

2 Практическая работа № 2. Геометрическая интерпретация задач ЛП

Цель работы: изучить математическую постановку общей задачи линейного программирования (ЗЛП) и освоить приемы решения ЗЛП графическим способом в случае двух и более неизвестных.

2.1 Теоретические сведения

Алгоритм геометрического метода решения ЗЛП, рассмотренный на примере из практической работы № 1, приведен на рисунке 2.1 [3, 4].

1 Построить область допустимых решений (ОДР), т. е. многоугольник решений OABC.

2 Построить из начала координат вектор-градиент $\vec{C} = (c_1, c_2)$ целевой функции $F = c_1x_1 + c_2x_2$.

3 Построить линию уровня перпендикулярно градиенту. Так как она проходит через начало координат, то является опорной.

4 Передвигать опорную линию параллельно самой себе в направлении градиента (при отыскании максимума) либо в направлении антиградиента (при

отыскании минимума) до точки, в которой целевая функция либо принимает максимальное (минимальное) значение, либо определяется ее неограниченность.

5 Определить экстремум функции $F^* = (x_1^*, x_2^*)$.

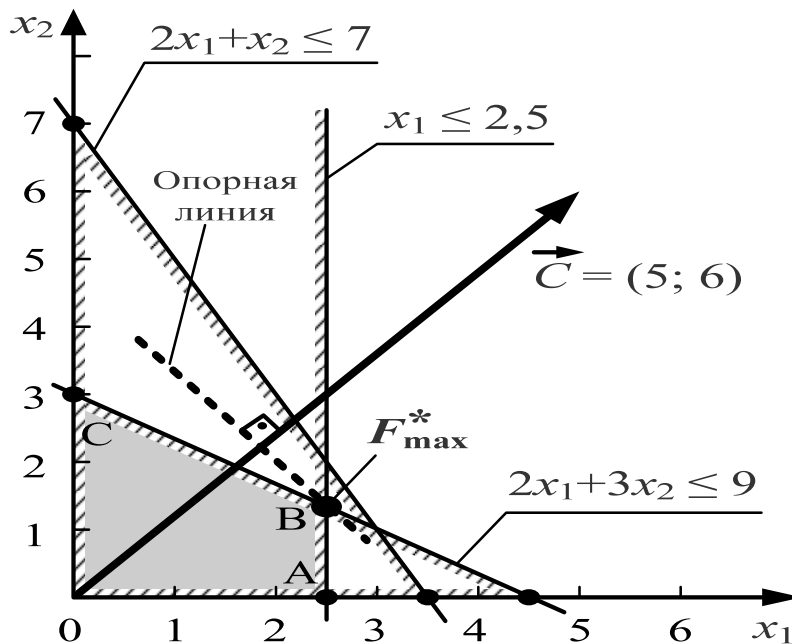


Рисунок 2.1 – Геометрический метод решения ЗЛП

Графическим методом можно решать ЗЛП с $n > 2$ переменными, если в её канонической записи число неизвестных n и число линейно независимых уравнений m связаны соотношением $n - m \leq 2$.

Задание

Необходимо по варианту из таблицы 2.1 построить область допустимых решений, вектор-градиент целевой функции и с помощью подвижной линии равного уровня найти графическим методом максимум и минимум в трех задачах: в двух задачах с двумя переменными и одной задаче с $n > 2$ переменными.

Таблица 2.1 – Задачи

Вариант	Условие задачи	Вариант	Условие задачи
1	$F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr};$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1; \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ 4x_2 \leq 8; \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	4	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr};$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \geq 5; \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
2	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{extr};$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ -4x_1 - 2x_2 \leq 4; \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8; \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	5	$F = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{extr};$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3; \\ -3x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_2 \geq 4; \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
3	$F = 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 16 \rightarrow \text{extr};$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 28; \\ x_2 + x_4 = 16; \\ x_1 + x_2 - x_5 = 8; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 12; \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 6})$	6	$F = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \text{extr};$ $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2; \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2; \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$

Контрольные вопросы

- 1 В чём заключается графический метод решения ЗЛП?
- 2 Как построить ОДР задачи и линии уровня целевой функции?
- 3 Как построить градиент и антиградиент? Что они показывают?
- 4 Когда не существует решения ЗЛП графическим способом?

3 Практическая работа № 3. Построение и анализ двойственных задач

Цель работы: изучить правила построения двойственной ЗЛП и практические навыки анализа оптимального решения прямой ЗЛП с использованием двойственных оценок.

3.1 Теоретические сведения

Если ЗЛП рассматривать как задачу об использовании ресурсов (сырья), то параметры задачи имеют следующий смысл. В прямой задаче x_j – количество единиц j -го продукта; c_j – стоимость единицы j -го продукта; b_j – ресурс j -го продукта. В двойственной задаче y_i – частная производная целевой функции

по i -му ресурсу. Их значения можно рассматривать как ценность ресурса, т. к. они представляют собой величину приращения прибыли при увеличении ресурса на одну единицу. Размерность такой ценности будет определяться размерностями целевой функции и ресурса, в которых они фигурируют в задаче.

Задача, двойственная по отношению к прямой задаче, составляется на основе соответствий, представленных в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Соответствие двойственных ЗЛП

Исходная (прямая) задача	Двойственная задача
Целевая функция $F(x) \rightarrow \max$	Целевая функция $Z(x) \rightarrow \min$
Константы в правых частях ограничений	Коэффициенты целевой функции
Коэффициенты целевой функции	Константы в правых частях ограничений
j -й столбец коэффициентов в ограничениях	j -я строка коэффициентов в ограничениях
j -я строка коэффициентов в ограничениях	j -й столбец коэффициентов в ограничениях
j -я неотрицательная переменная	j -е неравенство вида $\geq$
j -я переменная без ограничений в знаке	j -е ограничение вида $=$
i -е ограничение вида $\leq$	i -я неотрицательная переменная
i -е ограничение вида $=$	i -я переменная без ограничений в знаке

Каждой задаче линейной оптимизации можно поставить в соответствие задачу, называемую двойственной к ней. На рисунке 3.1 приведено математическое представление прямой и двойственной задач (в левой части таблицы представлена прямая задача, в правой – двойственной).

$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max;$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1, m}, m_i \leq m; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{m+1, m}; \end{cases}$ $x_i \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad n_i \leq n,$ $x_j \text{ произвольного знака при } j = \overline{n_1+1, n}$	$f(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min;$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \leq c_j, & j = \overline{1, n}, n_i \leq n; \\ \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i = c_j, & j = \overline{n+1, n}; \end{cases}$ $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m_i \leq m,$ $y_i \text{ произвольного знака при } j = \overline{m_1+1, m}$
---	---

Рисунок 3.1 – Прямая и двойственная задачи

При построении двойственной задачи используются следующие правила:

1) упорядочивается запись исходной задачи, т. е. если целевая функция задачи максимизируется, то ограничения неравенства должны быть вида $\leq$, если минимизируется, – то вида $\geq$. Выполнение этих условий достигается умножением соответствующих ограничений на (-1) ;

2) если исходная задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации. При этом вектор, образованный из коэффициентов при неизвестных целевой функции исходной задачи, совпадает с вектором констант в правых частях системы ограничений двойственной задачи и, наоборот, коэффициентами при неизвестных целевой функции двойственной задачи являются соответствующие правые части системы ограничений исходной задачи;

3) каждой переменной из двойственной задачи соответствует i -е ограничение исходной задачи и, наоборот, каждой переменной x прямой задачи соответствует j -е ограничение двойственной задачи;

4) матрица из коэффициентов при неизвестных двойственной задачи образуется транспонированием матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$, составленной из коэффициентов при неизвестных системы ограничений исходной задачи;

5) если на j -ю переменную исходной задачи заложено условие неотрицательности, то j -е ограничение двойственной задачи будет неравенством, в противном случае j -е ограничение будет равенством; аналогично связаны между собой ограничения исходной задачи и переменные двойственной.

