

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология
машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»,
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов
и производств», 1-36 01 06 «Оборудование и технология
сварочного производства» дневной формы обучения*

Часть 2

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ



Могилев 2017

УДК 539.3/6
ББК 30.121
М 55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Сопротивление материалов» «28» марта 2017 г.,
протокол № 11

Составители: канд. техн. наук, доц. Д. М. Макаревич;
канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;
ст. преподаватель Е. Г. Кривоногова

Рецензент А. П. Прудников

Методические рекомендации предназначены к самостоятельной
работе студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машино-
строения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроитель-
ного производства», 1-53 01 01 «Автоматизация технологических про-
цессов и производств», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного
производства» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. М. Макаревич
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 24.01.2014.

Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2017



Содержание

Введение.....	4
1 Расчетно-проектировочное задание № 3. Расчет валов круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения.....	5
1.1 Основные положения теории.....	5
1.2 Пример выполнения расчетно-проектировочного задания № 3	9
1.3 Задания для самостоятельной работы.....	14
2 Расчетно-проектировочное задание № 4. Расчет центрально- сжатого стержня на устойчивость.....	16
2.1 Основные положения теории.....	16
2.2 Пример выполнения расчетно-проектировочного задания № 4	20
2.3 Задания для самостоятельной работы.....	26
Список литературы.....	28



Введение

Цель преподавания дисциплины «Механика материалов» – научить студента правильному решению задач расчета на прочность, жесткость и устойчивость конструкций, используемых в сложных эксплуатационных условиях под действием как статических, так и динамических нагрузок, рациональному назначению конструкционных материалов и формы поперечного сечения, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности, экономичности и эффективности изделий.

Целью выполнения расчетно-проектировочных заданий является закрепление у студентов теоретических знаний и приобретение навыков в построении эпюр внутренних силовых факторов в балках, а также в расчетах элементов конструкций при плоском поперечном изгибе.

Расчетно-проектировочные задания оформляются в виде пояснительной записки на листах бумаги формата А4. Листы используются только с одной стороны. Расчетные схемы и эпюры выполняются карандашом, четко, с соблюдением правил оформления машиностроительных чертежей в соответствии с ГОСТ 2.104–68.

Задания, выполненные с нарушением указанных требований, на проверку не принимаются.



1 Расчетно-проектировочное задание № 3. Расчет валов круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

1.1 Основные положения теории

Совместное действие изгиба и кручения является распространенным видом нагружения в технике (валы редукторов, коробок скоростей, валы приводов конвейеров и т. д.).

Силы, действующие на вал (собственный вес вала и вес колес, давление на зубья шестерен, натяжение ремней шкивов и т. п.), вызывают в его поперечном сечении возникновение внутренних силовых факторов (ВСФ): $M_{кр}$, M_x , M_y , Q_x , Q_y . Действием поперечных сил Q_x , Q_y , как правило, пренебрегают. В практических расчетах действие крутящих моментов $M_{кр}$ и изгибающих моментов M_x и M_y рассматривают по отдельности с последующим суммированием результата по соответствующим теориям прочности [1].

Передаваемая валом мощность N является работой внешнего скручивающего момента m и определяется по формуле

$$N = m \cdot \omega = m \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (1.1)$$

где n – частота вращения вала, об/мин;
 ω – угловая скорость, c^{-1} .

Соответственно, внешний скручивающий момент можно найти по формуле

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n}. \quad (1.2)$$

Основными изгибающими силами являются окружные усилия на зубьях шестерен F и усилия натяжения ветвей ременной передачи на шкивах T и t . Приведение изгибающих усилий к центру тяжести вала диаметром d в том его сечении, где располагается шестерня, показано на рисунке 1.1, а; в том сечении, где располагается шкив – на рисунке 1.1, б. Окружное усилие на зубчатом колесе средним диаметром D находят по формуле

$$F = \frac{2m}{D}. \quad (1.3)$$

Изгибающую силу на шкиве диаметром D при отношении усилий



ременной передачи $T = 2t$ находят по формуле

$$F = T + t = 3 \frac{2m}{D}, \quad (1.4)$$

где T – усилие натяжения на ведущей ветви передачи;
 t – усилие натяжения на ведомой ветви передачи.

