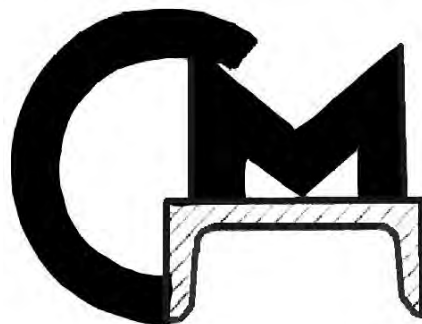


ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»

# МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к самостоятельной  
работе студентов машиностроительных специальностей  
заочной формы обучения*



Могилев 2015

УДК 539.3/6  
ББК 305.1212  
М 64

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Сопротивление материалов» «б» апреля 2015 г.,  
протокол № 9

Составители: канд. техн. наук, доц. Д. М. Макаревич;  
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович;  
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И.В.Лесковец

Даны задания для выполнения аудиторной контрольной работы по  
дисциплине «Механика материалов», а также приведены методические ре-  
комендации и перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

## МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск Д. М. Макаревич

Технический редактор А. Т. Червинская

Компьютерная верстка Е. С. Фитцова

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 265 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:

Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 24.01.2014.

Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский  
университет», 2015



## Содержание

Введение.....	4
1 Расчет стержней на растяжение и сжатие.....	5
1.1 Общие сведения.....	5
1.2 Порядок расчета стержня. Расчет на прочность.....	7
1.3 Пример выполнения задачи 1.....	8
2 Расчет валов круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения.....	16
2.1 Основные положения теории.....	16
2.2 Пример выполнения задачи 2.....	21
Список литературы.....	28



## Введение

Цель изучения механики материалов – получение навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и деталей машин.

Целью выполнения аудиторных контрольных работ является применение на практике методов и подходов к решению инженерных задач расчета конструкций, деталей и узлов машин на прочность, жесткость с учетом свойств конструкционных материалов.

1 Методические рекомендации разработаны в соответствии с «ПОЛОЖЕНИЕМ об аудиторной контрольной работе и компьютерном тестировании обучающихся по заочной (дистанционной) форме».

2 Аудиторная контрольная работа (далее – АКР) является формой промежуточного контроля результатов межсессионной самостоятельной работы обучающихся заочной (в том числе дистанционной) формы обучения.

3 АКР организуется и проводится в период лабораторно-экзаменационной сессии в соответствии с расписанием после лекционных, лабораторных и практических занятий по дисциплине «Механика материалов».

4 Студенты машиностроительных специальностей выполняют две АКР в письменной форме: в пятом семестре – «Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии», в шестом – «Расчет вала при совместном действии изгиба и кручения».

5 Общая продолжительность АКР для учебной группы составляет 2 академических часа. Проводится в соответствии с расписанием.

6 АКР выполняется на бланках установленного образца. Перед решением каждой задачи записываются численные значения исходных данных. Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Решение сопровождается краткими пояснениями. Чертежи и схемы к задачам выполняются в удобном масштабе, карандашом, с использованием чертежного инструмента.

7 К выполнению АКР допускаются обучающиеся по заочной (в том числе дистанционной) форме, имеющие при себе зачетную книжку, удостоверение личности (паспорт либо вид на жительство, удостоверение беженца).

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами курсов «Механика материалов» и предназначены для студентов машиностроительных специальностей 3 курса заочной формы обучения.

Также приведены список литературы и примеры решения задач, входящих в контрольные работы.



# 1 Расчет стержней на растяжение и сжатие

## 1.1 Общие сведения

В этом разделе рассмотрим основные зависимости для расчета отдельного бруса (стержня). Обычно брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем. Растяжение или сжатие возникает в стержне, если внешние силы действуют вдоль его оси (рисунок 1.1, а).

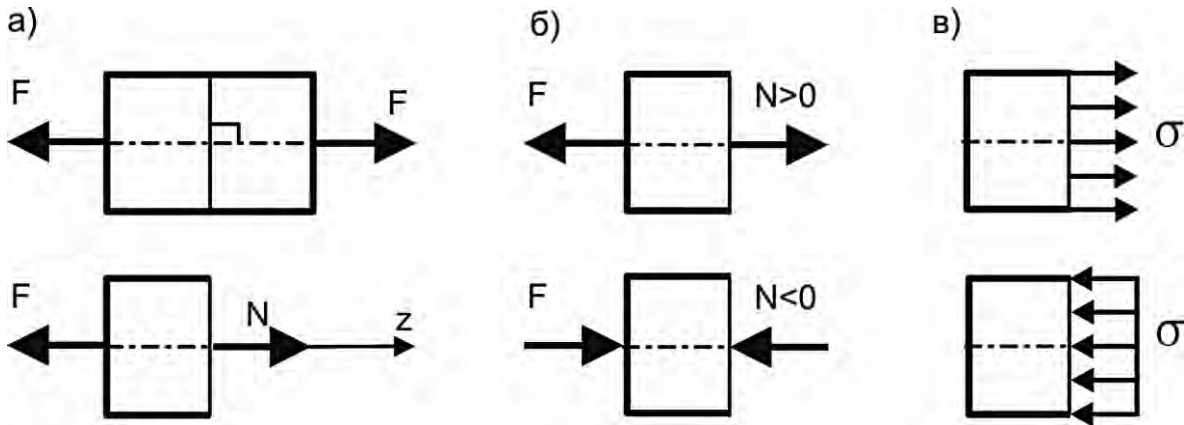


Рисунок 1.1 – Определение внутренних сил и правило знаков

При таком нагружении в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – нормальная (продольная) сила  $N$ , для которой принято следующее правило знаков (рисунок 1.1, б): сила  $N$ , направленная от сечения, является положительной; сила  $N$ , направленная к сечению – отрицательной. Положительная нормальная сила соответствует растяжению, отрицательная – сжатию.