Задачи, представленные на рисунке 3.1, образуют пару взаимно двойственных задач.

Решением двойственной задачи являются вектор частных производных целевой функции по ресурсам. Двойственная оценка или переменная двойственной задачи показывает дефицитность ресурса и степень влияния ресурса на целевую функцию и рассчитывается только для дефицитных ресурсов.

Частная производная целевой функции показывает, насколько изменится значение целевой функции в оптимальном решении при увеличении запаса ресурса на единицу. Выгоднее в первую очередь увеличивать запас ресурса, частная производная по которому имеет наибольшее значение.

Задание

Для задач из практической работы № 2 построить и решить двойственную задачу. Провести анализ полученных результатов двойственной задачи.

4 Практическая работа № 4. Постановка и решение транспортных задач

Цель работы: освоить методику и получить практические навыки постановки и решения транспортных задач линейного программирования.

4.1 Теоретические сведения

Важным частным случаем задачи линейного программирования является так называемая транспортная задача, которую можно сформулировать следующим образом.

В m пунктах отправления (рисунок 4.1) $A_1, A_2, \dots, A_m$, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим $a_i (i=\overline{1, m})$. Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим $b_j (j=\overline{1, n})$. Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j , которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C = \|c_{ij}\|$.

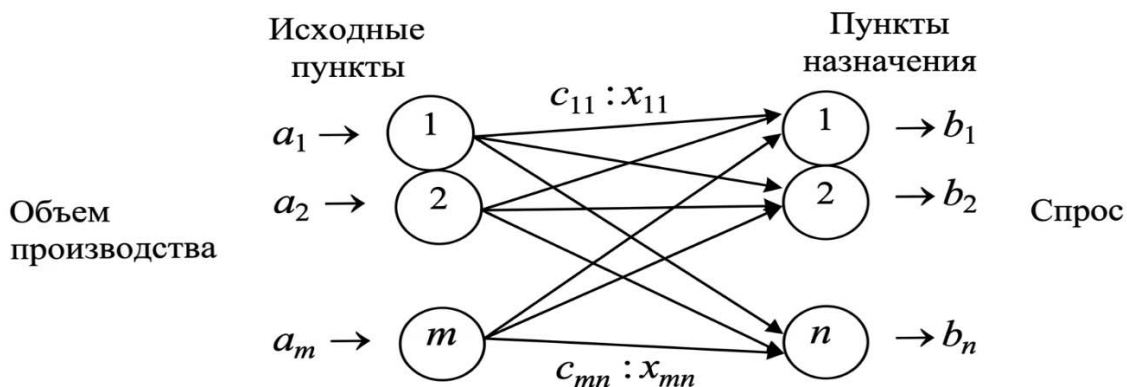


Рисунок 4.1 – Геометрическая интерпретация транспортной задачи

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т. е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j , через x_{ij} . Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим x , тогда целевая функция задачи будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

а ограничения выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (4.3)$$

$$x_{ij} > 0. \quad (4.4)$$

Первая группа ограничений (4.2) указывает, что суммарный объем перевозок продукции из некоторого исходного пункта не может превышать произведенного количества этой продукции, вторая группа ограничений (4.3) требует, чтобы суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления полностью удовлетворяли спрос на эту продукцию. Из модели видно, что суммарный объем производства в исходных пунктах $\sum_{j=1}^m a_i$ не должен быть меньше суммарного спроса в пунктах назначения $\sum_{i=1}^n b_j$.

Если

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

то модель транспортной задачи называют сбалансированной (закрытой). Она отличается от модели (4.2), (4.3) тем, что

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \quad j = \overline{1, n}.$$

Пример – Заводы автомобильной фирмы расположены в пунктах A, B, C . Центры распределения (пункты назначения) расположены в пунктах D, E . Объемы производства в пунктах A, B, C равны 1000, 1500, 1200 автомобилей ежеквартально. Величина спроса в пунктах D, E равна 2300 и 1400 автомобилей ежеквартально. Стоимость перевозки одного автомобиля из пунктов A, B, C в пунктах D, E указаны на рисунке 4.2. Здесь суммарный объем производства равен суммарному спросу (3700 автомобилей ежеквартально).

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	102	68

Рисунок 4.2 – Транспортная задача

Модель транспортной задачи

$$\begin{cases} f(x) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} \rightarrow \min; \\ x_{11} + x_{12} = 1000; \\ x_{21} + x_{22} = 1500; \\ x_{31} + x_{32} = 1200; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Задание

Найти оптимальное распределение поставок для транспортной задачи, представленной в таблицах на рисунке 4.3.

а)

Мощность поставщиков	Мощность потребителей			
	42	30	52	46
40	3	7	2	1
50	5	2	5	6
80	2	1	4	2

б)

Мощность поставщиков	Мощность потребителей			
	45	35	55	65
40	4	1	2	5
60	3	2	3	7
90	4	4	5	2

Рисунок 4.3 – Исходные данные

Контрольные вопросы

- 1 Сформулируйте экономико-математическую модель транспортной задачи.
- 2 Приведите открытую модель транспортной задачи.
- 3 Опишите многопродуктовую модель транспортной задачи.
- 4 Сформулируйте модель производства с запасами.
- 5 Укажите эквивалентность элементов производственной и транспортной системы.
- 6 Как решить открытую транспортную задачу?

5 Практическая работа № 5. Постановка и решение задачи назначения. Параметрическое программирование

5.1 Теоретические сведения

Задача о назначениях. Задачу можно сформулировать следующим образом. Необходимо выполнить n различных работ. Для их выполнения привлекаются n рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы суммарные затраты на выполнение всех работ были минимальными.

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Можно рассматривать задачу о назначениях в другой постановке. Если принять в качестве коэффициентов c_{ij} – мера эффективности назначения, т. е. использования i -го исполнителя на j -й работе, то в этом случае $L(X)$ – целевая функция, имеющая смысл суммарного эффекта (прибыли).

В обоих случаях при использовании различных алгоритмов решения задачи о назначениях основной исходной информацией является матрица

$$C = \|c_{ij}\|, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$

а)

57	65	47	37	25
10	32	42	40	40
49	61	37	55	67
64	62	30	74	12
60	72	50	10	12

б)

35	0	74	55	64
37	18	30	15	0
57	18	42	63	62
55	0	10	65	60
47	60	60	59	54

в)

50	70	44	76	46
6	48	16	38	30
0	18	0	32	52
26	0	62	36	64
8	72	22	70	10

Рисунок 5.1 – Варианты задания на выполнение практической работы

Параметрическое линейное программирование. Параметрическое программирование представляет собой один из разделов математического программирования, изучающий задачи, в которых целевая функция или ограничения

зависят от одного или нескольких параметров.

С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как способ анализа чувствительности решения к вариации исходных данных и оценки устойчивости решения, т. к. исходные данные для численного решения любой реальной задачи оптимизации в большинстве случаев определяются приближенно или могут изменяться под влиянием различных факторов, что может существенно сказаться на оптимальности выбираемой программы действий. Соответственно, разумно указывать не конкретные данные, а диапазон возможного их изменения, чтобы в результате решения иметь наилучшие планы для любого варианта исходных данных.

Задача с параметром в целевой функции. Рассмотрим задачу параметрического линейного программирования, в которой только коэффициенты целевой функции линейно зависят от некоторого единственного параметра λ (например, времени, температуры и т. п.):

$$F(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n (c_j + d_j \lambda) x_j \rightarrow \min (\max).$$

Отыскать максимум (или минимум) функции при условии

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ \lambda_1 &\leq \lambda \leq \lambda_2. \end{aligned}$$

Отыскать максимум (или минимум) функции при условиях, где a_{ij}, c_j, b_i – постоянные коэффициенты; λ – параметр, который изменяется в некоторых пределах (в общем случае от $-\infty$ до $+\infty$).

