

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»
очной и заочной форм обучения*



Могилев 2026

УДК 539.3/6
ББК 30.12
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «25» мая 2026 г.,
протокол № 16

Составитель ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. С. Федосенко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория упругости» для студентов специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии». Содержат материал для проведения практических занятий.

Учебное издание

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать	. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л.	. Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений	5
2 Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	9
3 Определение механических характеристик материалов при центральной растяжении-сжатии.....	14
4 Расчеты на прочность при растяжении-сжатии прямого бруса.....	15
5 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе	19
6 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе: проверочный, проектировочный расчет и определение допускаемой нагрузки.....	20
7 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе	25
8 Расчеты на устойчивость.....	29
9 Динамическое действие нагрузок.....	32
10 Решение плоской задачи теории упругости с использованием функции напряжений.....	35
11 Изгиб пластин.....	39
12 Основные положения теории пластичности и ползучести	45
Список литературы.....	46

Введение

Цель преподавания курса «Теория упругости» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

Методические рекомендации содержат примеры решения задач по основным темам курса. Представлены задачи для самостоятельного решения с целью подготовки к занятиям, контрольным работам и зачету. Также приведены контрольные вопросы по теории курса.

1 Геометрические характеристики поперечных сечений

Пример 1 – Для сечения, изображенного на рисунке 1.1, определить осевые и центробежный моменты инерции относительно указанных осей.

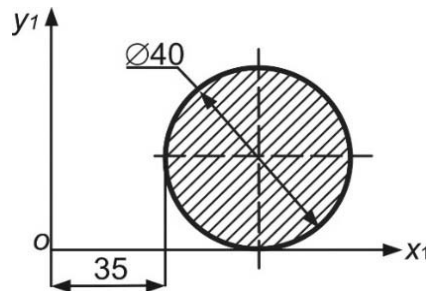


Рисунок 1.1

Решение

Заданное сечение имеет оси симметрии, которые являются собственными главными центральными осями [1–4]. На их пересечении находится центр тяжести – точка C (рисунок 1.2).

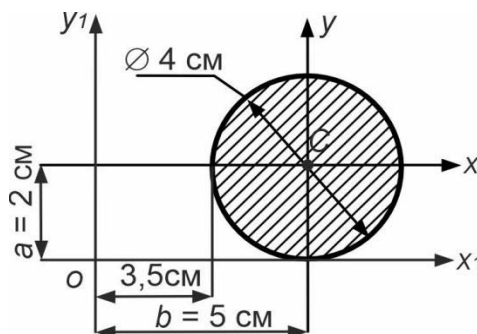


Рисунок 1.2

Определим геометрические характеристики сечения относительно собственных главных центральных осей.

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2.$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции для симметричного сечения [1–3]
 $I_{x_C y_C} = 0.$

Заданные оси x_1 и y_1 и главные центральные оси x_C и y_C параллельны (см. рисунок 1.2). Поэтому осевые и центробежный моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 определяем по формулам при параллельном переносе осей [1, 2]:

$$I_{x_C} = I_x + a^2 \cdot A = 12,56 + 2^2 \cdot 12,56 = 62,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = I_y + b^2 \cdot A = 12,56 + 5,5^2 \cdot 12,56 = 392,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_C y_C} = I_{xy} + a \cdot b \cdot A = 5,5 \cdot 2 \cdot 12,56 = 138,16 \text{ см}^4.$$

Пример 2 – Для сечения, изображенного на рисунке 1.3, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.

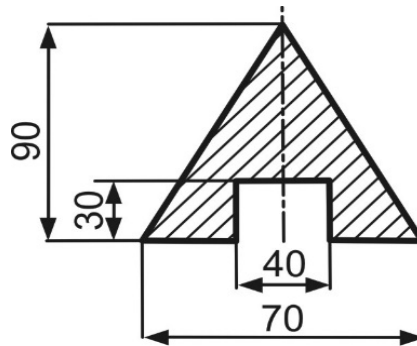


Рисунок 1.3

Решение

Вычерчиваем заданное сечение, в котором выделим простые фигуры: 1 – треугольник, 2 – прямоугольник. Через центры тяжести этих фигур проводим собственные главные центральные оси (рисунок 1.4).

Определяем геометрические характеристики выделенных фигур:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = 31,5 \text{ см}^2; \quad A_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Заданное сечение имеет ось симметрии, которая является главной центральной осью y_C .

Определяем положение центра сечения относительно произвольно выбранных начальных осей x_1 , y_C . Центр тяжести располагается на главной центральной оси y_C , следовательно,

$$x_C = 0;$$

$$y_C = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{31,5 \cdot 0 - 12 \cdot (-1,5)}{31,5 - 12} = 0,92 \text{ см},$$

где y_1, y_2 – координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение относительно начальных осей x_1, y_C .

Полученные координаты откладываем на начальных осях и отмечаем центр тяжести – точку C (рисунок 1.4). Через данную точку проводим вторую главную центральную ось x_C .

Определяем межосевые расстояния:

$$a_1 = 0,92 \text{ см}, \quad b_1 = 0; \quad a_2 = 2,42 \text{ см}, \quad b_2 = 0.$$

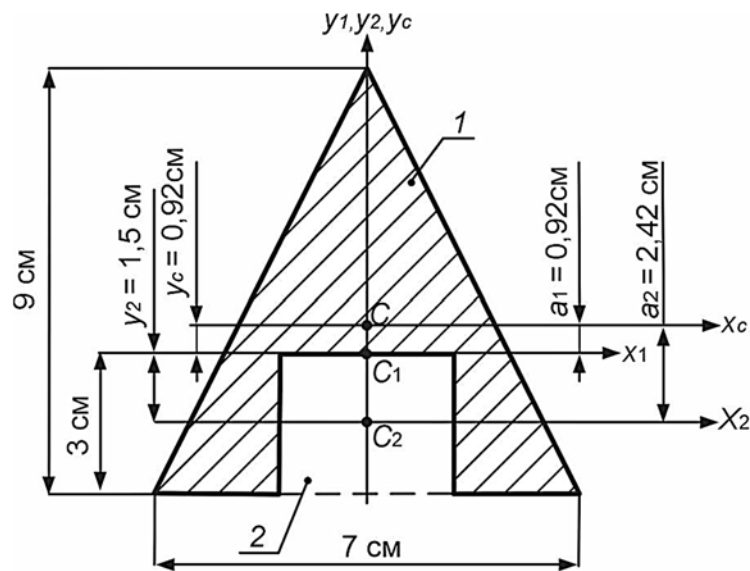


Рисунок 1.4

Для расчета главных центральных моментов инерции используем формулы при параллельном переносе осей [1–3]:

$$I_{x_C} = \sum_1^n (I_{x_i} + a_i^2 \cdot A_i) = (I_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1) - (I_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2) = \left(\frac{7 \cdot 9^3}{36} + 0,92^2 \cdot 31,5 \right) - \left(\frac{4 \cdot 3^3}{12} + 2,42^2 \cdot 12 \right) = 89,13 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum_1^n (I_{y_i} + b_i^2 \cdot A_i) = (I_{y_1} + b_1^2 \cdot A_1) - (I_{y_2} + b_2^2 \cdot A_2) = \frac{7^3 \cdot 9}{48} - \frac{4^3 \cdot 3}{12} = 48,31 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции $I_{x_C y_C} = 0$.

Главные центральные моменты инерции

$$I_{\max} = I_{x_C} = 89,13 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_{y_C} = 48,31 \text{ см}^4.$$

Ось x_C проходит через плоскость максимальной жесткости, а ось y_C – минимальной.

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Для сечений, изображенных на рисунке 1.5, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.

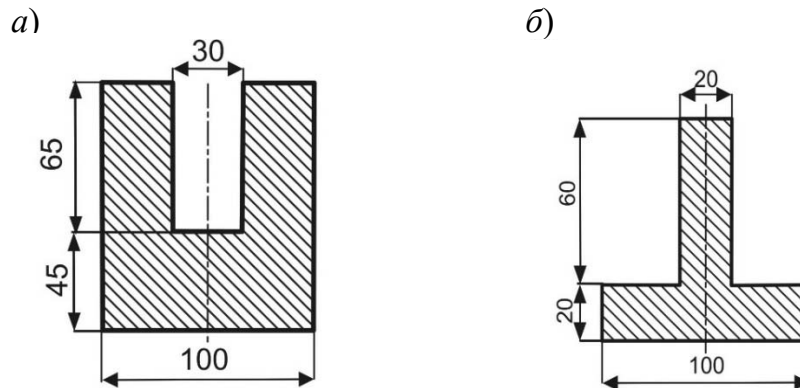


Рисунок 1.5

Контрольные вопросы

- 1 Запишите формулы для определения координат центра тяжести сечения.
- 2 Какие оси называют центральными осями сечения?
- 3 Относительно каких осей сечения статические моменты инерции равны нулю?
- 4 Для каких сечений центробежный момент инерции будет равен нулю?
- 5 Запишите выражения для определения осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.
- 6 Запишите выражения для определения центробежного момента инерции при параллельном переносе осей.
- 7 Как определить величину полярного момента инерции сечения, если известны величины осевых моментов инерции?
- 8 Какие оси называют главными центральными осями сечения?
- 9 В каких случаях можно установить положение главных центральных осей без соответствующих расчетов?
- 10 Изменится ли сумма осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
- 11 Запишите выражения для определения величин главных центральных моментов инерции сечения.
- 12 Как определить положение центра тяжести сложного сечения?
- 13 Запишите формулы для определения центральных моментов инерции сложного сечения.
- 14 Запишите формулы для определения главных центральных моментов инерции сложного сечения.

2 Построение эпюр внутренних силовых факторов

Пример 1 – Для бруса, изображенного на рисунке 2.1, построить эпюру продольных (нормальных) сил

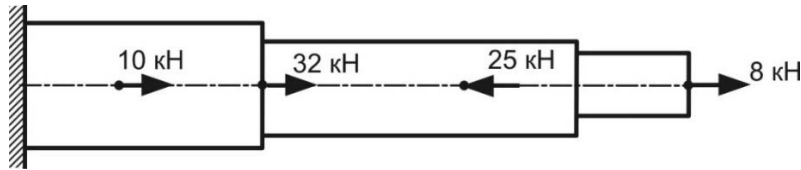


Рисунок 2.1

Решение

Определяем нормальные силы по участкам бруса (рисунок 2.2, а), используя метод сечений [1–3]:

- участок 1: $N_1 = 8$ кН;
- участок 2: $N_2 = 8 - 25 = -17$ кН;
- участок 3: $N_3 = 8 - 25 + 32 = 15$ кН;
- участок 4: $N_4 = 8 - 25 + 32 + 10 = 25$ кН.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (рисунок 2.2, б).

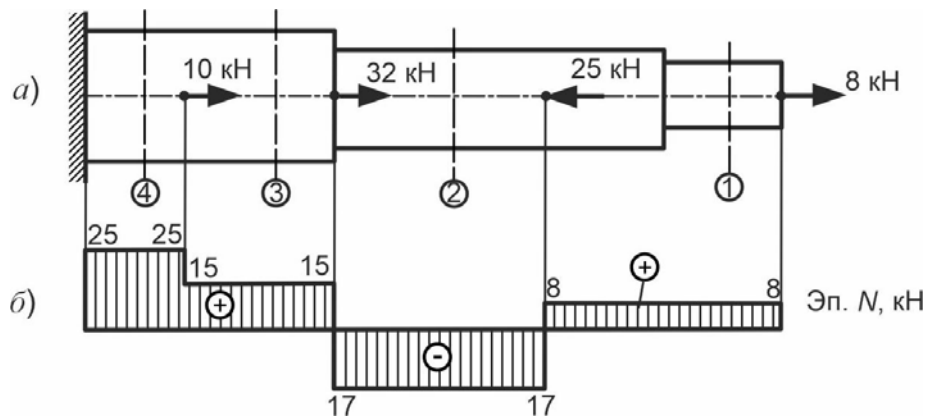


Рисунок 2.2

Пример 2 – Для бруса (вала), изображенного на рисунке 2.3, построить эпюру крутящих моментов.

