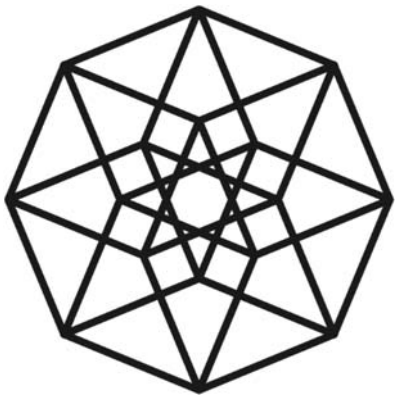
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения



Могилев 2026

УДК 519.216
ББК 22.171
С49

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» июня 2026 г., протокол № 10

Составитель Т. С. Старовойтова

Рецензент канд. физ-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения по дисциплине «Случайные процессы», основные формулы, образцы решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения на практических занятиях и домашние задания.

Учебное издание

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать 19.11.2026. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,13. Тираж 56 экз. Заказ № 821.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Основные понятия теории случайных процессов. Законы распределения и основные характеристики случайных процессов. 4
2 Практическое занятие № 2. Потоки событий, их свойства и классификация 8
3 Практическое занятие № 3. Марковские процессы с дискретными состояниями. Марковские цепи. Стационарный режим для цепи Маркова 12
4 Практическое занятие № 4. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем 17
5 Практическое занятие № 5. Марковские процессы гибели и размножения с непрерывным временем 22
6 Практическое занятие № 6. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения 24
7 Практическое занятие № 7. Преобразования случайных процессов 27
8 Практическое занятие № 8. Стационарные случайные процессы 30
Список литературы 34

1 Практическое занятие № 1. Основные понятия теории случайных процессов. Законы распределения и основные характеристики случайных процессов

Понятие случайного процесса является обобщением понятия случайной величины: *случайным процессом* $X(t)$ называется процесс, значение которого при любом фиксированном t является случайной величиной $X(t)$. Случайная величина $X(t)$, в которую обращается случайный процесс при данном t, называется *сечением* случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента t.

Реализацией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается случайный процесс $X(t)$ в результате опыта.

Случайный процесс $X(t)$ называется процессом *с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты t_1, t_2, …, t_n, …, число которых конечно или счётно. Случайный процесс $X(t)$ называется процессом *с непрерывным временем*, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода.

Одномерный случайный процесс называется процессом *с непрерывными состояниями*, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную (или смешанную) случайную величину и, значит, множество её значений несчётно. Аналогично многомерный случайный процесс называется процессом с непрерывными состояниями, если при любом t множество возможных значений случайного вектора, определяющего состояние системы, в которой протекает процесс, несчётно.

Случайный процесс называется процессом *с дискретными состояниями*, если в любой момент t множество его состояний конечно или счётно. Другими словами, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной $X(t)$ (в многомерном случае – несколькими дискретными случайными величинами).

Элементарной случайной функцией называется такая функция аргумента t, где зависимость от t представлена обычной, неслучайной функцией, в которую в качестве параметров входят одна или несколько обычных, не зависящих от t случайных величин.

Одномерным законом распределения случайного процесса $X(t)$ называется закон распределения сечения процесса $X(t)$ при фиксированном значении аргумента t. *Двумерный закон распределения* случайного процесса $X(t)$ может быть представлен совместной функцией распределения двух сечений случайного процесса, взятых соответственно для моментов t_1 и t_2.

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса.

Дисперсия $D(t)$ случайного процесса $X(t)$ при каждом t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(t)$ случайного процесса $X(t)$ называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии $D(t)$.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $K(t,t')$ двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений аргументов t и t' равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса: $X(t)$ и $X(t')$.

Нормированной корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется функция $r(t,t')$, полученная делением корреляционной функции $K(t,t')$ на произведение средних квадратических отклонений $\sigma(t)$, $\sigma(t')$.

Задачи для самостоятельной работы

1.1 Построить семейства реализаций следующих элементарных случайных функций:

а) $Y(t)=Xe^{-t}$ $(t>0)$, где X – непрерывная случайная величина, распределённая равномерно в интервале $(-1,1)$;

б) $Y(t)=e^{-tX}$ $(t>0)$, где X – случайная величина, принимающая только положительные значения;

в) $Y(t)=at+X$, где X – случайная величина; a – неслучайная величина;

г) $Y(t)=X\cos at$, где X – случайная величина; a – неслучайная величина;

д) $Y(t)=\cos Ut$, где U – случайная величина, принимающая положительные значения;

е) $Y(t)=a+Ut+Vt^2$, где (U,V) – система двух случайных величин; a – неслучайная величина.

Решение

Семейство реализаций элементарной случайной функции $Y(t)$ показано на рисунке 1. Каждая из них представляет собой показательную кривую с ординатами, пропорциональными ординатам кривой e^{-t}, отдельные реализации различаются между собой масштабом по оси ординат. Когда случайная величина X принимает отрицательное значение, соответствующая реализация лежит ниже оси абсцисс.

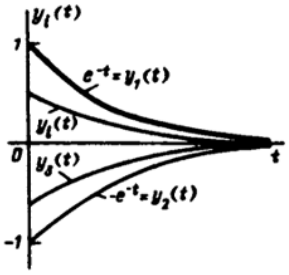


Рисунок 1 – Семейство реализаций для функции $Y(t) = Xe^{-t}\ \ (t > 0)$

1.2 Элементарная случайная функция $Y(t)$ имеет вид $Y(t) = Xe^{-t}\ \ (t > 0)$, где X – случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами m и σ. Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, а также нормированную корреляционную функцию и плотность распределения.

Решение

Пользуясь правилами нахождения числовых характеристик линейных функций случайных величин, находим $m_y(t) = M\left[Xe^{-t}\right] = e^{-t}M[X] = me^{-t}$; $D_y(t) = \left(e^{-t}\right)^2 D[X] = \sigma^2 e^{-2t}$; $\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)} = \sigma e^{-t}$.

Найдем корреляционную функцию $K_x(t,t')$. Центрированный случайный процесс для $Y(t) = Xe^{-t}$ имеет вид $\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = Xe^{-t} - me^{-t} = \overset{\circ}{X}e^{-t}$. Тогда $K_y(t,t') = M\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right] = M\left[\overset{\circ}{X}e^{-t}\overset{\circ}{X}e^{-t'}\right] = \sigma^2 e^{-(t+t')}$.

Нормированная корреляционная функция $r_y(t,t')$ выражается следующим образом: $r_y(t,t') = \dfrac{K_y(t,t')}{\sigma_y(t)\sigma_y(t')} = \dfrac{\sigma^2 e^{-(t+t')}}{\sigma e^{-t}\sigma e^{-t'}} \equiv 1$. Плотность распределения $f(t,y)$ для функции $Y(t) = Xe^{-t}$ равна $f(t,y) = \left[\sqrt{2\pi}\,\sigma_y(t)\right]^{-1} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y - m_y(t)}{\sigma_y(t)}\right)^2\right]$.

1.3 Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию, нормированную корреляционную функцию, если $Y(t)$ имеет вид:

а) $Y(t) = e^{-tX}\ \ (t > 0)$, где X – случайная величина, распределённая по показательному закону с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \ (\lambda > 0,\ x > 0)$;

б) $Y(t)=aX+t$, где X – случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами m и σ; a – неслучайная величина;

в) $Y(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t$, где U, V – некоррелированные случайные величины с математическим ожиданиями, равными нулю и одинаковыми дисперсиями, равными σ; ω – неслучайная величина.

1.4 Найти одномерный закон распределения элементарной случайной функции $Y(t)=Vt+a$, где V – случайная величина, распределённая нормально с параметрами m и σ.

Решение

Так как случайная величина V распределена нормально с параметрами m и σ, то для любого фиксированного момента времени t случайная величина $Y(t)$ тоже будет распределена нормально как линейная функция нормально распределенной случайной величины V, но с измененными параметрами.

