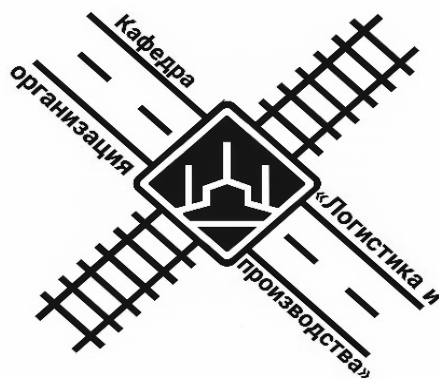


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Логистика и организация производства»

# ПРИКЛАДНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА В ЛОГИСТИКЕ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности  
6-05-1042-01 «Транспортная логистика»  
дневной и заочной форм обучения*



Могилев 2026

УДК 330.4  
ББК 65 в 631  
П75

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Логистика и организация производства»  
«31» августа 2026 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель Т. А. Бородич

Рецензент канд. экон. наук, доц. А. В. Александров

В методических указаниях представлены материалы к практическим занятиям для студентов специальности 6-05-1042-01 «Транспортная логистика» дневной и заочной форм обучения.

Учебное издание

## ПРИКЛАДНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА В ЛОГИСТИКЕ

|                         |                   |
|-------------------------|-------------------|
| Ответственный за выпуск | М. Н. Гриневич    |
| Корректор               | А. А. Подошевки   |
| Компьютерная верстка    | Е. В. Ковалевская |

|                                  |                                                      |
|----------------------------------|------------------------------------------------------|
| Подписано в печать               | . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. |
| Печать трафаретная. Усл. печ. л. | . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №                |

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2026

## Содержание

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| 1 Однофакторный и двухфакторный дисперсионный анализ ..... | 4  |
| 2 Парная линейная регрессия.....                           | 8  |
| 3 Подбор адекватной нелинейной зависимости.....            | 11 |
| 4 Фиктивные переменные .....                               | 14 |
| 5 Моделирование одномерного динамического ряда .....       | 18 |
| 6 Моделирование сезонности .....                           | 20 |
| 7 Моделирование взаимосвязи по временным рядам .....       | 23 |
| 8 Нестационарные временные ряды.....                       | 26 |
| Список литературы .....                                    | 32 |

# 1 Однофакторный и двухфакторный дисперсионный анализ

## Теоретические сведения

Однофакторный дисперсионный анализ (*ANOVA – analysis of variance*) используется для сравнения средних значений для трех и более выборок. *Фактором* называется *независимая* переменная, влияние которой изучается на *зависимую* переменную. Например, фактором может быть уровень образования, вид деятельности, возрастная группа респондентов, степень лояльности к торговой марке и т. д.

Анализ основан на расчете *F-статистики* (статистика Фишера), которая представляет собой отношение двух *дисперсий*: межгрупповой и внутригрупповой. *F-тест* в однофакторном дисперсионном анализе устанавливает, значительно ли отличаются средние нескольких независимых выборок.

Однофакторный дисперсионный анализ дает ответ на вопрос, влияет ли фактор на исследуемый показатель. Базовая идея состоит в том, что общая дисперсия признака раскладывается на составляющие, каждая из которых характеризует влияние того или иного фактора.

$$Q = Q_A + Q_O, \quad (1.1)$$

где  $Q$  – общая дисперсия;

$Q_A$  – межгрупповая дисперсия (рассеяние характеризуется влиянием фактора  $A$ );

$Q_O$  – остаточная дисперсия (рассеяние характеризуется влиянием других случайных факторов).

$$Q_A = n \cdot \sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - \bar{x})^2; \quad (1.2)$$

$$Q_O = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad (1.3)$$

где  $m$  – количество групп;

$n$  – количество единиц в каждой группе;

$\bar{x}_j$  – среднее значение признака.

Затем рассчитываются оценки дисперсий:

$$S_A^2 = \frac{Q_A}{m-1}; \quad (1.4)$$

$$S_O^2 = \frac{Q_O}{m \cdot (n-1)}. \quad (1.5)$$

На основе оценок дисперсий рассчитывают расчетное значение критерия Фишера, которое затем сравнивают с критическим.

$$F_p = \frac{S_A^2}{S_O^2}. \quad (1.6)$$

Если  $F_p > F_{кр}$ , то делается вывод, что фактор влияет на исследуемый показатель.

### **Вопросы для обсуждения**

- 1 С какой целью применяется дисперсионный анализ?
- 2 Какая нулевая и альтернативная гипотезы выдвигаются в случае однофакторного дисперсионного анализа?
- 3 Какая нулевая и альтернативная гипотезы выдвигаются в случае двухфакторного дисперсионного анализа?
- 4 Как выглядит правило сложения дисперсий в каждом случае?
- 5 Как определяется критическое значение?

### **Задачи для решения**

**Задача 1.** По данным индивидуального задания, выданного преподавателем, проверить нулевую гипотезу об отсутствии влияния фактора (уровней фактора) на результативный признак.

**Задача 2.** При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании пяти измерений для трех уровней фактора  $\Phi 1 \dots \Phi 3$  (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Исходные данные

| Номер измерения | $\Phi 1$ | $\Phi 2$ | $\Phi 3$ |
|-----------------|----------|----------|----------|
| 1               | 18       | 24       | 36       |
| 2               | 28       | 36       | 12       |
| 3               | 12       | 28       | 22       |
| 4               | 14       | 40       | 45       |
| 5               | 32       | 16       | 40       |

**Задача 3.** Оценить наличие связи между  $X$  и  $Y$  по данным таблицы 1.2. Предварительно произвести аналитическую группировку предприятий по  $X$ , образовав четыре группы с равными интервалами.

Проверить нулевую гипотезу об отсутствии влияния фактора  $X$  на результативный признак  $Y$ .

Таблица 1.2 – Исходные данные

| $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 284 | 279 | 291 | 357 | 273 | 336 |
| 265 | 245 | 290 | 361 | 280 | 277 |
| 298 | 354 | 257 | 343 | 244 | 320 |
| 264 | 212 | 258 | 390 | 243 | 278 |
| 232 | 323 | 309 | 208 | 269 | 266 |
| 272 | 285 | 257 | 301 | 255 | 294 |
| 292 | 240 | 316 | 306 | 229 | 308 |
| 245 | 361 | 251 | 334 | 272 | 271 |
| 274 | 236 | 278 | 342 | 263 | 228 |
| 256 | 246 | 268 | 274 | 249 | 414 |

**Задача 4.** Проверить нулевую гипотезу об отсутствии влияния фактора  $X$  на результативный признак  $Y$  по данным таблицы 1.3. Предварительно произвести аналитическую группировку предприятий по  $X$ , образовав три группы с равными интервалами.

Таблица 1.3 – Исходные данные

| $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 31  | 279 | 31  | 357 | 26  | 336 |
| 28  | 245 | 25  | 361 | 26  | 277 |
| 30  | 354 | 28  | 343 | 28  | 320 |
| 23  | 212 | 25  | 390 | 27  | 278 |
| 25  | 323 | 30  | 208 | 25  | 266 |
| 25  | 285 | 28  | 301 | 26  | 294 |
| 25  | 240 | 28  | 306 | 27  | 308 |
| 27  | 361 | 31  | 334 | 28  | 271 |
| 31  | 236 | 23  | 342 | 27  | 228 |
| 28  | 246 | 28  | 274 | 29  | 414 |

**Задача 5.** За отчетный период имеются следующие данные о показателях деятельности логистических центров (таблица 1.4).

С целью изучения зависимости между стоимостью основных производственных средств и объемом оказанных логистических услуг произвести аналитическую группировку логистических центров по стоимости основных производственных средств, образовав четыре группы субъектов хозяйствования с равными интервалами.

По каждой группе и по итогу в целом подсчитать:

- а) число логистических центров;
- б) стоимость основных производственных средств – всего и в среднем на один логистический центр;
- в) объем оказанных логистических услуг – всего и в среднем на один логистический центр.