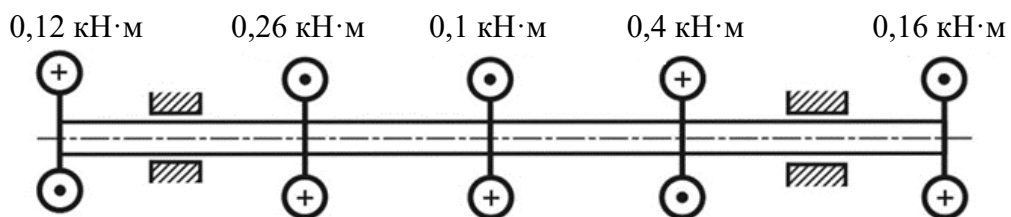


Рисунок 2.3

Решение

Разбиваем брус на участки (рисунок 2.4, а). Определяем крутящие моменты по участкам вала, используя метод сечений:

- участок 1: $M_{K_1} = 0,12 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
- участок 2: $M_{K_2} = 0,12 - 0,26 = -0,14 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
- участок 3: $M_{K_3} = 0,12 - 0,26 - 0,1 = -0,24 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
- участок 4: $M_{K_4} = 0,12 - 0,26 - 0,1 + 0,4 = 0,16 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рисунок 2.4, б).

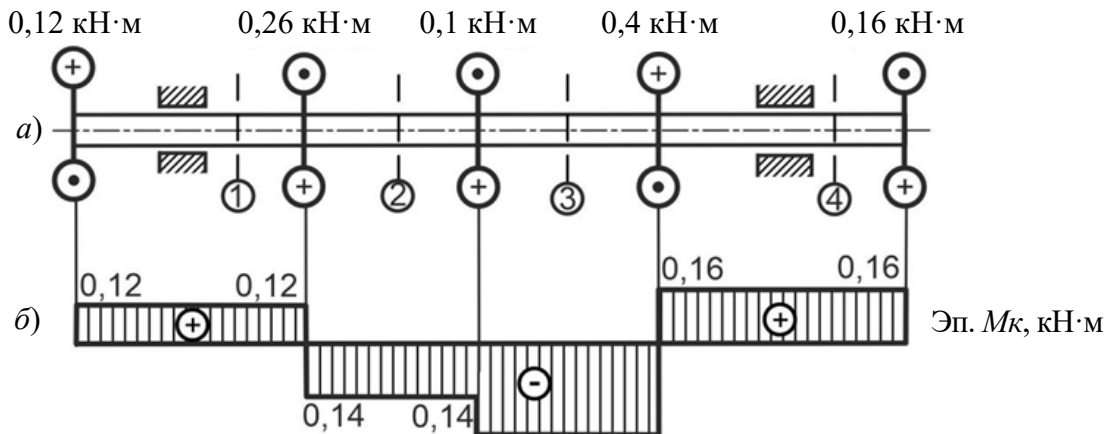


Рисунок 2.4

Пример 3 – Для бруса (балки), изображенного на рисунке 2.5, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

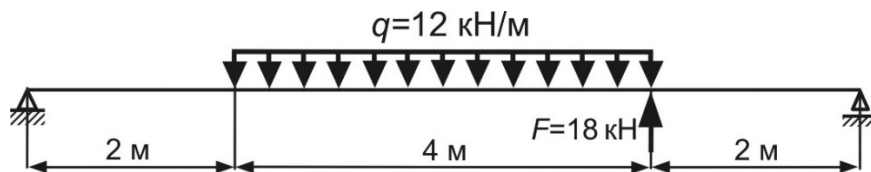


Рисунок 2.5

Решение

Определяем опорные реакции заданной балки (рисунок 2.6, а):

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 8 + 12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 2 = 0; \quad R_A = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 2}{8} = 19,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 8 - 12 \cdot 4 \cdot 4 + 18 \cdot 6 = 0; \quad R_B = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 6}{8} = 10,5 \text{ кН}.$$

Проверка правильности расчета реакций из условия

$$\sum Y = 0; 19,5 - 12 \cdot 4 + 18 + 10,5 = 0.$$

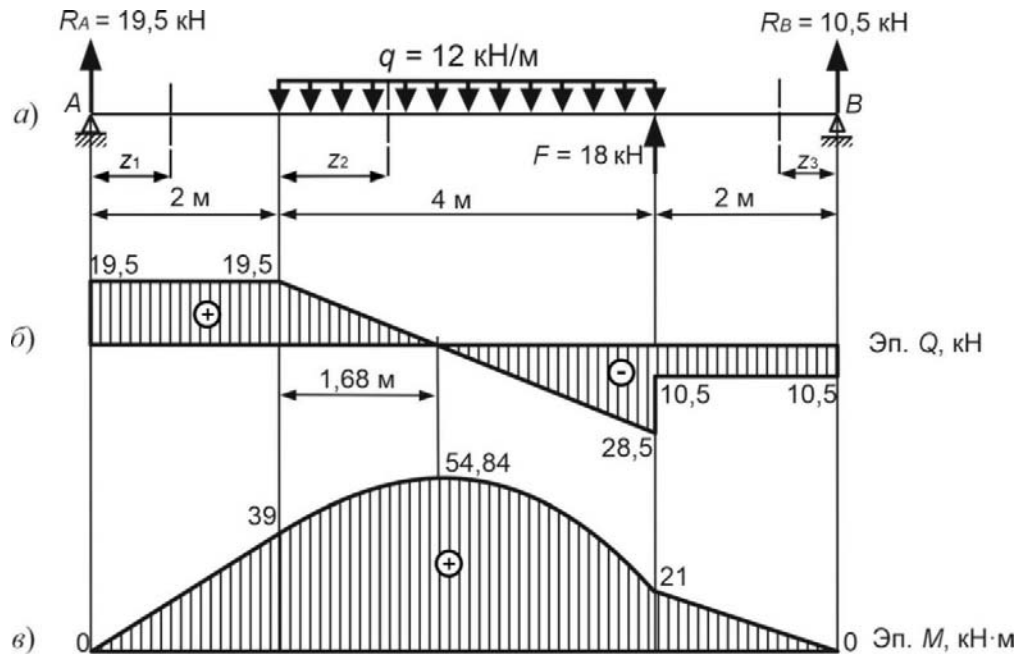


Рисунок 2.6

Разбиваем балку на три участка. Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M . Расчет значений поперечных сил и изгибающих моментов выполняем для характерных сечений балки.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q_1 = 19,5 \text{ кН}; M_1 = 19,5 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2 \text{ м}; M_1 = 19,5 \cdot 2 = 39 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$.

$$Q_2 = 19,5 - 12 \cdot z_2; M_2 = 19,5 \cdot (2 + z_2) - 12 \cdot \frac{z_2^2}{2};$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 19,5 \text{ кН}; M_2 = 19,5 \cdot 2 = 39 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 4 \text{ м}; Q_2 = 19,5 - 12 \cdot 4 = -28,5 \text{ кН}; M_2 = 19,5 \cdot (2 + 4) - 12 \cdot \frac{4^2}{2} = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Экстремум: } Q_2 = 19,5 - 12 \cdot z_2 = 0;$$

$$z_2 = \frac{19,5}{12} = 1,68 \text{ м}; M_2 = 54,84 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q_3 = -10,5 \text{ кН}; M_3 = 10,5 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_3 = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; M_3 = 10,5 \cdot 2 = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок 2.6, б, в).

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Для брусьев, изображенных на рисунке 2.7, построить эпюры продольных сил.

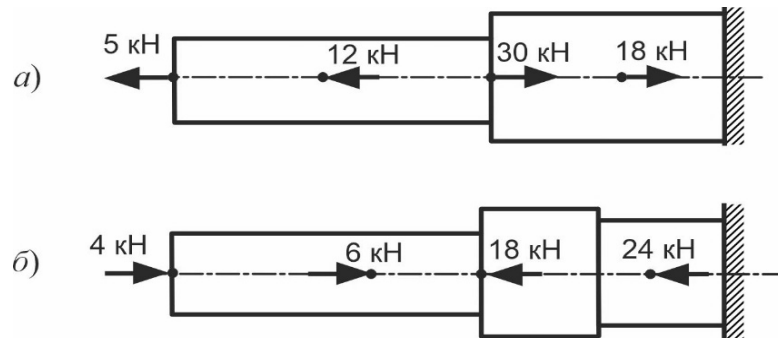


Рисунок 2.7

Пример 5 (для самостоятельного решения) – Для брусьев, изображенных на рисунке 2.8, построить эпюры крутящих моментов.

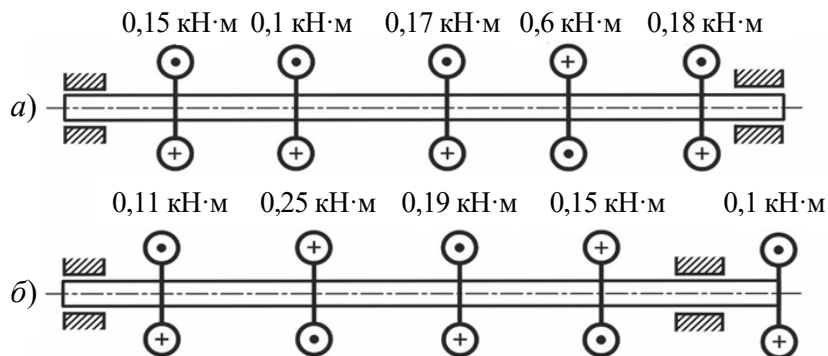


Рисунок 2.8

Пример 6 (для самостоятельного решения) – Для балок, изображенных на рисунке 2.9, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

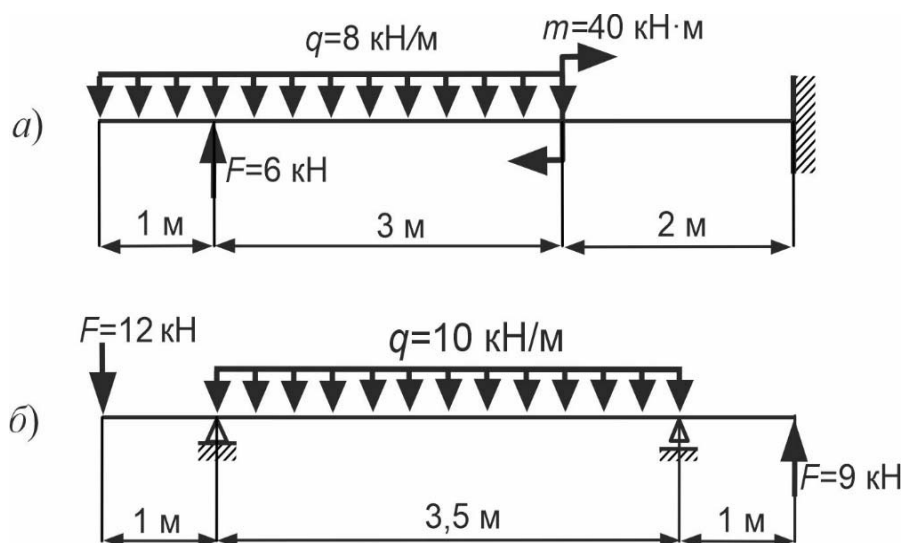


Рисунок 2.9

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется осевым растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при растяжении-сжатии?
- 3 Запишите правило знаков для определения продольной силы.
- 4 Как определить величину продольной силы в произвольном сечении бруса?
- 5 Сформулируйте основные правила контроля построения эпюр продольных сил.
- 6 Какой вид нагружения называется кручением?
- 7 Какие внутренние силовые факторы возникают при кручении?
- 8 Как определить величину крутящего момента в произвольном сечении бруса?
- 9 Сформулируйте основные правила контроля построения эпюр крутящих моментов.
- 10 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки при изгибе?
- 11 Какое правило знаков принято для поперечной силы?
- 12 Какое правило знаков принято для изгибающего момента?
- 13 Как вычисляется поперечная сила в произвольном сечении балки?
- 14 Как вычисляется изгибающий момент в произвольном сечении балки?
- 15 Как формулируется теорема Журавского?
- 16 Какая дифференциальная зависимость существует между поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?
- 17 Какая дифференциальная зависимость существует между изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки?