Найдем их: $M\left(Y(t)\right)=M\left(V\,t+a\right)=M\left(V\,t\right)+a=M\left(V\right)\cdot t+a=m\cdot t+a$; $\sigma\left(Y(t)\right)=\sigma\left(V\,t+a\right)=\sigma\left(V\,t\right)=\sigma|t|$.

Одномерный закон распределения элементарной случайной функции $Y(t)=V\,t+a$ нормален с параметрами $mt+a$ и $\sigma|t|$ и имеет вид

$$f(t,x)=\frac{1}{\sigma|t|\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-mt-a}{\sigma|t|}\right)^2\right\} \text{ или } .f(t,x)=\frac{1}{\sigma|t|\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-mt-a}{\sigma|t|}\right)^2}.$$

1.5 Найти одномерный закон распределения элементарной случайной функции $Y(t)=V\cos(\psi t-\Theta)$, где случайные величины V и Θ независимы; случайная величина V распределена нормально с характеристиками m и σ; ψ – неслучайный параметр; случайная величина Θ распределена равномерно в интервале $(0,2\pi)$.

Домашнее задание

1.6 Построить семейства реализаций следующих элементарных случайных функций:

а) $Y(t)=X\cdot t+a$, где X – случайная величина; a – неслучайная величина;

б) $Y(t)=\cos(\omega t+X)$, где X – случайная фаза колебаний, распределённая равномерно в интервале $(-\pi,\pi)$;

в) $Y(t)=U\cos at+V\sin at$, где (U,V) – система случайных величин; a – неслучайная величина.

1.7 Элементарная случайная функция $Y(t)$ имеет вид $Y(t)=Xt+a$, где $X-$ случайная величина, распределённая по закону равномерной плотности на участке (α,β); a – неслучайная величина. Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию, нормированную корреляционную функцию.

2 Практическое занятие № 2. Потоки событий, их свойства и классификация

Потоком событий называется последовательность однородных или неоднородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. В общем случае поток событий представляет собой последовательность точек Θ_1, Θ_2, …, Θ_n, … на оси времени с разделяющими их случайными интервалами $T_1=\Theta_2-\Theta_1$, $T_2=\Theta_3-\Theta_2$, …, $T_n=\Theta_{n+1}-\Theta_n$, … . С потоком однородных событий можно связать случайный процесс их накопления. Обозначим $X(t)$ число событий потока, появившихся до момента времени t .

Поток событий называется *регулярным*, если интервалы между событиями одинаковы и равны определённой неслучайной величине τ. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него ровно одного события, т. е. при $\Delta t\to 0$ эта вероятность представляет собой бесконечно малую высшего порядка.

Для ординарного потока обозначим $X(t,\Delta t)$ случайное число событий, попадающих на элементарный участок $(t,t+\Delta t)$. *Интенсивностью* (*плотностью*) ординарного потока событий в момент t называется

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t},$$

где $M[X(t,\Delta t)]$ – математическое ожидание случайной величины $X(t,\Delta t)$, если этот предел существует.

Интенсивность потока событий – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени, для элементарного участка Δt, примыкающего к t .

Среднее число событий ординарного потока, приходящееся на интервал времени τ, примыкающий к t ,

$$M[X(t,\tau)]=\int_t^{t+\tau}\lambda(t)dt.$$

В частности, при постоянной интенсивности потока $M[X(t,\tau)]=\lambda\tau$.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если для любых непересекающихся участков времени τ_1, τ_2, …, τ_n числа событий $X_1=X(t_1,\tau_1)$, $X_2=X(t_2,\tau_2)$, …, $X_n=X(t_n,\tau_n)$, попадающих на эти участки, представляют собой независимые случайные величины.

Ординарный поток событий, в котором отсутствует последействие, называется *пуассоновским потоком*.

Поток событий называется *стационарным*, если все его вероятностные характеристики *не меняются со временем*. Интенсивность стационарного потока событий постоянна.

Поток событий, обладающий свойствами ординарности, стационарности и отсутствия последействия, называется *простейшим* потоком.

Поток событий называется потоком *с ограниченным последействием*, если случайные интервалы T_1, T_2, …, T_n, … между соседними по времени событиями представляют собой независимые случайные величины. Стационарный поток с ограниченным последействием называется *потоком Пальма*.

Для потока Пальма интервалы между событиями представляют собой последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Простейший (стационарный пуассоновский) поток является потоком Пальма.

Потоком Эрланга k-го порядка с параметром λ называется поток Пальма, у которого интервалы между событиями распределены по закону Эрланга k-го порядка ($k=2,3,\ ...$). Поток Эрланга k-го порядка может быть получен из простейшего с помощью его «просеивания» («разрежения»), при этом в простейшем потоке сохраняется каждое k-е событие, а все промежуточные отбрасываются.

Например, если в простейшем потоке с интенсивностью λ сохранять каждое второе событие, а промежуточное выбрасывать, то получится поток Эрланга 2-го порядка. Простейший поток представляет собой поток Эрланга 1-го порядка.

Предельная теорема для суммарного потока определяет условия, при которых сумма независимых, ординарных, стационарных потоков событий сходится к пуассоновскому стационарному (простейшему) потоку.

Предельная теорема для редеющих потоков: если стационарный поток Пальма с интенсивностью λ подвергать последовательно независимым преобразованиям $\tilde{R}_{p_1}, \tilde{R}_{p_2}, \ldots, \tilde{R}_{p_n}, \ldots$, то при $n\to\infty$ результирующий поток будет простейшим с интенсивностью λ.

Задачи для самостоятельной работы

2.1 Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков: потока 1 с интенсивностью λ_1 и потока 2 с интенсивностью λ_2. Будет ли поток 3,

получившийся в результате суперпозиции, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?

2.2 Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью λ; каждое событие, независимо от других, с вероятностью p сохраняется в потоке, а с вероятностью $1-p$ – выбрасывается (такая операция часто называется *p-преобразованием* потока). Каким будет поток, получающийся в результате p-преобразования простейшего потока?

2.3 Интервал времени t между событиями в ординарном потоке имеет плотность

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t>t_0;\\ 0, & t<t_0.\end{cases}$$

Интервалы между событиями независимы.

Требуется:

а) построить график плотности $f(t)$;

б) определить, является ли данный поток простейшим;

в) определить, является ли данный поток потоком Пальма;

г) найти интенсивность потока;

д) найти коэффициент вариации интервала между событиями.

2.4 Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью λ. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, которое ему придётся ждать. Определить его математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Решение

Плотность распределения времени ожидания будет такой же, как плотность распределения промежутка между машинами, т. е. $f(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}\ \ (t>0)$, т. к. в простейшем потоке «будущее» никак не зависит от «прошлого», в частности, для данной задачной ситуации от того, сколько времени тому назад прошла последняя машина. Для показательного закона распределения времени T получаем характеристики $m_t=\frac{1}{\lambda}$, $D_t=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma_t=\sqrt{D_t}=\frac{1}{\lambda}=m_t$.

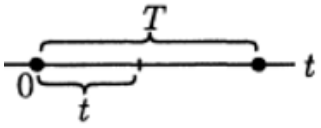
2.5 Пассажир выходит на остановку автобуса в некоторый момент времени, никак не связанный с расписанием движения. Автобусы следуют друг за другом регулярно с интервалом времени длины l. Найти закон распределения времени T, которое пассажиру придётся ждать автобуса, и выразить его характеристики m, σ через интенсивность потока автобусов λ.

2.6 Рассматривается поток Эрланга k-го порядка с плотностью распределения интервала T между событиями: $f_k(t) = \dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$. Найти функцию распределения $F_k(t)$ этого интервала.

Решение

Функцию распределения $F_k(t)$ найдем непосредственно из определения $F_k(t) = P\{T < t\}$. Рассмотрим противоположное событие и найдем $P\{T > t\}$.

Начало отсчета O свяжем с одним из событий потока Эрланга и отложим от него вправо два участка: T (расстояние до следующего события потока Эрланга) и $t < T$.