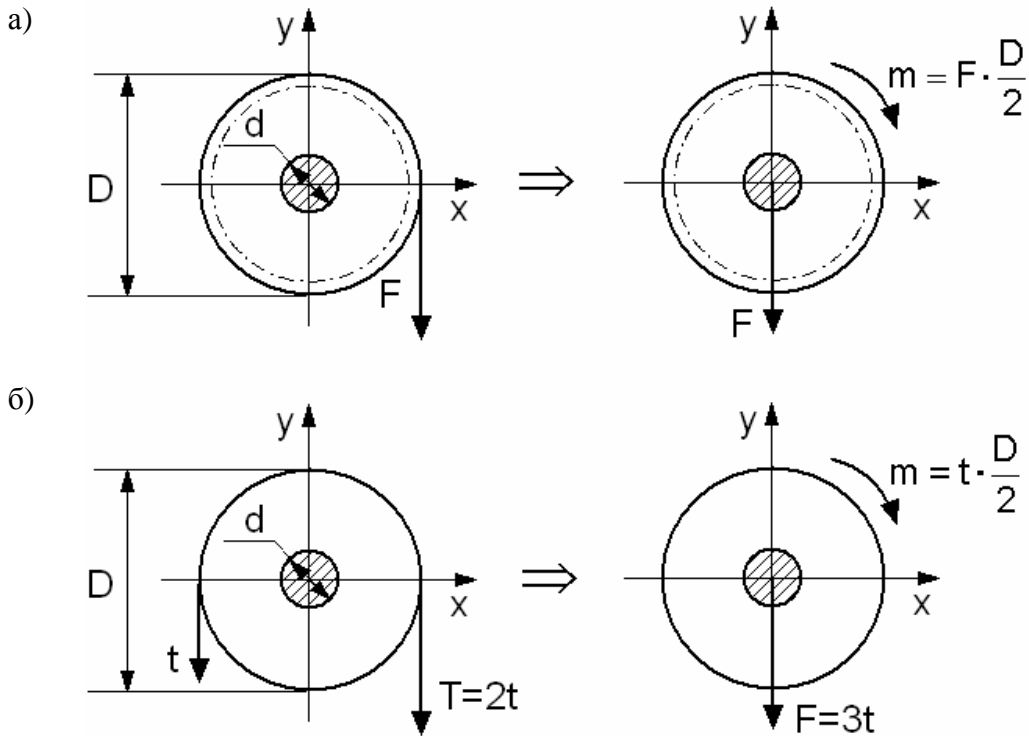


Рисунок 1.1 – Приведение изгибающих усилий на шестерне (а) и шкиве (б) к центру тяжести вала

Расчет вала на прочность ведется в **опасном сечении**, которое определяется по эпюрам крутящих и изгибающих моментов при их наиболее неблагоприятном сочетании. Для примера рассмотрим вал, на который действуют скручивающий момент m и изгибающая сила F (рисунок 1.2).

Опасным будет являться сечение, примыкающее к заделке, и опасными точками в нем точки А и В, в которых достигаются максимальные значения нормальных напряжений σ_{\max} от изгибающего момента и максимальные значения касательных напряжений τ_{\max} от крутящего момента:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x}; \quad (1.5)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}, \quad (1.6)$$

где W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения вала;
 W_{ρ} – полярный момент сопротивления поперечного сечения
 вала.

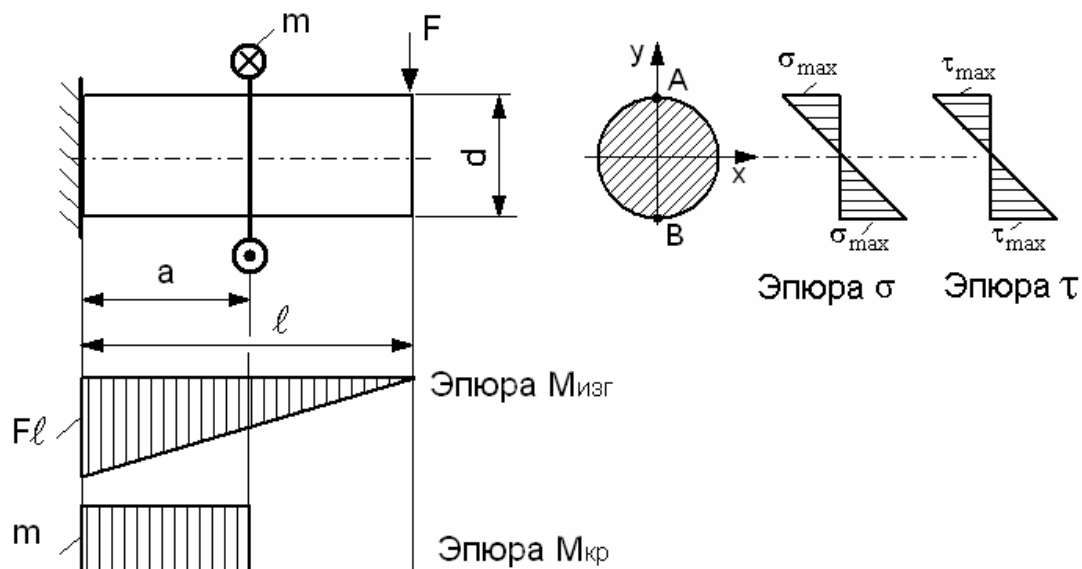


Рисунок 1.2 – Эпюры изгибающего и крутящего моментов и эпюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении вала

В точках А и В материал вала находится в плоском напряженном состоянии, при котором нормальные напряжения действуют только вдоль оси вала. Как правило, валы изготавливаются из стали, поэтому их расчет рекомендуется проводить по третьей или четвертой теориям прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} \leq [\sigma]; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} \leq [\sigma]. \quad (1.8)$$

Для вала круглого поперечного сечения осевой и полярный моменты сопротивления определяются по формулам

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad (1.9)$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 = 2W_x. \quad (1.10)$$

Подставляя в теории прочности (1.7) и (1.8) вместо σ_{\max} и τ_{\max} их значения, выраженные через осевой момент сопротивления W_x , получим следующее условие прочности для расчета вала при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (1.11)$$

где $M_{\text{ЭКВ}}$ – эквивалентный момент, равный, соответственно, по третьей и четвертой теориям прочности:

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}; \quad (1.12)$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2}. \quad (1.13)$$

Изгибающие силы, действующие в разных плоскостях, раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие. Затем показывают отдельно схему изгиба вала от всех вертикальных сил и схему изгиба вала от всех горизонтальных сил. В каждой схеме изгиба определяют реакции на опорах. Под каждой схемой строится эпюра изгибающих моментов, причем вертикальные силы создают момент M_x , а горизонтальные – момент M_y . Так как у брусьев круглого поперечного сечения кривой изгиб невозможен, то поперечное сечение вала будет испытывать прямой изгиб под действием полного изгибающего момента:

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (1.14)$$

где M_x и M_y – изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно.