Таблица 1.4 – Исходные данные

| Логистический центр | Стоимость основных производственных средств (среднегодовая), млн р. | Объем оказанных логистических услуг в сопоставимых ценах, млн р. | Логистический центр | Стоимость основных производственных средств (среднегодовая), млн р. | Объем оказанных логистических услуг в сопоставимых ценах, млн р. |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1                   | 12,8                                                                | 18,0                                                             | 16                  | 7,3                                                                 | 11,2                                                             |
| 2                   | 7,8                                                                 | 12,0                                                             | 17                  | 2,9                                                                 | 4,2                                                              |
| 3                   | 4,3                                                                 | 11,9                                                             | 18                  | 4,5                                                                 | 4,9                                                              |
| 4                   | 0,8                                                                 | 0,9                                                              | 19                  | 5,3                                                                 | 9,6                                                              |
| 5                   | 4,1                                                                 | 5,5                                                              | 20                  | 1,4                                                                 | 3,2                                                              |
| 6                   | 8,6                                                                 | 14,6                                                             | 21                  | 7,6                                                                 | 8,6                                                              |
| 7                   | 4,3                                                                 | 4,8                                                              | 22                  | 3,6                                                                 | 4,6                                                              |
| 8                   | 5,5                                                                 | 5,5                                                              | 23                  | 4,4                                                                 | 6,7                                                              |
| 9                   | 4,3                                                                 | 4,8                                                              | 24                  | 6,9                                                                 | 8,4                                                              |
| 10                  | 9,1                                                                 | 10,9                                                             | 25                  | 4,6                                                                 | 6,8                                                              |
| 11                  | 5,2                                                                 | 9,7                                                              | 26                  | 5,8                                                                 | 6,9                                                              |
| 12                  | 4,9                                                                 | 7,2                                                              | 27                  | 11,7                                                                | 17,9                                                             |
| 13                  | 12,7                                                                | 21,6                                                             | 28                  | 7,4                                                                 | 10,6                                                             |
| 14                  | 6,9                                                                 | 7,6                                                              | 29                  | 8,9                                                                 | 17,8                                                             |
| 15                  | 5,2                                                                 | 9,7                                                              | 30                  | 10,9                                                                | 18,9                                                             |

Результаты представить в виде групповой таблицы, сделать выводы.

Проверить нулевую гипотезу об отсутствии влияния стоимости основных производственных средств на объем оказанных логистических услуг.

**Задача 6.** Выяснить, влияет ли тип используемого подвижного состава на прибыль предприятия.

В шести классах градации (группах) фактора (1-й тип, 2-й тип и т. д.) собраны данные о прибыли от выполнения перевозок грузов в миллионах рублей в течение 4 лет (таблица 1.5).

Таблица 1.5 – Исходные данные

| Тип подвижного состава | 1-й год | 2-й год | 3-й год | 4-й год |
|------------------------|---------|---------|---------|---------|
| 1-й                    | 7,21    | 7,55    | 7,29    | 7,6     |
| 2-й                    | 7,89    | 8,27    | 7,39    | 8,18    |
| 3-й                    | 7,25    | 7,01    | 7,37    | 7,53    |
| 4-й                    | 7,75    | 7,41    | 7,27    | 7,42    |
| 5-й                    | 7,7     | 8,28    | 8,55    | 8,6     |
| 6-й                    | 7,56    | 8,05    | 8,07    | 7,84    |

## 2 Парная линейная регрессия

### *Теоретические сведения*

В экономических исследованиях одной из основных задач является анализ зависимостей между переменными.

Функциональная зависимость задается в виде точной формулы, в которой каждому значению одной переменной соответствует строго определенное значение другой; воздействием случайных факторов при этом пренебрегают.

Статистической зависимостью называется связь переменных, на которую накладывается воздействие случайных факторов.

Уравнение регрессии – это формула статистической связи между переменными. Формула статистической связи двух переменных называется парной регрессией, зависимость от нескольких переменных – множественной регрессией.

В модели парной линейной регрессии зависимость между переменными в генеральной совокупности представляется в виде

$$Y = \alpha + \beta \cdot X + \varepsilon, \quad (2.1)$$

где  $X$  – неслучайная величина;

$Y, \varepsilon$  – случайные величины.

Величина  $Y$  называется объясняемой (зависимой) переменной, а  $X$  – объясняющей (независимой) переменной. Постоянные  $\alpha, \beta$  – параметры уравнения.

На основе выборочного наблюдения оценивается выборочное уравнение регрессии

$$\bar{y} = a + bx, \quad (2.2)$$

где  $a, b$  – оценки параметров  $(\alpha, \beta)$ .

Величина  $\bar{y}_i$  описывается как расчетное значение переменной  $y_i$ , соответствующее  $x_i$ .

Остаток  $e_i$  в  $i$ -м наблюдении определяется как разность между фактическим и расчетным значениями зависимой переменной, т. е.

$$e_i = y_i - \bar{y}_i. \quad (2.3)$$

Неизвестные значения  $a, b$  определяются методом наименьших квадратов (МНК):

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (2.4)$$

Коэффициент  $b$  есть угловой коэффициент регрессии, он показывает, на сколько единиц в среднем изменяется переменная  $y$  при увеличении независимой переменной  $x$  на единицу.

Постоянная  $a$  дает прогнозируемое значение зависимой переменной при  $x = 0$ .

Коэффициентом детерминации  $R^2$  называется отношение

$$R^2 = \frac{\text{var}(\bar{y})}{\text{var}(y)} = \frac{\sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}, \quad (2.5)$$

причем  $0 \leq R^2 \leq 1$ , характеризующее долю вариации (разброса) зависимой переменной, объясненную с помощью уравнения регрессии.

Если  $R^2 = 1$ , то подгонка точная, т. е. все точки наблюдения лежат на одной прямой. Если  $R^2 = 0$ , регрессия ничего не дает, т. е. переменная  $x$  не улучшает качества предсказания  $y$  по сравнению с горизонтальной прямой  $\bar{y} = \bar{y}$ .

Чем ближе к единице  $R^2$ , тем лучше качество подгонки, т. е.  $\bar{y}$  более точно аппроксимирует  $y$ .

### **Вопросы для обсуждения**

- 1 Что изучает регрессионный анализ?
- 2 Как оценить значимость уравнения регрессии в целом?
- 3 Какие задачи решаются при построении уравнения регрессии?
- 4 Какие методы применяются для выбора вида модели регрессии?
- 5 Какие функции чаще всего используются для построения уравнения парной регрессии?
- 6 В чем суть метода наименьших квадратов (МНК)?
- 7 Какой смысл может иметь свободный член в парной линейной регрессии?
- 8 Как определяется коэффициент детерминации и каков его статистический смысл?

### **Задачи для решения**

**Задача 1.** На основе выборочных данных о логистических затратах (таблица 2.1) оценить тесноту связи между объемом оказанных услуг транспортно-логистической компанией и логистическими затратами.

Таблица 2.1 – Исходные данные

|                                 |    |    |     |     |     |     |     |
|---------------------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Предприятие                     | 1  | 2  | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
| Объем оказанных услуг, тыс. шт. | 1  | 2  | 4   | 3   | 5   | 3   | 4   |
| Логистические затраты, тыс. р.  | 30 | 70 | 150 | 100 | 170 | 100 | 150 |

**Задача 2.** На основе выборочных данных о деятельности фирм (таблица 2.2) оценить тесноту связи между совокупной выручкой и численностью подвижного состава автопарка.

Таблица 2.2 – Исходные данные

| Фирма                               | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8   | 9    | 10   |
|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| Совокупная выручка, млн р.          | 2,62 | 3,04 | 3,15 | 3,83 | 3,58 | 4,08 | 4,09 | 4,2 | 4,18 | 4,24 |
| Численность подвижного состава, ед. | 23   | 32   | 50   | 53   | 55   | 58   | 59   | 62  | 69   | 72   |

**Задача 3.** Оценить наличие связи между  $X$  и  $Y$  по данным таблицы 2.3.

Таблица 2.3 – Исходные данные

| $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 68  | 279 | 43  | 357 | 48  | 336 |
| 47  | 245 | 53  | 361 | 44  | 277 |
| 40  | 354 | 54  | 343 | 49  | 320 |
| 35  | 212 | 50  | 390 | 50  | 278 |
| 60  | 323 | 45  | 208 | 46  | 266 |
| 37  | 285 | 50  | 301 | 46  | 294 |
| 41  | 240 | 25  | 306 | 47  | 308 |
| 46  | 361 | 44  | 334 | 39  | 271 |
| 46  | 236 | 54  | 342 | 49  | 228 |
| 53  | 246 | 56  | 274 | 44  | 414 |

### 3 Подбор адекватной нелинейной зависимости

#### Теоретические сведения

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций.