Для выполнения неравенства $T > t$ нужно, чтобы на участок t попало меньше, чем k событий простейшего потока с интенсивностью λ (либо 0, либо 1, …, либо $k-1$).

Вероятность того, что на участок t попадет m событий, $P_m = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$.

По правилу сложения вероятностей $P(T > t) = \sum_{m=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$.

Отсюда $F_n(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = 1 - R(k-1, \lambda t)$, где $1 - R(k-1, \lambda t)$ находится по таблице.

Замечание. Функцию распределения $F_k(t)$ можно было бы найти по формуле $\int_0^t f_k(t)\,dt$.

2.7 Найти закон распределения интервала T между событиями в потоке Пальма, если случайная величина $T = \sum_{k=1}^{Y} T_k$, т. е. представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых, где случайные величины T_k независимы и подчинены показательному закону с параметром λ, а случайная величина Y не зависит от них и имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы: $p_n = P\{Y = n\} = pq^{n-1}$ $(0 < p < 1;\ n = 1,2,3,...)$.

2.8 Происходит преобразование простейшего потока с интенсивностью λ, состоящее в следующем. Если расстояние между соседними событиями T оказывается меньше какого-то допустимого предела t_0 («интервала безопасности»), то событие отодвигается от предыдущего на интервал t_0; если же $T > t_0$, то событие остаётся на своём месте. Является ли преобразованный поток простейшим? Является ли он потоком Пальма?

Домашнее задание

2.9 На оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Из этого потока формируется другой следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точку деления вставляется ещё одно событие. Найти плотность распределения $f(t)$ интервала T между соседними событиями в новом потоке. Будет ли этот поток простейшим? Будет ли он потоком Пальма? Каков коэффициент вариации интервала T между событиями?

2.10 В условиях задачи 2.9 преобразованный поток состоит только из вставленных событий (середин интервалов). Ответить на те же вопросы, что и в задаче 2.9.

3 Практическое занятие № 3. Марковские процессы с дискретными состояниями. Марковские цепи. Стационарный режим для цепи Маркова

Рассмотрим физическую систему S, в которой протекает случайный процесс с дискретными состояниями s_1, s_2, …, s_l, …, число которых конечно или счётно. Пусть G – ориентированный граф, вершины которого соответствуют состояниям системы S; возможность перехода системы S из состояния s_i в состояние s_j непосредственно, минуя другие состояния, обозначим стрелкой, ведущая из вершины s_i в вершину s_j.

Состояние s_i называется *источником*, если система S может выйти из этого состояния, но попасть в него обратно уже не может. Состояние s_i называется *концевым* (*поглощающим*), если система S может попасть в это состояние, но выйти из него уже не может. Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j, то состояние s_j называется *соседним* по отношению к состоянию s_i. Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j и из состояния s_j в состояние s_i, то состояния s_i и s_j называются *соседними*. Состояние s_i называется транзитивным, если система S может войти в это состояние и выйти из него.

Пусть V – некоторое подмножество множества всех состояний системы S. Множество V называется *замкнутым* (*концевым*), если система S, попав в одно (или находясь в одном) из состояний $s_i \in V$, не может выйти из этого подмножества состояний. Множество V называется *связным* (*эргодическим*), если из любого состояния, входящего в него, можно попасть в любое другое его состояние. Множество V называется *транзитивным*, если система S может войти в это подмножество и выйти из него.

Случайный процесс называется *процессом гибели и размножения*, если состояния системы образуют цепь, в которой каждое состояние s_i, кроме двух крайних s_0 и s_n, связано прямой и обратной связью с двумя соседними, а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним. Процесс гибели и размножения может в некоторых случаях иметь не конечное, а бесконечно счётное число состояний.

Обозначим $S(t)$ состояние системы S в момент t. Вероятностью i-го состояния в момент t называется вероятность $p_i(t)$ события, состоящего в том, что в момент t система S будет в состоянии s_i.

Случайный процесс, протекающий в системе S с дискретными состояниями s_1, s_2, …, s_l, …, называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от её состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от её поведения в прошлом (при $t < t_0$).

Пусть имеется система S с дискретными состояниями s_1, s_2, …, s_n. Предположим, что случайные переходы системы из состояния в состояние могут происходить только в определённые моменты времени t_0, t_1, t_2, … . Эти моменты называют *шагами* процесса, $t_0 = 0$ – его *началом*.

Пусть случайный процесс представляет собой последовательность или *цепь* событий вида $\{S(k) = s_i\}$, $i = 1,2,...,n$, $k = 0,1,2,...$. Марковский случайный процесс, протекающий в такой системе, называется *марковской цепью*.

Переходными вероятностями марковской цепи на k-м шаге называются условные вероятности $p_{ij}(k)$ перехода системы S на k-м шаге в состояние s_j, если известно, что на предыдущем $(k-1)$-м шаге она была в состоянии s_i. Переходные вероятности можно записать в виде квадратной *стохастической* матрицы $(p_{ij}(k))$ размерности $n \times n$. Для любой строки стохастической матрицы сумма стоящих в ней вероятностей равна единице.

Цепь Маркова называется *однородной*, если переходные вероятности $(p_{ij}(k))$ не зависят от номера шага k: $p_{ij}(k) = p_{ij}$. Для однородной цепи Маркова вероятность $p_j(k)$ нахождения системы S на k-м шаге в состоянии s_j может быть найдена по рекуррентной формуле

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, p_{ij} \quad (j = 1,2, ...,n,\ k = 0,1,2, ...).$$

Задачи для самостоятельной работы

3.1 Система S представляет собой техническое устройство, а его возможные состояния: s_1 – устройство работает исправно; s_2 – устройство неисправно, но это не обнаружено; s_3 – неисправность обнаружена, ведётся поиск её источника; s_4 – источник неисправности найден, ведётся ремонт устройства; s_5 – проводится послеремонтный осмотр (после этого осмотра, если устройство восстановлено в прежнем виде, оно возвращается в состояние s_1, если нет – признаётся негодным и списывается); s_6 – устройство списано за негодностью; s_7 – ведётся профилактический осмотр устройства (если обнаружена неисправность, устройство направляется в ремонт). Построить граф состояний системы S.

3.2 Техническое устройство состоит из n одинаковых узлов. Каждый из узлов может в момент t быть исправным или неисправным; если узел неисправен, его ремонтируют. Состояния s_i системы S занумерованы по числу неисправных узлов. Перескок системы S из состояния s_i не в соседнее с ним состояние практически невозможен. Построить граф состояний системы S. Организованы ли состояния системы по схеме гибели и размножения?

3.3 Система S представляет собой техническое устройство, которое осматривается в определённые моменты времени (скажем, через сутки), и её состояние регистрируется в отчётной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой шаг процесса. Возможные состояния устройства следующие: s_1 – устройство полностью исправно; s_2 – устройство частично неисправно, требует наладки; s_3 – обнаружена серьёзная неисправность, устройство требует ремонта; s_4 – устройство признано непригодным, списано. Как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток и после их выполнения техническое устройство возвращается в состояние s_1 (полностью исправно) или списывается.

Требуется:

а) построить граф состояний технического устройства;

б) привести пример реализации случайного блуждания системы по состояниям.

3.4 В условиях задачи 3.3 задана матрица переходных вероятностей

$$\left(p_{ij} \right) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент ($t_0 = 0$) техническое устройство находится в состоянии s_1 (исправно).

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний технического устройства, соответствующий заданной матрице переходных вероятностей;

б) найти распределение вероятностей состояний технического устройства для первых четырёх шагов ($k = 1,2,3,4$);

в) убедиться, что вероятность поглощающего состояния $p_4(k)$ с увеличением k растёт.