По результатам расчета полного (суммарного) изгибающего момента в характерных точках вала строится эпюра $M_{\text{изг}}$, которая характеризует только величину момента. Плоскости действия полных изгибающих моментов в различных сечениях вала различны, но на эпюре все ординаты условно расположены в плоскости чертежа. Для вала на шарикоподшипниковых опорах крайние участки эпюры полных изгибающих моментов очерчены прямыми линиями, внутренние – параболами, выпуклостью, направленной к нулевой линии.

Эпюра крутящих моментов $M_{\text{кр}}$ строится так же, как при чистом кручении.

При помощи эпюр $M_{\text{кр}}$ и $M_{\text{изг}}$ определяют **опасное сечение**, в котором наиболее неблагоприятно сложились крутящий и изгибающий



моменты (для вала постоянного поперечного сечения).

Проверку прочности производят по формуле (1.11).

Проектировочный расчет позволяет определить диаметр вала:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} = \frac{M_{\text{ЭКВ}} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{ЭКВ}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (1.15)$$

Расчеты следует вести в СИ (Н, м, Па). Диаметр вала, выраженный в миллиметрах, необходимо округлить в большую сторону в соответствии с рядом нормальных линейных размеров (таблица 1.1, колонка Ra 40).

1.2 Пример выполнения расчетно-проектировочного задания № 3

Задача. На вал круглого сплошного сечения насажены шестерня средним диаметром $D_1 = 0,23$ м и шкив ременной передачи диаметром $D_2 = 0,39$ м (рисунок 1.3, а). Вес шкива $G = 600$ Н, собственным весом шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допустимое напряжение материала вала $[\sigma] = 80$ МПа.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности и округлить его значение до стандартных величин (см. таблицу 1.1, колонку Ra 40).

Решение

По формуле (1.2) определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов показана на рисунке 1.3, б.

Построение эпюры внутреннего силового фактора (крутящего момента $M_{\text{кр}}$), возникающего в сечениях вала, производим по участкам слева направо:

- участок 1 $M_{\text{кр}} = 0$;
- участок 2 $M_{\text{кр}} = m = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
- участок 3 $M_{\text{кр}} = m - m = 0$.

Таблица 1.1 – Ряд нормальных линейных размеров

Ряд				Ряд			
Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40	Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40
10	10	10	10 10,5	100	100	100	100 105
		11	11 15			110	110 120
	12	12	12 13		125	125	125 130
		14	14 15			140	140 150
16	16	16	16 17	160	160	160	160 170
		18	18 19			180	180 190
	20	20	20 21		200	200	200 210
		22	22 24			220	220 240
25	25	25	25 26	250	250	250	250 260
		28	28 30			280	280 300
	32	32	32 34		320	320	320 340
		36	36 38			360	360 380
40	40	40	40 42	400	400	400	400 420
		45	45 48			450	450 480
	50	50	50 53		500	500	500 530
		56	56 60			560	560 600
63	63	63	63 67	630	630	630	630 670
		71	71 75			710	710 750
	80	80	80 85		800	800	800 850
		90	90 95			900	900 950

По формуле (1.3) определяем окружное усилие F_1 , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н.}$$