3 Определение механических характеристик материалов при центральном растяжении-сжатии

Контрольные вопросы

- 1 Что называется пределом пропорциональности, пределом текучести, пределом прочности материала и какова их размерность?
- 2 В каких координатах строится диаграмма растяжения образца?
- 3 Чем отличаются диаграммы растяжения пластичного и хрупкого материалов?
- 4 Что такое относительная деформация?
- 5 Что такое абсолютная деформация?
- 6 Как определить на диаграмме растяжения упругую и пластическую деформации в любой момент нагружения?
- 7 Что такое площадка текучести?
- 8 Что называется удельной работой деформации?
- 9 Какие деформации называются упругими и какие пластическими (остаточными)?
- 10 Для какого участка диаграммы растяжения справедлив закон Гука?
- 11 Какие величины характеризуют прочность материала?
- 12 Какие величины характеризуют пластичность материала?
- 13 Что такое наклеп?
- 14 В каких единицах измеряются напряжения, абсолютная и относительная деформации при растяжении материала?
- 15 Сформулируйте закон Гука.
- 16 Какие механические характеристики определяются при сжатии стали?
- 17 Какие механические характеристики определяются при сжатии чугуна?
- 18 Приведите примеры пластичных материалов.
- 19 Приведите примеры хрупких материалов.
- 20 Как изменяются продольные размеры при сжатии?
- 21 Как изменяются поперечные размеры при сжатии?
- 22 Чем отличаются диаграммы сжатия пластичных и хрупких материалов?
- 23 Чем объяснить разрушение хрупких материалов по наклонным площадкам?
- 24 Чему равен угол наклона площадок, по которым разрушается хрупкий материал при сжатии?
- 25 Чем объяснить, что при сжатии пластичных материалов не происходит разрушение образца?
- 26 Как изменяется форма образца из пластичного материала при испытании на сжатие?
- 27 Дайте определение пластичности и хрупкости.

4 Расчеты на прочность при растяжении-сжатии прямого бруса

Пример 1 – Определить площадь поперечного сечения чугунного стержня (рисунок 4.1, а). Для материала стержня $[\sigma]_{сж} = 50$ МПа, $[\sigma]_p = 20$ МПа.

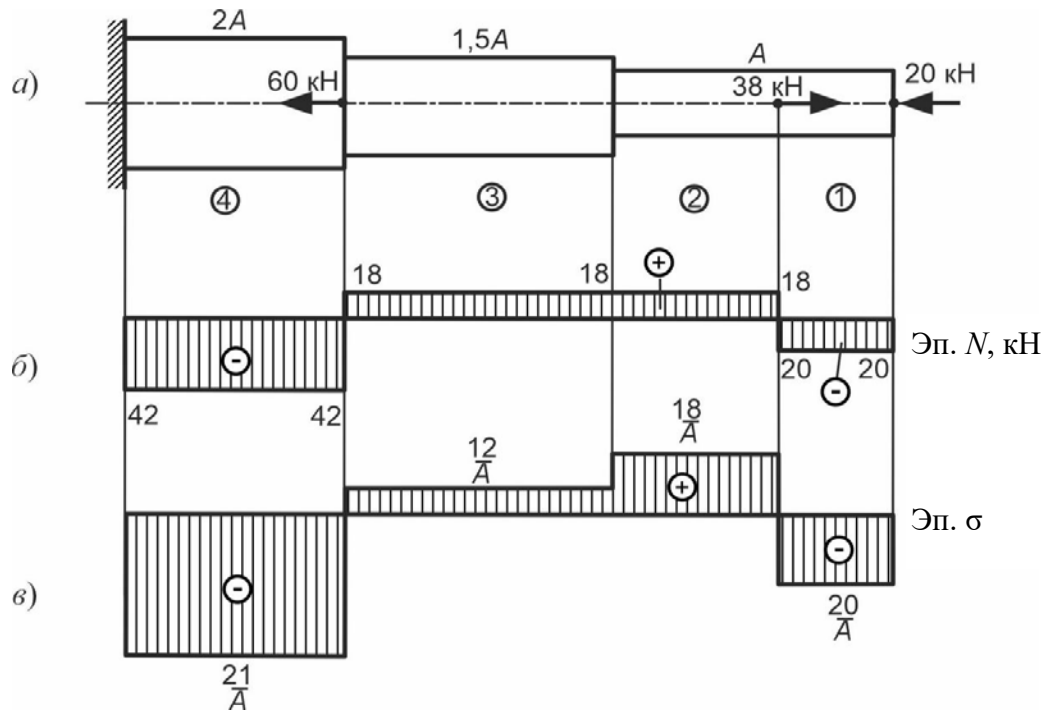


Рисунок 4.1

Решение

Разбиваем брус на участки (см. рисунок 4.1, а). Построим эпюру нормальных сил (рисунок 4.1, б).

Определяем напряжения на участках бруса:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{12}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{18}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{18}{1.5 \cdot A} = \frac{12}{A}; \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = -\frac{42}{2 \cdot A} = -\frac{21}{A}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рисунок 4.1, в).

Выполняем расчет площади поперечного сечения исходя из свойств материала заданного бруса. Отдельно рассматриваем растянутую и сжатую области эпюры нормальных напряжений [1–3].

Условие прочности на сжатие

$$|\sigma_{\max}|_{CЖ} \leq [\sigma]_{CЖ}; \quad |\sigma_{\max}|_{CЖ} = \left| \frac{21}{A} \right| \leq [\sigma]_{CЖ} = 280 \text{ МПа.}$$

Откуда площадь поперечного сечения

$$A_{CЖ} \geq \frac{21 \cdot 10^3}{280 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0,075 \text{ см}^2.$$

Условие прочности на растяжение

$$|\sigma_{\max}|_P = \left| \frac{18}{A} \right| \leq [\sigma]_P = 50 \text{ МПа.}$$

Откуда площадь поперечного сечения

$$A_P \geq \frac{18 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,6 \text{ см}^2.$$

Примем $A = 3,6 \text{ см}^2$.

Пример 2 – Проверить прочность стального стержня, изображенного на рисунке 4.2. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Построить эпюру перемещений. Определить полное удлинение (укорочение) стержня.

Решение

Разбиваем брус на участки (см. рисунок 4.2, а). Построим эпюру нормальных сил (см. рисунок 4.2, б).

Определяем напряжения на участках бруса. По полученным значениям построим эпюру нормальных напряжений (см. рисунок 4.2, в).

Определяем абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса, используя закон Гука [1–3]. Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = -\frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,32 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{29 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,87 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} = -\frac{26 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = -5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,52 \text{ мм}.$$

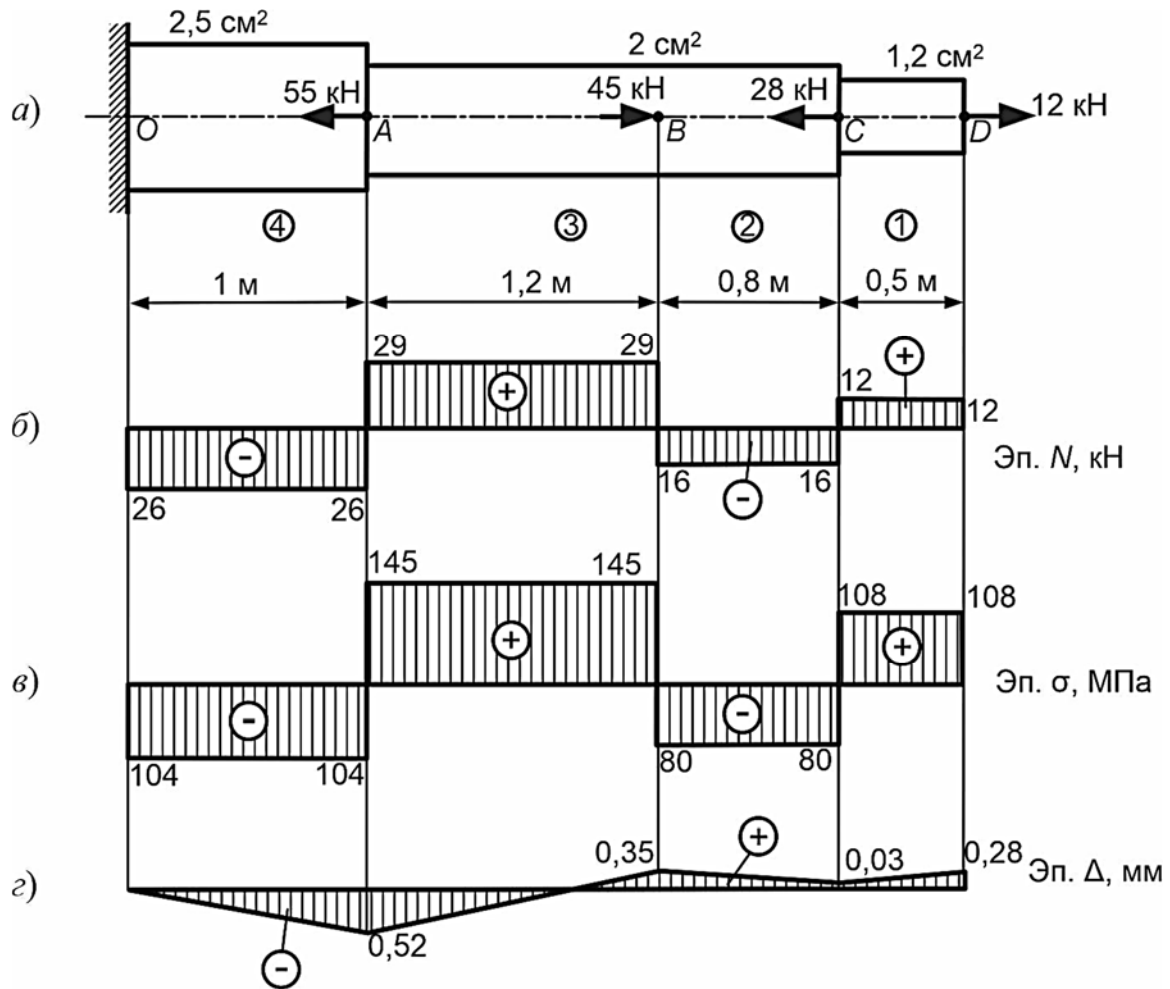


Рисунок 4.2

Определяем перемещения характерных сечений бруса [1–3]:

$$\Delta_O = 0;$$

$$\Delta_A = \Delta l_4 = -0,52 \text{ мм};$$

$$\Delta_B = \Delta l_4 + \Delta l_3 = \Delta_A + \Delta l_3 = -0,52 + 0,87 = 0,35 \text{ мм};$$

$$\Delta_C = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = \Delta_B + \Delta l_2 = 0,35 - 0,32 = 0,03 \text{ мм};$$

$$\Delta_D = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta_C + \Delta l_1 = 0,03 + 0,25 = 0,28 \text{ мм}.$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений (см. рисунок 4.2, г).