3.5 Система S представляет собой вычислительный центр (ВЦ), у котором имеется три ЭВМ. В определенные моменты времени, разделенные промежутком τ, все ЭВМ осматриваются, в результате чего каждая признается либо исправной и продолжает работать, либо признается неисправной и направляется в ремонт. Вероятность того, что исправная ЭВМ за время τ выйдет из строя, не зависит от того, какое время она уже работала (от «предыстории» процесса), и равна r. Вероятность того, что ремонтируемая ЭВМ за время τ будет приведена в исправность, не зависит от того, сколько времени уже продолжался ремонт и сколько ЭВМ ремонтируется, и равна q. Процессы выхода ЭВМ из строя и их восстановлений протекают независимо друг от друга.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний ВЦ, нумеруя их по числу неисправных ЭВМ:

- s_0 – все три ЭВМ исправны;
- s_1 – одна ЭВМ неисправна, остальные две работают;
- s_2 – две ЭВМ неисправны, одна работает;
- s_3 – все три ЭВМ неисправны;

б) полагая $r = 0,2$, $q = 0,3$, построить размеченный граф состояний ВЦ и найти финальные вероятности.

Решение

Размеченный граф состояний представлен на рисунке 2.

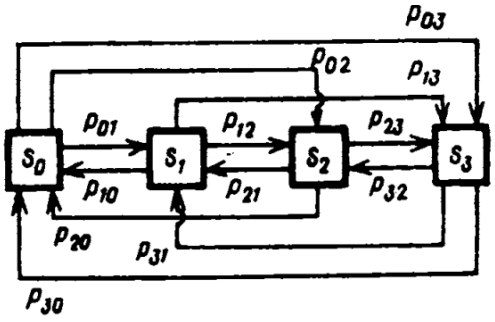


Рисунок 2 – Размеченный граф состояний

1 Вычислим *переходные вероятности* p_{ij}.

Чтобы система из состояния s_1 перешла в состояние s_0, нужно, чтобы неисправная ЭВМ за время τ была отремонтирована, а другие две исправные ЭВМ не вышли из строя: $p_{10} = q(1-r)^2$.

Аналогично $p_{11} = q \cdot 2r(1-r) + (1-q)(1-r)^2$, $p_{12} = q \cdot r^2 + (1-q) \cdot 2r \cdot (1-r)$, $p_{13} = (1-q)r^2$ $\left(\sum_{i=0}^{3} p_{1i} = 1 \right)$.

Подобным образом $p_{23} = (1-q)^2 r$, $p_{22} = (1-q)^2(1-r) + r \cdot 2q(1-q)$, $p_{21} = q^2 r + (1-r)2q(1-q)$, $p_{20} = q^2(1-r)$, $p_{33} = (1-q)^3$, $p_{32} = C_3^2 q(1-q)^2$, $p_{31} = C_3^1 q^2(1-q)$, $p_{30} = q^3$.

Если $r = 0,2$ и $q = 0,3$, то $p_{01} = 0,384$, $p_{02} = 0,096$, $p_{03} = 0,008$, $p_{00} = 0,512$, $p_{10} = 0,192$, $p_{12} = 0,236$, $p_{13} = 0,028$, $p_{11} = 0,544$, $p_{23} = 0,098$, $p_{21} = 0,354$, $p_{20} = 0,072$, $p_{22} = 0,476$, $p_{32} = 0,441$, $p_{31} = 0,189$, $p_{30} = 0,027$, $p_{33} = 0,343$.

2 Для рассматриваемого примера система уравнений $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i p_{ij} = p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ji}$, с учетом нормировочного условия, может быть записана в таком виде:

$$\begin{cases} 0,488p_0 - 0,192p_1 - 0,072p_2 - 0,027p_3 = 0; \\ -0,384p_0 + 0,456p_1 - 0,354p_2 - 0,189p_3 = 0; \\ -0,096p_0 - 0,236p_1 + 0,524p_2 - 0,441p_3 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений одним из известных методов, получаем $p_0 \approx 0,216$, $p_1 \approx 0,432$, $p_2 \approx 0,288$, $p_3 \approx 0,064$.

Домашнее задание

3.6 При некоторых условиях в цепи Маркова с возрастанием k (номера шага) устанавливается стационарный режим, в котором система S продолжает блуждать по состояниям, но вероятности этих состояний уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называются *предельными* (или *финальными*) вероятностями цепи Маркова. Рассматривается ЭВМ в двух состояниях: s_1 – ЭВМ исправна; s_2 – ЭВМ неисправна.

Требуется:

а) построить размеченный граф рассматриваемой системы;

б) указать динамику изменения вероятностей при начальных условиях $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$.

3.7 Уравнения для финальных вероятностей записываются исходя из следующего правила: для стационарного режима суммарный поток вероятности, переводящий систему S в состояние s_j из других состояний, равен суммарному потоку вероятности, выводящему систему из состояния s_j.

Рассматривается система S – станок с числовым программным управлением (ЧПУ), который может быть в следующих состояниях: s_1 – исправен и работает; s_2 – неисправен, неисправность не обнаружена; s_3 – неисправен, проводится средний ремонт; s_4 – не работает, находится на профилактике, s_5 – неисправен, проводится капитальный ремонт.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний станка с ЧПУ;

б) составить уравнения и найти предельные вероятности состояний станка с ЧПУ.

4 Практическое занятие № 4. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем

Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *марковским*, если для любого момента времени t условные вероятности всех состояний системы S в будущем (при $t > t_0$) зависят только от того, в каком состоянии s_j находится система S в настоящем (при $t = t_0$), но не зависят от того, когда и каким образом она пришла в это состояние (т. е. каковы были состояния системы в прошлом (при $t < t_0$)).

Теория марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем обычно излагается в предположении, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием пуассоновских потоков событий (не обязательно стационарных). Будем считать, что переход системы из состояния s_∂ а состояние s_j осуществляется под воздействием пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Переход из s_i в s_j происходит в момент, когда наступает первое событие потока.

Вероятность перехода системы S из состояния s_i, в котором она находилась в момент t, в состояние s_j за элементарный промежуток времени Δt, непосредственно примыкающий к t, приближённо равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$, где $\lambda_{ij}(t)$ – интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему из s_i в s_j. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, – пуассоновские и независимые, то процесс, протекающий в системе S, будет марковским.

Система обыкновенных дифференциальных *уравнений Колмогорова* для вероятностей состояний имеет вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\lambda_{ji}(t) - p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t) \ (i = 1,2, \ ..., n).$$

Систему уравнений Колмогорова решают при начальных условиях, задающих вероятности состояний в начальный момент при $t = 0$ $p_1(0)$, $p_2(0)$, …, $p_n(0)$, причём для любого момента времени t выполняется нормировочное условие $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 \ (t \geq 0)$.

Потоком вероятности, переводящим систему из состояния s_i в состояние s_j, называется произведение вероятности $p_i(t)$ состояния s_i на интенсивность $\lambda_{ij}(t)$ потока событий, переводящего систему в состояние s_j. В соответствии с уравнениями Колмогорова, производная вероятности любого состояния равна сумме потоков вероятности, переводящих систему в это состояние, минус сумма всех потоков вероятности, выводящих систему из этого состояния.

Все интенсивности в системе уравнений Колмогорова можно записать в виде квадратной *матрицы интенсивностей* $(\lambda_{ij}(t))$ размерности $n \times n$, по главной диагонали которой стоят нули ($\lambda_{ii} = 0$).

Если все интенсивности потоков не зависят от аргумента t ($\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$), то марковский процесс называется *однородным*. Системы, в которых происходит однородный марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, называются *простейшими системами*. Для простейшей системы вероятности состояний определяются уравнениями Колмогорова с постоянными коэффициентами. Для решения этих уравнений в инженерной практике широко применяется преобразование Лапласа.

Пусть всё множество состояний процесса, протекающего в системе S, является *эргодическим*, т. е. если из любого состояния s_i можно перейти в любое другое состояние s_j. Если число состояний системы S конечно, то для любой пары состояний s_i и s_j $(i, j = 1,2, \ ..., n)$ найдётся такое $\tau > 0$, при котором выполняется неравенство $p_{i,j}(t_0, \tau) = P\{S(t_0 + \tau) = s_j \,|\, S(t_0) = s_i\} > 0$.