Для каждого значения λ в промежутке $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 произвольные действительные числа, найти оптимальный план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и обращающий в максимум (минимум) целевую функцию. Если обратиться к геометрической интерпретации задачи, то можно заметить, что вектор-градиент, показывающий направление возрастания целевой функции, определяется ее параметром.

Пример – Для целевой функции $F(x, \lambda) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_1$ при различных значениях параметра λ градиент определяет различные направления роста функции (рисунок 5.2).

Видно, что если при некотором значении параметра максимум достигается в вершине A , то небольшая вариация этого значения несколько изменит направление градиента, но не изменит положение точки максимума. Таким образом, некоторый план, оптимальный при λ оптимален и в его окрестности, т. е. при $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

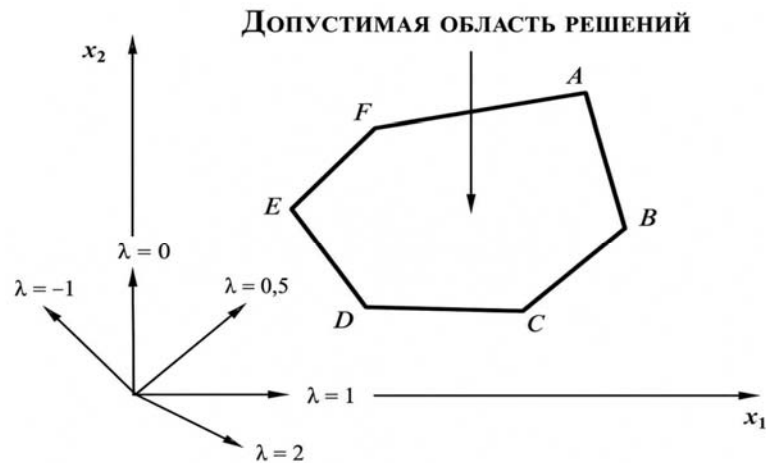


Рисунок 5.2 — Геометрическая интерпретация задачи параметрического линейного программирования

Также можно заметить, что при градиенте, ставшем перпендикулярным некоторой стороне многоугольника решений, имеем два разных оптимальных опорных плана с одним и тем же значением линейной формы, откуда можно утверждать непрерывность экстремума линейной формы по λ .

В случае неограниченности множества планов можно утверждать, что если линейная форма не ограничена при значении λ , то она не ограничена при всех больших или меньших значениях.

Задание

1 Выполните решение задач назначения (рисунок 5.3).

а)					б)					в)				
57	65	47	37	25	35	0	74	55	64	50	70	44	76	46
10	32	42	40	40	37	18	30	15	0	6	48	16	38	30
49	61	37	55	67	57	18	42	63	62	0	18	0	32	52
64	62	30	74	12	55	0	10	65	60	26	0	62	36	64
60	72	50	10	12	47	60	60	59	54	8	72	22	70	10

Рисунок 5.3 — Варианты задания на выполнение практической работы

2 Решить задачи параметрического линейного программирования:

а)

$$F(x, \lambda) = \lambda x_1 - \lambda x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 3; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}; \\ -\infty < \lambda < \infty; \end{cases}$$

б)

$$F(x) = x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 3; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}; \\ -\infty < \lambda < \infty. \end{cases}$$

6 Практическая работа № 6. Динамическое программирование: разработка и оптимизация алгоритмов с использованием динамического подхода

Цель работы: ознакомиться с теорией динамического программирования и получить практические навыки формализации и практического решения многошаговых задач.

6.1 Теоретические сведения

Динамическое программирование (планирование) представляет собой математический метод для нахождения оптимальных решений многошаговых (многоэтапных) задач. Некоторые из таких задач естественным образом распадаются на отдельные шаги (этапы), но имеются задачи, в которых разбиение приходится вводить искусственно, для того чтобы их можно было решить методом динамического программирования.

Пусть на некоторый период времени T , состоящий из m лет, планируется деятельность группы промышленных предприятий. В начале планируемого периода на развитие предприятий выделяются основные средства Q_0 , которые необходимо распределить между предприятиями. В процессе функционирования предприятий выделенные им средства расходуются. Однако каждое из этих предприятий за определенный период времени (хозяйственный год) получает прибыль, зависящую от объема вложенных средств. В начале каждого года имеющиеся средства перераспределяются между предприятиями. Требуется определить, сколько средств надо выделить каждому предприятию в начале каждого года, чтобы суммарный доход от всей группы предприятий за весь период времени T был максимальным.

Процесс решения такой задачи является многошаговым. Шаг управления (планирования) здесь – хозяйственный год. Управление процессом состоит в распределении (перераспределении) средств в начале каждого хозяйственного года.

Метод динамического программирования позволяет одну задачу со многими переменными заменить рядом последовательно решаемых задач с меньшим числом переменных. Процесс решения задачи разбивается на шаги. При этом нумерация шагов, как правило, осуществляется от конца к началу.

Основным принципом, на котором базируется оптимизация многошагового процесса, является принцип оптимальности Р. Беллмана. Этот принцип выделяет массу задач, для которых применим вычислительный метод динамического программирования.

Принцип оптимальности. Оптимальное поведение в задаче должно обладать тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Принцип оптимальности непосредственно указывает процедуру нахождения оптимального решения. Математически он записывается выражением вида

$$f_{n-l}(s_l) = \text{optimum} [R_{l+1}(S_l, U_{l+1}) + f_{n-(l+1)}(S_{l+1})] \quad l = \overline{0, n-1}, \quad (6.1)$$

где U_l – решение (управление), выбранное на l -м шаге, $U_l = (u_l^{(1)}, \dots, u_l^{(m)})$;

S_l – состояние системы на l -м шаге, $S_l = (s_l^{(1)}, \dots, s_l^{(m)})$;

R_l – непосредственный эффект, достигаемый на l -м шаге;

l_{n-l} – оптимальное значение эффекта, достигаемого за l -м шагов;

n – количество шагов (этапов).

Optimum в выражении (6.1) означает максимум или минимум в зависимости от условия задачи.

Все вычисления, дающие возможность найти оптимальное значение эффекта, достигаемого за n шагов, $f_n = (S_0)$, проводятся по формуле (6.1), которая носит название основного уравнения Беллмана или рекуррентного соотношения. Действительно, при вычислении очередного значения функции f_{n-l} используется значение функции $f_{n-(l+1)}$, полученное на предыдущем шаге, и непосредственное значение эффекта $R_{l+1} = (S_l, U_{l+1})$, достигаемого в результате выбора решения U_{l+1} при заданном состоянии системы S_l . Процесс вычисления значений функции $f_{n-l} (l = \overline{0, n-1})$ осуществляется при естественном начальном условии $f_0 = (S_n) = 0$, которое означает, что за пределами конечного состояния системы эффект равен нулю.

Оптимальное решение задачи методом динамического программирования находится на основе уравнения (6.1).