Из эпюры перемещений определяем величину полного удлинения стержня:

$$\Delta l = \Delta_D = 0,28 \text{ мм}.$$

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить допускаемую нагрузку на стержень, изображенный на рисунке 4.3. Допускаемые напряжения $[\sigma]_p = 28 \text{ МПа}$; $[\sigma]_{сж} = 170 \text{ МПа}$.

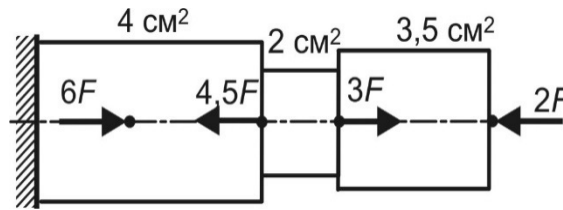


Рисунок 4.3

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений для стального стержня (рисунок 4.4).

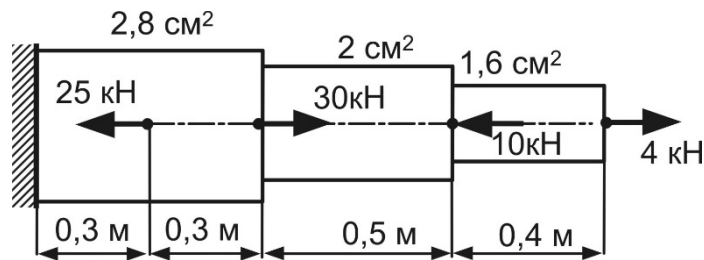


Рисунок 4.4

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется осевым растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при растяжении-сжатии?
- 3 Запишите правило знаков для определения продольной силы.
- 4 Как определить величину продольной силы в произвольном сечении бруса?
- 5 Запишите формулу для расчета нормальных напряжений.
- 6 Запишите условие прочности при осевом растяжении-сжатии.
- 7 Перечислите задачи, решаемые из условия прочности.
- 8 Дайте определение относительной и абсолютной деформаций.
- 9 Запишите выражение для определения жесткости при растяжении (сжатии).
- 10 Что такое модуль продольной упругости?

5 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид деформаций называется изгибом?
- 2 В каком случае имеет место прямой изгиб?
- 3 Какие внутренние силовые факторы возникают при чистом изгибе?
- 4 Какие внутренние силовые факторы возникают при поперечном изгибе?
- 5 Что такое нейтральная ось?
- 6 Где проходит нейтральный слой в балке и какое положение занимает нейтральная линия в поперечном сечении?
- 7 Какие напряжения возникают при чистом изгибе?
- 8 Какие напряжения возникают при поперечном изгибе?
- 9 Какая формула используется для определения нормальных напряжений при изгибе?
- 10 Какие геометрические характеристики используют при определении нормальных напряжений при изгибе?
- 11 В каких точках по высоте поперечного сечения возникают наибольшие нормальные напряжения?
- 12 По какому закону изменяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения?
- 13 Как определяют знак нормальных напряжений при изгибе?
- 14 Как определить на балке зону сжатия и зону растяжения?
- 15 Запишите условие прочности по нормальным напряжениям.
- 16 Как выбирается опасное сечение для проверки прочности по нормальным напряжениям?
- 17 Какая формула используется для определения касательных напряжений при изгибе?
- 18 Какие геометрические характеристики используют при определении касательных напряжений при изгибе?
- 19 В каких точках по высоте поперечного сечения возникают наибольшие касательные напряжения?
- 20 По какому закону изменяются касательные напряжения по высоте поперечного сечения?
- 21 Как определяют знак касательных напряжений при изгибе?
- 22 Запишите условие прочности по касательным напряжениям.
- 23 Как выбирается опасное сечение для проверки прочности по касательным напряжениям?

6 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе: проверочный, проектировочный расчет и определение допускаемой нагрузки

Пример 1 – Проверить прочность балки, изображенной на рисунке 6.1, а. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (см. рисунок 6.1, а).

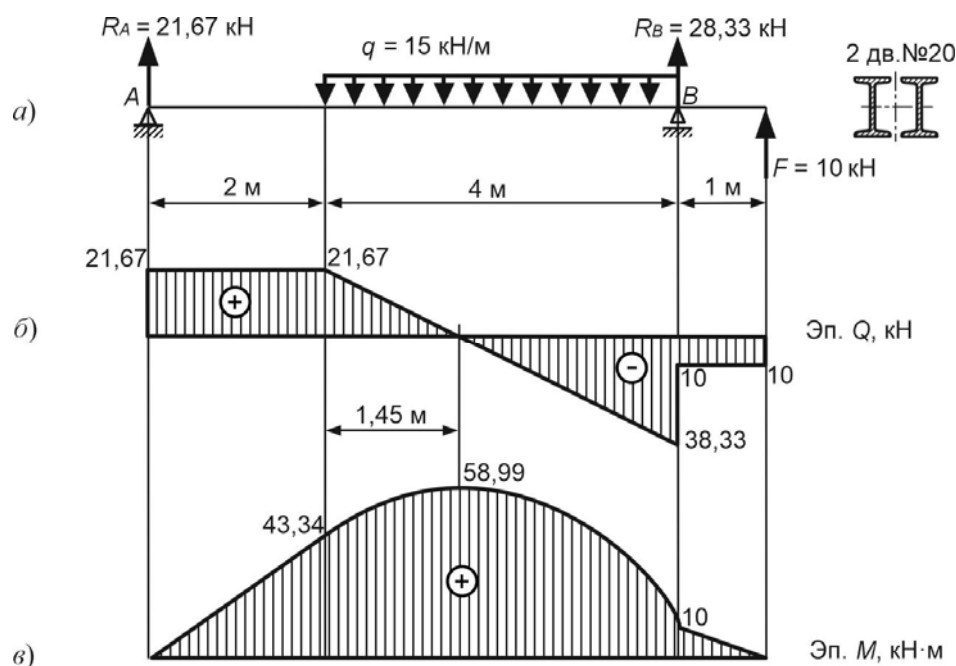


Рисунок 6.1

Строим эпюры поперечных сил Q (рисунок 6.1, б) и изгибающих моментов M (рисунок 6.1, в).

Условие прочности при изгибе [1–4]

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 58,99$ кН·м (см. рисунок 6.1, в).

Для заданного двутавра из таблиц ГОСТ 8239–89 выписываем значение осевого момента сопротивления: $W_X^{\text{Дт}} = 184$ см³. Осевой момент сопротивления сечения, состоящего из двух двутавров,

$$W_X = 2 \cdot W_X^{\text{Дт}} = 2 \cdot 184 = 368 \text{ см}^3.$$

Тогда условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{58,98 \cdot 10^3}{368 \cdot 10^{-6}} = 0,1603 \cdot 10^9 \text{ Па} = 160,3 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Процент перенапряжения [3]

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% \leq 5 \%, \quad \delta = \frac{160,3 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0,13 \% < 5 \%.$$

Данное перенапряжение не является опасным. Прочность балки обеспечена.

Пример 2 – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 6.2, а. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

Строим эпюры поперечных сил Q (рисунок 6.2, б) и изгибающих моментов M (рисунок 6.2, в).

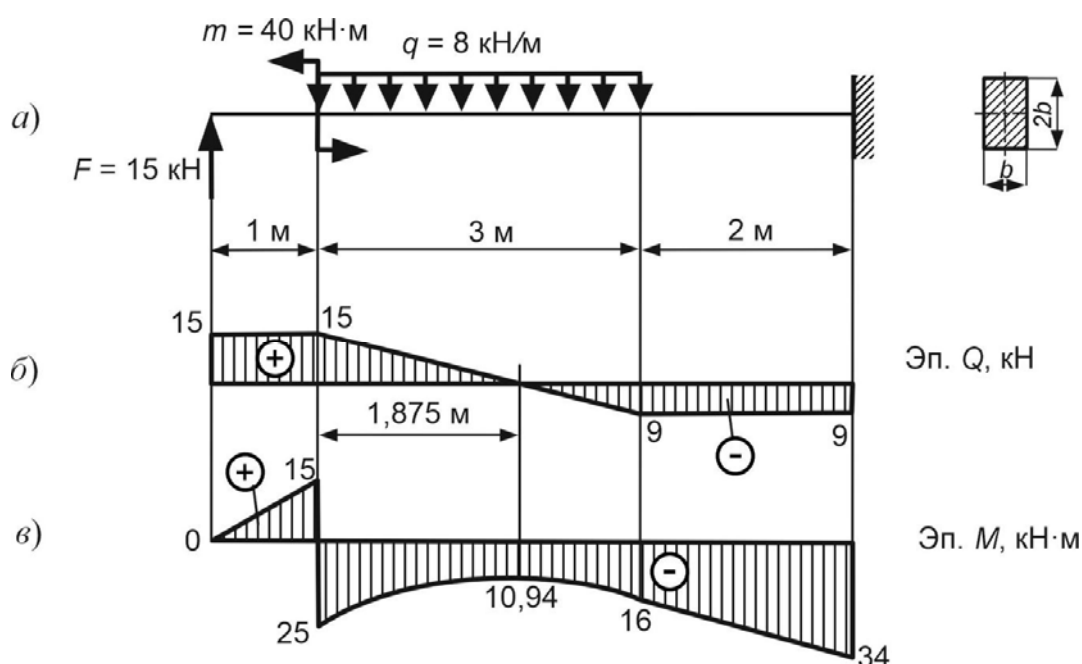


Рисунок 6.2

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $|M_{\max}| = 34 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (см. рисунок 6.2, в).

Определим расчетный момент сопротивления заданного сечения из условия прочности при изгибе:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{34 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,2125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

С другой стороны

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3 = 0,2125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Тогда ширина сечения составит

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,2125 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,068 \text{ м} = 68 \text{ мм}.$$

Высота сечения

$$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 68 = 136 \text{ мм}.$$

Пример 3 – Определить допускаемую нагрузку на балку, представленную на рисунке 6.3. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

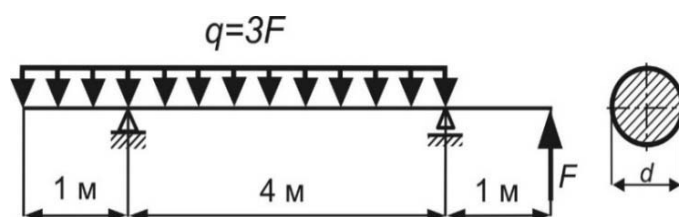


Рисунок 6.3

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (рисунок 6.4):

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 3 - F \cdot 4 - 3F \cdot 4 \cdot 1 = 0; R_B = 5,33F;$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 3 + 3F \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0; R_A = 7,67F.$$

Проверка правильности расчета реакций из условия

$$\sum Y = 0; -3F \cdot 4 + 7,67F + 5,33F - F = 0.$$

Разбиваем балку на три участка, как показано на рисунке 6.4.

Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M .