Процесс, протекающий в системе S, называется *эргодическим*, если существует предел $\lim_{\tau \to \infty} p_{ij}(t_0, \tau) = p_j = P\{S = s_j\} > 0 \ (i, j = 1,2, \ ..., n)$.

Для эргодического процесса по истечении достаточно большого промежутка времени τ вероятность того, что система S будет в состоянии s_j, не зависит от того, в каком состоянии s_i система была в начальный момент $t_0 = 0$, и не зависит от величины τ. Любой транзитивный (т. е. такой, что существует «маршрут» между двумя любыми состояниями системы) однородный марковский процесс с конечным числом состояний обладает эргодическим свойством.

Системы, в которых протекает эргодический марковский случайный процесс, называются *простейшими эргодическими системами*. Время функционирования такой системы можно разбить условно на два интервала $(0,t_T)$, $(t_T,+\infty)$, называемых соответственно участком *переходного* и участком *стационарного режима* функционирования системы. Если простейшая эргодическая система находится в стационарном режиме, то сумма всех потоков вероятности, переводящих систему S из других состояний в состояние s_i, равна сумме всех потоком вероятности, переводящих систему S из состояния s_i в другие.

Задачи для самостоятельной работы

4.1 Система S представляет собой техническое устройство, которое может находиться в одном из двух состояний: s_1 – техническое устройство исправно (работает); s_2 – техническое устройство неисправно (находится в ремонте). На техническое устройство, находящееся в состоянии s_1, действует поток отказов с интенсивностью $\lambda(t)$, переводящий устройство в состояние s_2. На техническое устройство, находящееся в состоянии s_2, действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu(t)$; оба потока – пуассоновские, независимые. Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний и решить их, считая, что в начальный момент при $t=0$ техническое устройство исправно.

4.2 Техническая система S – вычислительный центр (ВЦ), состоящий из трёх ЭВМ: 1, 2 и 3. Каждая из ЭВМ выходит из строя (отказывает) независимо от других. Потоки отказов ЭВМ – пуассоновские, с переменными интенсивностями, равными $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. После отказа каждая ЭВМ восстанавливается; потоки восстановлений – пуассоновские с интенсивностями $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$; потоки восстановлений тоже независимы. Рассматриваются следующие состояния системы: s_1 – все ЭВМ исправны; s_2 – ЭВМ 1 отказала, ЭВМ 2 и ЭВМ 3 исправны; s_3 – ЭВМ 2 отказала, ЭВМ 1 и ЭВМ 3 исправны ; s_4 – ЭВМ 3 отказала, ЭВМ 1 и ЭВМ 2 исправны; s_5 – ЭВМ 1 и ЭВМ 2 отказали, ЭВМ 3 исправна; s_6 – ЭВМ 1 и ЭВМ 3 отказали, ЭВМ 2 исправна; s_7 – ЭВМ 2 и ЭВМ 3 отказали, ЭВМ 1 исправна; s_8 – все ЭВМ отказали.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний ВЦ;

б) составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний;

в) записать нормировочное условие, позволяющее указать, при каких начальных условиях надо решать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, если известно, что в начальный момент $t=0$ все ЭВМ исправны.

4.3 Сформулировать правило перехода от марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем к марковской цепи.

4.4 В автохозяйстве имеется n автомашин. Каждая из этих автомашин (независимо от других) может выходить из строя; интенсивность простейшего потока отказов автомашины равна λ. Отказавшая автомашина становится на стоянку и ожидает начала ремонта. Время ожидания начала ремонта автомашины распределено по показательному закону с параметром γ. Время ремонта автомашины распределено по показательному закону с параметром μ. Определить вероятности состояний автомашины, если в начальный момент она была исправна.

Состояния системы: s_1 – автомашина исправна; s_2 – автомашина ожидает ремонта; s_3 – автомашина ремонтируется.

Граф изображен на рисунке 3.

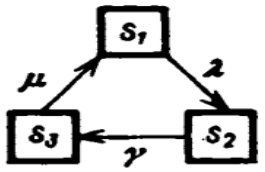


Рисунок 3 – Граф состояний

4.5 Определить, является ли система, рассмотренная в задаче 4.4, простейшей эргодической системой. Если является, то найти предельные вероятности состояний этой системы при $\mu = \gamma = 1,\ \lambda = 5.$

Решение

Система является простейшей эргодической системой, т. к. все потоки, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими, а все состояния – транзитивными.

Уравнения для предельных вероятностей $p_1 = \mu p_2 / \lambda,\ \ p_2 = \lambda p_1 / \gamma,\ \ p_3 = \gamma p_2 / \mu$.

Заменяя последнее равенство нормировочным условием $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, получим систему уравнений $p_1 = \mu p_2 / \lambda,\quad p_2 = \lambda p_1 / \gamma,\quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$, откуда $p_3 = \lambda p_1 / \mu$.

Тогда $p_1 + \dfrac{\lambda}{\gamma} p_1 + \dfrac{\lambda}{\mu} p_1 = p_1 \dfrac{\gamma\mu + \lambda\mu + \lambda\gamma}{\gamma\mu} = 1.$

Значит, $p_1 = \dfrac{\gamma\mu}{\gamma\mu + \lambda\mu + \lambda\gamma} = \dfrac{1}{11},\ \ p_2 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_1 = \dfrac{5}{11},\ \ p_3 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_1 = \dfrac{5}{11}.$

Пусть случайная величина T_i – время однократного нахождения системы S с конечным числом состояний n в начальном или транзитивном состоянии s_i, отсчитываемое от начального момента $t = 0$. Если интенсивность суммарного потока событий, выводящего систему S из состояния s_i, не зависит от времени, т. е. $\lambda_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) = \lambda_i = \text{const}$, то случайная величина T_i будет иметь

показательный закон распределения с параметром λ_i: $F_i(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0;\\ 1-e^{-\lambda_i t} & \text{при } t>0,\end{cases}$ $f_i(t)=\lambda_i e^{-\lambda_i t}\ (t>0)$. Такой закон распределения случайной величины T_i будет иметь место как в случае, если интенсивности $\lambda_{ij}=\text{const}\ (j=1,2,\ldots,n)$, так и в случае, если $\lambda_{ij}\neq\text{const}$, но их сумма *постоянна*.

В случае, если сумма $\lambda_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\neq\text{const}$, определим вероятность события $\{T_i>t\}$: система покинет состояние s_i, как только в пуассоновском потоке событий с интенсивностью $\lambda_i(t)$ наступит *первое* событие.

Значит, вероятность события $\{T_i>t\}$ есть вероятности события: в пуассоновском потоке событий с интенсивностью $\lambda_i(t)$ на интервале $(0,t)$ *не наступит* ни одного события. Следовательно, $P\{T_i>t\}=e^{-\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau}\ (t>0)$, значит, $F_i(t)=1-P\{T_i>t\}=\begin{cases}0 & \text{при } t<0;\\ 1-e^{-\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau} & \text{при } t>0\end{cases}$ и $f_i(t)=F_i'(t)=\lambda_i(t)e^{-\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau}\ (t>0)$.

4.6 Интенсивность пуассоновского потока событий, выводящего систему из состояния s_i, равна $\lambda_i(t)$. Найти закон распределения случайной величины T_i – времени однократного пребывания системы в состоянии s_i при условии, что система попала в состояние s_i в момент времени $\tau>0$.

4.7 Интенсивность пуассоновского потока событий, выводящего систему из состояния s_i, $\lambda_i(t)=at+b$. Найти закон распределения случайной величины T_i – времени однократного пребывания системы в состоянии s_i $(a>0,\ b>0)$.

Домашнее задание

4.8 Пусть $\overline{t_i}$ – математическое ожидание времени однократного пребывания системы S в состоянии s_i, $\overline{\theta}_i$ – математическое ожидание времени однократного пребывания системы S вне состояния s_i. Для условий задачи 4.5 при $\gamma=\mu=1$ (1/сутки), $\lambda=5$ (1/сутки) найти величины $\overline{t_i}$ и $\overline{\theta}_i$.

