

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

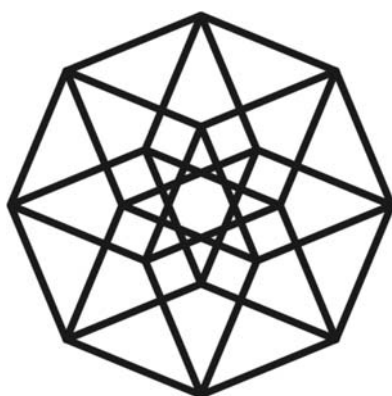
*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей*

6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»,

6-05-0611-04 «Электронная экономика»

*и 6-05-0612-03 «Системы управления информацией»
дневной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2026

УДК 517
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» мая 2026 г., протокол № 9

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Математический анализ» предназначены для студентов специальностей 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», 6-05-0611-04 «Электронная экономика» и 6-05-0612-03 «Системы управления информацией» дневной и заочной форм обучения. Приведены примеры решения задач, предложены задания для самостоятельной работы на практических занятиях и задания для домашней работы.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевки
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать 23.09.2026. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 56 экз. Заказ № 724.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

18 Непосредственное интегрирование.....	4
19 Общие методы интегрирования: замена переменной, подведение под знак дифференциала, интегрирование по частям	5
20 Интегрирование рациональных функций.....	7
21 Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических выражений	8
22 Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница	10
23 Несобственные интегралы	11
24 Геометрические приложения определенных и несобственных интегралов	13
25 Двойной интеграл.....	14
26 Замена переменных в двойном интеграле	16
27 Криволинейный интеграл 1-го рода.....	18
28 Криволинейный интеграл 2-го рода.....	19
29 Приложения двойных и криволинейных интегралов.....	21
30 Дифференциальные уравнения первого порядка: в полных дифференциалах, с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним.....	23
31 Дифференциальные уравнения первого порядка: однородные, линейные, Бернулли	26
32 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	29
33 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.....	31
34 Линейные неоднородные и неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Метод вариации постоянных	32
35 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида	34
36 Числовые ряды. Суммирование рядов. Необходимое условие сходимости	36
37 Числовые ряды. Признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения.....	37
38 Признаки сходимости положительных рядов: признаки Даламбера, Коши, интегральный.....	38
39 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница	40
40 Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость	42
41 Степенные ряды. Ряды Тейлора	43
42 Тригонометрические ряды Фурье	46
Список литературы	48

Часть 2

18 Непосредственное интегрирование

18.1 Примеры решения задач

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int 2^x (1 + 3x^2 2^{-x}) dx$; 2) $\int 4 \sin^2 x dx$.

Решение:

$$1) \int 2^x (1 + 3x^2 2^{-x}) dx = \int (2^x + 3x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C;$$

$$2) \int 4 \sin^2 x dx = 2 \int (1 - \cos 2x) dx = 2x - \sin 2x + C.$$

18.2 Задание для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$;	6) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$;	11) $\int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx$;
2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$;	7) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$;	12) $\int \frac{4\sqrt{1-x^2} + 3x^2}{x^2 - 1} dx$;
3) $\int \left(\frac{2}{9+x^2} - \frac{3}{4-x^2} \right) dx$;	8) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$;	13) $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$;
4) $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$;	9) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$;	14) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;
5) $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$;	10) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$;	15) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$.

18.3 Домашнее задание

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int (2x^8 - 5x^5 - 1) dx$;	4) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$;	7) $\int \frac{3 - \sqrt{5+x^2}}{5+x^2} dx$;
2) $\int \left(\frac{5}{x} - \frac{10}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{x^2 + 7} \right) dx$;	5) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$;	8) $\int \frac{x e^x - x}{x} dx$;
3) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$;	6) $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$;	9) $\int \frac{2x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx$.

Ответы: 1) $\frac{2}{9}x^9 - \frac{5}{6}x^6 - x + C$; 2) $5\ln|x| - 40\sqrt[4]{x} - \frac{3\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{7}}{7} + C$;

3) $-\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} + C$; 4) $x + \cos x + C$; 5) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C$; 6) $-\frac{2}{x} + \operatorname{arctgx} + C$;

7) $\frac{3\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{5} - \ln|x + \sqrt{x^2 + 5}| + C$; 8) $e^x - x + C$; 9) $x^2 - \operatorname{ctgx} + C$.

19 Общие методы интегрирования: замена переменной, подведение под знак дифференциала, интегрирование по частям

19.1 Примеры решения задач

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int 3x^2 \cos(x^3 + 1) dx$; 2) $\int 5x \sqrt{x-3} dx$; 3) $\int x \sin x dx$.

Решение:

1) применим метод подведения под знак дифференциала:

$$\int 3x^2 \cos(x^3 + 1) dx = \int \cos(x^3 + 1) \cdot d(x^3 + 1) = \sin(x^3 + 1) + C;$$

2) применим метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \int 5x \sqrt{x-3} dx &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3} = t, \\ x = t^2 + 3, \quad dx = 2t dt \end{array} \right] = \int 5(t^2 + 3) \cdot t \cdot 2t dt = 10 \int (t^4 + 3t^2) dt = \\ &= 2t^5 + 10t^3 + C = [t = \sqrt{x-3}] = 2(x-3)^2 \sqrt{x-3} + 10(x-3)\sqrt{x-3} + C; \end{aligned}$$

3) применим метод интегрирования по частям:

$$\int x \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

19.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти неопределенные интегралы методом подведения под знак дифференциала:

1) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;

3) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}} dx$;

5) $\int \frac{4 \cdot \operatorname{arctgx} - x}{1+x^2} dx$;

2) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$;

4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$;

6) $\int \frac{x + \arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

2 Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}; & 3) \int \frac{3x dx}{\sqrt{x+4}}; & 5) \int \frac{x dx}{\sqrt[5]{1-x}}; \\ 2) \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx; & 4) \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}; & 6) \int \frac{x+2}{1+\sqrt{1+x}} dx. \end{array}$$

Ответы: 1) $\arctg \frac{\sqrt{x+1}}{2} + C$; 2) $\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{x^2+2} + C$;

3) $2\sqrt{(x+4)^3} - 24\sqrt{x+4} + C$; 4) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$;

5) $\frac{5}{9}\sqrt[5]{(1-x)^9} - \frac{5}{4}\sqrt[5]{(1-x)^4} + C$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} - 1 - x + 4\sqrt{1+x} - 4\ln|\sqrt{1+x}+1| + C$.

3 Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\begin{array}{lll} 1) \int x \cdot e^{-2x} dx; & 3) \int \frac{\ln x}{x^2} dx; & 5) \int e^x \sin x dx; \\ 2) \int x \cdot \cos 3x dx; & 4) \int \arctg x dx; & 6) \int x^3 e^{x^2} dx. \end{array}$$

Ответы: 1) $C - \frac{1}{2}e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$; 2) $\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$; 3) $C - \frac{1}{x}(\ln x + 1)$;

4) $x \cdot \arctg x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$; 5) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$; 6) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}$.

19.3 Домашнее задание

1 Найти интегралы методом подведения под знак дифференциала:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{x^3 dx}{x^8-4}; & 2) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}; & 3) \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}. \end{array}$$

Ответы: 1) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right| + C$; 2) $\arcsin \frac{e^x}{2} + C$; 3) $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x} + C$.

2 Найти интегралы методом замены переменной:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{x dx}{(3-x)^7}; & 2) \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}; & 3) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

Ответы: 1) $\frac{1}{2(3-x)^6} - \frac{1}{5(3-x)^5} + C$; 2) $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C$; 3) $\arctg e^x + C$.