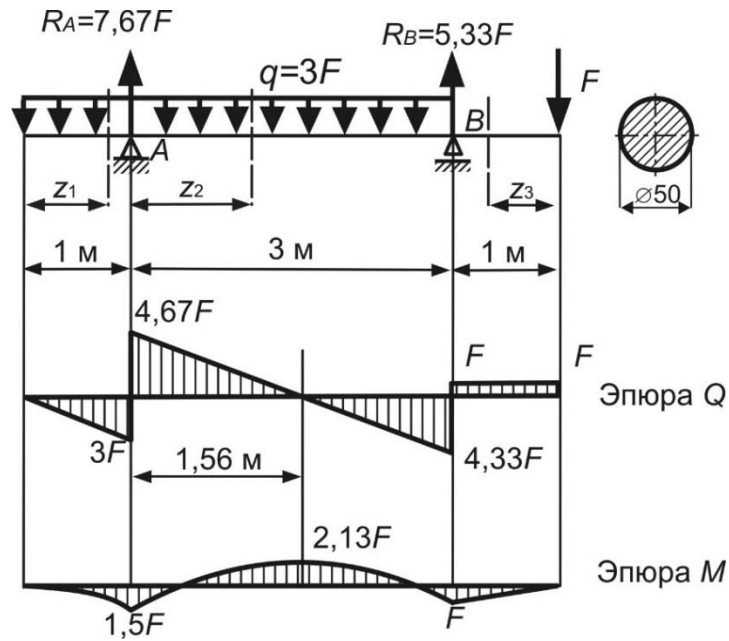


Рисунок 6.4

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$.

$$Q_1 = -3F \text{ кН}; M_1 = -3F \cdot \frac{z_1^2}{2};$$

$$z_1 = 0; Q_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 1 \text{ м}; Q_1 = -3F; M_1 = -1,5F.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 3 \text{ м}$.

$$Q_2 = 7,67 - 3F \cdot (1 + z_2); M_2 = 7,67 \cdot z_2 - 3F \cdot \frac{(1 + z_2)^2}{2};$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 4,67F; M_2 = -1,5F \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 3 \text{ м}; Q_2 = F \text{ кН}; M_2 = -F \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремум: $Q_2 = 7,67 - 3F \cdot (1 + z_2) = 0; z_2 = 1,56 \text{ м}; M_2 = 2,13F.$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$.

$$Q_3 = F \text{ кН}; M_3 = F \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_3 = 0; z_3 = 1 \text{ м}; M_3 = -F \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 2,13F$ (см. рисунок 6.4).

Осей момент сопротивления круглого поперечного сечения

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{6} = 12,26 \text{ см}^3.$$

Условие прочности в данном случае

$$\sigma_{\max} = \frac{2,13F}{12,56 \cdot 10^{-6}} \leq [\sigma] = 160 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Допускаемая нагрузка из условия прочности при изгибе

$$[F] \leq \frac{12,56 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6}{2,13} = 943,5 \text{ Н.}$$

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность балки (рисунок 6.5). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

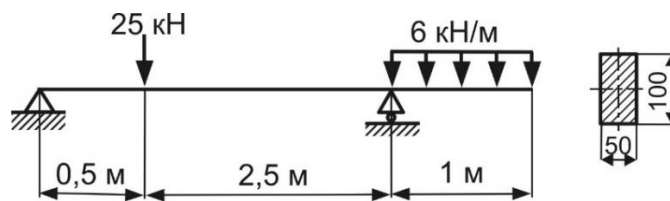


Рисунок 6.5

Пример 5 (для самостоятельного решения) – Определить диаметр поперечного сечения балки (рисунок 6.6) при $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

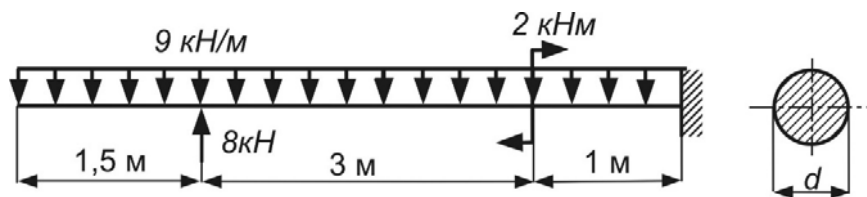


Рисунок 6.6

Контрольные вопросы

- 1 Запишите условие прочности по нормальным напряжениям.
- 2 Как выбирается опасное сечение для проверки прочности по нормальным напряжениям?
- 3 Сформулируйте задачи, решаемые с использованием условия прочности по нормальным напряжениям.

7 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе

Пример 1 – Для консольной балки постоянной жесткости (рисунок 7.1) определить прогиб в сечении C при помощи интеграла Мора.

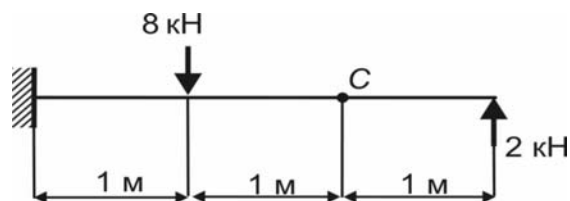


Рисунок 7.1

Решение

Покажем грузовое (действительное) состояние балки, вызванное заданными нагрузками (рисунок 7.2, а).

Покажем единичное (фиктивное) состояние балки [1–3], вызванное действием единичной нагрузки (рисунок 7.2, б). В этом состоянии балка освобождается от заданных нагрузок, но в сечении C нагружена единичной силой $\bar{F}=1$. Разбиваем балки на три участка.

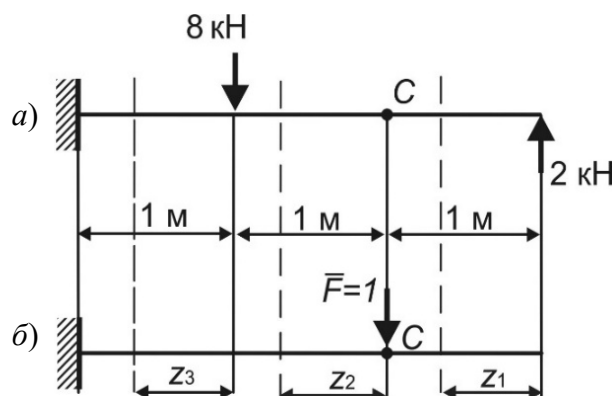


Рисунок 7.2

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от заданных нагрузок

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 1$ м.

$$M_F = 2 \cdot z_1.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 1$ м.

$$M_F = 2 \cdot (1 + z_2) = 2 + 2 \cdot z_2.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 1$ м.

$$M_F = 2 \cdot (2 + z_3) - 8 \cdot z_3 = 4 - 6 \cdot z_3.$$

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 1$ м.

$$\bar{M} = 0.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 1$ м.

$$\overline{M} = -1 \cdot z_2.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 1$ м.

$$\overline{M} = -1 \cdot (1 + z_3) = -1 - z_3.$$

Запишем интеграл Мора для определения прогиба в сечении C [1–3]:

$$\Delta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \overline{M}_i}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left(\int_0^1 (2 + 2 \cdot z_2) \cdot (-1 \cdot z_2) dz + \int_0^1 (4 - 6 \cdot z_3) \cdot (-1 - z_3) dz \right) = -\frac{8}{3EI}.$$

Пример 2 – Для консольной балки постоянной жесткости (рисунок 7.3, а) определить прогиб в сечении C способом Верещагина.

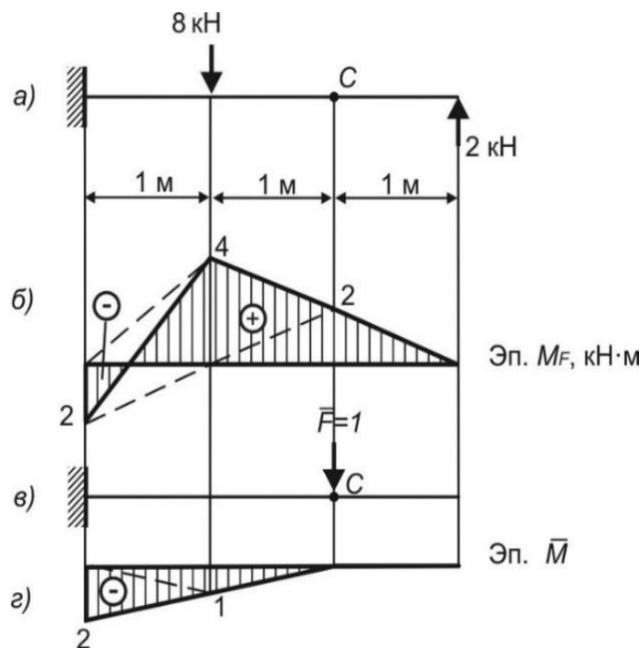


Рисунок 7.3

Решение

Рассмотрим грузовое состояние системы (см. рисунок 7.3, а). От заданных нагрузок построим грузовую эпюру M_F (рисунок 7.3, б).

Рассмотрим единичное состояние системы (рисунок 7.3, в). От единичной силы, приложенной в сечении C построим эпюру $\overline{M}$ (см. рисунок 7.3, в).

Определим прогиб в сечении C , перемножая единичную и грузовую эпюры [1–3]:

$$\Delta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot y_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[\left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) \right] = -\frac{8}{3EI}.$$

Пример 3 – Для заданной стальной балки (рисунок 7.4, а) определить угол поворота сечения *C* способом Верещагина.

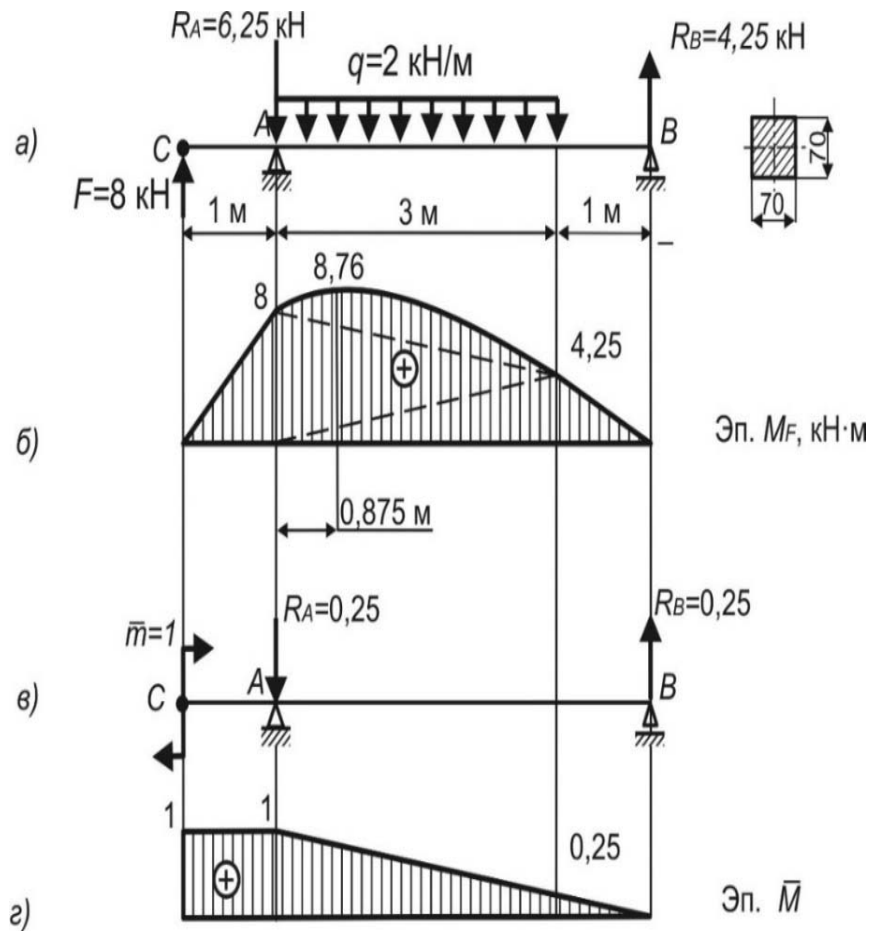


Рисунок 7.4

Решение

Рассмотрим грузовое состояние балки (см. рисунок 7.4, а). Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (рисунок 7.4, б).