Уравнение степенной модели имеет вид

$$\bar{y} = a + x^b, \quad (3.1)$$

где  $a, b$  – оценки параметров  $(\alpha, \beta)$ , параметры (коэффициенты) регрессии.

Для построения этой модели необходимо произвести линеаризацию переменных. Для этого нужно произвести логарифмирование обеих частей уравнения.

Уравнение показательной кривой

$$\bar{y} = a \cdot b^x. \quad (3.2)$$

Для построения этой модели необходимо произвести линеаризацию путем логарифмирования обеих частей уравнения.

Уравнение гиперболической функции

$$\bar{y} = a + \frac{b}{x}. \quad (3.3)$$

Для построения этой модели нужно произвести линеаризацию путем замены  $X = 1/x$ .

Аналогичным образом проводится линеаризация параметров для других видов нелинейных зависимостей, что представлено в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Виды нелинейных зависимостей

| Название кривой            | Уравнение         | Преобразование переменных  |
|----------------------------|-------------------|----------------------------|
| Экспоненциальная (простая) | $y = ae^{bx}$     | $y^* = \ln y$              |
| Степенная                  | $y = ax^b$        | $y^* = \ln y; x^* = \ln x$ |
| Гиперболическая 1-го типа  | $y = a + b/x$     | $x^* = 1/x$                |
| Гиперболическая 2-го типа  | $y = 1/(a + bx)$  | $y^* = 1/y$                |
| Логарифмическая            | $y = a + b \ln x$ | $x^* = \ln x$              |

Выбор подходящей модели осуществляется с помощью метода наименьших квадратов. Основным смыслом этого метода заключается в минимизации суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений зависимой переменной от значений, предсказанных моделью:

$$\sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Расчет средней относительной ошибки, которая также используется в качестве критерия для выбора подходящей модели, осуществляется по формуле

$$\overline{E_{отн}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|e_i|}{y_i} \cdot 100 \% = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \bar{y}}{y_i} \right| \cdot 100 \%. \quad (3.5)$$

### **Вопросы для обсуждения**

1 Перечислите основные виды нелинейных моделей в корреляционно-регрессионном анализе. Какова общая формула для нахождения коэффициента эластичности?

2 Как классический МНК применяется к нелинейным моделям регрессии?

3 Опишите метод линеаризации для сведения нелинейной модели к линейной для различных видов моделей.

### **Задачи для решения**

**Задача 1.** Методом нелинейных преобразований исходных данных в варианте индивидуального задания, выданного преподавателем, подобрать лучшую из возможных нелинейных зависимостей в парной регрессии.

**Задача 2.** На основе исходных данных из таблицы 3.2 построить эмпирические уравнения парной нелинейной регрессии различных типов и выбрать среди них самое адекватное.

Таблица 3.2 – Исходные данные

|       |     |     |     |     |     |     |     |    |      |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|------|
| $x_i$ | 1,2 | 1,8 | 2,5 | 3,1 | 3,9 | 4,9 | 5,3 | 6  | 6,7  |
| $y_i$ | 1,3 | 2,1 | 3,1 | 3,5 | 5,7 | 7,1 | 9,9 | 11 | 15,1 |

**Задача 3.** Используя данные таблицы 3.3, построить эмпирические уравнения парной нелинейной регрессии различных типов и выбрать среди них самое адекватное. Построить график корреляционной зависимости (по эмпирическим и теоретическим показателям).

Таблица 3.3 – Исходные данные

| Предприятие | Объем оказанных услуг<br>по перевозке $Y$ , тыс. р. | Среднегодовая стоимость транспортных<br>средств $X_1$ , тыс. р. |
|-------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1           | 9,4                                                 | 2,2                                                             |
| 2           | 12,4                                                | 3,8                                                             |
| 3           | 13,8                                                | 3                                                               |
| 4           | 10,7                                                | 2,8                                                             |
| 5           | 10,2                                                | 2,3                                                             |
| 6           | 10,7                                                | 2,8                                                             |
| 7           | 12,1                                                | 2,6                                                             |
| 8           | 10,6                                                | 2,6                                                             |
| 9           | 12                                                  | 2,9                                                             |
| 10          | 10,2                                                | 2,3                                                             |
| 11          | 12,1                                                | 3,8                                                             |
| 12          | 13,4                                                | 4,2                                                             |
| 13          | 12,2                                                | 3                                                               |
| 14          | 12,5                                                | 3,1                                                             |
| 15          | 13,4                                                | 3,8                                                             |
| 16          | 12,2                                                | 3,4                                                             |
| 17          | 9,4                                                 | 2,4                                                             |
| 18          | 9,6                                                 | 2,2                                                             |
| 19          | 11,5                                                | 2,9                                                             |
| 20          | 11,8                                                | 3                                                               |
| 21          | 11,6                                                | 2,8                                                             |
| 22          | 12,2                                                | 3                                                               |
| 23          | 13,7                                                | 4,1                                                             |
| 24          | 13,2                                                | 3,7                                                             |
| 25          | 13,1                                                | 3,1                                                             |
| 26          | 11,4                                                | 2,8                                                             |
| 27          | 12                                                  | 3,4                                                             |
| 28          | 10                                                  | 2,3                                                             |
| 29          | 10,8                                                | 2,9                                                             |
| 30          | 13,8                                                | 4,3                                                             |

## 4 Фиктивные переменные

### *Теоретические сведения*

В регрессионных моделях наряду с количественными переменными часто используются качественные переменные, которые выражаются в виде фиктивных (искусственных) переменных, отражающих два противоположных состояния качественного фактора. Например,  $D = 0$ , если потребитель не имеет высшего образования,  $D = 1$ , если потребитель имеет высшее образование. Переменная  $D$  называется фиктивной, или двоичной переменной, а также индикатором.

Таким образом, кроме моделей, содержащих только количественные переменные, в регрессионном анализе рассматриваются также модели, содержащие лишь качественные переменные (обозначаемые  $D_i$ ), либо те и другие одновременно.

Регрессионные модели, содержащие лишь качественные объясняющие переменные, называются ANOVA – моделями (моделями дисперсионного анализа). Такие модели в экономике крайне редки. Гораздо чаще встречаются модели, содержащие как количественные, так и качественные переменные. Такие модели называются ANCOVA – моделями (моделями ковариационного анализа).

При исследовании подобных моделей необходимо принять решение, стоит ли разбивать выборку на части и строить для каждой из них уравнение регрессии или ограничиться одной общей линией регрессии. Для этого используют тест Чоу, который состоит в следующем.

Вся выборка объема  $n$  разбивается на две подвыборки объемами  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_1 + n_2 = n$ ), и для каждой строится уравнение регрессии. Обозначим через  $s_1$  и  $s_2$  остаточные среднеквадратические отклонения (СКО) для каждой из регрессий. Кроме того, строится общая регрессия для всех наблюдений, и для нее определяется остаточная СКО, которую обозначим  $s_3$ . Далее рассчитывается статистика Фишера:

$$F = \frac{s_3 - (s_1 + s_2)}{s_1 + s_2} \cdot \frac{n - 2 \cdot p - 2}{p + 1}, \quad (4.1)$$

где  $p$  – число факторов.

Выражение (4.1) равно отношению уменьшения необъясненной дисперсии к необъясненной дисперсии кусочно-линейной модели. Если уменьшение дисперсии статистически незначимо, статистика (4.1) имеет распределение Фишера с  $(p + 1, n - 2p - 2)$  степенями свободы. Если на заданном уровне значимости  $\alpha$  ( $F_{\text{набл}} < F(\alpha; p + 1, n - 2p - 2)$ ), то нет смысла разбивать уравнение регрессии на части. В противном случае разбиение на подвыборки целесообразно с точки зрения улучшения качества модели.