3 Найти интегралы методом интегрирования по частям:

$$\begin{array}{lll} 1) \int x \cos^{-2} x dx; & 2) \int \ln^2 x dx; & 3) \int (x^2 - 4x + 3)e^x dx. \end{array}$$

Ответы: 1) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$; 2) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$; 3) $(x-3)^2 e^x + C$.

20 Интегрирование рациональных функций

20.1 Примеры решения задач

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+1)^2} dx$.

Решение

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители левой и правой частей. Получим

$$A(x^2 + 2x + 1) + B_1(x^2 - x - 2) + B_2(x - 2) = x^2 + 13x + 6.$$

Найдем коэффициенты A , B_1 , B_2 **методом сравнения коэффициентов**. Для этого из тождественного равенства многочленов приравняем коэффициенты при одинаковых степенях правой и левой частей равенства:

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A + B_1 = 1, \\ 2A - B_1 + B_2 = 13, \\ A - 2B_1 - 2B_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4, \\ B_1 = -3, \\ B_2 = 2. \end{cases}$$

Замечание. Находить значения неопределенных коэффициентов можно также **методом частных значений** и комбинацией указанных двух методов.

Таким образом, получаем

$$\frac{x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{4}{x-2} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

В результате для заданного интеграла имеем:

$$\int \frac{x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{4}{x-2} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = 4 \ln|x-2| - 3 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C.$$

20.2 Задание для самостоятельной работы

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{8x-2}{x(x-1)(x+2)} dx; \quad 2) \int \frac{x^2-8x+15}{x^3-4x^2+5x} dx; \quad 3) \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}; \quad 5) \int \frac{x^5 + 2x}{x^3 - 1} dx; \quad 6) \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Ответы: 1) $\ln|x| + 2\ln|x-1| - 3\ln|x+2| + C$; 2) $3\ln|x| - \ln(x^2 - 4x + 5) + C$;

3) $\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C$; 4) $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + 2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$;

5) $\frac{1}{2}x^3 + \ln|x-1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; 6) $x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

20.3 Домашнее задание

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{-9x^2 + 23 - 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx; \quad 2) \int \frac{x^3 + 10x^2 - 27}{x^4 + 6x^3 + 9x^2} dx; \quad 3) \int \frac{2x^5 - 7x^3 - 6x - 6}{x^4 + x^3} dx.$$

Ответы: 1) $\ln|x-2| - 5\ln(x^2 + 1) + 3\operatorname{arctg}x + C$;

2) $2\ln|x| - \ln|x+3| + \frac{3}{x} - \frac{4}{x+3} + C$; 3) $x^2 - 2x + \frac{3}{x^2} - 5\ln|x+1| + C$.

21 Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических выражений

21.1 Примеры решения задач

Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}; \quad 2) \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$$

Решение:

1) применим метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} &= \left[\begin{array}{l} t^4 = x+3, \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = \int \frac{4t^3 dt}{(t-1)t^2} = 4 \int \frac{t dt}{t-1} = 4 \int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 4(t + \ln|t-1|) + C = [t = \sqrt[4]{x+3}] = 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3}-1|) + C; \end{aligned}$$

2) воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(t+1) + C = \left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + C.$$

21.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$; 7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4x+1}}$;
 2) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$; 5) $\int \frac{dx}{(2+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$;
 3) $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$; 6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$; 9) $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$.

Ответы: 1) $\arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$; 2) $\arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{1-x-x^2} + C$; 3) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$;

4) $\sqrt{x^2-1} - \arccos \frac{1}{x} + C$; 5) $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2(1-x^2)}} + C$; 6) $C - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$;

7) $C - \ln \left| \frac{1}{x} - 2 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x} - 2 \right)^2} \right|$; 8) $\frac{x}{4 \cdot \sqrt{4+x^2}} + C$; 9) $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + C$.

2 Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$; 7) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$;
 2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$; 5) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$; 8) $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$;
 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$; 6) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$; 9) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

Ответы: 1) $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C$;

2) $C - \frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x}$; 3) $\frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C$; 4) $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$;

5) $C - \frac{2}{3 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$; 6) $\frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2\operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x + \sqrt{7}} \right| + C$; 7) $\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2 \ln |\sin x| + C$;

8) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C$; 9) $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$.

21.3 Домашнее задание

1 Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 11}}; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}; \quad 3) \int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}} dx;$$

Ответы: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + \frac{11}{2}} \right| + C$; 2) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$;

3) $C - \sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-1}{2}.$

2 Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \cos 2x \sin(-5x) dx; \quad 2) \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}; \quad 3) \int \frac{dx}{5-\sin x+5\cos x};$$

Ответы: 1) $\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{14} \cos 7x + C$; 2) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C$; 3) $-\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 \right| + C.$

22 Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

22.1 Примеры решения задач

Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}; \quad 2) \int_0^{\pi} x \cos x dx.$$

Решение:

1) применим метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt, \\ x_1 = 3 \Rightarrow t_1 = 2, \quad x_2 = 8 \Rightarrow t_2 = 3 \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t dt}{t} = \\ &= 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - 2 \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) = \frac{32}{3}; \end{aligned}$$

2) применим метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \\ &= \pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -2. \end{aligned}$$

22.2 Задание для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4} \right) dx;$ | 4) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}};$ | 7) $\int_1^5 \frac{dx}{3 + \sqrt{x-1}};$ |
| 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$ | 5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 6 \cos^2 x \sin x dx;$ | 8) $\int_4^5 (x-3)e^x dx;$ |
| 3) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2 + 1};$ | 6) $\int_1^3 \frac{x dx}{1 + x^2};$ | 9) $\int_1^3 x^2 \ln x dx.$ |

Ответы: 1) $\frac{21}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$; 3) $\frac{4-\pi}{4}$; 4) $\sqrt{5} - 1$; 5) 2; 6) $\ln \sqrt{5}$;

7) $4 + 6 \ln \frac{3}{5}$; 8) e^5 ; 9) $9 \ln 3 - \frac{26}{9}$.

22.3 Домашнее задание

Вычислить определенные интегралы:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx;$ | 3) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx;$ | 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$ |
| 2) $\int_0^2 \frac{3x+4}{x+2} dx;$ | 4) $\int_0^{\pi} \frac{2 \sin x dx}{4 + \cos^2 x};$ | 6) $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$ |

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $6 - \ln 4$; 3) $\frac{100}{3}$; 4) $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$; 5) 1; 6) 4π .

23 Несобственные интегралы

23.1 Примеры решения задач

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13};$ | 2) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$ |
|---|-------------------------------------|

Решение:

1) задан интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} \Big|_1^b =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{3} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12};$$

2) подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x = 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^e \ln^{-3} x \, d(\ln x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln^{-2} x}{-2} \Big|_{1+\varepsilon}^e = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln^2 e} - \frac{1}{\ln^2(1+\varepsilon)} \right) = +\infty \Rightarrow \text{интеграл расходится.} \end{aligned}$$

23.2 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; & 3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}; & 5) \int_{-\infty}^0 \frac{x+1}{x^2+1} dx; \\ 2) \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}; & 4) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; & 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}. \end{array}$$

Ответы: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2} \ln 3$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 1; 5) расходится; 6) $\frac{\pi}{6}$.

2 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; & 3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}; & 5) \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}; \\ 2) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}; & 4) \int_0^1 \frac{dx}{x^3-6x^2}; & 6) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2-1}. \end{array}$$

Ответы: 1) 2; 2) расходится; 3) 0; 4) расходится; 5) $\frac{256}{15}$; 6) расходится.

23.3 Домашнее задание

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2x^2+3}; & 3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}; & 5) \int_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \\ 2) \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; & 4) \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}; & 6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}. \end{array}$$

Ответы: 1) расходится; 2) $-\frac{\pi^2}{8}$; 3) π ; 4) 3; 5) $\frac{3\pi^2}{8}$; 6) расходится.