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 7.4, в). От момента $\bar{m} = 1$, приложенного в сечении *C*, найдем опорные реакции и построим единичную эпюру $\bar{M}$ (рисунок 7.4, г).

Определим прогиб сечения C перемножением единичной и грузовой эпюры:

$$\Theta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \overline{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{6 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,25) \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right] = \frac{19,354}{E \cdot I_X}.$$

Осейвой момент инерции заданного квадратного сечения

$$I_x = \frac{b^4}{12} = \frac{7^4}{12} = 200,08 \text{ см}^4.$$

Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа или $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Окончательно

$$\Theta_C = \frac{19,354 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,08 \cdot 10^{-8}} = 0,048 \text{ рад.}$$

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Определить прогиб в сечении C стальной балки (рисунок 7.5).

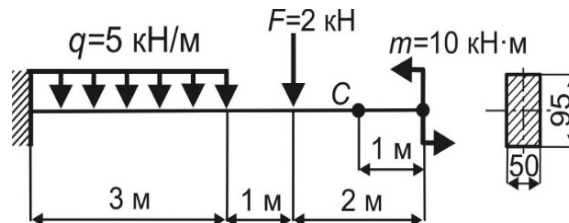


Рисунок 7.5

Пример 5 (для самостоятельного решения) – Определить угол поворота сечения A стальной балки при помощи интеграла Мора (рисунок 7.6).

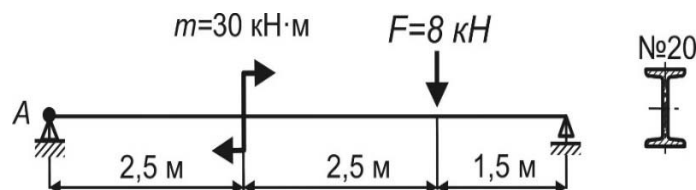


Рисунок 7.6

Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения потенциальной энергии деформаций при изгибе.
- 2 Сформулируйте теоремы о взаимности работ и перемещений.
- 3 Что обозначают коэффициенты в обозначении линейных и угловых перемещений?
- 4 Запишите интеграл Мора для определения перемещений при изгибе.
- 5 Что такое грузовое (действительное) состояние системы?
- 6 Что такое единичное (фиктивное) состояние системы?
- 7 Опишите порядок определения перемещений по методу Мора.
- 8 Запишите выражение для определения перемещений способом Верещагина.
- 9 Какие нагрузки рассматриваются при построении грузовой эпюры?
- 10 Какие нагрузки рассматриваются при построении единичной эпюры?
- 11 Как перемножать эпюры по способу Верещагина?
- 12 Какие ограничения накладываются на применение способа Верещагина?
- 13 Опишите порядок определения перемещений по способу Верещагина.

8 Расчеты на устойчивость

Пример 1 – Для стального стержня (рисунок 8.1) требуется: определить допускаемое значение сжимающей нагрузки $[F]$, критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: материал стержня – сталь 3, модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа, $\mu = 1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

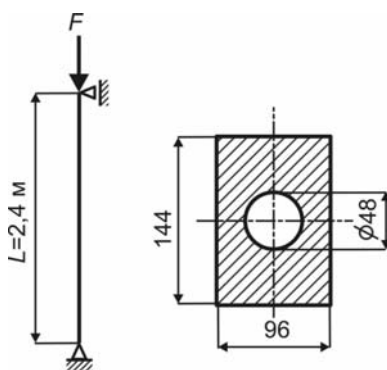


Рисунок 8.1

Решение

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения, которое состоит из двух простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – круг (рисунок 8.2).

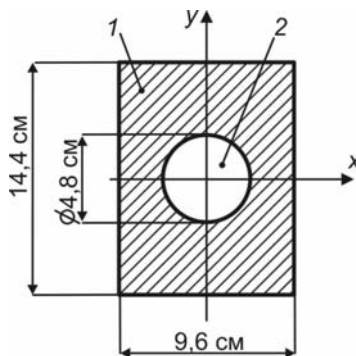


Рисунок 8.2

Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = 9,6 \cdot 14,4 - \frac{3,14 \cdot 4,8^2}{4} = 120,14 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [1-3]:

$$I_X = I_{X_1} - I_{X_2} = \frac{9,6 \cdot 14,4^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 2362,73 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = I_{Y_1} - I_{Y_2} = \frac{14,4 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 1035,63 \text{ см}^4.$$

Минимальный момент инерции $I_{\min} = I_X = 1035,63 \text{ см}^4$.

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1035,63}{120,14}} = 2,93 \text{ см}.$$

Определяем максимальную гибкость стержня относительно материальной оси x :

$$\lambda_x = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,4}{2,93 \cdot 10^{-2}} = 81,9.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба [1-3]:

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81,9 - 80) = 0,74.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,74 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 14224,6 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ($\lambda_{пред} = 100$), критическую силу определяем по формуле Ясинского [1–3]:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 81,9) \cdot 10^2 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} = 26026,4 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{26026,4 \cdot 10^2}{14224,6 \cdot 10^2} = 1,83.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить коэффициент запаса устойчивости стержня, изображенного на рисунке 8.3.

Исходные данные: материал – сталь 5, $d = 60$ мм, $L = 3$ м, $[\sigma] = 180$ МПа.

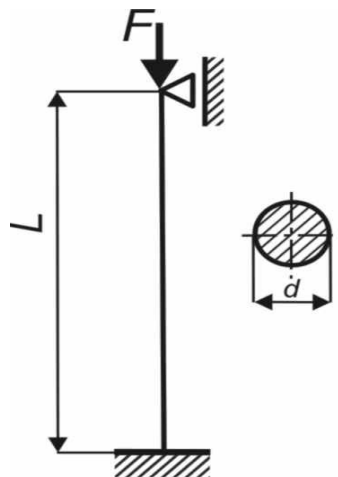


Рисунок 8.3

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение устойчивости.
- 2 Назовите формы равновесия.
- 3 Что является признаком потери устойчивости?
- 4 Дайте определение критической силы.
- 5 Запишите выражение для определения гибкости стержня.
- 6 Как определить коэффициент приведения длины стержня?
- 7 Запишите формулу Эйлера. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 8 Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 9 Запишите условие устойчивости.
- 10 Как определяется коэффициент продольного изгиба?
- 11 Запишите выражение для определения коэффициента запаса устойчивости.

9 Динамическое действие нагрузок

Пример 1 – На двутавровую стальную балку с высоты h падает груз G (рисунок 9.1, а). Проверить прочность, если $[\sigma] = 160$ МПа, и определить возникающие перемещения.

Исходные данные: двутавр № 20 ($W_x = 184$ см³, $I_x = 1840$ см⁴), модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа.

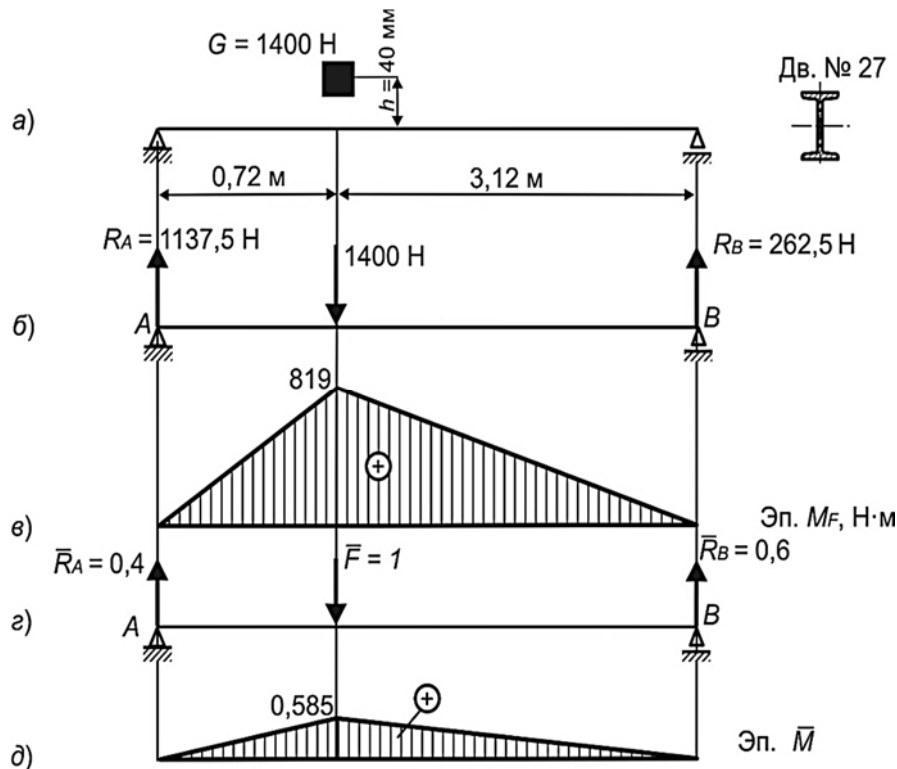


Рисунок 9.1

Решение

Ударная нагрузка вызывает изгиб заданной балки (см. рисунок 9.1, а).

Прикладываем к балке груз G статически (рисунок 9.1, б). Определяем реакции опор от статической нагрузки. Строим эпюру изгибающих моментов M_F от статической нагрузки (рисунок 9.1, в). По этой эпюре определяем величину максимального изгибающего момента $M_{\max} = 819 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Максимальные статические напряжения

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{819}{184 \cdot 10^{-6}} = 4,45 \text{ МПа.}$$

Прикладываем к балке единичную силу $\bar{F} = 1$. Определяем реакции опор от единичной силы (рисунок 9.1, г). Строим единичную эпюру $\bar{M}$ (см. рисунок 9.1, в).

По способу Верещагина определяем перемещение в точке удара:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{M_F \cdot \bar{M}}{EI_X} = \left(\frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 0,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 + \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 \right) = \\ &= \frac{613,27}{EI_X} = \frac{613,27}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,000166 \text{ м.} \end{aligned}$$

Динамический коэффициент [1–4]

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,000166}} = 24.$$

Максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{\max}^D = k_D \cdot \sigma_{\max}^{cm} = 24 \cdot 4,45 = 106,8 \text{ МПа.}$$

Условие прочности

$$\sigma_{\max}^D = 106,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполнено. Прочность обеспечена.

Перемещение $\Delta_D = k_D \cdot \Delta_{cm} = 24 \cdot 0,000166 = 0,004 \text{ м}$.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность и определить возникающие перемещения для заданной балки (рисунок 9.2).

Исходные данные: $v = 1,2 \text{ м/с}$, $b = 85 \text{ мм}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

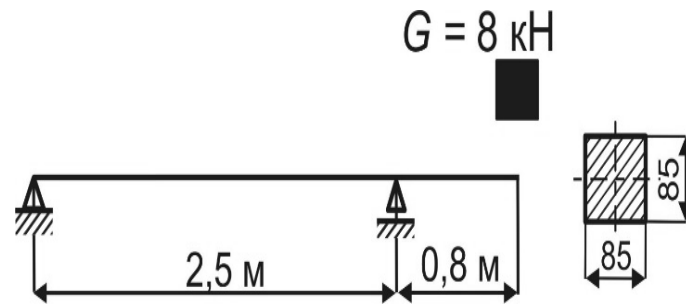


Рисунок 9.2

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить максимальные напряжения и перемещения, возникающие в поперечных сечениях бруса, изображенного на рисунке 9.3.

Исходные данные: $G = 9$ кН, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 1,5$ м, $h = 14$ мм, $A_1 = 1$ см², $A_2 = 2$ см², $A_3 = 1,5$ см², материал – сталь 3.