Чтобы определить его, необходимо:

1) записать уравнение для последнего состояния процесса (ему соответствует $l = n-1$):

$$f_1 = (S_{n-1}) = \text{optimum} [R_n(S_{n-1}, U_n) + f_0(S_n)]; \quad (6.2)$$

2) найти $R_n = (S_{n-1}, U_n)$ из дискретного набора его значений при некоторых фиксированных S_{n-l} и U_n из соответствующих допустимых областей (т. к. $f_0 = (S_n) = 0$, то $f_1 = (S_{n-1}) = \text{optimum} [R_n(S_{n-1}, U_n)]$. В результате после первого шага известно решение U_n и соответствующее значение функции $f_1 = (S_{n-1})$;

3) уменьшить значение l на единицу и записать соответствующее функциональное уравнение. При $l = n-k (k = \overline{2, n})$ оно имеет вид

$$f_k = (S_{n-1}) = \text{optimum}[R_{n-k+1}(S_{n-1}, U_{n-k+1}) + f_{k-1}(S_{n-k+1})]; \quad (6.3)$$

4) найти условно-оптимальное решение на основе выражения (6.3);

5) проверить, чему равно значение l . Если $l = 0$, расчет условно-оптимальных решений закончен, при этом найдено оптимальное решение задачи для первого состояния процесса. Если $l \neq 0$, перейти к выполнению п. 3;

6) вычислить оптимальное решение задачи для каждого последующего шага процесса, двигаясь от конца расчетов к началу.

Рассмотрим пример. Требуется перевезти груз из города А в город В. Сеть дорог, связывающих эти города, изображена на рисунке 6.1. Стоимость перевозки груза между городами проставлена над соответствующими дугами сети. Необходимо найти маршрут, связывающий города А и В, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими.

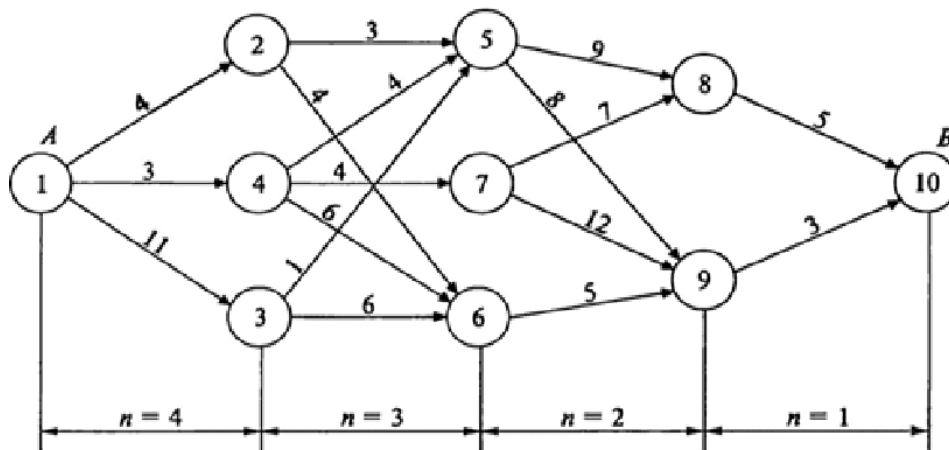


Рисунок 6.1 – График динамического процесса

На рисунке 6.1 городам поставлены в соответствие вершины сети, обозначенные кружками с номером, а транспортным магистралям – дуги (линии со стрелками), соединяющие вершины.

Разобьем все множество вершин (городов) на подмножества. В первое подмножество включим исходную вершину 1. Во второе – вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершины 1. В третье – вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершин второго подмножества. Таким образом, продолжая разбиение дальше, получим пять подмножеств: $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{8, 9\}$, $\{10\}$. Очевидно, что любой маршрут из города 1 в город 10 содержит ровно четыре дуги, каждая из которых связывает вершины, принадлежащие соответствующим подмножествам (см. рисунок 6.1).

Следовательно, процесс решения задачи (нахождения оптимального маршрута) разбивается на четыре этапа. На первом этапе принимается решение, через какой город, принадлежащий второму подмножеству, везти груз из города 1. На втором этапе необходимо определить, через какой город третьего подмножества везти груз из некоторого города, принадлежащего второму подмножеству, и т. д.

Перенумеруем этапы от конечной вершины сети к начальной (см. рисунок 6.1) и введем обозначения: n – номер шага ($n = 1, 2, 3, 4$); $f_n(s)$ – минимальные затраты на перевозку груза от города s до конечного города, если до конечного города осталось n шагов; $j_n(s)$ – номер города, через который нужно ехать из города s , чтобы достичь $f_n(s)$; c_{sj} – стоимость перевозки груза из города s в город j .

Здесь все обозначения несут важную смысловую нагрузку: f означает целевую функцию, s – состояние системы (номер города), индекс n несет динамическую информацию о том, что из города s до конечного города осталось n шагов.

Предположим, что груз доставлен в город 10, следовательно, число оставшихся шагов равно нулю ($n = 0$) и $f_n(s) = f_0(10)$, т. к. из города 10 груз везти не надо.

Рассмотрим последний шаг ($n = 1$) и вычислим для него значение функции. Очевидно, что в город 10 груз может быть доставлен или из города 8, или из города 9. Вычислим затраты на перевозку для этих двух состояний:

$$f_1(8) = c_{8,10} + f_0(10) = 5 + 0 = 5; \quad s = 8, \quad j_1(8) = 10;$$

$$f_1(9) = c_{9,10} + f_0(10) = 3 + 0 = 3; \quad s = 9, \quad j_1(9) = 10.$$

Чтобы произвести расчет для $n = 2$, выдвинем гипотезы о месте нахождения груза: 1-я гипотеза – груз находится в городе 5; 2-я гипотеза – груз находится в городе 6; 3-я гипотеза – груз находится в городе 7.

Из города 5 в город 10 можно провезти груз или через город 8, или через город 9.

Поэтому оптимальный маршрут из города 5 найдется из выражения

$$f_2(5) = \min(c_{5,8} + f_1(8); c_{5,9} + f_1(9)) = \min(9 + 5; 8 + 3) = 11.$$

Здесь $s = 5, j_2(5) = 9$, т. е. условно-оптимальный маршрут проходит через город 9. Аналогично находим значения функции для $s = 6$ и $s = 7$:

$$f_2(6) = c_{6,9} + f_1(9) = 8;$$

$$f_2(7) = \min(c_{7,8} + f_1(8); c_{7,9} + f_1(9)) = 12.$$

Все вычисления удобно выполнять в таблицах. Расчеты первого $[n=1, c_{s,j} + f_0(j)]$ и второго $[n=2, c_{s,j} + f_1(j)]$ этапов помещены в таблицах на рисунке 6.2 соответственно.

a)				б)				
$s \backslash j$	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$	$s \backslash j$	8	9	$f_2(s)$	$j_2(s)$
8	5+0	5	10	5	9+5	8+3	11	9
9	3+0	3	10	6		5+3	12	9
				7	7+5	12+3	12	8

Рисунок 6.2 – Этапы выполнения

Цифры в столбцах таблиц, находящиеся слева от жирной вертикальной черты, представляют собой сумму стоимости csj доставки груза из города s в город j и стоимости $f_{n-1}(j)$ доставки груза от города j до города В. В каждой строке выбирается наименьшая из этих сумм. Этим определяются условно-оптимальные затраты на доставку груза из города s в конечный город. Затраты (значение функции) обозначены $f_n(s)$ и записаны в первом столбце справа от вертикальной черты, а город, через который проходит условно-оптимальный маршрут, обозначен $j_n(s)$. Рекуррентное соотношение для $n = 3$ имеет вид

$$f_3(s) = \min(c_{s,j} + f_2(j)).$$

Отметим, что для подсчета условно-оптимальных значений используется значение $f_2(j)$, полученное на предыдущем шаге, из таблицы на рисунке 6.2.

Вычисления для третьего шага $[n=3, c_{s,j} + f_2(j)]$ приведены в таблице на рисунке 6.3. Здесь две клетки пустые, поскольку из городов 2 и 3 нельзя попасть в город 7.