4.9 Какова должна быть интенсивность пуассоновского потока событий $\lambda_i(t)$, если случайная величина T_i – время однократного пребывания системы в состоянии s_i, распределена по закону Эрланга 2-го порядка, а система S в момент времени $t=0$ находилась в состоянии s_i? Построить график функции $\lambda_i(t)$.

5 Практическое занятие № 5. Марковские процессы гибели и размножения с непрерывным временем

Случайный процесс называется *процессом гибели и размножения*, если состояния системы образуют цепь, в которой каждое состояние s_i, кроме двух крайних s_0 и s_n, связано прямой и обратной связью с двумя соседними, а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним.

Марковским *процессом гибели и размножения с непрерывным временем* называется такой случайный процесс. который может принимать только целые неотрицательные значения и изменения которого могут происходить в любой момент времени t, при этом в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным. Коротко такие процессы будем называть процессами гибели и размножения.

Пусть $X(t)$ – случайная величина, связанная с функционированием рассматриваемой системы. Пуассоновские потоки событий, ведущие к увеличению функции $X(t)$ («размножению») называются *потоками размножения*. Интенсивности потоков размножения обозначим через $\lambda_i(t)$, где индекс i соответствует индексу состояния s_i. Аналогично потоки событий, ведущие к уменьшению функции $X(t)$ («гибели») называются *потоками гибели*. Интенсивности потоков гибели обозначим через $\mu_i(t)$.

Одномерный закон распределения процесса гибели и размножения $X(t)$ можно определить с помощью следующей системы уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1(t)\,p_1(t) - \lambda_0(t)\,p_0(t);$$

…

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}(t)\,p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t)\,p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t))\,p_i(t)\ (i = 1,2,3,\ ...),$$

где $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\} = P\{X(t) = i\}$ $(i = 0,1,2,\ ...)$.

Данную систему уравнений следует решать при начальных условиях $p_i(0) \geq 0$ $(i = 0,1,2,\ ...)$, при этом $\sum_i p_i(0) = 1$.

В случае процесса гибели и размножения с ограниченным числом состояний, когда $0 \leq X(t) \leq n$, система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1(t)\,p_1(t) - \lambda_0(t)\,p_0(t);$$

…

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}(t)\,p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t)\,p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t))\,p_i(t)\,(i = 1,2,\ ...,\ n-1);$$

…

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}(t)\,p_{n-1}(t) - \mu_n(t)\,p_n(t).$$

Процессом чистого размножения называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю. Аналогично вводится понятие *процесса чистой гибели*.

Система S с конечным числом состояний, в которой протекает процесс гибели и размножения с постоянными интенсивностями потоков гибели и размножения, является *простейшей эргодической системой*. Для простейшей схемы гибели и размножения, находящейся в стационарном режиме, потоки вероятности между двумя любыми соседними состояниями равны.

Задачи для самостоятельной работы

5.1 Рассматривается производство автомашин на автозаводе. Поток производимых автомашин является пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t)$. Случайный процесс $X(t)$ – число выпущенных машин к моменту времени t, выпуск автомашин начат в момент $t = 0$.

Требуется:

а) построить граф состояний процесса $X(t)$;

б) записать систему уравнений Колмогорова для определения одномерного закона распределения процесса $X(t)$;

в) найти одномерный закон распределения процесса $X(t)$;

г) найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

5.2 Процесс, рассмотренный в задаче 5.1, является примером *неоднородного процесса Пуассона*. Если интенсивность потока $\lambda(t) = \lambda$ постоянна, то получаем *однородный процесс Пуассона* (или просто процесс Пуассона). Для однородного процесса Пуассона найти вероятность $P\{X(t) = i\}$, а также его характеристики.

5.3 В условиях задачи 5.1 производство автомашин длится лишь до тех пор, пока их не будет произведено n штук, после чего завод переходит на производство других автомашин. Определить закон распределения случайного процесса $X(t)$ – числа выпущенных машин на момент времени t, если выпуск

автомашин начат в момент времени $t=0$. Найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

5.4 Рассматривается процесс эксплуатации однотипных автомашин в большом автохозяйстве. На момент времени $t=0$ в автохозяйстве имелось n таких автомашин, новых машин в автохозяйство не поступает. Интенсивность потока списания (снятия с эксплуатации) каждой автомашины данного типа постоянна и равна μ. Это значит, что срок службы каждой автомашины есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром μ.

Рассматривается случайный процесс $X(t)$ – число однотипных автомашин, находящихся в эксплуатации. Найти одномерный закон распределения этого процесса, если автохозяйство не пополняется данным типом автомашин. Найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

Домашнее задание

5.5 Рассматривается эксплуатация однотипных автомашин в большом автохозяйстве. Интенсивность поступления таких автомашин в автохозяйство равна $\lambda(t)$. Каждая поступившая в автохозяйство автомашина списывается (снимается с эксплуатации) через случайное время T, распределённое по показательному закону с параметром μ. Рассматривается случайный процесс $X(t)$ – число автомашин данного типа, находящихся в эксплуатации в момент времени t.

Найти одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$, если:

а) нет ограничений на число эксплуатируемых машин;

б) в автохозяйстве может эксплуатироваться не более n автомашин.

5.6 Рассматривается процесс чистого размножения, у которого интенсивность $\lambda_i = a^i\lambda$, где a – безразмерная величина. Определить условия, при которых будет наблюдаться явление «взрыва».

6 Практическое занятие № 6. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения

В инженерной практике исследователя часто интересует не только и не столько закон распределения случайного процесса $X(t)$ – число «живых» единиц, сколько характеристики этого процесса: математическое ожидание $m(t)$, дисперсия $D(t)$, а также корреляционная функция $K(t,t')$.

Рассмотрим марковский процесс гибели и размножения без ограничения на число состояний. Дифференциальные уравнения для характеристик этого процесса имеют вид

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i(t) - \mu_i(t)) p_i(t);$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2(i - m(t))(\lambda_i(t) - \mu_i(t))] p_i(t);$$

$$K(t,t') = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) \left(\sum_{j=0}^{\infty} j p_{j|i}(t',t) \right) - m(t) m(t'),$$

где условная вероятность $p_{j|i}(t',t) = P\{X(t' = j) | X(t) = i\}$.

При ограниченном числе состояний, когда случайный процесс $X(t)$ не может превышать значения n, уравнение для математического ожидания $m(t)$ имеет вид

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i(t) - \mu_i(t)) p_i(t).$$

В этом выражении $\lambda_n(t) = \mu_0(t) \equiv 0$.

Дифференциальное уравнение для дисперсии случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$\frac{dD(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} [\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2(i - m(t))(\lambda_i(t) - \mu_i(t))] p_i(t).$$

При решении этого уравнения также следует учитывать ограничения

$$\lambda_n(t) = \mu_0(t) \equiv 0.$$

Корреляционная функция также находится по формулам, аналогичным формулам для нахождения $K(t,t')$ в случае отсутствия ограничения на число состояний, в которых верхний предел сумм нужно брать равным n.

Задачи для самостоятельной работы

6.1 Рассматривается процесс эксплуатации одинаковых технических устройств на предприятии. Пуассоновский поток поступлений устройств на предприятие имеет интенсивность $\lambda(t)$, пуассоновский поток списаний каждого устройства – интенсивность $\mu(t)$. Случайный процесс $X(t)$ – число технических устройств, эксплуатируемых на предприятии в момент времени t. Практических ограничений на число технических устройств на предприятии нет и в начальный момент $X(0) = 0$.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний случайного процесса;

б) записать дифференциальное уравнение для математического ожидания $m(t)$ процесса $X(t)$ и найти его решение;

в) записать уравнение для дисперсии $D(t)$ процесса $X(t)$ и найти дисперсию;

г) найти математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t)$ в случае, если λ и μ постоянны и при начальных условиях $m(0) = D(0) = 0$;

д) доказать, что в условиях п. г) одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ является законом Пуассона с параметром $m(t)$;

е) в условиях п. г) найти корреляционную функцию $K(t, t')$ процесса $X(t)$.