Под полной мультиколлинеарностью понимается существование между некоторыми из факторов линейной функциональной связи. Количественным выражением этого служит то обстоятельство, ранг матрицы  $X$  меньше, чем  $(p + 1)$ , а матрица  $(X'X)$  будет вырожденной, т. е. её определитель равен нулю, а обратной матрицы к ней не существует.

Реальная (или частичная) мультиколлинеарность возникает в случаях существования достаточно тесных линейных статистических связей между объясняющими переменными. Точных количественных критериев для определения наличия или отсутствия реальной мультиколлинеарности не существует. Тем не менее существуют некоторые эвристические рекомендации по выявлению мультиколлинеарности.

В первую очередь анализируют матрицу парных коэффициентов корреляции – точнее, ту ее часть, которая относится к объясняющим переменным. Считается, что две переменные явно коллинеарны, если  $r_{xixj} \geq 0,8$ . В этом случае факторы дублируют друг друга, и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами.

Другим методом оценки мультиколлинеарности факторов может служить определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами ( $\Delta r_{11}$ ).

Для оценки значимости мультиколлинеарности факторов выдвигается гипотеза  $H_0 : \Delta r_{11} = 1$ . Доказано, что величина  $[n - 1 - \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot p + 5) \cdot \lg(\Delta r_{11})]$  имеет приближенное распределение  $\chi^2$  с  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$  степенями свободы. Если  $\chi^2_{набл} > \chi^2_{табл}(\alpha; df)$ , то гипотеза  $H_0$  отклоняется, мультиколлинеарность считается доказанной.

### ***Вопросы для обсуждения***

- 1 Дайте понятие ANOVA-модели.
- 2 Дайте понятие ANCOVA-модели.
- 3 Исследование структурной устойчивости коэффициентов регрессии с помощью теста Чоу.
- 4 Методы обнаружения, последствия и избавление от мультиколлинеарности.

### ***Задачи для решения***

**Задача 1.** Имеются данные зависимости заработной платы сотрудников транспортно-логистического центра от их производительности, пола и образования (таблица 4.1).

Необходимо:

- 1) определить фиктивные переменные и вид модели с переменной структурой;
- 2) произвести идентификацию модели;
- 3) рассчитать общую, факторную и остаточную дисперсии;

- 4) вычислить коэффициент детерминации;
- 5) вычислить стандартную ошибку регрессии;
- 6) вычислить стандартные ошибки параметров регрессии;
- 7) проверить общее качество модели при уровне значимости, равном 0,05;
- 8) проверить существенность влияния фактора «пол» на размер заработной платы сотрудников транспортно-логистического центра;
- 9) проверить модель на наличие мультиколлинеарности факторов;
- 10) проверить модель на наличие автокорреляции случайной составляющей.

Таблица 4.1 – Исходные данные

| Наблю-<br>дение | Заработная<br>плата, тыс. р. | Производитель-<br>ность труда, тыс. р. | Пол     | Образование                |
|-----------------|------------------------------|----------------------------------------|---------|----------------------------|
| 1               | 9,12                         | 6,1                                    | Женский | Высшее                     |
| 2               | 8,09                         | 6,3                                    | Мужской | Среднее специальное        |
| 3               | 7,48                         | 5                                      | Женский | Начальное профессиональное |
| 4               | 8,47                         | 4,9                                    | Женский | Начальное профессиональное |
| 5               | 10,87                        | 5,4                                    | Мужской | Высшее                     |
| 6               | 10,74                        | 6,2                                    | Мужской | Среднее специальное        |
| 7               | 10,08                        | 6,7                                    | Женский | Высшее                     |
| 8               | 6,82                         | 4,3                                    | Мужской | Начальное профессиональное |
| 9               | 6,97                         | 4,2                                    | Мужской | Начальное профессиональное |
| 10              | 12,51                        | 7,5                                    | Женский | Среднее специальное        |
| 11              | 9,67                         | 6,3                                    | Женский | Начальное профессиональное |
| 12              | 8,98                         | 5,2                                    | Женский | Среднее специальное        |
| 13              | 12,63                        | 9,1                                    | Мужской | Среднее специальное        |
| 14              | 30,27                        | 18,6                                   | Мужской | Высшее                     |
| 15              | 21,23                        | 14,3                                   | Женский | Высшее                     |

**Задача 2.** Построить регрессионную модель зависимости зарплаты работника автопарка ( $Y$ ) от возраста ( $X$ ) с использованием фиктивной переменной  $Z$  по фактору «пол» по 20 работникам одного предприятия – таблица 4.2.

Таблица 4.2 – Исходные данные

| Наблюде-<br>ние | $Y$ | $X$ | $Z$ | Наблюде-<br>ние | $Y$ | $X$ | $Z$ |
|-----------------|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----|
| 1               | 300 | 29  | Ж   | 11              | 250 | 28  | Ж   |
| 2               | 400 | 40  | М   | 12              | 350 | 30  | М   |
| 3               | 300 | 36  | Ж   | 13              | 200 | 25  | М   |
| 4               | 320 | 32  | Ж   | 14              | 400 | 48  | М   |
| 5               | 200 | 23  | М   | 15              | 220 | 30  | Ж   |
| 6               | 350 | 45  | Ж   | 16              | 320 | 40  | М   |
| 7               | 350 | 38  | Ж   | 17              | 390 | 40  | М   |
| 8               | 400 | 40  | М   | 18              | 360 | 38  | М   |
| 9               | 380 | 50  | М   | 19              | 260 | 29  | Ж   |
| 10              | 400 | 47  | М   | 20              | 250 | 25  | М   |

Необходимо:

- 1) проверить общее качество модели при уровне значимости, равном 0,05;
- 2) проверить модель на наличие мультиколлинеарности факторов;
- 3) проверить модель на наличие автокорреляции случайной составляющей;
- 4) оценить наличие структурных сдвигов с помощью теста Чоу;
- 5) сделать выводы.

**Задача 3.** Имеется выборка из 10 наблюдений за переменными  $X_1$ ,  $X_2$  и  $Y$  (таблица 4.3). По этим данным выяснить наличие мультиколлинеарности. Построить эмпирическое уравнение множественной линейной регрессии и  $Y$  на  $X_1$  и  $X_2$ , а также уравнение парной линейной регрессии  $Y$  на  $X_1$  и  $Y$  на  $X_2$ ; для каждого из этих уравнений вычислить коэффициент детерминации и проанализировать полученные результаты.

Таблица 4.3 – Исходные данные

|       |   |     |     |     |     |    |     |     |     |     |
|-------|---|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| $X_1$ | 1 | 2   | 3   | 4   | 5   | 6  | 7   | 8   | 9   | 10  |
| $X_2$ | 1 | 1,6 | 2,2 | 2,8 | 3,4 | 4  | 4,6 | 5,2 | 5,8 | 6,4 |
| $Y$   | 0 | 3   | 6   | 9   | 12  | 15 | 18  | 21  | 24  | 27  |

## 5 Моделирование одномерного динамического ряда

### Теоретические сведения

Ряды динамики – статистические данные, отображающие развитие во времени изучаемого явления. Их также называют динамическими рядами, временными рядами.

В каждом ряду динамики имеется два основных элемента:

- 1) показатель времени  $t$ ;
- 2) соответствующие им уровни развития изучаемого явления  $y$ .

В качестве показаний времени в рядах динамики выступают либо определенные даты (моменты), либо отдельные периоды (годы, кварталы, месяцы, сутки).

Уровни рядов динамики отображают количественную оценку (меру) развития во времени изучаемого явления. Они могут выражаться абсолютными, относительными или средними величинами.

### Вопросы для обсуждения

- 1 Временной ряд и его компоненты.
- 2 Стационарные временные ряды и автокорреляционная функция.
- 3 Проверка наличия и нахождение тренда.

### Задачи для решения

**Задача 1.** Имеются следующие условные данные о логистических затратах транспортной организации за 8 лет (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Исходные данные

|        |   |   |   |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|---|----|----|----|----|----|
| $t$    | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| $Y(t)$ | 7 | 8 | 8 | 10 | 11 | 12 | 14 | 16 |

В предположении, что логистические затраты в текущем году зависят от логистических затрат предыдущих лет, определите коэффициенты автокорреляции первого и второго порядков.