24 Геометрические приложения определенных и несобственных интегралов

24.1 Примеры решения задач

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Решение

Построим фигуру, площадь которой требуется вычислить (рисунок 24.1).

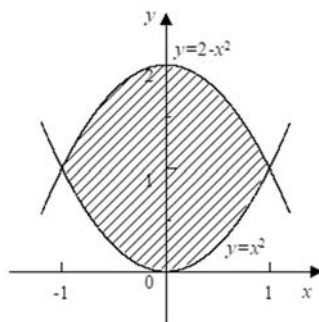


Рисунок 24.1

Найдём точки пересечения кривых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Площадь фигуры находим по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$:

$$S = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left(2x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(2 - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

24.2 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

1) $y = x^2 + 1$, $y = 6x - 7$; 3) $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

2) $y = 2x - x^2$, $y = -x$; 4) $r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$.

Ответы: 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $8 \ln 2$; 4) $2a^2$.

2 Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$:

1) вокруг оси Ox ;2) вокруг оси Oy .**Ответы:** 1) $\frac{128\pi}{7}$; 2) $\frac{64\pi}{5}$.3 Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$.**Ответ:** $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

24.3 Домашнее задание

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

1) $y = x^2 + 6$, $y = -5x$;2) $r = a(1 + \cos \varphi)$.**Ответы:** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3\pi a^2}{2}$.2 Вычислить объём полученной вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y = 0$ и $4x - y = 0$.**Ответ:** $\frac{20\pi}{3}$.

25 Двойной интеграл

25.1 Примеры решения задач

Вычислить $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где область D ограничена линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

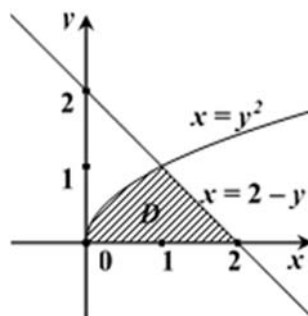
*Решение*Построим область D (рисунок 25.1).

Рисунок 25.1

Область является простой относительно оси Oy , следовательно:

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (x+2y) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_{y^2}^{2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 2y(2-y) - \frac{y^4}{2} - 2y^3 \right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{y^4}{2} - 2y^3 - \frac{3y^2}{2} + 2y + 2 \right) dy = \\ &= \left(-\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{2} + y^2 + 2y \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{10} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{19}{10}.\end{aligned}$$

25.2 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить повторные интегралы:

$$1) \int_0^3 dx \int_0^1 (x^2 + 2y) dy; \quad 2) \int_{-2}^2 dy \int_{y^2-1}^3 105xy^2 dx; \quad 3) \int_1^2 dx \int_x^{x^3} \frac{2x^2}{y^2} dy.$$

Ответы: 1) 12; 2) 1664; 3) $3 - \ln 4$.

2 В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ расставить пределы интегрирования, если область D ограничена линиями $x=1$, $x=4$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y-1=0$.

3 Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$1) \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy; \quad 2) \int_0^1 dx \int_{2x}^{5x} f(x, y) dy; \quad 3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

4 Вычислить двойные интегралы:

$$\begin{aligned}1) & \iint_D (x^2 + y) dx dy, \text{ где } D \text{ ограничена линиями } y = x^2, y^2 = x; \\ 2) & \iint_D x dx dy, \text{ где } D \text{ ограничена линиями } xy = 6, x + y - 7 = 0; \\ 3) & \iint_D \sin(x + y) dx dy, \text{ где } D \text{ ограничена линиями } y = x, y = \pi, x = 0.\end{aligned}$$

Ответы: 1) $\frac{33}{140}$; 2) $\frac{125}{6}$; 3) 0.

25.3 Домашнее задание

1 В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ расставить пределы для обоих порядков интегрирования по области D , ограниченной линиями $y=2x$, $x=0$, $x+y=3$.

2 Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_{-1}^3 dx \int_{x^2-3}^{2x} f(x, y) dy$.

3 Вычислить двойные интегралы:

1) $\iint_D x dx dy$, где D ограничена линиями $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$;

2) $\iint_D y \ln x dx dy$, где D ограничена линиями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

Ответы: 1) $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{5}{4} \ln 2 - \frac{5}{8}$.

26 Замена переменных в двойном интеграле

26.1 Примеры решения задач

Вычислить $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, если область D ограничена полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и осью Ox .

Решение

Построим область D (рисунок 26.1).

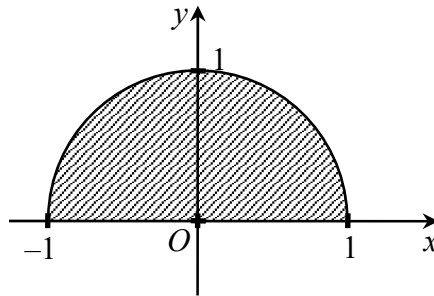


Рисунок 26.1

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad J(\rho, \varphi) = \rho.$$

Уравнение окружности в полярной системе координат примет вид

$$y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \rho \sin \varphi = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \varphi} \Rightarrow \rho = 1.$$

Таким образом, $D: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \rho d\rho d\varphi = \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \int_0^\pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{3} d\varphi = \frac{\varphi}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

26.2 Задание для самостоятельной работы

Вычислить двойные интегралы:

- 1) $\iint_D (x + y) dx dy$, где D ограничена прямыми $2x + y = 1$, $2x + y = 3$, $x - y = 2$, $x - y = -1$;
- 2) $\iint_D (12 - x - y) dx dy$, где D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9$;
- 3) $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$, где D ограничена линиями $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
- 4) $\iint_D (4 - x - y) dx dy$, где D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2y$.
- 5) $\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$, где D ограничена окружностями с центром в начале координат и радиусами e и 1 ;
- 6) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где D ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 6y$.

Ответы: 1) $\frac{7}{3}$; 2) 108π ; 3) $\frac{\pi}{4}(e^{R^2} - 1)$; 4) 3π ; 5) 2π ; 6) 8 .

26.3 Домашнее задание

Вычислить двойные интегралы:

- 1) $\iint_D (y - x) dx dy$, где D ограничена прямыми $y = x + 1$, $y = x + 3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$;
- 2) $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$, где D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = \sqrt{3}x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
- 3) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2x$.

Ответы: 1) -8 ; 2) $\frac{\pi^2}{6}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$.

27 Криволинейный интеграл 1-го рода

27.1 Примеры решения задач

Вычислить $I = \int_L \frac{dl}{2x-3y}$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(0;3)$ и $B(1;5)$.

Решение

Напишем уравнение прямой AB по двум точкам:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{5-3} \Rightarrow y = 2x + 3.$$

Выразим дифференциал dl :

$$y' = (2x+3)' = 2, \quad dl = \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{5} dx.$$

По формуле вычисления криволинейного интеграла 1-го рода имеем:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{5} dx}{2x-3(2x+3)} = -\sqrt{5} \int_0^1 \frac{dx}{4x+9} = -\frac{\sqrt{5}}{4} \ln|4x+9|_0^1 = -\frac{\sqrt{5}}{4} (\ln 13 - \ln 9) = -\frac{\sqrt{5}}{4} \ln \frac{13}{9}.$$

27.2 Задание для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

- 1) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{2}(x-y)}$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(0;4)$ и $B(4;0)$;
- 2) $\int_L (x+y) dl$, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$;
- 3) $\int_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсечённая параболой $x^2 = 2y$;
- 4) $\int_L y dl$, где L – дуга астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключённая между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$;
- 5) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

Ответы: 1) 0; 2) $1 + \sqrt{2}$; 3) $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$; 4) $\frac{3}{5}$; 5) $\ln 2$.