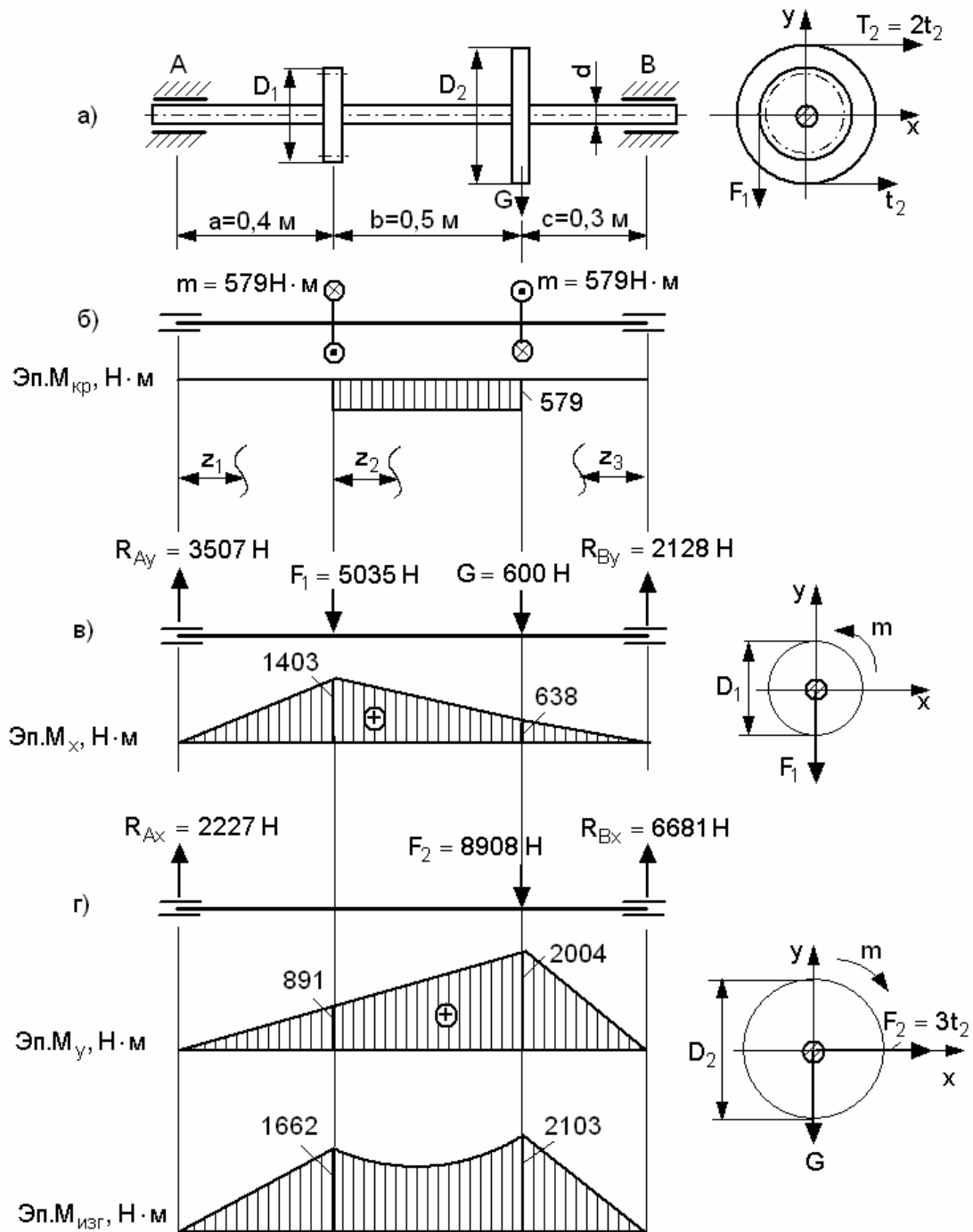


Рисунок 1.3 – Заданная схема вала и вспомогательные схемы и эпюры для примера к задаче 1 (эпюры изгибающих моментов M_x и M_y построены на сжатом волокне)

По формуле (1.4) определяем изгибающую силу F_2 от ременной передачи на шкиве, действующую на вал в горизонтальной плоскости:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 1.3, в.

Для определения опорных реакций R_{Ay} и R_{By} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B^{\text{верт}} = 0; \quad R_{Ay} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,8 - 600 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1,2} = 3507 \text{ Н};$$

$$\sum m_A^{\text{верт}} = 0; \quad R_{By} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1,2} = 2128 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum y = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_x по участкам.

Участок 1 ($0 \leq z_1 \leq 0,4$ м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ($0 \leq z_2 \leq 0,5$ м):

$$M_x = R_{Ay}(0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ($0 \leq z_3 \leq 0,3$ м):

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия горизонтальных изгибающих сил, повернутых в плоскость чертежа, показана на рисунке 1.3, г.



Для определения опорных реакций R_{Ax} и R_{Bx} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B^{\text{гоп}} = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н};$$

$$\sum m_A^{\text{гоп}} = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum X = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_y по участкам.
Участок 1 ($0 \leq z_1 \leq 0,4 \text{ м}$):

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ($0 \leq z_2 \leq 0,5 \text{ м}$):

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ($0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м}$):

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов $M_{\text{изг}}$ в характерных сечениях вала по формуле



$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов $M_{\text{изг}}$ показана на рисунке 1.3.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива диаметром D_2 , т. к. в нем действуют наибольший изгибающий момент $M_{\text{изг}} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и крутящий момент $M_{\text{кр}} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Определим значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности (см. формулу (1.13)):

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим диаметр вала по формуле (1.15):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м} = 65 \text{ мм}.$$

Диаметр вала принимаем равным $d = 67 \text{ мм}$ (см. таблицу 1.1, графу Ra 40).

1.3 Задания для самостоятельной работы

На вал круглого сплошного сечения диаметром d насажены шестерня средним диаметром D_1 и шкив ременной передачи диаметром D_2 (рисунок 1.4). Вес шкива равен G , собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает n оборотов в минуту и передает мощность, равную N киловатт. Допустимое напряжение материала вала $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности и округлить его значение до стандартных величин (см. таблицу 1.1, графу Ra 40).

Исходные данные к задаче представлены в таблице 1.2.

Приступая к решению задачи, необходимо повторить правила построения эпюр крутящих и изгибающих моментов по методу сечений.

На шарикоподшипниковых опорах реактивный крутящий момент отсутствует, поэтому эпюра $M_{\text{кр}}$ строится только от внешних скручивающих моментов.



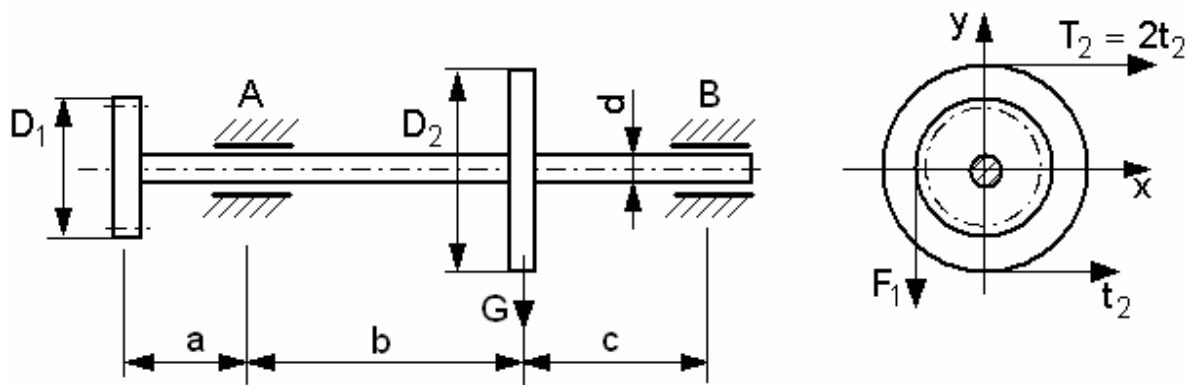


Рисунок 1.4 – Расчетная схема вала

Таблица 1.2 – Значения исходных данных

Номер строки	N, кВт	n, об/мин	G, Н	a, м	b, м	c, м	D ₁ , мм	D ₂ , мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320
3	30	1300	240	0,13	0,43	0,33	130	330
4	40	1400	260	0,14	0,44	0,34	140	340
5	50	1500	280	0,15	0,45	0,35	150	350
6	60	1600	300	0,16	0,46	0,36	160	360
7	70	1700	320	0,17	0,47	0,37	170	370
8	80	1800	340	0,18	0,48	0,38	180	380
9	90	1900	360	0,19	0,49	0,39	190	390
0	100	2000	380	0,20	0,50	0,40	200	400
	а	б	в	а	б	в	б	в

Примечание – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки, т. е.