6.2 Рассматривается процесс эксплуатации нефтяных скважин. Интенсивность ввода нефтяных скважин в эксплуатацию $\lambda(t) = at$. Интенсивность потоков выхода из строя каждой скважины $\mu = \text{const}$. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$ – числа нефтяных скважин, находящихся в эксплуатации на момент времени t, если $X(0) = 0$.

6.3 В условиях задачи 6.2 известно, что на начало года (на момент $t_1 > 0$) в эксплуатации было n_1 нефтяных скважин. По плану к концу года на момент t_2 ($t_2 > t_1$) в эксплуатации должно быть $n_{\partial 2}$ нефтяных скважин. Определить вероятность выполнения плана.

6.4 Рассматривается производство и эксплуатация однотипных ЭВМ. Интенсивность пуассоновского потока производимых ЭВМ имеет вид

$$\lambda(t) = \begin{cases} at, & 0 \le t \le t_1; \\ at_1, & t_1 < t \le t_2; \\ 0, & t > t_2. \end{cases}$$

На участке $(0, t_1)$ происходит развёртывание производства ЭВМ, на участке (t_1, t_2) ЭВМ производятся с постоянной интенсивностью, а в момент t_2 снимаются с производства. Каждая произведённая ЭВМ эксплуатируется в течение случайного времени T, распределённого по показательному закону с параметром μ. Определить математическое ожидание $m(t)$ и дисперсию $D(t)$ числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации, если на момент начала производства $t = 0$ данного типа ЭВМ в эксплуатации не было ($m(0) = D(0) = 0$).

6.5 Рассматривается эксплуатация n одинаковых станков на машиностроительном заводе. Интенсивность пуассоновского потока отказов каждого станка $\mu = \text{const}$; интенсивность пуассоновского потока восстановлений каждого станка $\lambda = \text{const}$. В начальный момент времени $t = 0$ все станки были исправны ($m(0) = n$, $D(0) = 0$, $\pi_1(0) = 1$). Определить характеристики случайного процесса $X(t)$ – числа исправных станков.

Домашнее задание

6.6 В условиях задачи 6.4 определить вероятность того, что за 6 лет будет произведено не менее 13200 ЭВМ.

6.7 Цех, работающий круглосуточно (в три смены), имеет 100 одинаковых станков с числовым программным управлением. Среднее время безотказной работы каждого станка 10 суток, среднее время ремонта станка $0,5$ суток. Определить характеристики случайного процесса $X(t)$ – числа исправных станков в стационарном режиме, считая, что потоки отказов и восстановлений каждого станка – простейшие и все станки работают независимо друг от друга.

7 Практическое занятие № 7. Преобразования случайных процессов

Элементарным случайным процессом называется произведение центрированной случайной величины V на неслучайную функцию $\varphi(t)$:

$$X(t) = V\varphi(t).$$

Основные характеристики элементарного случайного процесса $X(t)$: математическое ожидание $M[X(t)] = 0$, дисперсия $D[X(t)] = \varphi^2(t)D[V]$, корреляционная функция $K(t,t') = \varphi(t)\varphi(t')D[V]$, нормированная корреляционная функция $r(t,t') \equiv 1$.

Каноническим разложением случайного процесса $X(t)$ называется выражение вида $X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t)$. В этом разложении m – математическое ожидание случайного процесса $X(t)$, V_1, V_2, …, V_k, … – некоррелированные центрированные случайные величины с дисперсиями D_1, D_2, …, D_k, ...; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_k(t)$, … – неслучайные функции аргумента t.

Случайные величины V_1, V_2, …, V_k, … называются *коэффициентами* канонического разложения, а неслучайные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_k(t)$, … называются *координатными функциями* канонического разложения.

Каноническое разложение может содержать как конечное, так и бесконечное (счётное) число членов.

Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$, заданного своим каноническим разложением, имеет вид $K(t,t') = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(t')D_k$. Данное выражение называется *каноническим разложением* корреляционной функции случайного процесса $X(t)$. Дисперсия случайного процесса $X(t)$, заданного

своим каноническим разложением, равна $D[X(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t) D_k$ – каноническое разложение дисперсии.

В инженерной практике часто возникает следующая задача: на вход системы S подаётся случайный процесс $X(t)$ – *входной сигнал*. Система S осуществляет преобразование сигнала $X(t)$, в результате чего на выходе системы S получается случайный процесс $Y(t)$ – *реакция системы* S или *выходной сигнал*. Символически преобразование входного сигнала $X(t)$ в выходной сигнал $Y(t)$ можно записать в виде $Y(t) = A\{X(t)\}$, где A – оператор системы. В прикладных задачах рассматриваются различные операторы: оператор интегрирования, оператор решения дифференциальных уравнений, оператор возведения в квадрат, оператор суммирования, оператор умножения и др. Если оператор системы линейный, то система называется *линейной*, в противном случае система *нелинейная*.

Если случайный процесс, заданный своим каноническим разложением

$$X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t),$$

подвергнут линейному неоднородному преобразованию L, то получится случайный процесс тоже в виде канонического разложения

$$Y(t) = m_Y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \psi_k(t),$$

где $m_Y(t) = L\{m(t)\}$; $\psi_k(t) = L_0\{\varphi_k(t)\}$;

L_0 – линейное однородное преобразование, соответствующее линейному преобразованию L.

Корреляционную функцию $K_Y(t,t')$ случайного процесса $Y(t)$ можно найти в результате соответствующего двойного линейного однородного преобразования корреляционной функции $K(t,t')$ случайного процесса $X(t)$, взятого сначала по аргументу t, а затем – по t' (или наоборот). Дисперсия случайного процесса $Y(t)$ получается в результате двукратного применения соответствующего однородного преобразования к корреляционной функции $K(t,t')$ и затем нахождения предела полученного выражения при $t \to t'$.

Задачи для самостоятельной работы

7.1 Рассматриваются элементарные случайные процессы

$$Y(t) = Va;\ Z(t) = V\cos^2 t;\ U(t) = Vt^2,$$

где V – нормально распределённая случайная величина с характеристиками $m = 0,\ \sigma;\ a$ – неслучайная величина.

Найти характеристики (математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию) каждого из этих процессов и построить для каждого из них семейство реализаций.

7.2 Случайный процесс $X(t)$ задан своим каноническим разложением

$$X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t),$$

где случайные величины V_k распределены нормально с характеристиками $M[V_k] = 0,\quad D[V_k] = D_k \quad (k = 1,2,\ ...,\ n),\quad M[V_k V_m] = 0 \quad (k \neq m)$, случайные величины $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n$ некоррелированы. Найти одномерный, лвумерный и l-мерный законы распределения случайного процесса $X(t)$.

7.3 Даны характеристики случайного процесса $X(t)$ $m(t)$ и $K(t,t')$. Случайный процесс $X(t)$ подвергается дифференцированию: $Y(t) = \dfrac{d}{dt} X(t)$. Найти характеристики процесса $Y(t)$.

7.4 Найти характеристики производной случайного процесса $X(t) = We^{-Vt}$, где случайная величина W распределена нормально с параметрами m и σ, а случайная величина V распределена равномерно в интервале $(0,a);\ t > 0$, $a > 0$, случайные величины W и V независимы.

7.5 Даны характеристики случайного процесса $X(t)$ $m(t)$ и $K(t,t')$. Случайный процесс $Y(t)$ получается в результате интегрирования случайного процесса $X(t)$: $Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau$. Требуется найти характеристики случайного процесса $Y(t)$.

7.6 Случайный процесс $X(t)$ задан в виде своего канонического разложения $X(t) = t^2 + \sum_{k=1}^{n} V_k e^{-\alpha_k t} \quad (t > 0)$, где V_k – центрированные некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_k $(k = 1,2,\ ...,\ n)$, $\alpha_k > 0 \quad (k = 1,2,\ ...,\ n)$, случайный процесс $Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,d\tau$. Определить характеристики случайного процесса $Y(t)$.