27.3 Домашнее задание

Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

- 1) $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(-1;0)$ и $B(0;1)$;
- 2) $\int_L \frac{y dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0; \pi]$;
- 3) $\int_L \sqrt{2y} dl$, где L – первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$;
- 4) $\int_L y dl$, где L – контур прямоугольника с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$.

Ответы: 1) $-5\sqrt{2}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $8\sqrt{2}\pi$; 4) 12.

28 Криволинейный интеграл 2-го рода

28.1 Примеры решения задач

Вычислить $I = \int_{AB} (x^2 - 2xz) dx + (z^2 - 2xz) dz$, где AB – дуга параболы $z = x^2$, пробегаемая от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

Решение

Изобразим дугу AB (рисунок 28.1).

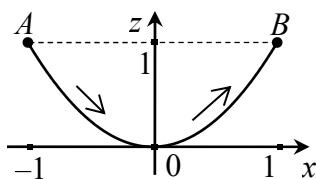


Рисунок 28.1

По формуле вычисления криволинейного интеграла 2-го рода имеем

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x \cdot x^2 + (x^4 - 2x \cdot x^2) \cdot 2x) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \left(\frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{14}{15}.
 \end{aligned}$$

28.2 Задание для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода:

- 1) $\int_{AB} (x^2 + y) dx + (2x - y) dy$, где AB – дуга параболы $y = 2x - x^2$, пробегаемая от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;-3)$;
- 2) $\oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy$, где L – окружность $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода;
- 3) $\int_{AB} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, где AB – отрезок прямой, заключённый между точками $A(1;1)$ и $B(3;4)$;
- 4) $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x + y^2) dy$, где L – ломаная с вершинами в точках $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$;
- 5) $\int_L x dx + y dy + (x - y + 1) dz$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$;
- 6) $\oint_L (x^2 - y) dx$, где L – контур прямоугольника $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;
- 7) $\oint_L x dy$, где L – контур треугольника, образованного прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ (интегрирование вести в положительном направлении).

Ответы: 1) $-\frac{44}{3}$; 2) -4π ; 3) $\frac{67}{6}$; 4) $\frac{194}{3}$; 5) 7; 6) 2; 7) 2.

28.3 Домашнее задание

Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода:

- 1) $\int_{OA} (xy - y^2) dx + x dy$, где OA – дуга параболы $y = 2x^2$, пробегаемая от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$;
- 2) $\int_L 2yz dy - y^2 dz$, где L – ломаная с вершинами в точках $O(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $A(0;2;1)$;
- 3) $\oint_L x dy - y dx$, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$ при положительном направлении обхода.

Ответы: 1) $\frac{31}{30}$; 2) -4 ; 3) 2.

29 Приложения двойных и криволинейных интегралов

29.1 Примеры решения задач

Вычислить площадь области D , ограниченной линиями $y^2 = x + 1$ и $2x + y = 1$.

Решение

Изобразим область D (рисунок 29.1).

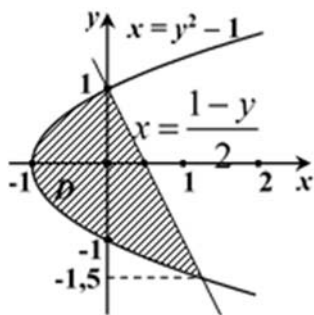


Рисунок 29.1

Найдём точки пересечения данных линий, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = x + 1, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ (1 - 2x)^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow A(0; 1), \quad B(1,25; -1,5).$$

Область D является простой относительно оси Oy , следовательно

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-1,5}^1 dy \int_{y^2-1}^{0,5-0,5y} dx = \int_{-1,5}^1 (0,5 - 0,5y - y^2 + 1) dy = \\ &= \int_{-1,5}^1 \left(-y^2 - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right) dy = \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{4} + \frac{3y}{2} \right) \Big|_{-1,5}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} = \frac{125}{48}. \end{aligned}$$

29.2 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = 2 - x$, $y^2 = 4x + 4$; 2) $\rho = a \sin 2\varphi$, $a > 0$.

Ответы: 1) $\frac{64}{3}$; 2) $\frac{\pi a^2}{4}$.

2 Вычислить объём тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$.

Ответ: $\frac{560}{3}$.

3 Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$.

4 Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры плотностью $\mu(x, y) = 1$, которая ограничена линиями $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$.

Ответ: 8.

5 Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, если $\mu(x, y) = xy$.

Ответ: $x_c = y_c = \frac{9}{14}$.

6 Вычислить статический момент однородного полукруга радиуса R , лежащего в плоскости xOy , относительно диаметра.

Ответ: $\frac{2R^3}{3}$.

7 Найти площадь области, ограниченной кривой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, если $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ответ: $6\pi a^2$.

8 Вычислить координаты центра тяжести и моменты инерции однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом квадранте.

Ответ: $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$, $I_x = I_y = \frac{\pi R^3}{4}$, $I_o = \frac{\pi R^3}{2}$.

9 Вычислить работу силы $\vec{F} = (x^2 + y^2 + 1)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$, заключённой между точками $O(0;0)$ и $A(1;1)$.

Ответ: $\frac{7}{3}$.

29.3 Домашнее задание

1 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$; 2) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = 16 - 8x$.

Ответ: 1) $\frac{15}{2} - 8\ln 2$; 2) $8\sqrt{2}$.

2 Вычислить объём тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y + z = 2$ и цилиндром $y = x^2$.

Ответ: $\frac{32\sqrt{2}}{15}$.

3 Вычислить координаты центра масс однородной плоской пластинки, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Ответ: $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.

4 Вычислить площадь области, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 2$.

Ответ: $\ln 2$.

5 Вычислить массу m дуги кривой $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$, если плотность в каждой её точке $\mu(x, y) = 3x^2$.

Ответ: 19.

30 Дифференциальные уравнения первого порядка: в полных дифференциалах, с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним

30.1 Примеры решения задач

Проинтегрировать уравнения:

1) $(2x \cos y + 3x^2)dx + (2y - x^2 \sin y)dy = 0$, $y(0) = 0$;

2) $(1 + e^x)yy' = e^x$; 3) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$.

Решение:

1) для данного в условии уравнения имеем

$$P(x, y) = 2x \cos y + 3x^2, \quad Q(x, y) = 2y - x^2 \sin y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x \cos y + 3x^2)'_y = -2x \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (2y - x^2 \sin y)'_x = -2x \sin y.$$

Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos y + 3x^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin y. \end{cases}$$

Интегрируя, например, второе из этих уравнений (x при этом считается постоянной), найдём

$$u(x, y) = \int (2y - x^2 \sin y) dy = y^2 + x^2 \cos y + f(x),$$

где $f(x)$ – функция, подлежащая определению.

Чтобы найти функцию $f(x)$, продифференцируем по x функцию $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y^2 + x^2 \cos y + f(x))'_x = 2x \cos y + f'(x).$$

Принимая во внимание первое равенство системы, имеем

$$2x \cos y + f'(x) = 2x \cos y + 3x^2, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f(x) = x^3 + \tilde{C}.$$

Итак, $u(x, y) = y^2 + x^2 \cos y + x^3 + \tilde{C}$, а значит $y^2 + x^2 \cos y + x^3 = C$ – общий интеграл данного уравнения.