Вычисления для четвертого шага $[n=4, c_{s,j} + f_3(j)]$ приведены в таблице на рисунке 6.3. Из таблицы на рисунке 6.3 видно, что минимальные затраты на перевозку груза $f_4(1)=16$ и оптимальный маршрут проходит через город 2, т. к. $f_4=2$. Далее из таблицы на рисунке 6.3 при $s=2$ следует, что оптимальный маршрут проходит через город 6, т. к. $f_3(2)=6$.

a)						б)					
$s \backslash j$	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$	$s \backslash j$	2	3	4	$f_4(s)$	$j_4(s)$
2	3+11	4+8		12	6	1	4+12	11+12	3+12	16	2
3	1+11	6+8		12	5						
4	4+11	6+8	4+12	14	6						

Рисунок 6.3 – Этапы выполнения

Для $n = 2$ определяем, что оптимальный маршрут проходит через город 9 $f_2(9)=9$. Наконец, из города 9 груз доставляется в конечный город 10 (место назначения). Таким образом, определим оптимальный маршрут

$\mu = (1-2-6-9-10)$, затраты на перевозку по которому составляют $f_4 = (1) = 4 + 4 + 5 + 3 = 16$.

Задание

1 Найти оптимальный маршрут (см. рисунок 6.3) из города 1 в город 10, проходящий через город 4.

2 Записать в общем виде рекуррентное соотношение для нахождения оптимального пути между начальной и конечной вершинами сети.

3 Найти путь минимальной длины между начальной и конечной вершинами сети методом динамического программирования (цифры, приписанные дугам сети, означают расстояния между соответствующими вершинами):

а) рисунок 6.4;

в) рисунок 6.6;

б) рисунок 6.5;

г) рисунок 6.7.