Домашнее задание

7.7 Найти производную случайного процесса $X(\pi t) = Y\cos(\psi t + \Theta)$, где случайная величина Y распределена по закону Рэлея с параметром σ,

а случайная величина Θ распределена равномерно в интервале $(0,2\pi)$, ψ – неслучайный параметр, случайные величины Y и Θ независимы.

7.8 Даны характеристики случайного процесса $X(t)$: $m(t)$ и $K(t,t')$. Случайный процесс $Y(t)$ получается квадратичным преобразованием процесса $X(t)$: $Y(t)=(X(t))^2$. Найти характеристики случайного процесса $Y(t)$.

8 Практическое занятие № 8. Стационарные случайные процессы

Рассмотрим общие свойства случайных процессов, протекающих однородно во времени, когда наступает стационарный режим функционирования системы – *стационарных* случайных процессов.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если n-мерная плотность распределения не изменяется при сдвиге всех его временных аргументов на одинаковую произвольную величину τ. Корреляционная функция стационарного случайного процесса есть чётная функция сдвига τ между двумя сечениями этого процесса.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция есть функция сдвига между аргументами $K(t_1,t_2)=k(t_2-t_1)=k(\tau)$. Если случайный процесс является стационарным в узком смысле, то он является стационарным и в широком смысле. Обратное же утверждение не всегда может быть справедливым.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса обладает следующими свойствами: $k(\tau)=k(-\tau)$; $k(0)=D$; $k(0)\geq 0$. Кроме этих свойств, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна обладать свойством $|k(\tau)|\leq k(0)$ и свойством положительной определённости: $\int\limits_B\int\limits_B k(t-t')\varphi(t)\varphi(t')dtdt'$. Здесь $\varphi(t)$ – любая функция аргумента t, а область B – любая область изменения аргумента t.

Нормированной корреляционной функцией стационарного случайного процесса называется функция $r(\tau)=k(\tau)/D=k(\tau)/k(0)$. Для функции $r(\tau)$ выполняется неравенство $|r(\tau)|\leq 1$.

Стационарные случайные процессы могут обладать или не обладать эргодическим свойством. Для эргодического стационарного случайного процесса $X(t)$ математическое ожидание может быть определено из выражения

$$m=M[X(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}X(t)dt.$$

Достаточным условием выполнения последнего равенства – эргодичности стационарного случайного процесса $X(t)$ по математическому ожиданию – является условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} k(\tau)=0$. Дисперсия эргодического стационарного случайного процесса может быть найдена по формуле

$$D = D[X(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)^2\,dt\ .$$

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса по дисперсии является условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_Y(\tau)=0$, где $k_Y(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $Y(t)=(X(t))^2$.

Корреляционная функция эргодического стационарного случайного процесса может быть определена по формуле

$$k(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)(X(t-\tau)-m)\,dt\,.$$

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса по корреляционной функции является равенство $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_Z(\tau)=0$, где $k_Z(\tau)$ – корреляционная функция случайного процесса $Z(t,\theta)=X(t)X(t+\theta)$.

Обычно стационарный случайный процесс бывает неэргодическим, когда он протекает неоднородно.

Пусть стационарный случайный процесс $X(t)$ представлен каноническим разложением вида

$$X(t) = m+\sum_{k=0}^{\infty}(V_k\cos\omega_k t + U_k\sin\omega_k t),$$

а его корреляционная функция – каноническим разложением корреляционной функции

$$K(t,t') = \sum_{k=0}^{\infty}D_k\cos\omega_k(t-t') = \sum_{k=0}^{\infty}D_k\cos\omega_k\tau = k(\tau),$$

где $M[V_k]=M[U_k]=M[V_kU_k]=0$;

$M[V_iU_j]\neq 0\ (i\neq j)$;

$D[V_k]=D[U_k]=D_k$;

$\tau = t-t'$.

Каноническое разложение указанного вида называется *спектральным разложением* стационарного случайного процесса. Спектральное разложение может быть представлено в виде

$$X(t) = m + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \cos(\omega_k t - \Theta_{\partial k}),$$

где Θ_k – фаза гармонического колебания элементарного стационарного случайного процесса – случайная величина, распределённая равномерно в интервале $(0, 2\pi)$;

Z_k – амплитуда гармонического колебания элементарного стационарного случайного процесса – случайная величина.

Случайные величины Z_0, Z_1, …, Z_k, …, Θ_0, Θ_1, …, Θ_k, … зависимы. Между случайными величинами Z_k, Θ_k и V_k, U_k имеют место соотношения

$$Z_k \cos\Theta_k = V_k;\ Z_k \sin\Theta_k = U_k.$$

Спектральной плотностью стационарного случайного процесса $X(t)$ называется функция $S(\omega) = \lim\limits_{\Delta\omega\to 0} D_k / \Delta\omega$, где D_k – дисперсия k-й гармоники спектрального разложения случайного процесса $X(t)$. Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса связаны между собой косинус-преобразованием Фурье:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Задачи для самостоятельной работы

8.1 Рассматривается неслучайная величина a как частный случай случайного процесса $X(t) = a$. Найти её характеристики. Определить, является ли этот процесс стационарным и обладает ли он свойством эргодичности.

8.2 Рассматривается случайная величина V как частный случай случайного процесса $X(t) = V$. Найти её характеристики. Определить, является ли этот процесс стационарным и обладает ли он свойством эргодичности.

8.3 Случайный процесс $X(t)$ – *случайная телеграфная волна* – возникает следующим образом. На оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс $X(t)$ попеременно принимает значения a и $-a$. При наступлении очередного события в простейшем потоке случайный процесс $X(t)$ скачком меняет своё состояние с a на $-a$ или наоборот. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

8.4 *Обобщённая случайная телеграфная волна*. Как и в задаче 8.3, на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. В момент

наступления i-го события случайный процесс $X(t)$ принимает случайное значение X_i $(i = 0,2, ...)$, сохраняя его до следующего события в потоке. В начальный момент времени $t = 0$ $X(0) = X_0$. Случайные величины X_0, X_1, …, X_i, … независимы и распределены одинаково с плотностью $f(x)$. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

8.5 Рассматривается случайный процесс $X(t)$, описанный в задаче 8.4, при неограниченном увеличении интенсивности простейшего потока $(\lambda \to \infty)$. Найти характеристики такого предельного процесса $Y(t) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} X(t)$, считая, что этот предел существует.

8.6 Найти спектральную плотность $S_{X_k}(\omega)$ элементарного стационарного случайного процесса $X_k(t) = V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t$.

8.7 Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса, заданного своим спектральным разложением

$$X(t) = m + \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t).$$

8.8 Найти спектральную плотность вырожденного стационарного случайного процесса $X(t)$ (когда $X(t) = V$, где V – случайная величина (см. задачу 8.2)), у которого $k(\tau) = D[V] = D$.

Домашнее задание

8.9 *Стационарный белый шум*. Исследовать предельное поведение случайного процесса $X(t)$, рассмотренного в задаче 8.4, при условии, что интенсивность простейшего потока λ неограниченно увеличивается $(\lambda \to \infty)$, дисперсия сечения этого процесса тоже неограниченно увеличивается $(D \to \infty)$, но при этом отношение D/λ остаётся постоянным: $\lim\limits_{\substack{D \to \infty \\ \lambda \to \infty}} D/\lambda = C$. Найти характеристики предельного случайного процесса $Z(t)$.

8.10 Показать, что стационарный белый шум $X(t)$ имеет постоянную спектральную плотность.

Список литературы

1 **Вентцель, Е. С.** Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Радио и связь, 1983. – 416 с.

2 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей и её инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Теория случайных процессов и её инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2000. – 383 с.

4 **Миллер, Б. М.** Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. – М. : Физматлит, 2002. – 320 с.

5 **Каштанов, В. А.** Случайные процессы: учебник и практикум / В. А. Каштанов, Н. Ю. Знатская. – М. : Юрайт, 2023. – 156 с.

6 **Круглов, В. М.** Случайные процессы: учебник: 2 ч. Ч. 1: Основы общей теории / В. М. Круглов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2024. – 276 с.