Полагая в общем интеграле $x = 0$, $y = 0$, находим $C = 0$. Подставляя это значение C в общий интеграл, получим для ДУ частный интеграл

$$y^2 + x^2 \cos y + x^3 = 0,$$

удовлетворяющий заданному начальному условию $y(0) = 0$;

2) по условию задано ДУ с разделяющимися переменными. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то, разделяя переменные, получим

$$(1 + e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x, \quad y dy = \frac{e^x dx}{1 + e^x}.$$

Проинтегрировав, найдем общий интеграл ДУ:

$$\int y dy = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}, \quad \frac{y^2}{2} = \int \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x}, \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Так как $1 + e^x \neq 0 \quad \forall x$, то особых решений уравнение не имеет;

3) по условию задано ДУ, сводящееся к уравнению с разделяющимися переменными. Запишем уравнение в виде

$$y' = -\frac{2x + 3y - 1}{2(2x + 3y) - 5}.$$

Введем замену $z = 2x + 3y$, откуда $y = \frac{z - 2x}{3}$, $y' = \frac{1}{3}z' - \frac{2}{3}$. Тогда

$$\frac{1}{3}z' - \frac{2}{3} = -\frac{z - 1}{2z - 5}, \quad z' = \frac{z - 7}{2z - 5}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z - 7}{2z - 5}, \quad \frac{2z - 5}{z - 7} dz = dx,$$

$$\int \frac{2z - 5}{z - 7} dz = \int dx, \quad \int \left(2 + \frac{9}{z - 7} \right) dz = x + C, \quad 2z + 9 \ln|z - 7| = x + C.$$

Делая обратную замену $z = 2x + 3y$, получаем общий интеграл исходного ДУ:

$$3x + 6y + 9 \ln|2x + 3y - 7| = C.$$

30.2 Задания для самостоятельной работы

1 Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

$$1) (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0; \quad 4) x dx + y dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2};$$

$$2) 3x^2 e^y + (x^3 e^y - 1)y' = 0, \quad y(0) = 1; \quad 5) \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0;$$

$$3) 2y \cos^2 x dy + (2x - y^2 \sin 2x) dx = 0; \quad 6) \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0.$$

Ответы: 1) $5x^2 y - 8xy + x + 3y = C$; 2) $x^3 e^y - y = -1$; 3) $y^2 \cos^2 x + x^2 = C$;

$$4) x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C; \quad 5) \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C; \quad 6) y \ln x + \frac{1}{4} y^4 = C.$$

2 Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

$$1) (1 + x^2) dy - 2x(y + 3) dx = 0; \quad 4) y' \cos x = y \sin x, \quad y(0) = 1;$$

$$2) (y^2 + xy^2) y' + x^2 - yx^2 = 0; \quad 5) 3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1 - e^x}{\cos^2 y} dy = 0;$$

$$3) x \sqrt{1 + y^2} dx + y \sqrt{1 + x^2} dy = 0, \quad y(\sqrt{3}) = 0; \quad 6) xy' - y = y^3.$$

Ответы: 1) $y = C(x^2 + 1) - 3$; 2) $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x + 1| + C$;

$$3) \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = 3; \quad 4) y = \frac{1}{\cos x}; \quad 5) (e^x - 1)^3 = C \operatorname{tg} y; \quad 6) \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} = C x.$$

3 Проинтегрировать уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$1) (x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0; \quad 2) y' = \cos(x + y).$$

Ответы: 1) $\frac{3}{5}(x - 2y) + \frac{2}{5}\ln|x - 2y| = x + C$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x + y}{2} = x + C$.

30.3 Домашнее задание

1 Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

$$1) (3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0, \quad y(0) = -2;$$

$$2) \left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0.$$

Ответы: 1) $\frac{3x^2y^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2y^3 - y = 18$; 2) $x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

2 Проинтегрировать уравнения с разделяющимися переменными:

$$1) \sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0; \quad 3) y^2 - x^2 y' = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$2) y dx + \operatorname{ctg} x dy = 0, \quad y(\pi) = -1; \quad 4) (x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0;$$

Ответы: 1) $\cos x = C \sin y$; 2) $y = \cos x$; 3) $y = x$; 4) $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$.

31 Дифференциальные уравнения первого порядка: однородные, линейные, Бернулли

31.1 Примеры решения задач

Решить дифференциальные уравнения:

$$1) y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}; \quad 2) y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x; \quad 3) y' - \frac{y}{x} = -3xy^2.$$

Решение:

1) по условию задано однородное ДУ. Применим подстановку $\frac{y}{x} = u$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$. Следовательно,

$$u'x + u = u - u^2, \quad u'x = -u^2, \quad \frac{du}{dx} x = -u^2, \quad -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл ДУ:

$$-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \frac{1}{u} = \ln|x| + C, \quad \frac{x}{y} = \ln|x| + C;$$

2) по условию задано линейное неоднородное ДУ. Применим метод вариации произвольной постоянной. Решим сначала линейное однородное ДУ, соответствующее заданному уравнению:

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y \operatorname{ctg} x, \quad \frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x \, dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} x \, dx,$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C| \quad (C \neq 0), \quad y = C \sin x.$$

Будем искать общее решение исходного уравнения в виде $y = C(x) \sin x$, где $C(x)$ – неизвестная функция от x . Так как $y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$, то, подставляя выражения для y и y' в исходное уравнение, получим

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \operatorname{ctg} x = \sin x,$$

$$C'(x) \sin x = \sin x, \quad C'(x) = 1, \quad C(x) = x + C_1.$$

Таким образом, общим решением данного ДУ будет

$$y = (x + C_1) \sin x;$$

3) по условию задано уравнение Бернулли. Применим подстановку $y = uv$, тогда $y' = u'v + u v'$ и в новых переменных ДУ примет вид

$$u'v + u v' - \frac{uv}{x} = -3xu^2v^2, \quad u'v + u \left(v' - \frac{v}{x} \right) = -3xu^2v^2.$$

Для нахождения функций u и v получаем систему:

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = -3xu^2v^2. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение системы:

$$v' - \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad v = x.$$

Находим u как общий интеграл второго уравнения системы, подставив в него найденное v :

$$u'x = -3xu^2x^2, \quad \frac{du}{dx}x = -3x^3u^2, \quad -\frac{du}{u^2} = 3x^2dx, \quad -\int \frac{du}{u^2} = \int 3x^2dx,$$

$$\frac{1}{u} = x^3 + C, \quad u = \frac{1}{x^3 + C}.$$

Таким образом, общим решением исходного ДУ будет

$$y = \frac{x}{x^3 + C}.$$

31.2 Задания для самостоятельной работы

1 Решить однородные дифференциальные уравнения:

1) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$

3) $(x^2 + y^2)dx = 2xy dy;$

2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, y(1) = 1;$

4) $(x - y)y dx - x^2 dy = 0, y(1) = \frac{1}{3}.$

Ответы: 1) $e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$; 2) $\frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x| + 1$; 3) $\frac{x^2}{x^2 - y^2} = Cx$; 4) $y = \frac{x}{3 + \ln|x|}.$

2 Решить линейные дифференциальные уравнения:

1) $y' + \frac{y}{x} = x^2;$

3) $x' + x \cos y = \cos y, x(0) = 1;$

2) $xy' - y = x^2 \cos x;$

4) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$

Ответы: 1) $y = \frac{1}{x} \left(\frac{x^4}{4} + C \right)$; 2) $y = x(\sin x + C)$; 3) $x = 1$; 4) $y = e^{x^2} (x^2 + C).$

3 Решить уравнения Бернулли:

1) $y'x + y = -xy^2;$

3) $2xyy' - y^2 + x = 0;$

2) $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1, y(3) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$

4) $ydx + \left(-\frac{1}{2}x^3 y \right) dy = 0.$

Ответы: 1) $y = \frac{1}{x(\ln|x| + C)}$; 2) $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x}}$; 3) $y^2 = x \ln \left| \frac{C}{x} \right|$; 4) $x^2 = \frac{C}{y(C + y)}.$

31.3 Домашнее задание

1 Решить однородные дифференциальные уравнения:

1) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, y(-1) = 1;$

2) $x dy + \left(x \sqrt{\frac{y}{x}} - 1 - y \right) dx = 0, y(1) = 1.$

Ответы: 1) $y = \frac{1 - 3x^2}{2x}$; 2) $2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 = \ln|x|.$

2 Решить линейные дифференциальные уравнения:

1) $x^2 + xy' = y, y(1) = 0;$

2) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}.$

Ответы: 1) $y = x(1 - x)$; 2) $y = e^{-x} (C - \ln|1 - x|).$

3 Решить уравнения Бернулли:

$$1) y' + \frac{y}{x} = -xy^2;$$

$$2) y' - xy = -y^3 e^{-x^2}, y(0) = -1.$$

Ответы: 1) $y = \frac{1}{x^2 + Cx}$; 2) $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + 1}$.