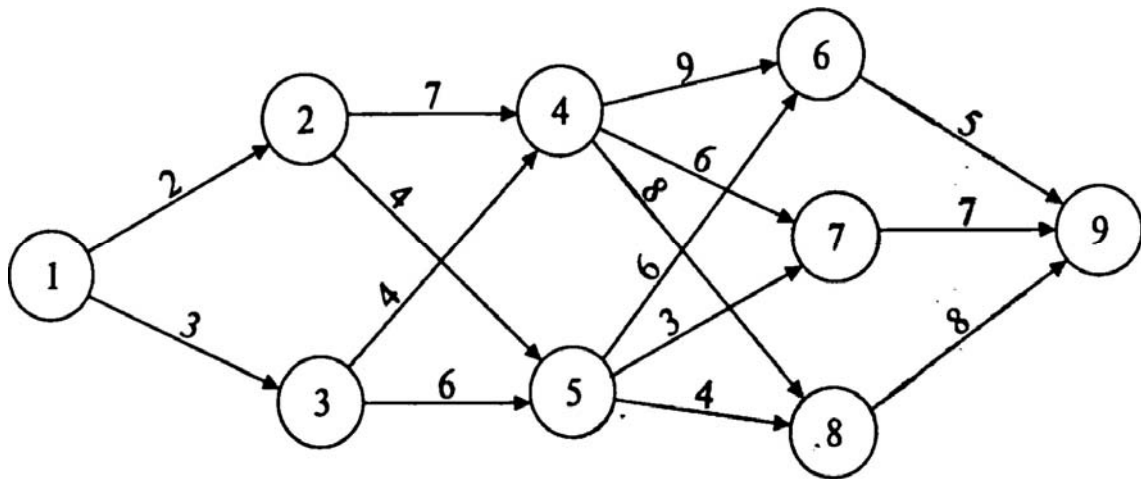


Рисунок 6.4 – Вариант 1

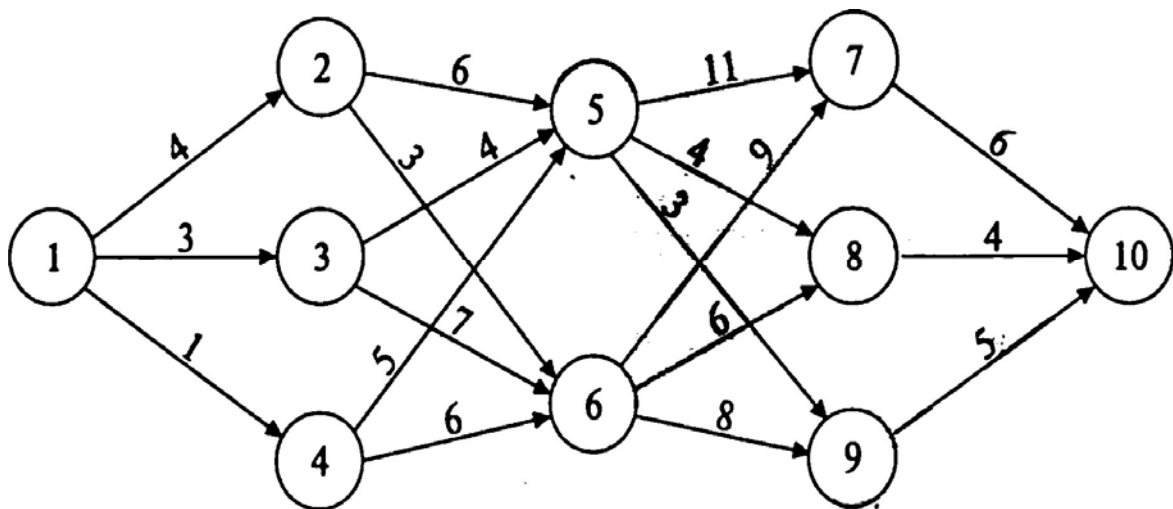


Рисунок 6.5 – Вариант 2

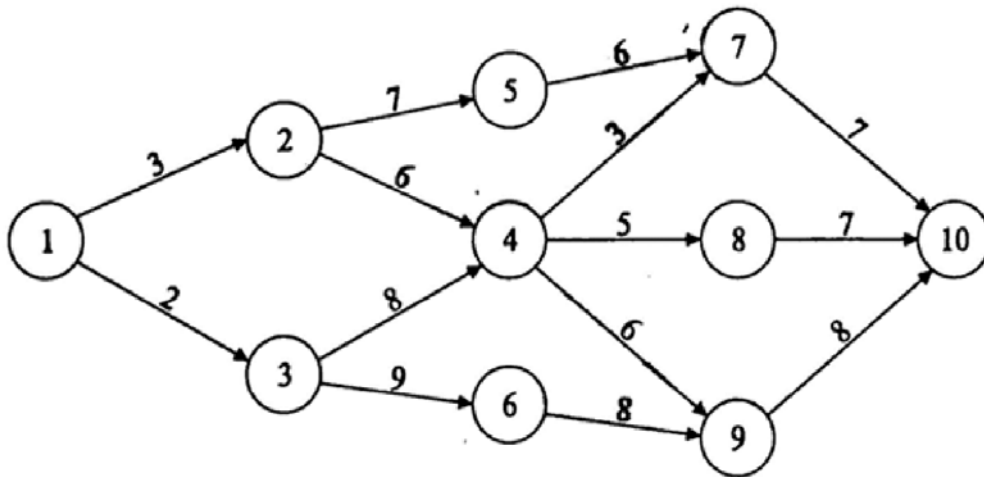


Рисунок 6.6 – Вариант 3

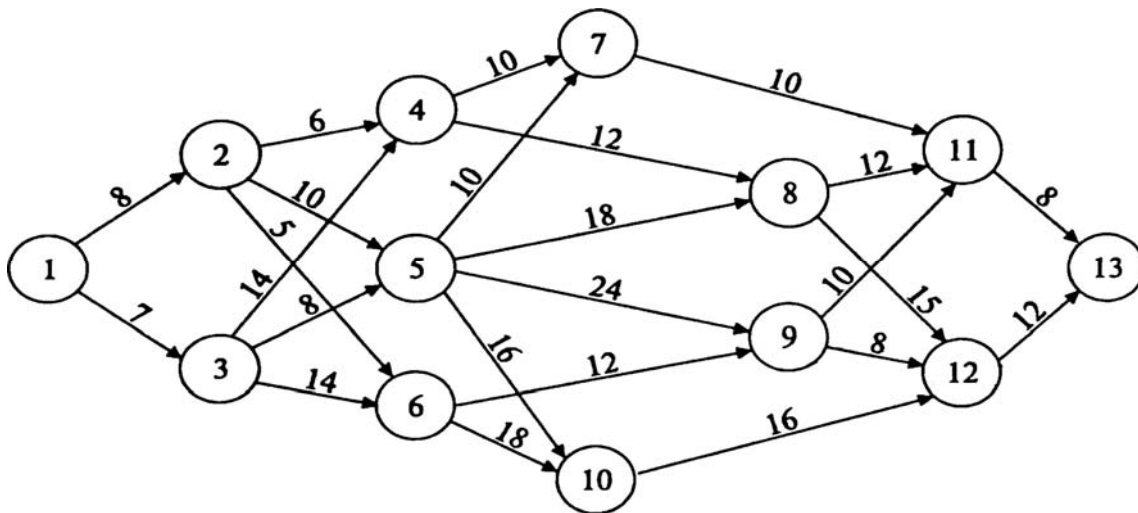


Рисунок 6.7 – Вариант 4

7 Практическая работа № 7. Решение задач на основе теории игр

Цель работы: изучить способы решения матричных игр с нулевой суммой, а также получить практические навыки решения таких задач путем сведения их к задаче линейного программирования.

7.1 Теоретические сведения

Седловая точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, т. к. его противник может на это ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат.

Пример – Найти решение и цену игры, платежная матрица которой представлена на рисунке 7.1.

A_i	B_1	B_2	B_3	$\min \alpha_i$
A_1	15	1	9	1
A_2	9	4	3	3
$\max \beta_j$	15	4	9	

Рисунок 7.1 – Платежная матрица

Решение

Проверим наличие седловой точки.

Для игрока A максимин $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max(1, 3) = 3$.

Для игрока B минимакс $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min(15, 4, 9) = 4$.

Так как значения α и β не совпадают, седловой точки нет, а цена игры v находится в промежутке $[3; 4]$.

Решим задачу в смешанных стратегиях. Для этого составим пару двойственных задач $[3, 4, 6]$.

Для игрока A :

$$\begin{aligned} F &= x_1 + x_2 \rightarrow \min; \\ 15x_1 + 9x_2 &\geq 1; \\ x_1 + 4x_2 &\geq 1; \\ 9x_1 + 3x_2 &\geq 1; \\ x_i &\geq 0 \quad (i = \overline{1, 2}). \end{aligned}$$

Для игрока B :

$$\begin{aligned} F'' &= y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max; \\ 15y_1 + y_2 + 9y_3 &\leq 1; \\ 9y_1 + 4y_2 + 3y_3 &\leq 1; \\ y_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Находим экстремум целевой функции для обеих задач. Он будет равен:

– для игрока A : $F = 0,27$; $x_1 = 0,03$, $x_2 = 0,24$. Теневые цены: 0; 0,18; 0,09;

– для игрока B : $F = 0,27$; $y_1 = 0$, $y_2 = 0,18$, $y_3 = 0,09$. Теневые цены: 0,03; 0,24.

Отсюда находим цену игры $v = 1/F = 1/0,27 = 3,67$. Полученная цена игры v находится в промежутке $[3; 4]$.

Находим компоненты вектора вероятностей применения игроком A стратегий:

$$\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*) = (x_1 \cdot v, x_2 \cdot v) = (0,03 \cdot 3,67; 0,24 \cdot 3,67) = (0,11; 0,89).$$

$$\text{Проверим: } \sum_{i=1}^2 p_i = 0,11 + 0,89 = 1.$$

Находим компоненты вектора вероятностей применения игроком B своих стратегий:

$$\begin{aligned} \bar{q}^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*) &= (y_1 \cdot v, y_2 \cdot v, y_3 \cdot v) = (0 \cdot 3,67; 0,18 \cdot 3,67; 0,09 \cdot 3,67) = \\ &= (0; 0,67; 0,33). \end{aligned}$$

Проверим: $\sum_{i=1}^3 q_i = 0 + 0,67 + 0,33 = 1.$

Понимать это решение следует так: если разыгрывается 100 партий игры, то в соответствии с вероятностями применения стратегий игрок *A*, случайным образом чередуя применение стратегий, должен применить 1-ю стратегию 11 раз, 2-ю – 89 раз. Второй игрок также должен случайным образом чередовать применение своих стратегий и применить 1-ю стратегию 0 раз, 2-ю – 67 раз, 3-ю – 33 раза. В этом случае игрок *A* за 100 партий игры выиграет 367 ед., а игрок *B* эту величину проиграет.

Задание

1 В матричной игре найти:

- а) верхнюю и нижнюю цены игры;
- б) седловую точку (если она существует);
- в) цену игры (решение матричной игры) и сделать вывод.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} & \text{б)} & \text{в)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 10 & 5 & 6 & 4 \\ 20 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2 В матричной игре найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} & \text{б)} & \text{в)} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

3 В матричной игре симплекс-методом найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

$$\begin{matrix} \text{а)} & \text{б)} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

8 Практическая работа № 8. Сетевое программирование: построение и анализ сетевой модели для оптимизации графа

Цель работы: получить практические навыки построения сетевых моделей процессов и научиться проводить анализ их параметров.

8.1 Теоретические сведения

Сетевое планирование и управление (СПУ) представляет собой систему методов, с помощью которых осуществляется планирование и управление разработкой и осуществлением крупных хозяйственных комплексов, научной и технологической подготовкой производства, строительством новых объектов и реконструкцией старых, научными и конструкторскими исследованиями и проектами, организацией и проведением крупных общественных мероприятий и т. п. Диапазон применения СПУ весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, включающих сотни организаций и десятки тысяч людей, таких как, например, создание крупного территориально-промышленного комплекса.

Впервые методы сетевого планирования были разработаны и применены в США в конце 50-х г. XX в. в строительстве: метод СРМ (метод критического пути) и при разработке ракетной системы «Поларис»: метод PERT (метод оценки и обзора программ).

В настоящее время методы сетевого планирования и управления успешно используются:

- для создания календарных планов реализации комплекса работ;
- для управления комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;
- для распределения ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ и повышения эффективности управления в целом;
- для выявления и мобилизации резервов времени, а также трудовых, материальных и денежных ресурсов, и оптимизации сроков исполнения и затрат.

Математической основой методов сетевого планирования и управления является отражение производственного процесса (т. е. последовательности выполняемых работ) в виде так называемого сетевого графика, который представляет собой специфический частный вид взвешенного графа, а также определенная совокупность расчетных методов. В систему СПУ включаются также

организационные и контрольные мероприятия по планированию и управлению комплексом работ.

Основными элементами сетевой модели являются работы и события. Под работой понимается процесс, требующий для своего осуществления затрат определенного времени и ресурсов (материалов, оборудования, исполнителей, финансов, энергии и т. п.). Частным видом работы является ожидание – процесс, входящий необходимым элементом в технологию производства, длящийся определенное время и не требующий иных затрат в виде труда или каких-либо ресурсов (например, остывание металла после плавки, просушка после покраски, старение металла, твердение бетона и т. п.).

Особым видом работ являются фиктивные работы. Они обозначают логическую связь между работами или группами работ и не требуют затрат ни времени, ни труда, ни материальных ресурсов, продолжительность фиктивной работы считается равной нулю. Фиктивная работа указывает на то, что какая-то работа или группа работ может начаться лишь после того, как завершится какая-то другая (предшествующая) работа или группа работ. Фиктивная работа используется тогда, когда надо отделить друг от друга разные по смысловому содержанию события (окончание и начало работ), которые могут произойти одновременно.