### Методические рекомендации по решению задачи 1

Коэффициент автокорреляции уровней ряда первого порядка характеризует зависимость между соседними уровнями ряда  $y_t$  и  $y_{t-1}$  и определяется по формуле

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}. \quad (5.1)$$

Коэффициент автокорреляции уровней второго порядка измеряет зависимость между уровнями ряда  $y_t$  и  $y_{t-2}$  и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3) \cdot (y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}. \quad (5.2)$$

**Задача 2.** На основе поквартальных данных за 9 последних лет работы транспортно-логистического центра была построена мультипликативная модель некоторого временного ряда. Уравнение тренда в этой модели имеет вид

$$T_1 = 10,8 + 0,1 \cdot t. \quad (5.3)$$

Скорректированные значения сезонной компоненты равны: в 1-м квартале – 1,5; в 3-м квартале – 0,6; в 4-м квартале – 0,8. Определить сезонную компоненту за 2-й квартал и прогноз моделируемого показателя за 2-й и 3-й кварталы следующего года.

### **Методические рекомендации по решению задачи 2**

В мультипликативной модели сумма скорректированных сезонных компонент за один период должны равняться количеству этих коэффициентов, т. е. четырем. Отсюда находим недостающую сезонную компоненту за 2-й квартал.

**Задача 3.** По имеющимся поквартальным данным о прибыли автотранспортного предприятия за 4 года (таблица 5.2) определить вид тренда.

Таблица 5.2 – Исходные данные

|        |    |    |    |    |    |    |     |     |
|--------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| $t$    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   |
| $Y(t)$ | 40 | 50 | 60 | 70 | 60 | 80 | 100 | 110 |

Продолжение таблицы 5.2

|        |    |    |    |     |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|-----|----|----|----|----|
| $t$    | 9  | 10 | 11 | 12  | 13 | 14 | 15 | 16 |
| $Y(t)$ | 50 | 70 | 80 | 130 | 30 | 50 | 60 | 70 |

## 6 Моделирование сезонности

### Теоретические сведения

Для выделения компонент временного ряда используют *метод Четверикова*, который включает в себя следующие этапы.

1 Выравнивание эмпирического ряда  $Y_t$  с использованием центрированной скользящей средней с периодом сглаживания  $T_0 = 12$ .

$$U_{ij} = \frac{T_1/2 + T_2 + \dots + T_7 + \dots + T_{13}/2}{12}. \quad (6.1)$$

2 Полученную предварительную оценку тренда  $Y'_t = U'_t$  вычитают из исходного эмпирического ряда

$$l_{ij} = Y_{ij} - U_{ij}^1, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, T_0}), \quad (6.2)$$

где  $m$  – количество лет;

$T_0$  – месяцы.

3 Для каждого года  $i$  вычисляется среднеквадратическое отклонение, на которое и делятся затем отдельные ежемесячные отклонения соответствующего года:

$$\bar{l}_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sigma_i}. \quad (6.3)$$

При вычислении  $\sigma_1$  во внимание принимаются только шесть последних уровней первого года, а при вычислении  $\sigma_{13}$  – первые шесть уровней тринадцатого года.

4 Из «нормированных» таким путем отклонений вычисляется *предварительная средняя сезонная волна* (отобразить на графике):

$$V_j^1 = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{l}_{ij}}{m}. \quad (6.4)$$

5 Предварительную среднюю сезонную волну  $V_j$  умножают на среднеквадратическое отклонение каждого года  $\sigma_i$  и вычитают из исходного эмпирического ряда:

$$U_{ij}^1 = Y_{ij} - V_j^1 \sigma_i. \quad (6.5)$$

В результате получается ряд, лишенный предварительной сезонной волны.

6 Временной ряд, лишенный предварительной сезонной волны, сглаживается с использованием простой скользящей средней с интервалом сглаживания, равным пяти, и получается новая оценка тренда  $U_{ij}^{(2)}$ .

7 Вычисляются отклонения ряда  $U_{ij}^{(2)}$  от исходного эмпирического ряда  $Y_{ij}$ :

$$l_{ij}^{(2)} = Y_{ij} - U_{ij}^{(2)}. \quad (6.6)$$

Полученные отклонения подвергают обработке в соответствии с пп. 3 и 4 для выявления окончательных значений средней сезонной волны  $V_j^{(2)}$  (отобразить на графике).

При сравнении значений коэффициентов сезонной волны, полученных на первой и второй итерациях, т. е. значений  $V_j^{(1)}$  и  $V_j^{(2)}$ , нетрудно заметить, что они незначительно отличаются друг от друга.

8 Производится вычисление коэффициента напряженности сезонной волны в следующем порядке:

– по формуле  $\varepsilon_{ij} = l_{ij}^{(2)} - V_j^{(2)}$  вычисляются значения случайной компоненты

– вычисляется  $k_i$  – коэффициент напряженности сезонной волны для каждого года, кроме первого и последнего.

Для первого и последнего годов значение коэффициента напряженности не вычисляется, т. к. после повторного сглаживания в них осталось лишь по четыре наблюдения и их использование искажает при расчетах средние характеристики всего ряда:

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{T_0} l_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}}{\sum_{j=1}^{T_0} \varepsilon_{ij}^2}. \quad (6.7)$$

9 Используя коэффициент напряженности  $k_i$ , вычисляются *окончательные значения сезонной компоненты* временного ряда:

$$V_{ij} = V_j^{(2)} \cdot k_i. \quad (6.8)$$

10 Вычитают из исходных данных окончательные значения сезонной компоненты временного ряда.

Полученные показатели фактически являются предпрогнозными, а их дальнейшее использование позволит подобрать эффективные прогнозные методы и модели.

### ***Вопросы для обсуждения***

- 1 Понятие сезонности.
- 2 Методы моделирования сезонности.
- 3 Виды сезонности.

### ***Задача для решения***

**Задача.** Используя метод Четверикова, выделить из временного ряда, характеризующего объем перевозок автотранспортного предприятия (таблица 6.1), сезонную компоненту.

Таблица 6.1 – Исходные данные

| Год | Месяц |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
| 1   | 7,62  | 6,80  | 9,02  | 9,67  | 10,76 | 11,48 | 11,43 | 11,68 | 11,20 | 10,77 | 9,34  | 9,55  |
| 2   | 8,50  | 8,11  | 9,93  | 10,70 | 11,24 | 11,98 | 12,38 | 12,73 | 11,84 | 12,19 | 10,97 | 10,63 |
| 3   | 9,40  | 9,00  | 11,44 | 11,73 | 13,05 | 13,09 | 13,74 | 13,74 | 12,41 | 12,69 | 10,68 | 10,45 |
| 4   | 8,84  | 10,18 | 11,64 | 12,49 | 13,28 | 13,63 | 13,88 | 13,82 | 13,11 | 12,96 | 12,01 | 10,75 |
| 5   | 9,15  | 8,02  | 10,87 | 12,01 | 13,96 | 14,39 | 14,41 | 14,45 | 13,56 | 13,39 | 12,40 | 12,05 |
| 6   | 10,80 | 10,24 | 12,63 | 13,50 | 15,03 | 15,33 | 15,24 | 15,02 | 14,51 | 14,12 | 13,09 | 12,35 |
| 7   | 11,86 | 11,47 | 12,81 | 14,34 | 15,54 | 15,61 | 15,22 | 15,83 | 15,46 | 14,83 | 13,93 | 14,00 |
| 8   | 10,84 | 11,55 | 13,31 | 14,78 | 16,08 | 16,60 | 16,41 | 16,72 | 16,65 | 15,68 | 14,67 | 14,75 |
| 9   | 12,19 | 12,48 | 14,84 | 15,65 | 16,85 | 17,32 | 17,69 | 17,62 | 16,39 | 16,37 | 15,19 | 14,17 |
| 10  | 13,21 | 12,46 | 15,33 | 16,40 | 17,44 | 17,26 | 17,89 | 17,76 | 16,97 | 16,85 | 15,78 | 14,86 |
| 11  | 14,08 | 13,19 | 15,26 | 16,30 | 17,78 | 18,07 | 18,31 | 18,71 | 18,25 | 17,70 | 15,87 | 16,47 |
| 12  | 14,73 | 13,66 | 17,59 | 17,74 | 19,97 | 19,28 | 19,44 | 19,95 | 19,58 | 18,23 | 17,41 | 16,87 |
| 13  | 14,29 | 14,32 | 17,50 | 18,10 | 19,82 | 19,71 | 19,94 | 20,94 | 19,96 | 19,31 | 18,52 | 17,85 |

## 7 Моделирование взаимосвязи по временным рядам

### *Теоретические сведения*

Временной ряд – совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени.