0 9 4 2 5 0
а б в

Например, для шифра 094250 выбираем следующие исходные данные: N = 20 кВт; n = 1500 об/мин; G = 380 Н; a = 0,12 м; b = 0,45 м; c = 0,4 м; D₁ = 150 мм; D₂ = 400 мм

От изгибающих сил на опорах вала возникают реакции, которые определяются из уравнений статического равновесия. При построении эпюр изгибающих моментов используют следующее правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если от его действия участок изгибается выпуклостью вниз, и отрицательным, если от его действия участок изгибается выпуклостью вверх.

Контрольные вопросы

- 1 Что называют сложным сопротивлением?
- 2 Приведите примеры сложного сопротивления.
- 3 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?
- 4 Что изображено на расчетной схеме?
- 5 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в вертикальной плоскости?
- 6 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в горизонтальной плоскости?
- 7 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?
- 8 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения, какие внутренние силовые факторы их вызывают?
- 9 Какие задачи решают из условия прочности при совместном действии изгиба и кручения?
- 10 От чего зависит допускаемое напряжение в формуле определения диаметра вала?
- 11 Какие теории прочности могут использоваться при определении диаметра вала и почему?
- 12 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

2 Расчетно-проектировочное задание № 4. Расчет центрально-сжатого стержня на устойчивость

2.1 Основные положения теории

Проектировочный расчет центрально-сжатых стержней производится методом последовательных приближений [2]. Для первого приближения задаётся коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,8$. Затем по каждому приближению определяют площадь поперечного сечения стержня из условия устойчивости:

$$\sigma_{уст} = \frac{P}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma], \quad (2.1)$$

где P – действующая нагрузка;

A – площадь поперечного сечения стержня.

Необходимо помнить, что геометрические характеристики выбранного профиля рассчитываются относительно главных центральных осей.



Гибкость стержня определяется следующим образом. Если главная центральная ось пересекает сечение, то она считается материальной осью, и гибкость относительно такой оси вычисляется по формуле

$$\lambda_{\text{мат}} = \frac{\mu \cdot L}{i_{\text{мат}}} . \quad (2.2)$$

Если же главная центральная ось не пересекает сечение, то она считается свободной и расчет гибкости относительно такой оси ведут по формуле

$$\lambda_{\text{своб}} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{\text{своб}}} \right)^2} , \quad (2.3)$$

где L – расстояние между опорами, м ;

$i_{\text{мат}}$, $i_{\text{своб}}$ – радиусы инерции сечения относительно материальной и свободных осей соответственно, м;

μ – коэффициент приведения длины (продольного изгиба) стержня, зависящий от способа его закрепления (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Значения коэффициента приведения длины μ

Схема закрепления						
Коэффициент приведения длины	$\mu = 0,5$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,7$	$\mu = 1$
Номер схемы	1	2	3	4	5	6

Дальнейшее определение действительного коэффициента продольного изгиба φ'_1 осуществляется с помощью линейной интерполяции по наибольшей из найденных гибкостей. В таблице 2.2 приведены величины коэффициентов продольного изгиба в зависимости от гибкости стержня для некоторых конструкционных материалов. Если величины φ_1 и φ'_1 не равны (расхождение более 5 %), необходимо выполнить следующее

приближение, коэффициент продольного изгиба для которого принимается равным среднему арифметическому значению:

$$\varphi_{i+1} = \frac{\varphi_i + \varphi'_i}{2}. \quad (2.4)$$

Таблица 2.2 – Значения коэффициента продольного изгиба φ в зависимости от гибкости λ

Гибкость λ	Сталь марок		Чугун	Дюралюминий	Дерево
	Ст. 3	14Г2	СЧ24-44		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,999	0,99
20	0,97	0,95	0,91	0,998	0,97
30	0,95	0,92	0,81	0,835	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,700	0,87
50	0,89	0,84	0,57	0,568	0,80
60	0,86	0,78	0,44	0,455	0,71
70	0,81	0,71	0,34	0,353	0,61
80	0,75	0,63	0,26	0,269	0,48
90	0,69	0,54	0,20	0,212	0,38
100	0,60	0,46	0,16	0,172	0,31
110	0,52	0,39	–	0,142	0,25
120	0,45	0,33	–	0,119	0,22
130	0,40	0,29	–	0,101	0,18
140	0,36	0,25	–	0,087	0,16
150	0,32	0,23	–	0,076	0,14
160	0,29	0,21	–	–	0,12
170	0,26	0,19	–	–	0,11
180	0,23	0,17	–	–	0,10
190	0,21	0,15	–	–	0,09
200	0,19	0,13	–	–	0,08
210	0,17	0,12	–	–	–
220	0,16	0,11	–	–	–

Приближения необходимо выполнять последовательно до тех пор, пока коэффициенты φ_i и φ'_i не будут отличаться друг от друга менее чем на 5 %. После этого проводят проверку выполнения условия устойчивости (см. формулу (2.1)). Превышение допускаемых напряжений – менее 5 %.