32 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

32.1 Примеры решения задач

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

$$1) y'' = 42x^5 - 20x^3 + 6x, y(1) = 0, y'(1) = 4;$$

$$3) yy'' - (y')^2 = 0;$$

$$2) y'' - (y' - 1) \operatorname{ctg} x = 0;$$

$$4) x^2 y'' + 2xy' = 4x^3.$$

Решение:

1) последовательно интегрируя данное ДУ, найдем его общее решение:

$$y' = \int (42x^5 - 20x^3 + 6x) dx = 7x^6 - 5x^4 + 3x^2 + C_1,$$

$$y = \int (7x^6 - 5x^4 + 3x^2 + C_1) dx = x^7 - x^5 + x^3 + C_1 x + C_2.$$

Подставляя $x = 1$, $y = 0$, $y' = 4$ в выражения для y и y' , найдем C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} 0 = 1^7 - 1^5 + 1^3 + C_1 \cdot 1 + C_2, \\ 4 = 7 \cdot 1^6 - 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое частное решение получаем из общего решения, подставляя найденные значения произвольных постоянных:

$$y = x^7 - x^5 + x^3 - x;$$

2) имеем уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно искомой функции. Полагаем $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$. После подстановки получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

$$p' - (p - 1) \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dp}{dx} = (p - 1) \operatorname{ctg} x, \quad \frac{dp}{p - 1} = \operatorname{ctg} x dx, \quad \int \frac{dp}{p - 1} = \int \operatorname{ctg} x dx,$$

$$\ln |p - 1| = \ln |\sin x| + \ln |C_1| \quad (C_1 \neq 0), \quad p - 1 = C_1 \sin x, \quad p = 1 + C_1 \sin x.$$

Заменяя переменную p на y' , получим уравнение $y' = 1 + C_1 \sin x$, интегрируя которое, найдем общее решение исходного ДУ:

$$y = \int (1 + C_1 \sin x) dx = x - C_1 \cos x + C_2;$$

3) имеем уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее явно независимой переменной. Полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'p$. После подстановки имеем

$$y p'p - p^2 = 0, \quad p(y p' - p) = 0.$$

Приравнявая первый множитель к нулю, получаем простейшее уравнение $p = 0$, т. е. $y' = 0$. Его решение $y = C$.

Приравнявая второй множитель к нулю, получаем ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y p' - p = 0, \quad y \frac{dp}{dy} = p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0), \quad p = C_1 y.$$

Заменяя переменную p на y' , получим уравнение $y' = C_1 y$, интегрируя которое, найдем общий интеграл исходного ДУ:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y, \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx, \quad \ln|y| = C_1 x + C_2.$$

Отметим, что в общий интеграл входит ранее найденное решение $y = C$;

4) левая часть данного ДУ есть полная производная по x от функции $x^2 y'$, а правая – производная от функции x^4 . Следовательно, уравнение можно записать в виде: $(x^2 y')' = (x^4)'$. Отсюда интегрированием получаем:

$$x^2 y' = x^4 + C_1, \quad y' = \frac{x^4 + C_1}{x^2}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем общее решение исходного ДУ:

$$y = \int \frac{x^4 + C_1}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{C_1}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{C_1}{x} + C_2.$$

32.2 Задание для самостоятельной работы

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

- 1) $y''' = \cos 2x$; 5) $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -\frac{5}{8}$;
 2) $(1+x^2)y'' = 2xy'$; 6) $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x} \right)$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$;
 3) $yy'' + (y')^3 = (y')^2$; 7) $(y-1)y'' = 2(y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
 4) $xy''' + y'' = 2x + 1$; 8) $yy'' + (y')^2 = x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Ответы: 1) $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$; 2) $y = C_1 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C_2$;

3) $y + \frac{1}{C_1} \ln |y| = x + C_2$; 4) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1(x \ln x - x) + C_2 x + C_3$;

5) $y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$; 6) $y = \frac{1}{2}x^2$; 7) $y = \frac{x}{x+1}$; 8) $y^2 = \frac{x^3}{3} + 4$.

32.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения дифференциальных уравнений высших порядков, используя методы понижения порядка:

- 1) $y'' = xe^x$; 4) $y''' \cos^4 x = \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 3$;
 2) $y'' x \ln x = y'$; 5) $y'' - 2yy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
 3) $y'' \operatorname{ctg} y = -2(y')^2$; 6) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

Ответы: 1) $y = e^x(x-2) + C_1 x + C_2$; 2) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$; 3) $\operatorname{tg} y = C_1 x + C_2$;

4) $y = -\ln |\cos x| + x^2 + x + 1$; 5) $y = \frac{1}{1-x}$; 6) $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$.

33 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

33.1 Примеры решения задач

Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^5 + 2k^4 + 2k^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2,3} = 0, \quad k_{4,5} = -1 \pm i.$$

Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = e^0 = 1, \quad y_2 = xe^0 = x, \quad y_3 = x^2 e^0 = x^2, \quad y_4 = e^{-x} \cos x, \quad y_5 = e^{-x} \sin x.$$

Общим решением данного уравнения будет

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} \cos x + C_5 e^{-x} \sin x.$$

33.2 Задание для самостоятельной работы

Найти общие и частные (где это требуется) решения уравнений:

- 1) $y'' - 5y' - 14y = 0$; 6) $y^{(6)} + 6y^{(5)} + 9y^{(4)} = 0$;
 2) $y'' + 8y' + 16y = 0$; 7) $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$;
 3) $y'' - 6y' + 34y = 0$; 8) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$;
 4) $y''' + 16y' = 0$; 9) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;
 5) $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$; 10) $y''' - 2y'' + y' = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Ответы: 1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{7x}$; 2) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$;

- 3) $y = C_1 e^{3x} \cos 5x + C_2 e^{3x} \sin 5x$; 4) $y = C_1 + C_2 \cos 4x + C_3 \sin 4x$;
 5) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{4x}$; 6) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-3x} + C_6 x e^{-3x}$;
 7) $y = 4e^x - e^{6x}$; 8) $y = 3e^{2x} - 7x e^{2x}$; 9) $y = \sin 3x$; 10) $y = e^x$.

33.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения уравнений:

- 1) $12y'' - 7y' + y = 0$; 3) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;
 2) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; 4) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

Ответы: 1) $y = C_1 e^{\frac{x}{3}} + C_2 e^{\frac{x}{4}}$; 2) $y = C_1 e^x \cos \frac{x}{2} + C_2 e^x \sin \frac{x}{2}$; 3) $y = (2 + x) e^{\frac{x}{2}}$;

- 4) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.

34 Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Метод вариации постоянных

34.1 Примеры решения задач

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение

Рассмотрим вначале соответствующее ЛОДУ:

$$y'' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 2i.$$

Фундаментальная система решений примет вид

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x.$$

Общим решением соответствующего ЛОДУ будет

$$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y_{он} = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x.$$

Система уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \operatorname{tg} 2x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 2x}{2 \cos 2x}, \quad C_2'(x) = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} \right) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_2.$$

Общее решение данного уравнения запишется в виде

$$\begin{aligned} y_{он} &= \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C_2 \right) \sin 2x = \\ &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \end{aligned}$$

34.2 Задание для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

$$1) y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}; \quad 4) y'' + 6y' + 9y = \frac{1}{xe^{3x}};$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x; \quad 5) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1};$$

$$3) y'' + y = \frac{1}{\sin x}; \quad 6) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

- Ответы:** 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + e^{5x}$; 2) $y = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right)$;
 3) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$; 4) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + x e^{-3x} \ln |x|$;
 5) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$; 6) $y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right)$.