Аддитивная модель – модель вида

$$Y = T + S + E, \quad (7.1)$$

где  $T$  – трендовая компонента;

$S$  – циклическая компонента;

$E$  – случайная компонента.

Мультипликативная модель – модель вида

$$Y = T \cdot S \cdot E. \quad (7.2)$$

Автокорреляция временного ряда – корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда.

Лаг – число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции.

Коэффициент автокорреляции уровней ряда первого порядка характеризует зависимость между соседними уровнями ряда  $y_t$  и  $y_{t-1}$  и определяется по формуле

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}, \quad (7.3)$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n y_t}{n-1}; \quad (7.4)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^n y_{t-1}}{n-1}. \quad (7.5)$$

Автокорреляционная функция временного ряда – последовательность коэффициентов автокорреляции уровней временного ряда.

Коррелограмма – график зависимости значений автокорреляционной функции от величины лага.

Аналитическое выравнивание временного ряда – способ моделирования тенденции временного ряда: построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, или тренда.

*Функции, используемые для построения трендов.*

1 Линейный тренд:  $y_t = a + bt$ ;

2 Нелинейные функции:

–  $y_t = a + b / t$  – гипербола;

–  $y_t = ab^t$  – степенная функция;

–  $y_t = ae^{bt}$  – экспоненциальная функция;

–  $y_t = a_0 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots, a_m t^m$  – параболы разных порядков.

*Алгоритм построения аддитивной или мультипликативной модели.*

1 Выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней.

1.1 Суммируем уровни ряда последовательно за каждый промежуток времени, в котором наблюдаются колебания со сдвигом на один момент времени и определяем условные величины показателя  $Y$ .

1.2 Делим полученные величины на число моментов времени в промежутке и находим скользящие средние.

1.3 Находим средние значения из двух последовательных скользящих средних – центрированные скользящие средние.

2 Оценка сезонной компоненты.

2.1 Находим оценку сезонной компоненты, как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними.

2.2 Находим средние оценки сезонной компоненты за каждый промежуток времени, в котором наблюдаются колебания  $S$ .

2.3 Исходя из условия взаимопогашения сезонных воздействий определяем корректирующий коэффициент  $k$ :

– в аддитивной модели

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n}; \quad (7.6)$$

– в мультипликативной модели

$$k = \frac{n}{\sum_{i=1}^n S_i}, \quad (7.7)$$

где  $n$  – период колебания.

2.4 Рассчитываем скорректированные значения сезонных компонент: в аддитивной модели  $S_i = \bar{S}_i - k$ ; в мультипликативной модели  $S_i = \bar{S}_i \cdot k$ .

3 Элиминирование влияния сезонной компоненты.

Находим значения  $T + E$  как  $Y - S$  – в аддитивной модели и  $T \cdot E$  как  $Y/S$  – в мультипликативной модели.

#### 4 Определение трендовой компоненты ряда.

4.1 Трендовая компонента ряда определяется с помощью построения регрессионной модели, параметры которой находятся методом наименьших квадратов.

4.2 С помощью уравнения регрессии находим уровни трендовой компоненты  $T$  для каждого момента времени  $t$ .

5 Находим значения  $T + E$  или  $T \cdot E$ .

6 Находим случайную компоненту  $E = Y - (T + S)$  или  $E = Y / (T + S)$ .

7 Оценка качества модели.

7.1 Находим сумму квадратов случайной компоненты.

7.2 Находим отношение суммы квадратов случайной компоненты суммы квадратов случайной компоненты к общей сумме квадратов отклонений уровней ряда от его среднего значения:

$$\frac{E^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} \cdot 100. \quad (7.8)$$

#### **Вопросы для обсуждения**

- 1 Дайте определение аддитивной модели.
- 2 Дайте определение мультипликативной модели.
- 3 Каким образом можно оценить сезонную компоненту?

#### **Задачи для решения**

**Задача 1.** Построить аддитивную модель временного ряда, описывающего объем транспортно-экспедиторских услуг автотранспортного предприятия за 4 года поквартально (таблица 7.1).

Таблица 7.1 – Исходные данные

|                    |   |     |   |   |     |     |   |    |   |     |     |    |    |     |    |      |
|--------------------|---|-----|---|---|-----|-----|---|----|---|-----|-----|----|----|-----|----|------|
| $t$                | 1 | 2   | 3 | 4 | 5   | 6   | 7 | 8  | 9 | 10  | 11  | 12 | 13 | 14  | 15 | 16   |
| $Y(t)$ ,<br>млн р. | 6 | 4,4 | 5 | 9 | 7,2 | 4,8 | 6 | 10 | 8 | 5,6 | 6,4 | 11 | 9  | 6,6 | 7  | 10,8 |

**Задача 2.** Построить аддитивную и мультипликативную модель временного ряда (таблица 7.2). Получить прогноз выручки от оказания логистических услуг в следующем году.

Таблица 7.2 – Исходные данные

|                    |     |      |     |     |      |      |     |      |     |      |      |      |     |      |     |      |
|--------------------|-----|------|-----|-----|------|------|-----|------|-----|------|------|------|-----|------|-----|------|
| $t$                | 1   | 2    | 3   | 4   | 5    | 6    | 7   | 8    | 9   | 10   | 11   | 12   | 13  | 14   | 15  | 16   |
| $Y(t)$ ,<br>млн р. | 6,6 | 4,84 | 5,5 | 9,9 | 7,92 | 5,28 | 6,6 | 10,5 | 8,8 | 6,23 | 7,04 | 12,1 | 9,9 | 7,26 | 7,7 | 12,9 |

## 8 Нестационарные временные ряды

### *Теоретические сведения*

Нестационарность – это свойство временного ряда, которое выражается в изменении, статистических характеристик, таких как математическое ожидание и дисперсия, с течением времени. Нестационарное поведение ряда может проявляться как тренд, цикличность, сезонность или случайное блуждание, либо их сочетание (рисунок 8.1)

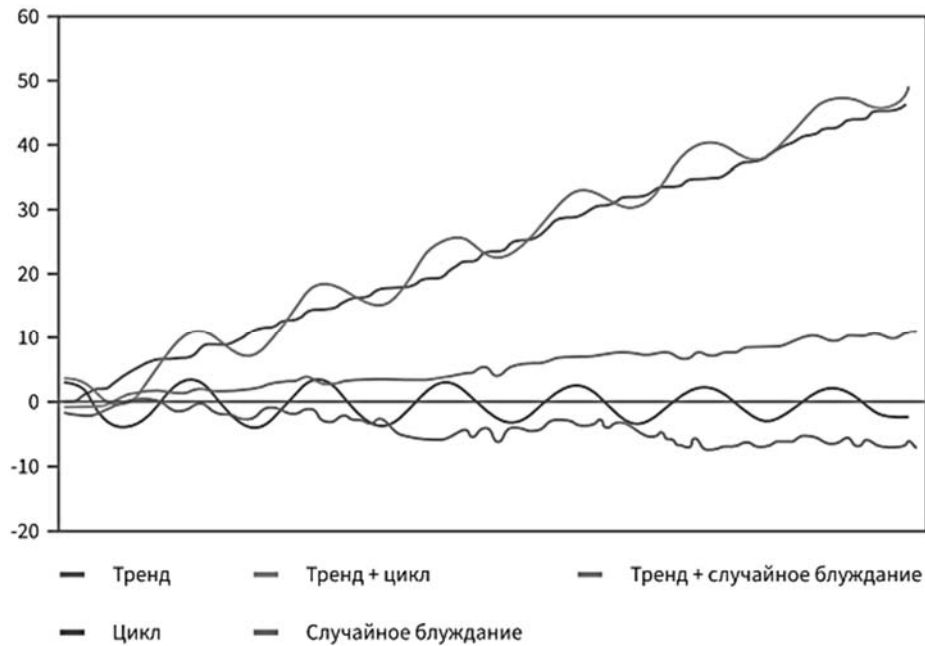


Рисунок 8.1 – Примеры нестационарного поведения

Нестационарные временные ряды трудно поддаются моделированию и прогнозированию, поскольку результаты, полученные с их использованием, часто оказываются ложными: анализ выявляет несуществующие зависимости и закономерности. Для получения корректных и надежных результатов анализа нестационарные временные ряды необходимо преобразовать в стационарные.