Определение критической силы также ведут по максимальному значению гибкости, вычисленной в последнем приближении, по двум зависимостям:

– если $\lambda_{\max} < \lambda_{\text{пред}}$, то применяется формула Ясинского

$$P_{\text{кр}} = (a - b \cdot \lambda_{\max}) \cdot A \quad (2.5)$$

или

$$P_{\text{кр}} = (a - b \cdot \lambda_{\max} + c \cdot \lambda_{\max}^2) \cdot A, \quad (2.6)$$

где a , b и c – коэффициенты формулы Ясинского, зависящие от материала, МПа (таблица 2.3), (причём формула (2.6) применяется для чугуна и коэффициент $c = 0,0538$ МПа)

– если $\lambda_{\max} \geq \lambda_{\text{пред}}$, то применяется формула Эйлера

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot L)^2} \quad (2.7)$$

или

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} A.$$

Таблица 2.3 – Значения a , b , λ_0 , $\lambda_{\text{пред}}$

Материал	a , МПа	b , МПа	$\lambda_{\text{пред}}$
Ст 3	310	1,14	100
Сталь 14Г2	469	2,62	85
Сталь 30ХМА	1000	5,40	83
Дюралюминий	400	3,33	55
Сталь 45	469	2,62	53
Чугун	761	11,77	80
Дерево	29	0,19	70

Коэффициент безопасности по устойчивости определяется как

$$n_{\text{уст}} = \frac{P_{\text{кр}}}{P}. \quad (2.8)$$

Согласно техническим условиям для сталей $n_{\text{уст}}$ должен находиться в пределах 1,7...3, для чугуна – в пределах 5...6,5, для дерева – 2,8...3,2.



2.2 Пример выполнения расчетно-проектировочного задания № 4

Исходные данные: колонна высотой 5,4 м, поперечное сечение которой представляет собой два двутавра, закреплена, как показано на рисунке 2.1, и сжимается центрально-приложенной нагрузкой $P = 520$ кН. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

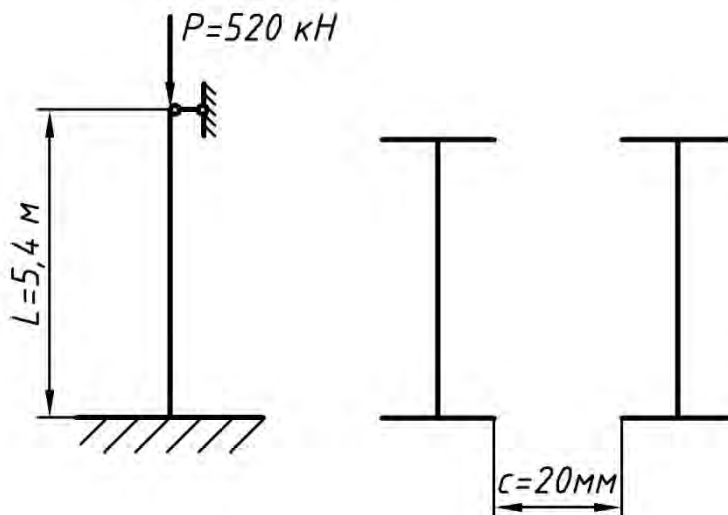


Рисунок 2.1 – Схема закрепления и поперечное сечение колонны

Требуется:

- подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений;
- определить величину критической силы $P_{кр}$;
- найти коэффициент запаса устойчивости.

Решение

Расчет размеров поперечного сечения ведем методом последовательных приближений из условия устойчивости (см. формулу (2.1)).

Первое приближение.

Пусть $\varphi_1 = 0,5$. Тогда расчетная площадь одного двутавра

$$A_1^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 32,5 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 24:

$$A_1^{\text{дв}} = 34,8 \text{ см}^2; \quad I_{x1} = 3460 \text{ см}^4; \quad I_{y1} = 198 \text{ см}^4; \quad b_1 = 115 \text{ мм}.$$

Определим геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции X_c и Y_c (рисунок 2.2). Площадь сечения

$$A_1 = 2A_1^{ДВ} = 2 \cdot 34,8 = 69,6 \text{ см}^2.$$

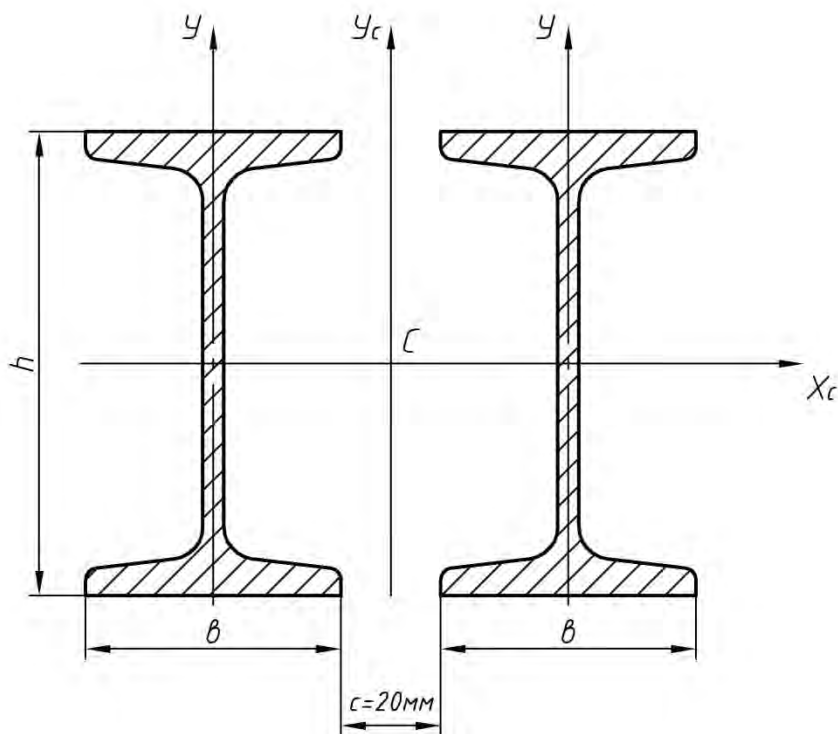


Рисунок 2.2 – Поперечное сечение колонны

Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_{xc1} = 2 \cdot (I_{x1} + a^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (3460 + 0^2 \cdot 34,8) = 6920 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_{yc1} &= 2 \cdot (I_{y1} + b^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (I_{y1} + \left(\frac{b_1}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 \cdot A_1) = \\ &= 2 \cdot (198 + \left(\frac{11,5}{2} + \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 34,8) = 3567,15 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Главные центральные радиусы инерции