Под событием понимается момент, отражающий определенный этап выполнения проекта, это момент завершения отдельной работы или группы работ и возможность начать новую работу или группу работ. Событие не имеет продолжительности во времени, считается, что событие свершается мгновенно. Среди событий сетевого графика выделяют исходное (начальное) событие, обозначающее начало работ (начало осуществления проекта) и завершающее (конечное) событие, которое означает окончание всех работ рассматриваемого комплекса (завершение проекта).

События на сетевом графике изображаются кружочками (вершинами графа), а работы – стрелками (дугами ориентированного графа), при этом фиктивные работы принято изображать пунктирными стрелками.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике должно быть одно исходное (начальное) событие и одно завершающее (конечное) событие. В нем не должно быть других событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа; в нем не должно быть также других событий (кроме завершающего), за которыми не следует непосредственно хотя бы одна работа, т. е. не должно быть так называемых «хвостов» и «тупиков»;

2) любые два события сетевого графика должны быть соединены не более чем одной работой (стрелкой); в случае необходимости вводятся фиктивные работы;

3) в сетевом графике не должно быть циклов и петель.

Исходным материалом для сетевого планирования служит список работ с указанием их взаимной последовательности, обусловленности возможного

начала одних работ завершением других (опорой одних работ на другие) и продолжительностью выполнения каждой работы.

В случае трехпараметрической модели приводится предположительная продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях (оптимистический вариант), в наименее благоприятных условиях (пессимистический вариант) и наиболее вероятная продолжительность работы (среднестатистический, нормальный вариант).

Основными задачами сетевого планирования являются:

- 1) построение сетевого графика и расчет его временных характеристик (метод критического пути);
- 2) расчет вероятностных показателей для трехпараметрической или двухпараметрической сетевой модели;
- 3) оптимизация стоимости выполнения проекта.

Рассмотрим подробно методы решения этих задач на модельных примерах.

Решение задачи сетевого планирования методом критического пути. Необходимо построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг с помощью данных, представленных в таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Параметры работ

Работа	Продолжительность работы	Опирается на работы
b_1	5	—
b_2	8	—
b_3	3	—
b_4	6	b_1
b_5	4	b_1
b_6	1	b_3
b_7	2	b_2, b_5, b_6
b_8	6	b_2, b_5, b_6
b_9	3	b_4
b_{10}	9	b_3, b_7
b_{11}	7	b_2, b_5, b_6, b_{10}

В компактной записи

$b_1(5) \rightarrow b_4(6), b_5(4); b_3(3) \rightarrow b_6(1), b_{10}(9); b_2(8), b_5(4),$
 $b_6(1) \rightarrow b_7(2), b_8(6); b_4(6), b_7(2) \rightarrow b_9(3); b_2(8), b_5(4), b_6(1), b_{10}(9) \rightarrow b_{11}(7).$

Решение

Сначала строим структурный сетевой график и вводим правильную нумерацию событий (рисунок 8.1).

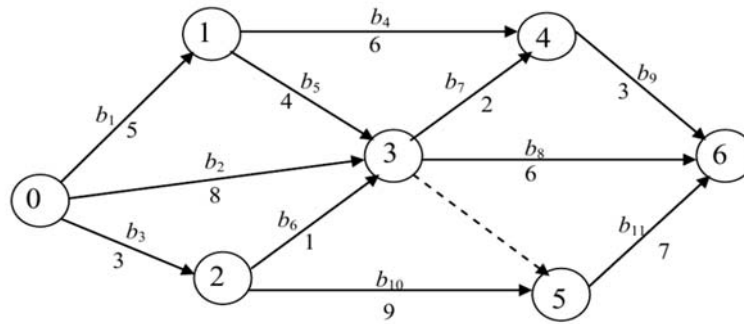


Рисунок 8.1 – Сетевой график

Наиболее ранние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_p(i) = \max_{j \subset i} \{T_p(j) + t_{ji}\},$$

где максимум берется по всем событиям j , непосредственно предшествующим событию i . Начальному событию присваиваем $T_p(0) = 0$.

Тогда:

$$T_p(1) = T_p(0) + t_{01} = 0 + 5 = 5;$$

$$T_p(2) = T_p(0) + t_{02} = 0 + 3 = 3;$$

$$T_p(3) = \max \{T_p(0) + t_{03}, T_p(1) + t_{13}, T_p(2) + t_{23}\} = \max \{5 + 4, 0 + 8, 3 + 1\} = 9;$$

$$T_p(4) = \max \{T_p(1) + t_{14}, T_p(3) + t_{34}\} = \max \{5 + 6, 9 + 2\} = 11;$$

$$T_p(5) = \max \{T_p(2) + t_{25}, T_p(3) + t_{35}\} = \max \{3 + 9, 9 + 0\} = 12;$$

$$T_p(6) = \max \{T_p(3) + t_{36}, T_p(4) + t_{46}, T_p(5) + t_{56}\} = \max \{9 + 6, 11 + 3, 12 + 7\} = 19.$$

Итак, критическое время $T_{кр} = 19$. Минимальный срок выполнения проекта – 19 дней.

Наиболее поздние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_n(i) = \min_{j \supset i} \{T_n(j) + t_{ij}\},$$

где минимум берется по всем событиям j , непосредственно следующим за событием i . Конечному событию присваиваем наиболее поздний срок наступления, равный критическому времени: $T_n(6) = T_{кр} = 19$.

Тогда:

$$T_n(5) = T_n(6) - t_{56} = 19 - 7 = 12;$$

$$T_n(4) = T_n(6) - t_{46} = 19 - 3 = 16;$$

$$T_n(3) = \min \{T_n(6) - t_{36}, T_n(5) - t_{35}, T_n(4) - t_{34}\} = \min \{19 - 6, 12 - 0, 16 - 2\} = 12;$$

$$T_n(2) = \min \{T_n(5) - t_{25}, T_n(3) - t_{23}\} = \min \{12 - 9, 12 - 1\} = 3;$$

$$T_n(1) = \min \{T_n(4) - t_{14}, T_n(3) - t_{13}\} = \min \{16 - 6, 12 - 4\} = 8;$$

$$T_n(0) = \min \{T_n(3) - t_{03}, T_n(2) - t_{02}, T_n(1) - t_{01}\} = \min \{12 - 8, 3 - 3, 8 - 5\} = 0.$$

Результаты расчетов отразим на сетевом графике. Ранние сроки наступления событий запишем над кружками, изображающими эти события, поздние сроки наступления событий – под кружками (рисунок 8.2).

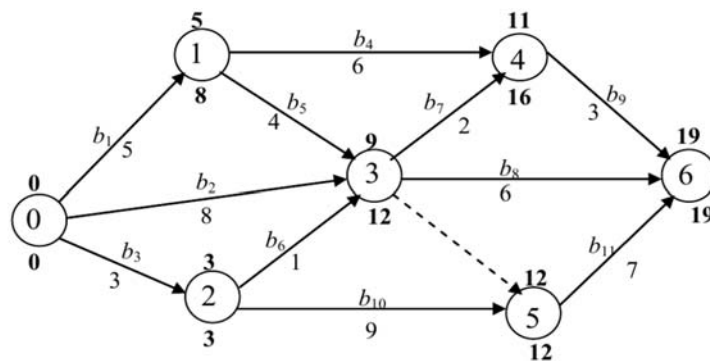


Рисунок 8.2 – Результирующий сетевой график

Критическое время $T_{кр} = 19$.

Временные характеристики событий представлены в таблице 8.2.

Таблица 8.2 – Временные параметры событий

Событие	Ранний срок $T_p(i)$	Поздний срок $T_n(i)$	Резерв времени $R(i)$
0	0	0	0
1	5	8	3
2	3	3	0
3	9	12	3
4	11	16	5
5	12	12	0
6	19	19	0

Резервы времени событий найдены по формуле $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$.