К наиболее популярным методам определения стационарности во временных рядах можно отнести:

- расширенный тест Дики – Фуллера (Augmented Dickey – Fuller test, ADF);
- тест Кватковского – Филлипса – Шмидта – Шина (Kwiatkowski – Phillips – Schmidt – Shin test, KPSS);
- визуальное изучение графика временных рядов и разбивка его на трендовые, сезонные и циклические компоненты.

Одной из ключевых причин, почему временные ряды должны быть приведены к стационарному виду перед их анализом, является то, что многие его методы предполагают стационарность.

Например, широко используемая модель ARIMA для прогнозирования временных рядов предполагает, что ряд является стационарным. В противном случае прогнозы будут некорректными.

Временные ряды можно привести к стационарному виду с помощью различных методов, например: Дифференцирование – включает в себя удаление тренда путем вычитания последовательных значений ряда друг из друга. Декомпозиция временных рядов – разделение временных рядов на трендовые, сезонные и циклические компоненты. Логарифмические преобразования – используются для уменьшения трендовой составляющей и стабилизации дисперсии. Тем не менее преобразование временных рядов к стационарному виду для их последующего анализа нужно производить с осторожностью, поскольку при этом значения ряда искажаются, и анализ может дать некорректные результаты.

1 Для определения типа процесса строится его коррелограмма. В случае запаздывания на  $l$  шагов по времени имеем

$$\overline{y_{1l}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-l} y_t}{n-l}; \quad (8.1)$$

$$\overline{y_{2l}} = \frac{\sum_{t=l+1}^n y_t}{n-l}; \quad (8.2)$$

$$r_l = \frac{\sum_{t=1}^{n-l} y_t \cdot y_{t+l} - (n-l) \cdot \overline{y_{1l}} \cdot \overline{y_{2l}}}{\sqrt{(\sum_{t=1}^{n-l} (y_t^2 - (n-l) \overline{y_{1l}}^2)) \cdot (\sum_{t=l+1}^n (y_t^2 - (n-l) \overline{y_{2l}}^2))}}. \quad (8.3)$$

Необходимо заметить, что с увеличением запаздывания  $l$ , объем выборки по которой вычисляется,  $r_l$  уменьшается и равен  $n - l$ . При небольших  $n$  это приведет к тому, что лишь большие по абсолютной величине значения  $r_l$  будут значимыми. Поэтому запаздывания  $l$  берут такими, чтобы  $n - l$  было достаточно велико для вычисления значимых  $r_l$ . На практике обычно берут  $l \leq n / 4$ . После вычисления  $r_l$  чертится коррелограмма и проводится ее анализ. Он оказывается весьма полезным при изучении закономерностей развития, описываемого временным рядом.

Нестационарный ряд. Если ряд имеет тренд и относительно небольшие колебания вокруг него или существует явная зависимость между прошлым и будущим ряда (рисунок 8.2, *а*), коррелограмма при тенденции ряда к росту показывает убывание положительных  $r_l$  при возрастании  $l$  (рисунок 8.2, *б*).

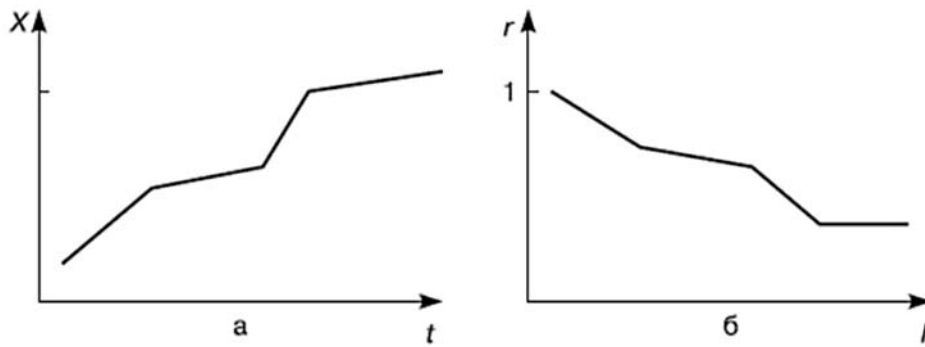


Рисунок 8.2 – Коррелограмма

Причем для моделирования процесса важно выяснить характер убывания  $r_l$  к нулю. Если убывание носит линейный или степенной характер, то такие ряды имеют «долговременную память». Если же убывание быстрое, носит экспоненциальный характер, то такие ряды имеют «кратковременную память» и могут быть описаны моделями автокорреляции – скользящего среднего (модели Бокса – Дженкинса).

Полностью случайный ряд (белый шум). В этом случае наблюдаются незначимые, малые значения  $r_l$ , близкие к нулю. Коррелограмма стационарного ряда показывает несколько высоких по абсолютной величине значений  $r_l$ ,  $l \leq L$ , остальные  $r_l$  при  $l > L$  близки к нулю. Этот случай может быть описан моделью авторегрессии порядка  $L$ .

Стационарный процесс. Значения процесса колеблются вокруг определенного уровня, размах колебаний не увеличивается и не уменьшается с течением времени. В этом случае коррелограмма показывает чередование затухающих положительных и отрицательных последовательных значений  $r_l$  (рисунок 8.3).

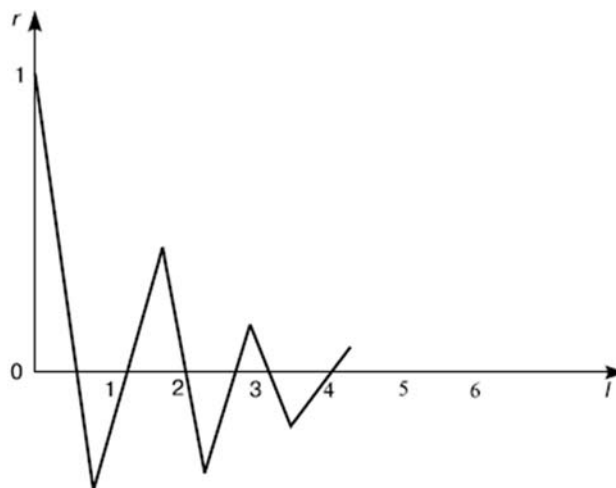


Рисунок 8.3 – Коррелограмма стационарного ряда

Временные ряды с периодической компонентой. В этом случае на коррелограмме после периода затухания появляется одно или несколько сравнительно больших по абсолютной величине значений  $r_l$  (рисунок 8.4).

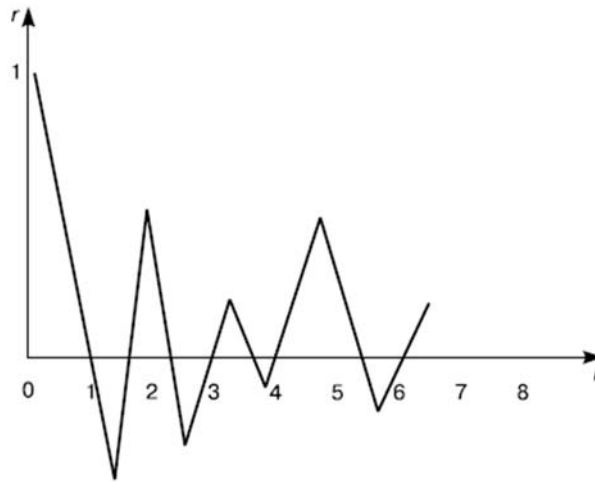


Рисунок 8.4 – Коррелограмма временного ряда с периодической компонентой

## 2 Выделение тренда в случае нестационарного временного ряда.

Процесс выделения тренда (выравнивание ряда) включает в себя три этапа:

- выбор типа кривой, соответствующей характеру изменения ряда;
- определение числовых значений параметров кривой;
- оценка качества подобранной модели тренда.