$$i_{xc1} = \sqrt{\frac{I_{xc1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{6920}{69,6}} = 9,97 \text{ см};$$

$$i_{y_c1} = \sqrt{\frac{I_{y_c1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{3567,15}{69,6}} = 7,16 \text{ см.}$$

Гибкость стержня относительно материальной оси X_c

$$\lambda_{x1} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c1}} = \frac{0,7 \cdot 540}{9,97} = 37,91,$$

где μ – коэффициент приведения длины для заданной схемы закрепления колонны (см. таблицу 2.1), $\mu = 0,7$.

Гибкость стержня относительно свободной оси Y_c

$$\lambda_{y1} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c1}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{7,16}\right)^2} = 66,24.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости:
 $\lambda_{\max} = \lambda_{y1} = 66,24$.

Уточним коэффициент продольного изгиба по таблице 2.2: при $\lambda = 60$ $\varphi = 0,86$, при $\lambda = 70$ $\varphi = 0,81$.

Линейно интерполируя, получаем

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (66,24 - 60) = 0,829.$$

Так как $\varphi_1 \neq \varphi'_1$, то проводим следующее приближение.

Второе приближение.

Рассчитаем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,829}{2} = 0,6645.$$

Повторяем расчет, как в первом приближении.

$$A_2^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,6645 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,445 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,45 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20:

$$A_2^{\text{дв}} = 26,8 \text{ см}^2; I_{x2} = 1840 \text{ см}^4; I_{y2} = 115 \text{ см}^4; b_2 = 100 \text{ мм.}$$



Геометрические характеристики сечения

$$A_2 = 2A_2^{AB} = 2 \cdot 26,8 = 53,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c2} = 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c1} = 2 \cdot \left(115 + \left(\frac{10}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right) \cdot 26,8 = 2159,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c2} = \sqrt{\frac{I_{x_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{3680}{53,6}} = 8,29 \text{ см};$$

$$i_{y_c2} = \sqrt{\frac{I_{y_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{2159,6}{53,6}} = 6,35 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x2} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c2}} = \frac{0,7 \cdot 540}{8,29} = 45,6;$$

$$\lambda_{y_c} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c2}} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{6,35} \right)^2} = 71,72;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y_c} = 71,72.$$

Уточним коэффициент φ : при $\lambda = 70$ $\varphi = 0,81$, при $\lambda = 80$ $\varphi = 0,75$.

Тогда

$$\varphi'_2 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} (71,72 - 70) = 0,8; \quad \varphi_2 \neq \varphi'_2.$$

Третье приближение.

Рассчитаем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,6645 + 0,8}{2} = 0,732;$$



$$A_3^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,732 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 22,2 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 18:

$$A_3^{\text{дб}} = 23,4 \text{ см}^2; \quad I_{x_3} = 1290 \text{ см}^4; \quad I_{y_3} = 82,6 \text{ см}^4; \quad b_3 = 90 \text{ мм}.$$

Геометрические характеристики сечения

$$A_3 = 2A_3^{\text{дб}} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_{c3}} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_{c3}} = 2 \cdot \left(82,6 + \left(\frac{9}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 23,4 \right) = 1580,9 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_{c3}} = \sqrt{\frac{I_{x_{c3}}}{A_3}} = \sqrt{\frac{2580}{46,8}} = 7,42 \text{ см};$$

$$i_{y_{c3}} = \sqrt{\frac{I_{y_{c3}}}{A_3}} = \sqrt{\frac{1580,9}{46,8}} = 5,81 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x_3} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_{c3}}} = \frac{0,7 \cdot 540}{7,42} = 50,49;$$

$$\lambda_{y_3} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_{c3}}} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{5,81} \right)^2} = 76,37;$$

$$\lambda_{\text{max}} = \lambda_{y_3} = 76,37.$$

Уточним коэффициент φ :

$$\varphi'_3 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} (76,37 - 70) = 0,772; \quad \varphi_3 \neq \varphi'_3.$$

Четвертое приближение.

Рассчитаем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,732 + 0,772}{2} = 0,752;$$

$$A_4^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,752 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 21,6 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 повторно выпадает двутавр № 18. Проверяем его устойчивость:

$$A = 46,8 \text{ см}^2; \quad \lambda_{\text{max}} = 76,37; \quad \varphi = 0,772;$$

$$\sigma_{\text{уст}} = \frac{P}{A} = \frac{520 \cdot 10^3}{46,8 \cdot 10^{-4}} = 11,1 \cdot 10^7 \text{ Па} = 111 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,772 \cdot 160 = 123,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 111 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = 123,52 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости соблюдается.

Так как значение максимальной гибкости для выбранного сечения не превышает предельного значения гибкости для стали $\lambda_{\text{max}} = 76,37 < \lambda_{\text{пред}} = 100$, то критическую силу определим по формуле Ясинского:

$$P_{\text{кр}} = (310 - 1,14 \cdot 76,37) \cdot 10^6 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4} = 1043,35 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1043,35 \text{ кН},$$

где $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$ для малоуглеродистой стали [1].