34.3 Домашнее задание

Найти общие решения уравнений:

- 1) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$; 3) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$;
 2) $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$; 4) $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

- Ответы:** 1) $y = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x} \right)$; 2) $y = C_1 + C_2 e^x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \arcsin e^x$;
 3) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2 \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$; 4) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2$.

35 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

35.1 Примеры решения задач

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 15e^x$.

Решение

Общее решение ЛНДУ определяется формулой $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$. Рассмотрим вначале соответствующее ЛОДУ:

$$y'' + 4y = 0.$$

В пункте 34.1 показано, что общим решением этого уравнения будет

$$y_{оо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Функции e^x в правой части уравнения соответствует $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения (кратность $r = 0$), коэффициент при e^x равен 15 (многочлен нулевой степени). Следовательно, частное решение ищем в виде

$$y_{чн} = A x^0 e^x = A e^x.$$

Находя $y''_{\text{чн}}$ и подставляя вместе с $y_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получим

$$y'_{\text{чн}} = Ae^x, \quad y''_{\text{чн}} = Ae^x \quad \Rightarrow \quad Ae^x + 4Ae^x = 15e^x \quad \Rightarrow \quad 5Ae^x = 15e^x, \\ e^x \neq 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad A = 3 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{чн}} = 3e^x.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 3e^x.$$

35.2 Задания для самостоятельной работы

1 Для данных ЛНДУ написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами:

1) $y'' - 7y' = (x-1)^2$; 3) $y'' + 16y = \sin 4x$;

2) $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$; 4) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

Ответы: 1) $y_{\text{чн}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$; 2) $y_{\text{чн}} = (Ax^3 + Bx^2)e^{4x}$;

3) $y_{\text{чн}} = x(A \cos 4x + B \sin 4x)$; 4) $y_{\text{чн}} = Ax + B \cos 8x + C \sin 8x$.

2 Найти общие и частные (где это требуется) решения уравнений:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$; 4) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;

2) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$; 5) $y'' + y' = 5x + 2e^x$;

3) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$; 6) $y'' + y = \sin x \cos 3x$.

Ответы: 1) $y_{\text{он}} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$; 2) $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$;

3) $y_{\text{он}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x$; 4) $y_{\text{чн}} = e^{2x} - e^{3x} + x e^{-x}$;

5) $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$; 6) $y_{\text{он}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{30}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 2x$.

35.3 Домашнее задание

Найти общие и частные (где это требуется) решения уравнений:

1) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$; 3) $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 1$;

2) $y'' - 5y' + 6y = e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$; 4) $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

Ответы: 1) $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{25}x$; 2) $y_{\text{чн}} = \frac{1}{2}e^{3x} - e^{2x} + \frac{1}{2}e^x$;

3) $y_{\text{чн}} = \cos x + \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$; 4) $y_{\text{он}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

36 Числовые ряды. Суммирование рядов. Необходимое условие сходимости

36.1 Примеры решения задач

Исследовать ряды на сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}.$$

Решение:

1) запишем n -ю частичную сумму ряда и преобразуем ее:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то данный ряд сходится и его сумма равна значению предела, т. е. $S = 1$;

2) применим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{данный ряд расходится.}$$

36.2 Задания для самостоятельной работы

1 Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$1) u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)}; \quad 2) u_n = \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

2 Написать простейшую формулу общего члена ряда:

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots; & \quad 3) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{8}{5} + \frac{16}{6} + \dots; \\ 2) \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \frac{5}{14} + \dots; & \quad 4) \frac{1}{1} + \frac{2}{4} + \frac{6}{9} + \frac{24}{16} + \frac{120}{25} + \dots \end{aligned}$$

3 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}.$$

Ответы: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{5}{4}$.

4 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n-5}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{n^3+2n^2-1}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}. \end{array}$$

36.3 Домашнее задание

1 Написать простейшую формулу общего члена ряда:

$$1) 2\frac{1}{4} + 1\frac{9}{16} + 1\frac{13}{36} + 1\frac{17}{64} + \dots; \quad 2) \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{6}{9}\right)^4 + \left(\frac{7}{12}\right)^5 + \dots$$

2 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}.$$

Ответы: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{5}{6}$.

3 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+(-1)^n)^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n.$$

37 Числовые ряды. Признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнения

37.1 Примеры решения задач

Исследовать ряды на сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}.$$

Решение:

1) сравним общий член данного ряда с общим членом ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, который является геометрическим рядом с $q = \frac{1}{3} < 1$, а значит, он сходится. Так как $\frac{1}{n 3^n} < \frac{1}{3^n}$ ($\forall n \geq 2$), то по признаку сравнения исходный ряд сходится;

2) сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5n} : \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{5} \neq 0 \neq \infty.$$

По предельному признаку сравнения исходный ряд расходится как сравниваемый с расходящимся рядом.

37.2 Задания для самостоятельной работы

1 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак сравнения:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 1}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}; \\ 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n + 1}{n^2}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

2 Исследовать ряды на сходимость, применяя предельный признак сравнения:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 + 2}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right); \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{n^4 + 5n^2 + 7}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

37.3 Домашнее задание

Исследовать ряды на сходимость

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n}; & 5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2}{3^n + 4}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \operatorname{tg}^3 \frac{2}{n^2}. \end{array}$$

38 Признаки сходимости положительных рядов: признаки Даламбера, Коши, интегральный

38.1 Примеры решения задач

Исследовать ряды на сходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{2n-1} \right)^n; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + 1)^2}. \end{array}$$

Решение:

1) применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{2^n} : \frac{n^2}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится;

2) применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+3}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{2n-1} = \frac{5}{2} > 1.$$

Следовательно, ряд расходится;

3) функция $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши. Найдем несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2+1} \right) \Big|_1^b = -\left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится, а значит, данный ряд также сходится.

38.2 Задания для самостоятельной работы

1 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (3n-1)}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^n (n+3)!}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt{2n+5}}{2^n}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}. \end{array}$$

2 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Коши:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{4n} \right)^{n^2}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+7n}{n^2-3n+5} \right)^n; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{3}{n}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}. \end{array}$$

3 Исследовать ряды на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1};$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$$

38.3 Домашнее задание

Исследовать ряды на сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{3^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{n}{5};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)};$$

$$6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}.$$

39 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

39.1 Примеры решения задач

1 Исследовать ряды на сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}; \quad 2) 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{3}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

Решение:

1) задан знакопередающийся ряд. Применим признак Лейбница:

$$u_1 = \frac{3}{2} = 1,5; \quad u_2 = \frac{5}{6} \approx 0,83; \quad u_3 = \frac{7}{12} \approx 0,58; \quad u_4 = \frac{9}{20} = 0,45; \quad u_5 = \frac{11}{30} \approx 0,37; \quad \dots$$

Модули членов ряда монотонно убывают, общий член стремится к нулю, следовательно, ряд сходится.

Рассмотрим теперь ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и при-

меним предельный признак сравнения. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n(n+1)} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \neq 0 \neq \infty,$$

то рассматриваемый ряд расходится.

Таким образом, исходный ряд сходится условно;

2) данный ряд не является знакочередующимся, следовательно, признак Лейбница применить нельзя. Рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Этот ряд сходится, как ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 2 > 1$.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

2 Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 2^n}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

Данный ряд – знакочередующийся и сходящийся, поэтому величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит по модулю первого отброшенного члена (по следствию из признака Лейбница).