На практике используется несколько приемов, позволяющих подобрать соответствующую (адекватную) действительности форму кривой.

Первый прием – визуальный – является наиболее простым. Форма кривой выбирается на основе графического изображения временного ряда, формы его корреляционного поля.

Второй прием заключается в вычислении последовательных разностей. Порядок разностей, при котором они становятся примерно одинаковыми, берется в качестве степени аппроксимирующего (выравнивающего) многочлена. Для нахождения коэффициентов этих кривых используют метод наименьших квадратов.

Часто используются другие критерии отбора. Обычно в качестве критерия принимают сумму квадратов отклонений фактических значений от расчетных, полученных выравниванием. Выбирается кривая, которой соответствует минимальное значение критерия. Отбор кривых следует проводить в два этапа. На первом этапе по большей части данных строят различного вида зависимости  $y_t$ . Затем по оставшимся данным (проверочной последовательности) с помощью критерия минимума квадратов отклонений выбирают кривую с минимальным значением критерия на проверочной последовательности. Этот прием более трудоемкий, но, как правило, дает лучшие результаты при прогнозировании тенденции развития временного ряда.

## 3 Подбор вида кривой для тренда. Расчет параметров тренда.

## 4 Оценивается автокорреляция остатков.

Вычитая из данных  $y_t$  выровненные значения  $\bar{y}_t$  получаем остатки, случайную составляющую тренда:

$$e_t = \bar{y}_t - y_t. \quad (8.4)$$

Обычно считается, что выравнивание удовлетворительное, если остатки  $e_t$  образуют стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием.

Кроме того, для корректного применения МНК необходимо более жесткое предположение, что  $e_t$  – случайные независимые (хотя бы некоррелированные) величины с  $m_{et} = 0$ .

Если  $e_t$  коррелируют между собой, то в модели присутствует автокорреляция остатков. Итак, при анализе модели тренда необходимо определить, присутствует ли автокорреляция в  $e_t$ . Предварительную оценку случайности поведения остатков проводят на основе критерия поворотных точек. В соответствии с ним каждое значение  $e_t$  ряда остатков сравнивают с двумя рядом стоящими значениями  $e_{t-1}$  и  $e_{t+1}$ . Если он больше или меньше их, то эта точка считается поворотной. Далее подсчитывается сумма поворотных точек  $p$ . В случайном ряду чисел должно выполняться строгое неравенство

$$p > [(2n - 2) / 3 - 2\sqrt{(16n - 29) / 90}]. \quad (8.5)$$

Квадратные скобки означают целую часть числа.

Критерий поворотных точек является предварительным, его следует дополнить другими более точными критериями. Простейшим из известных критериев является критерий Неймана. Расчетное значение критерия

$$Q = \frac{F}{S^2}, \quad (8.6)$$

где

$$F = \frac{\sum_{t=1}^n (e_{t+1} - e_t)^2}{n - 1}; \quad S^2 = \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n}. \quad (8.7)$$

Для доказательства положительной корреляции вычисленное значение  $Q$  должно быть меньше  $Q_{кр1}$ , а для доказательства отрицательной корреляции  $Q$  должно быть больше  $Q_{кр2}$ .

Помимо критерия Неймана для временных рядов используется хорошо изученный тест Дарбина – Уотсона.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_{(t)} - e_{(t-1)})^2}{\sum_{t=1}^n e_{(t)}^2}. \quad (8.8)$$

Если  $0 \leq d$  (или  $d'$ )  $\leq d1$  – модель неадекватна (уровни ряда остатков сильно автокоррелированы);

$d2 \leq d$  (или  $d'$ )  $\leq 2$  – модель адекватна;

$d1 \leq d$  (или  $d'$ )  $\leq d2$  – однозначного вывода сделать нельзя и необходимо применять другие критерии (на основе коэффициента автокорреляции  $r(1)$ ).

### **Вопросы для обсуждения**

- 1 Понятие нестационарного ряда.
- 2 Методы определения стационарности во временных рядах.

### **Задача для решения**

**Задача.** По заданному временному ряду, характеризующего объем услуг транспортно-логистического центра, из таблицы 8.1 требуется:

- определить наличие тренда, выявить тип процесса по его коррелограмме;
- оценить форму кривой выравнивания одним из приемов;
- получить расчетные коэффициенты (параметры) модели;
- проверить наличие (отсутствие) автокорреляции остатков модели.

Таблица 8.1 – Исходные данные

| Наблюдение | Задача |        |       |       |
|------------|--------|--------|-------|-------|
|            | 1      | 2      | 3     | 4     |
| 1          | 21,764 | 9,447  | 3,235 | 1,461 |
| 2          | 8,538  | 3,535  | 5,167 | 3,155 |
| 3          | 6,062  | 2,167  | 2,727 | 2,155 |
| 4          | 5,531  | 0,389  | 2,996 | 2,277 |
| 5          | 4,325  | –1,849 | 3,416 | 2,49  |
| 6          | 4,276  | 0,046  | 4,053 | 2,317 |
| 7          | 2,868  | –0,906 | 4,973 | 2,081 |
| 8          | 3,245  | –0,559 | 3,365 | 3,4   |
| 9          | 4,859  | 0,772  | 3,833 | 3,282 |
| 10         | 2,563  | –1,431 | 5,608 | 2,887 |
| 11         | 3,174  | 0,775  | 6,762 | 2,662 |
| 12         | 4,112  | 0,406  | 3,654 | 3,698 |
| 13         | 2,435  | –0,698 | 5,985 | 3,172 |
| 14         | 2,365  | 0,77   | 4,167 | 3,758 |
| 15         | 4,637  | 2,007  | 7,646 | 4,171 |
| 16         | 2,733  | –0,233 | 7,009 | 5,121 |
| 17         | 3,123  | –0,873 | 8,511 | 4,786 |
| 18         | 3,198  | 0,452  | 7,105 | 5,689 |
| 19         | 3,905  | –1,606 | 9,466 | 5,952 |
| 20         | 3,813  | 1,505  | 9,977 | 5,882 |

## Список литературы

- 1 **Агаларов, З. С.** Эконометрика : учебник / З. С. Агаларов, А. И. Орлов. – 2-е изд. – М. : Дашков и К, 2023. – 380 с.
- 2 **Бабешко, Л. О.** Эконометрика и эконометрическое моделирование в Excel и R : учебник / Л. О. Бабешко, И. В. Орлова. – М. : ИНФРА-М, 2025. – 300 с.
- 3 **Власов, Д. А.** Эконометрика : учеб. пособие / Д. А. Власов. – М. : ИНФРА-М, 2025. – 223 с.
- 4 **Голда, О. А.** Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб.-метод. пособие для студентов специальности 1-28 01 01 «Экономика электронного бизнеса» : в 2 ч. / О. А. Голда, Н. М. Матвейчук. – Мн. : БГУИР, 2019. – Ч. 1. – 153 с.
- 5 **Заяц, О. А.** Эконометрика : учеб. пособие / О. А. Заяц. – Волгоград : Волгоград. ГАУ, 2021. – 140 с.
- 6 **Заяц, Т. А.** Эконометрика и экономико-математические методы и модели : пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования 1-й ступени и переподготовки руководящих работников и специалистов : в 3 ч. / Т. А. Заяц, О. И. Еськова, М. А. Грибовская. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потреб. кооперации, 2021. – Ч. 1. – 95 с.
- 7 **Настин, Ю. Я.** Эконометрика. Практикум : учеб. пособие / Ю. Я. Настин. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Лань, 2026. – 164 с.
- 8 **Ругалёва, И. Е.** Эконометрика : пособие для студентов специальности 1-26 02 03 «Маркетинг» / И. Е. Ругалёва. – Мн. : БНТУ, 2023. – 103 с.
- 9 **Сигал, А. В.** Теория вероятностей с элементами математической статистики, теории случайных процессов и эконометрики : учеб. пособие / А. В. Сигал. – М. : ИНФРА-М, 2023. – 385 с.
- 10 **Юрьева, А. А.** Математическое программирование : учеб. пособие / А. А. Юрьева. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2021. – 432 с.