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_{\text{уст}} = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{1043,35}{520} \approx 2.$$

Вывод: для заданной колонны выбрано поперечное сечение, состоящее из двух двутавров № 18, для которого выполняется условие устойчивости с коэффициентом запаса 2.



2.3 Задания для самостоятельной работы

Исходные данные: колонна высотой L , м, определенного поперечного сечения сжимается центрально-приложенной нагрузкой P , кН. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Значения исходных данных принять из таблицы 2.4.

Таблица 2.4 – Значения исходных данных

Номер строки	L , м	P , кН	C , мм	Номер схемы закрепления (см. таблицу 2.1)	Номер схемы поперечного сечения (рисунок 2.3)	Материал стержня
1	2	320	20	1	1	Ст 3
2	3	400	10	2	2	Сталь 14Г2
3	4	180	15	3	3	Сталь 30ХМА
4	2,5	500	18	4	4	Дюралюминий
5	2,2	280	21	5	5	Сталь 45
6	3,5	420	23	1	6	Чугун
7	2,8	360	25	2	1	Ст 3
8	3,6	220	14	3	2	Сталь 14Г2
9	4,2	160	16	4	3	Сталь 30ХМА
0	1,8	340	22	5	4	Чугун
	а	б	в	а	б	в

Примечание – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки, т. е.

0 9 4 2 5 0
 а б в

Например, для шифра 094250 выбираем следующие исходные данные: $L = 3$ м; $P = 280$ кН; $C = 22$ мм; номер схемы закрепления – 1; номер схемы поперечного сечения – 5; материал стержня – чугун

Требуется:

- подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений;
- определить величину критической силы $P_{кр}$;
- найти коэффициент запаса устойчивости.



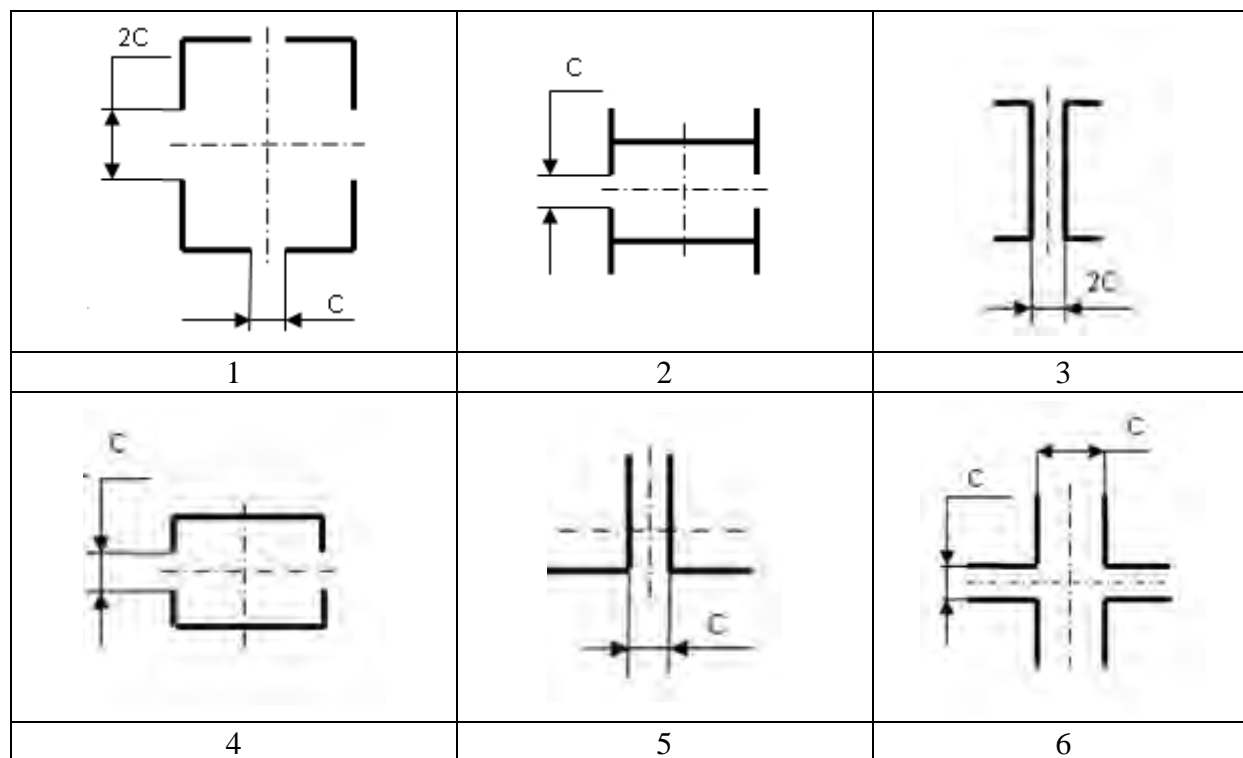


Рисунок 2.3 – Схемы поперечного сечения

Контрольные вопросы

- 1 Что называют устойчивостью?
- 2 Какой метод используется для подбора поперечного сечения?
- 3 Что называют критической силой?
- 4 Что называют допускаемой силой?
- 5 Что называют коэффициентом запаса устойчивости?
- 6 Как определить формулу для расчета критической силы?
- 7 От чего зависит предельная гибкость?
- 8 От чего зависит гибкость стержня?
- 9 От чего зависит коэффициент приведения длины?
- 10 От чего зависит коэффициент продольного изгиба?
- 11 Какие оси называются свободными, а какие материальными?

Список литературы

1 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2000. – 560 с.

2 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций : учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва : Машиностроение, 2002. – 436 с.

3 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Дельта, 2008. – 816 с.

4 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

5 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