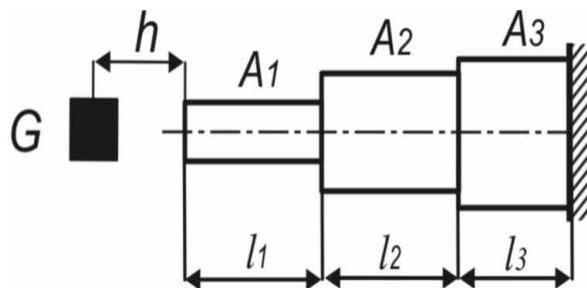


Рисунок 9.3

Контрольные вопросы

- 1 Какая нагрузка называется динамической?
- 2 Что такое динамический коэффициент?
- 3 Запишите формулу для определения напряжений при динамическом действии нагрузок.
- 4 Запишите выражение для определения динамического коэффициента в случае, когда груз поднимается (опускается) с постоянным ускорением.
- 5 Что такое удар?
- 6 Какие допущения приняты при расчете на ударное нагружение?
- 7 Запишите формулу для определения динамического коэффициента при ударе.
- 8 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает изгиб бруса.
- 9 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает растяжение (сжатие) бруса.

10 Решение плоской задачи теории упругости с использованием функции напряжений

Пример 1 – Для балки прямоугольного сечения длиной $l = 4$ м, высотой $h = 1$ м и толщиной, равной единице (рисунок 10.1), задана функция напряжений $\varphi = 3x^3 + x^2y$ и коэффициенты $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$.

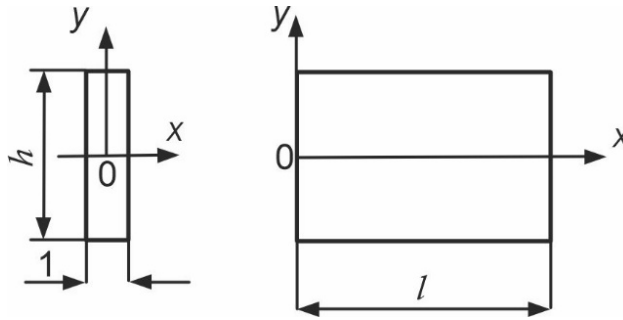


Рисунок 10.1

Требуется:

- проверить, удовлетворяет ли функция φ бигармоническому уравнению плоской задачи;
- найти выражения напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в общем виде (как функции x и y);
- определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырём граням балки, и построить их эпюры на контуре балки;
- для точки с координатами $x = \alpha \cdot l$ и $y = \beta \cdot h$ найти величины напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в численном виде и показать их на гранях выделенного для этой точки элементарного параллелепипеда;
- найти в этой точке главные напряжения (σ_1 , σ_2 , σ_3), направление главных площадок и показать их на эскизе;
- найти максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений.

Объёмными силами следует пренебречь.

Решение

Проверим, удовлетворяет ли функция напряжений бигармоническому уравнению плоской задачи.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 9x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 18x + 2y; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 18; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 9x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 18x + 2y; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 2; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$$

Выражения для определения нормальных и касательных напряжений следующие:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 18x + 2y; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2x.$$

Внешние силы, приложенные по сторонам балки,

$$\begin{cases} X_p = \sigma_x l + \tau_{xy} m = (-2x)m; \\ Y_p = \tau_{xy} l + \sigma_x m = (-2x)l + (18x + 2y)m. \end{cases}$$

Сторона AB : $l = 0, m = 1; 0 \leq x \leq 4$ м; $y = 0,5$ м.

$$X_p = -2x; \quad Y_p = 18x + 2y.$$

$$x = 0; \quad X_p = 0; \quad Y_p = 0.$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad X_p = -8 \text{ МПа}; \quad Y_p = 73 \text{ МПа}.$$

Сторона BC : $l = 1, m = 0; x = l = 4$ м; $-0,5 \text{ м} \leq y \leq 0,5 \text{ м}$.

$$X_p = -2x = 0; \quad Y_p = -2x = -8 \text{ МПа}.$$

Сторона CD : $l = 0; m = -1; 0 \leq x \leq 4$ м; $y = -0,5$ м.

$$X_p = 2x; \quad Y_p = -18x - 2y.$$

$$x = 0; \quad X_p = 0; \quad Y_p = 1 \text{ МПа}.$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad X_p = 8 \text{ МПа}; \quad Y_p = -71 \text{ МПа}.$$

Сторона AD : $l = -1, m = 0; x = 0; -0,5 \text{ м} \leq y \leq 0,5 \text{ м}$:

$$X_p = -2x = 0; \quad Y_p = -2x = 0.$$

По результатам расчета построим эпюры распределения внешних сил, действующих по контуру пластины (рисунок 10.2).

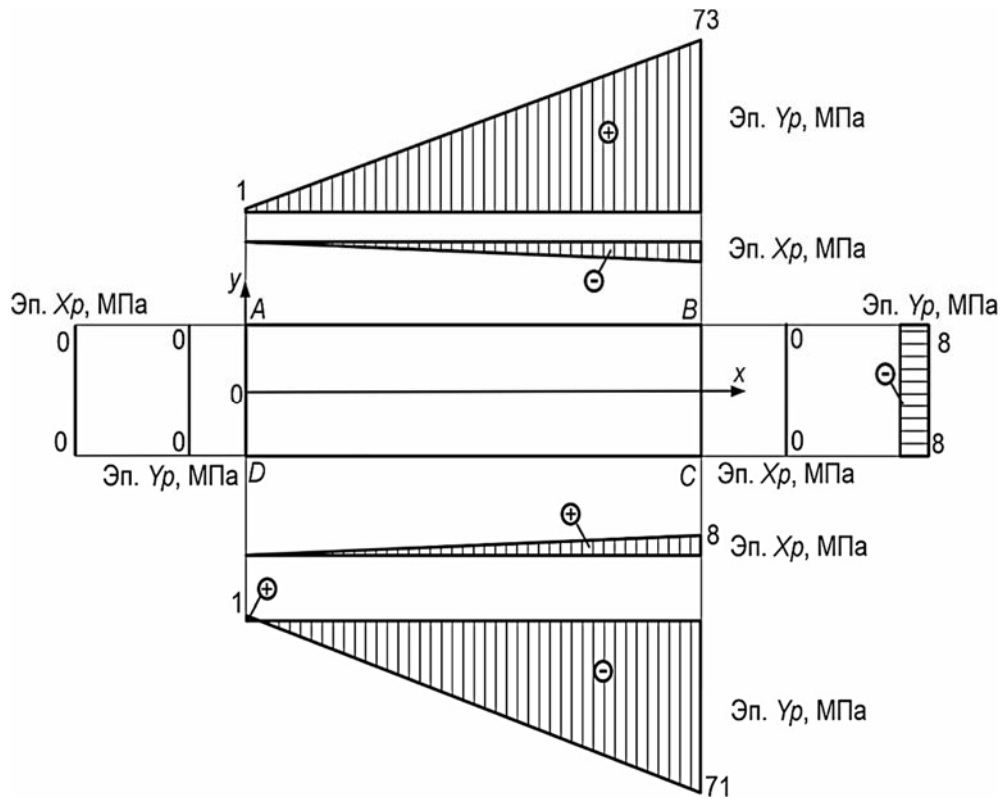


Рисунок 10.2

Координаты точки, для которой необходимо определить напряжения в численном виде:

$$x = \alpha \cdot l = 0,1 \cdot 4 = 0,4 \text{ м}; \quad y = \beta \cdot h = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ м}.$$

Напряжения в точке.

$$\sigma_x = 0;$$

$$\sigma_y = 18x + 2y = 18 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 = 7,4 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = -2x = -2 \cdot 0,4 = -0,8 \text{ МПа}.$$

Покажем направление действия этих напряжений на гранях площадки, выделенной вокруг точки (рисунок 10.3).

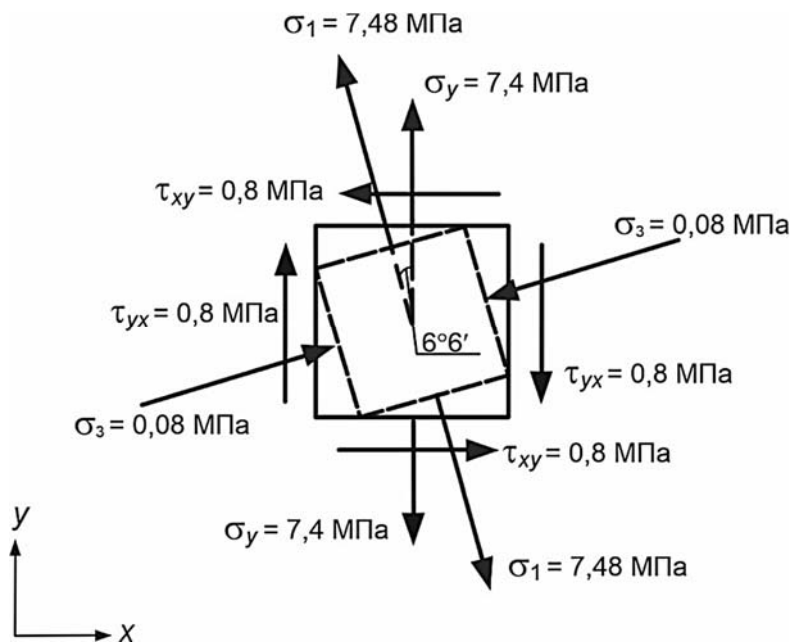


Рисунок 10.3

Главные напряжения [3–5]

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{0 + 7,4}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(0 + 7,4)^2 + 4(-0,8)^2} = 3,7 \pm 3,78;$$

$$\sigma_{\max} = 3,7 + 3,78 = 7,48 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = 3,7 - 3,78 = -0,08 \text{ МПа}.$$

Определим главные напряжения, если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 7,48 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = -0,08 \text{ МПа}.$$

Положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (-0,8)}{0 - 7,4} = 0,216, \quad \alpha_0 = 6^\circ 6'.$$

Максимальные касательные напряжения [3–5]

$$\tau_{\max} = \frac{7,48 - (-0,08)}{2} = 3,78 \text{ МПа}.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Для балки прямоугольного сечения длиной $l = 4,8$ м, высотой $h = 1,8$ м и толщиной, равной единице (рисунок 10.4), задана функция напряжений $\varphi = 0,5(x^4 - 3x^2y^2)$ и коэффициенты $\alpha = 0,8$, $\beta = -0,3$.

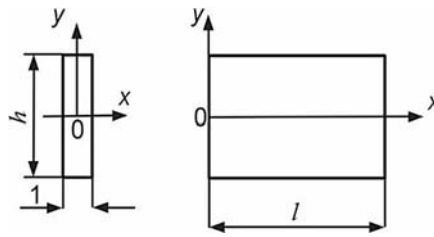


Рисунок 10.4

Требуется:

- проверить, удовлетворяет ли функция φ бигармоническому уравнению плоской задачи;
- найти выражения напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в общем виде (как функции x и y);
- определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырём граням балки, и построить их эпюры на контуре балки;
- для точки с координатами $x = \alpha \cdot l$ и $y = \beta \cdot h$ найти величины напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в численном виде и показать их на гранях выделенного для этой точки элементарного параллелепипеда;
- найти в этой точке главные напряжения (σ_1 , σ_2 , σ_3), направление главных площадок и показать их на эскизе;
- найти максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений.

Объёмными силами следует пренебречь.