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т. е. через события 0, 2, 5, 6.

Найдем резервы времени работ.

Наиболее ранний возможный срок начала работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее раннему сроку наступления события i : $S_p(b_k) = T_p(i)$, а наиболее поздний допустимый срок окончания работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее позднему сроку наступления события j : $E_p(b_k) = T_n(j)$.

Полный резерв времени работ найдем по формуле

$$r_n(b_k) = r_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t_{ij} = E_n(b_k) - S_p(b_k) - t_{ij}.$$

Независимый резерв времени работ найдем по формуле

$$r_H(b_k) = r_H(i, j) = T_p(j) - T_n(i) - t_{ij}.$$

Сведем полученные данные в таблицу 8.3.

Таблица 8.3 – Временные параметры работ

Работа $b_k = (i, j)$	Продолжительность работы $t(b_k) = t_{ij}$	$S_p(b_k)$	$E_p(b_k)$	$r_n(b_k)$	$r_H(b_k)$
$b_1 = (0, 1)$	5	0	8	3	0
$b_2 = (0, 3)$	8	0	12	4	1
$b_3 = (0, 2)$	3	0	3	0	0
$b_4 = (1, 4)$	6	5	16	5	-3
$b_5 = (1, 3)$	4	5	12	3	-3
$b_6 = (2, 3)$	1	3	12	8	5
$b_7 = (3, 4)$	2	9	16	5	-3
$b_8 = (3, 6)$	6	9	19	4	1
$b_9 = (4, 6)$	3	11	19	5	0
$b_{10} = (2, 5)$	9	3	12	0	0
$b_{11} = (5, 6)$	7	12	19	0	0
$\varphi = (3, 5)$	0	9	12	3	0

Работа $\varphi = (3, 5)$ – фиктивная работа.

Критические работы – b_3, b_{10}, b_{11} . Резервы времени этих работ равны нулю. Выделим критический путь двойными стрелками (рисунок 8.3).

Резерв времени некритической дуги b находим как разность между длиной замыкающего критического участка и длиной самой некритической дуги:

$$R(b) = a - b.$$

Коэффициент напряженности некритической дуги определим по формуле

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}.$$

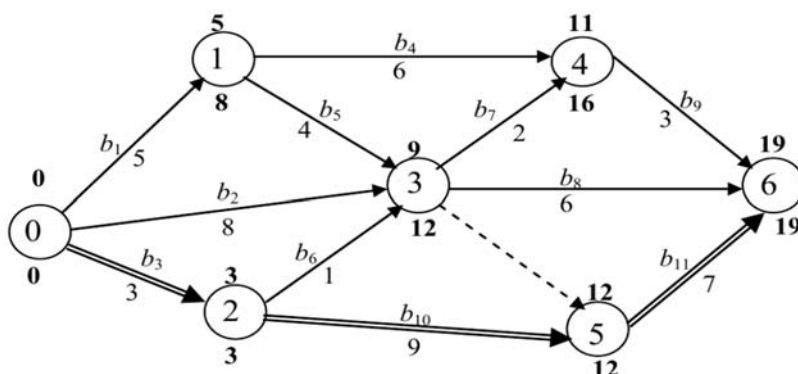


Рисунок 8.3 – Отображение критического пути

Резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг представим в таблице 8.4.

Таблица 8.4 – Резервы времени и коэффициенты напряженности

Некритическая дуга	a	b	Резерв времени дуги $R(b)$	Коэффициент напряженности дуги $N(b)$
(2, 3, 5)	9	1	8	$1/9 \approx 0,11$
(0, 3, 5)	12	8	4	$2/3 \approx 0,67$
(0, 1, 3, 5)	12	9	3	$3/4 \approx 0,75$
(0, 3, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0,74$
(0, 1, 3, 6)	19	15	4	$15/19 \approx 0,79$
(0, 1, 4, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0,74$
(0, 1, 3, 4, 6)	19	14	5	$14/19 \approx 0,74$
(2, 3, 6)	16	7	9	$7/16 \approx 0,44$
(2, 3, 4, 6)	16	6	10	$6/16 \approx 0,375$

Дуги, коэффициент напряженности которых $N(b) > 0,8$, составляют критическую зону. Дуги с коэффициентом напряженности $0,6 \leq N(b) \leq 0,8$ образуют подкритическую зону, а дуги с коэффициентом $N(b) < 0,6$ дают резервную зону. В нашем случае в критическую зону попадает только критический путь, в подкритической зоне находятся дуги (0, 1, 3, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 3, 6), (0, 1, 4, 6), (0, 1, 3, 4, 6) и (0, 3, 5). Из них самая напряженная дуга (0, 1, 3, 6). Она быстрее других может перейти на критический путь. Дуги (2, 3, 5), (2, 3, 6) и (2, 3, 4, 6) образуют резервную зону.

Задание

Построить сетевой график для максимальной (t_{nec}) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления

событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг (таблицы 8.5–8.9).

Таблица 8.5 – Вариант 1

Работа	Опирается на работы	Длительность работы
b_1	—	10
b_2	—	7
b_3	b_1	5
b_4	b_2	2
b_5	b_1	6
b_6	b_3, b_4	6
b_7	b_2	9
b_8	b_3, b_4, b_5	3
b_9	b_6, b_8	4
b_{10}	b_3, b_4, b_5	11
b_{11}	b_6, b_8	9

Таблица 8.6 – Вариант 2

Работа	Опирается на работы	Длительность работы
b_1	—	9
b_2	—	10
b_3	b_1	9
b_4	b_1	10
b_5	b_2	8
b_6	b_3	9
b_7	b_4, b_5	5
b_8	b_2	6
b_9	b_6, b_7	7
b_{10}	b_4, b_5	12
b_{11}	b_4, b_5, b_8	9

Таблица 8.7 – Вариант 3

Работа	Опирается на работы	Длительность работы
b_1	—	8
b_2	—	6
b_3	b_1	13
b_4	b_1	4
b_5	b_4	5
b_6	b_2	10
b_7	b_2	6
b_8	b_7	9
b_9	b_5, b_6, b_8	10
b_{10}	b_3, b_4, b_9	7
b_{11}	b_5, b_6, b_8	11

Таблица 8.8 – Вариант 4

Работа	Опирается на работы	Длительность работы
b_1	—	10
b_2	—	7
b_3	b_1	9
b_4	b_2	7
b_5	b_3, b_4	6
b_6	b_4	6
b_7	b_5, b_6	12
b_8	b_5, b_6	5
b_9	b_7	6
b_{10}	b_5, b_6	11
b_{11}	b_8	9

Таблица 8.9 – Вариант 5

Работа	Опирается на работы	Длительность работы
b_1	—	9
b_2	—	7
b_3	—	13
b_4	b_1	8
b_5	b_2	6
b_6	b_2	10
b_7	b_3	9
b_8	b_4, b_5	13
b_9	b_6, b_7	9
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11
b_{11}	b_9	9

Список литературы

- 1 **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учеб. пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. – Мн. : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016. – 299 с. : ил.
- 2 **Дорогов, В. Г.** Введение в методы и алгоритмы принятия решений : учеб. пособие / В. Г. Дорогов, Я. О. Теплова ; под ред. Л. Г. Гагариной. – М. : Форум ; ИНФРА-М, 2016. – 240 с.
- 3 **Есипов, Б. А.** Методы исследования операций : учеб. пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2013. – 304 с. : ил.
- 4 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, И. И. Холод; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 4-е изд., стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2013. – 352 с.
- 5 **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 4-е изд., испр. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2015. – 512 с. : ил.
- 6 **Невежин, Ю. В.** Исследование операций и принятие решений в экономике. Сборник задач и упражнений : учеб. пособие / В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин. – М. : Форум ; ИНФРА-М, 2015. – 400 с.