Нужное число членов n найдём путём подбора из неравенства $\frac{1}{n^2 2^n} < 10^{-3}$.

При $n = 6$ неравенство выполняется. Значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена.

Сумма ряда при этом будет

$$S \approx S_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} = 0,449.$$

39.2 Задания для самостоятельной работы

1 Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}; & 7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}; \\ 2) \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2-9}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n; & 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}; \\ 3) \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n+5}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8n}{7^n(2n-3)}; & 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2+1}. \end{array}$$

2 Сколько первых членов ряда достаточно взять, чтобы сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}.$$

Ответы: 1) $n = 10^6$; 2) $n = 10^3$; 3) $n = 20$.

39.3 Домашнее задание

1 Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2 n}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+5}}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{10}}{e^n}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7} \right)^n. \end{array}$$

2 Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0,3)^n}{(n-1)!}$, ограничившись его первыми тремя

членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений.

Ответ: $S = 0,2235$; $\varepsilon = 0,00135$.

40 Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость

40.1 Примеры решения задач

Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение

Данный ряд является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \ln x$. Такой ряд сходится, если $|q| < 1$:

$$|\ln x| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \ln x < 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-1} < x < e.$$

Таким образом, областью сходимости исследуемого ряда является интервал $D_s = (e^{-1}, e)$. Так как функции $\ln^n x$ ($n = 1, 2, \dots$) определены в области $D_x = (0, +\infty)$, то $D_s \subset D_x$.

40.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти область сходимости ряда ($x \in \mathbb{R}$). Исследовать ряд на абсолютную сходимость:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}; & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}; & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2 x}}; & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{n 2^n x^n} \right). \end{array}$$

2 Найти области сходимости и равномерной сходимости ряда ($x \in \mathbb{R}$):

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

40.3 Домашнее задание

Найти область сходимости ряда ($x \in \mathbb{R}$). Исследовать ряд на абсолютную сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+3)^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}.$$

Ответы: 1) $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, сходимость всюду абсолютная;
 2) $[0, +\infty) \cup \{k\pi \mid k = -1, -2, \dots\}$, сходимость всюду абсолютная;
 3) $[e^{-1}, e)$, абсолютная сходимость при $x \in (e^{-1}, e)$.

41 Степенные ряды. Ряды Тейлора

41.1 Примеры решения задач

1 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n}}$.

Решение

Найдём радиус сходимости степенного ряда:

$$a_n = \frac{1}{3^n \sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1} \sqrt{n+1}},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n \sqrt{n}} : \frac{1}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \sqrt{n+1}}{3^n \sqrt{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 3.$$

Следовательно, степенной ряд сходится в интервале $(-3; 3)$.

При $x = -3$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. По признаку Лейбница он сходится.

При $x = 3$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Данный ряд расходится, как ряд Дирихле при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Таким образом, область сходимости есть промежуток $[-3; 3)$.

2 Разложить функцию $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ по степеням разности $(x - 1)$.

Решение

Воспользуемся формулой Тейлора при $x_0 = 1$ и $y(1) = 2$:

$$y' = (x^4 - 3x^2 + 2x + 2)' = 4x^3 - 6x + 2, \quad y'(1) = 0;$$

$$y'' = (4x^3 - 6x + 2)' = 12x^2 - 6, \quad y''(1) = 6;$$

$$y''' = (12x^2 - 6)' = 24x, \quad y'''(1) = 24;$$

$$y^{(4)}(1) = 24; \quad y^{(5)}(1) = y^{(6)}(1) = \dots = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2x + 2 &= 2 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 = \\ &= 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4. \end{aligned}$$

3 Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

Решение

Так как $3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x \ln 3}$, то, заменяя в разложении в ряд Маклорена функции e^x переменную x на произведение $x \ln 3$, получим

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!} \cdot x + \frac{\ln^2 3}{2!} \cdot x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{\ln^n 3}{n!} \cdot x^n + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

41.2 Задания для самостоятельной работы

1 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n;$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^{n-1} 3^n};$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}.$

Ответы: 1) $-2 \leq x < 2$; 2) $-2 < x < 2$; 3) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; 4) $-6 \leq x < 2$;

5) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $-6 < x < 6$; 7) $-2 < x < 2$; 8) $3 < x < 5$; 9) $-\frac{\sqrt{3}}{5} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{5}.$

2 Разложить многочлен $f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ в ряд по степеням разности $(x+1)$.

3 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{x+1}$, используя ряд Маклорена.

4 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)$ и найти область сходимости полученного ряда:

- 1) $f(x) = e^{-x^2}$; 3) $f(x) = \sin^2 3x$; 5) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$;
 2) $f(x) = x \cos 2x$; 4) $f(x) = \ln(1 - 3x)$. 6) $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$.

5 Разложить функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции:

- 1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $x_0 = 1$.

Ответы: 1) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}$, $-3 < x < -1$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^{2n}$, $0 \leq x \leq 2$.

41.3 Домашнее задание

1 Найти область сходимости ряда:

- 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n-1} x^n}{5^n \sqrt{n^2 - 1}}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (x-1)^n}{3^n}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 24^{n+1}}$;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n 4^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Ответы: 1) $-\frac{5}{7} \leq x < \frac{5}{7}$; 2) $-2 < x < 2$; 3) $\frac{2}{5} < x < \frac{8}{5}$; 4) $-7 < x < -3$;

5) $1 \leq x < 5$; 6) $1 \leq x \leq 3$.

2 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

- 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0 = 2$; 3) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $x_0 = 1$.

3 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена:

- 1) $f(x) = \cos 5x$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$; 3) $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x^2$.

42 Тригонометрические ряды Фурье

42.1 Примеры решения задач

Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Решение

Так как функция является кусочно-монотонной и ограниченной, то она разлагается в ряд Фурье. Найдём коэффициенты ряда.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx \, dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin nx \, dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right).$$

Этот ряд сходится к заданной функции с $T = 2\pi$ при всех $x \neq (2n-1)\pi$.

В точках $x = (2n-1)\pi$ сумма ряда $S = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$.

42.2 Задания для самостоятельной работы

1 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$1) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x-1 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} \quad 3) f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$2) f(x) = (x-1)^2;$$

$$4) f(x) = 2 - 3x.$$

Ответы:

$$1) f(x) = \frac{\pi-2}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{\pi-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n};$$

$$2) f(x) = \frac{\pi^2 - 3\pi + 3}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\pi}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^2};$$

$$3) f(x) = \frac{3-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{2(\pi-3)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n};$$

$$4) f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

2 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $2l$:

$$1) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 3; \end{cases} \quad 2) f(x) = |x| \text{ на } (-1; 1).$$

Ответы: 1) $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{3};$

$$2) f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

42.3 Домашнее задание

1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$:

$$1) f(x) = \pi + x; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 4-2x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Ответы: 1) $f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx;$

$$2) f(x) = \frac{4-\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{2(4-\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}.$$

2 Разложить функцию $f(x) = 4x - 3$ в ряд Фурье на промежутке $(-5; 5)$.

Ответ: $f(x) = -3 + \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}.$

Список литературы

- 1 **Астровский, А. И.** Высшая математика: учебник: в 2 ч. / А. И. Астровский, М. П. Дымков. – Мн.: БГЭУ, 2024. – Ч. 2 – 414 с.
- 2 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 448 с.
- 3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Мн.: Выш. шк., 1985. – Ч. 3. – 208 с.
- 4 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа: учебник: в 2 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 400 с.
- 5 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.
- 6 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.
- 7 Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов: в 4 ч. / под ред. А. С. Поспелова. – М.: Юрайт, 2026. – Ч. 2. – 253 с.
- 8 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2023. – 479 с.