Контрольные вопросы

- 1 Перечислите основные уравнения, используемые при решении плоской задачи теории упругости.
- 2 Запишите дифференциальные уравнения равновесия.
- 3 Запишите условия на поверхности.
- 4 Запишите уравнения сплошности.
- 5 Какие уравнения используют для определения напряжений в произвольных точках балки?
- 6 Какие напряжения называют главными?
- 7 Как определить положение главных площадок?
- 8 Запишите выражения для определения компонент главных напряжений при плоском напряженном состоянии.
- 9 Запишите бигармоническое уравнение относительно функции напряжений.

11 Изгиб пластин

Пример 1 – Для прямоугольной пластинки (рисунок 11.1) задано выражение интенсивности нагрузки $q = q_0 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$, $q_0 = 0,16$ МПа и уравнение прогибов $W = c \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$. Пластина имеет размеры $a = 1$ м, $b = 1,5$ м.

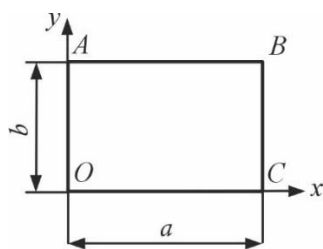


Рисунок 11.1

Требуется:

- установить, каким граничным условиям удовлетворяет заданная функция прогибов;
- с помощью уравнения Софи Жермен найти коэффициент c ;
- составить выражения изгибающих и крутящих моментов;
- по заданной величине q_0 и наибольшей величине изгибающего момента подобрать толщину h пластины при $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Установим, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов. Сторона OC .

При $y = 0$

$$W = c \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Следовательно, пластинка оперта вдоль стороны OC . Выясним, как она опёрта – шарнирно или жестко. Составим уравнение углов поворота в направлении, параллельном Oy :

$$\frac{\partial W}{\partial y} = c \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{b}.$$

При $y = 0$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \neq 0.$$

Это соответствует шарнирным опорам.

Дважды продифференцируем функцию прогибов по переменным x и y :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = c \cdot \frac{5\pi}{a} \cdot \cos \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = c \cdot \left(\frac{5\pi}{a}\right)^2 \cdot \left(-\sin \frac{5\pi x}{a}\right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = c \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = c \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \left(-\sin \frac{\pi y}{b}\right).$$

$$M_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = c \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \left(-\sin \frac{\pi y}{b}\right) + \nu c \cdot \left(\frac{5\pi}{a}\right)^2 \cdot \left(-\sin \frac{5\pi x}{a}\right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Аналогично проверяем выполнение граничных условий для края AB .

При $y = b$

$$W = c \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Следовательно, пластинка опёрта вдоль стороны AB . Выясним, как она опёрта – шарнирно или жестко. Составим уравнение углов поворота в направлении, параллельном Oy :

$$\frac{\partial W}{\partial y} = c \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{b}.$$

При $y = b$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \neq 0.$$

Это соответствует шарнирным опорам.

Для шарнирно опёртого края

$$M_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = c \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \left(-\sin \frac{\pi y}{b}\right) + \nu c \cdot \left(\frac{5\pi}{a}\right)^2 \cdot \left(-\sin \frac{5\pi x}{a}\right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Граничные условия выполняются вдоль края OA .

При $x = 0$

$$W = c \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Делаем вывод, что край OA закреплен.

При $x = 0$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = c \cdot \frac{5\pi}{a} \cdot \cos \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \neq 0.$$

Проверим условия для края AB .

При $x = 0$

$$\begin{aligned} M_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= c \cdot \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(-\sin \frac{5\pi x}{a} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + \\ &+ \nu c \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \left(-\sin \frac{\pi y}{b} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, край AB опирается шарнирно.

Аналогично проверяем вид закрепления по краю BC .

При $x = a$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = c \cdot \frac{5\pi}{a} \cdot \cos \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \neq 0.$$

При $x = a$

$$\begin{aligned} M_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= c \cdot \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(-\sin \frac{5\pi x}{a} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + \\ &+ \nu c \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \left(-\sin \frac{\pi y}{b} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, край BC также опирается шарнирно.

Уравнение Софи Жермен для определения коэффициента c следующее:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}.$$

Производные от функции прогибов:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = c \cdot \left(\frac{5\pi}{a} \right)^3 \cdot \left(-\cos \frac{5\pi x}{a} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = c \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^3 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \left(-\cos \frac{\pi y}{b} \right);$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = c \cdot \left(\frac{5\pi}{a} \right)^4 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = c \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = c \cdot \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right) \cdot \left(-\sin \frac{5\pi x}{a} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = c \cdot \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Уравнение Софи Жермен с учетом производных от функции прогибов следующее:

$$c \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \left(\left(\frac{5\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right) = \frac{q}{D}.$$

В правую часть уравнения подставим выражение для распределённой нагрузки и выполним преобразования.

$$c \left(\left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right)^2 = \frac{q_0}{D};$$

$$c = \frac{q_0}{D \left(\left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right)^2} = \frac{0,16}{D \left(\left(\frac{5 \cdot 3,14}{1} \right)^2 + \left(\frac{3,14}{1,5} \right)^2 \right)^2} = \frac{2,542 \cdot 10^{-6}}{D}.$$

Выражения для изгибающих и крутящих моментов:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = D \left(c \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \left(\left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right) \right);$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = D \left(c \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \right) \right);$$

$$H_x = H_y = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) c \left(\frac{5\pi}{a} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{b} \right) \cdot \cos \frac{5\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Толщина пластины из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot h \cdot 12}{2 \cdot h^3} = \frac{6 \cdot M_{\max}}{h^2} \leq [\sigma].$$

$$h \geq \sqrt{\frac{6 \cdot M_{\max}}{[\sigma]}}.$$

Найдем координаты точек пластины, при которых изгибающие моменты M_x и M_y имеют наибольшие значения.

Значения можно определить из следующих условий:

$$\sin \frac{5\pi x}{a} = 1; \sin \frac{\pi y}{b} = 1.$$

Чтобы выполнялись эти условия, координаты должны быть равны

$$x = \frac{a}{10}; y = \frac{b}{2}.$$

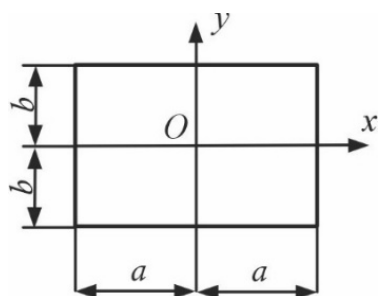
Определим величины максимальных моментов M_x и M_y :

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{2,542 \cdot 10^{-6}}{D} \cdot \left(\left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right) \right) = \\ &= 2,542 \cdot 10^{-6} \left(\left(\frac{5 \cdot 3,14}{1} \right)^2 + 0,3 \left(\frac{3,14}{1,5} \right)^2 \right) = 6,29 \cdot 10^{-4} \text{ МН} \cdot \text{м}; \\ M_y &= D \left(\frac{2,542 \cdot 10^{-6}}{D} \left(\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2 \right) \right) = \\ &= 2,542 \cdot 10^{-6} \left(\left(\frac{3,14}{1,5} \right)^2 + 0,3 \left(\frac{5 \cdot 3,14}{1} \right)^2 \right) = 1,99 \cdot 10^{-4} \text{ МН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Выбираем $M_{\max} = M_x = 6,29 \cdot 10^{-4} \text{ МН} \cdot \text{м}$.

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 6,29 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6}{160 \cdot 10^6}} = 0,0048 \text{ м}.$$

Принимаем $h = 5 \text{ мм}$.



Пример 2 (для самостоятельного решения) –

Для прямоугольной пластинки (рисунок 11.2) задано выражение интенсивности нагрузки $q = q_0 \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$, $q_0 = 0,16 \text{ МПа}$ и уравнение прогибов $W = c \sin \frac{5\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.

Пластина имеет размеры $a = 1 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$.

Рисунок 11.2

Требуется:

- установить, каким граничным условиям удовлетворяет заданная функция прогибов;
- с помощью уравнения Софи Жермен найти коэффициент c ;
- составить выражения изгибающих и крутящих моментов;
- по заданной величине q_0 и наибольшей величине изгибающего момента подобрать толщину h пластины при $[\sigma] = 160$ МПа.

Контрольные вопросы

- 1 Как записывается основное уравнение технической теории изгиба пластин в декартовой и полярной системах координат?
- 2 Как определяется жесткость пластины при изгибе?
- 3 Какие внутренние усилия возникают в общем случае изгиба прямоугольной пластины? В каких единицах они измеряются?
- 4 Как записываются формулы для определения внутренних усилий в прямоугольной пластине?
- 5 Какими зависимостями связаны между собой внутренние усилия в прямоугольной пластине и распределенная поперечная нагрузка?
- 6 Какие напряжения возникают в сечениях пластины, перпендикулярных к срединной плоскости? Как они связаны с внутренними усилиями? Какой характер их изменения по толщине пластины?
- 7 Какие напряжения не учитываются при решении задач об изгибе пластин?
- 8 Каким условиям должна удовлетворять функция прогиба пластины?
- 9 Как записываются граничные условия для жестко защемленных, шарнирно опертых и свободных от закрепления краев для прямоугольных пластин?
- 10 Как записывается условие прочности пластины?
- 11 Какое условие должно выполняться при расчете пластин на жесткость?

12 Основные положения теории пластичности и ползучести

Контрольные вопросы

- 1 Уравнения пластического состояния. Простое и сложное нагружение.
- 2 Условия текучести. Поверхность и кривая текучести. Условие постоянства максимального касательного напряжения (условие Треска – Сен-Венана).
- 3 Условие постоянства интенсивности касательных напряжений (условие Мизеса). Условия упрочнения.
- 4 Деформационная теория пластичности. Связь между теорией течения и деформационной теорией. Обобщения в случае идеальной пластичности. Случай упрочняющейся среды.
- 5 Основные понятия теории предельного состояния. Статическая теорема.

6 Кинематическая теорема. Применение статической и кинематической теорем для анализа несущей способности конструкций.

7 Теоремы о коэффициенте предельной нагрузки. Примеры нахождения предельной нагрузки энергетическим методом.

8 Минимальные принципы в деформационной теории пластичности.

9 Ползучесть при одноосном растяжении. Основные результаты экспериментального изучения ползучести при одноосном растяжении.

10 Ползучесть и релаксация напряжений. Кривые ползучести. Длительная прочность. Определение коэффициента запаса.

11 Технические теории ползучести. Теория старения. Теория течения. Теория упрочнения.

12 Теория ползучести с анизотропным упрочнением. Экспериментальная проверка и анализ теорий ползучести.

13 Решения некоторых задач установившейся ползучести. Чистый изгиб бруса. Поперечный изгиб бруса. Кручение бруса кольцевого поперечного сечения.

14 Теория вязкоупругости. Механические модели деформируемого тела.

15 Линейная теория наследственности. Применение преобразования Лапласа.

16 Принцип Вольтерра. Нелинейные теории наследственности.

17 Характеристика ползучести и релаксации напряжений.

18 Длительная прочность. Определение коэффициента запаса.

19 Основные уравнения теории старения.

20 Основные уравнения теории течения.

Список литературы

1 Сопротивление материалов. Практикум : учеб.-метод. пособие / С. И. Зиневич, В. А. Пенькевич, Л. И. Шевчук, О. А. Вербицкая. – Мн. : Новое знание; М. : ИНФРА-М, 2015. – 316 с.: ил.

2 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – М. : Юрайт, 2016. – 413 с.

3 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести и механики разрушения: учеб. пособие / М. Д. Подскребко. – Мн. : Выш. шк., 2009. – 670 с.

4 **Молотников, В. Я.** Теория упругости и пластичности: учеб. пособие / В. Я. Молотников, А. А. Молотникова. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2023. – 532 с.

5 **Победря, Б. Е.** Лекции по теории упругости / Б. Е. Победря, Д. В. Георгиевский. – 2-е изд. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 208 с.