Для определения нормальной силы  $N$  в любом сечении стержня применяется метод сечений. Например, для простейшей расчетной модели стержня, изображенной на рисунке 1.1, а, можно сделать произвольное сечение поперечной плоскостью. Отбросив, например, правую часть стержня, заменяем ее действие на оставшуюся левую часть нормальной силой  $N$  (см. рисунок 1.1, а). Вводим силу  $N$  в сечении в положительном направлении согласно правилу знаков (от сечения). И, наконец, определяем нормальную силу из уравнения равновесия левой отсеченной части стержня (сумма проекций всех внешних и внутренних сил на ось  $z$  равна нулю):

$$\sum F_z = 0, \quad -F + N = 0, \quad N = F.$$

### Примечания

1 При составлении уравнения равновесия не имеет значения выбор положительного направления горизонтальной оси  $z$ .

2 Вводить нормальную силу в положительном направлении необязательно, но удобно: величина  $N$  сразу будет получена с учетом правила знаков.

В поперечном сечении стержня возникают только нормальные напряжения  $\sigma$ , одинаковые во всех точках сечения (рисунок 1.1, в), которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Правило знаков для нормального напряжения такое же, как и для нормальной силы (рисунок 1.1, в): положительное напряжение является растягивающим, отрицательное – сжимающим.

Продольная (осевая) относительная деформация  $\varepsilon$  в поперечном сечении стержня вычисляется на основании закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (1.2)$$

где  $E$  – модуль продольной упругости материала стержня.

С учетом выражения (1.1) расчетную формулу (1.2) можно записать и в таком виде:

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A}. \quad (1.3)$$

Осевое (продольное) перемещение  $\delta$  поперечного сечения стержня определяется осевой координатой  $z$  по длине и вычисляется по формуле

$$\delta_z = \delta_0 + \int_0^z \frac{N \cdot dz}{E \cdot A}, \quad (1.4)$$

где  $\delta_0$  – осевое перемещение сечения при  $z = 0$ .

Произведение  $E \cdot A$  называется жесткостью стержня при растяжении-сжатии.

Если на участке стержня выполняются условия  $N = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$ , то получим линейный закон изменения перемещений на данном участке

$$\delta_{(z)} = \delta_0 + \frac{N \cdot z}{E \cdot A} = \delta_0 + \varepsilon z. \quad (1.5)$$



Для определения абсолютной деформации стержня или полного изменения его длины  $\Delta l$  можно воспользоваться формулой

$$\Delta l = \sum_{i=1}^m \Delta l_i = \sum_{i=1}^m \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i}, \quad (1.6)$$

где  $m$  – количество участков стержня;

$\Delta l_i$  – абсолютное удлинение (укорочение) или полное изменение длины  $i$ -го участка.

Если получим положительное значение ( $\Delta l > 0$ ), то это означает, что стержень удлинился под действием заданной нагрузки; если ( $\Delta l < 0$ ) – укоротился.

### **1.2 Порядок расчета стержня. Расчет на прочность**

Расчетный анализ стержня при растяжении-сжатии включает получение полной информации для расчетной модели (нормальные силы, напряжения, деформация, перемещения) и проведение расчета на прочность. При необходимости можно вычислить изменение длины стержня (удлинение или укорочение) или перемещение его конкретного сечения.

Как указывалось ранее, наглядное представление об изменении какой-либо величины для стержня в целом дает график этой величины по длине стержня, называемый эпюрой. Например, эпюра нормальных сил – это график функции  $N(z)$ .

При дальнейшем рассмотрении примеров расчетов стержней будем придерживаться такого порядка вычислений:

- определение нормальных сил по методу сечений и построение эпюры нормальных сил;
- определение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня по формуле (1.1) и построение эпюры нормальных напряжений;
- определение линейной (продольной) деформации в стержне по формуле (1.2) или (1.3) и построение эпюры деформаций;
- определение осевых перемещений характерных сечений стержня по формуле (1.5);
- расчет на прочность.

В зависимости от целей расчета некоторые этапы и эпюры отдельных величин могут быть опущены.

На основе условия прочности или условий прочности можно проводить один из трех видов расчета на прочность. Например, условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} \leq \left| \frac{N}{A} \right| \leq [\sigma] \quad (1.7)$$



можно записать в таком виде:

$$\frac{c \cdot F}{A} \leq [\sigma], \quad (1.8)$$

где  $F$  – параметр нагрузки;

$A$  – параметр поперечного сечения стержня;

$c$  – числовой коэффициент.

Тогда при помощи неравенств (1.7) и (1.8) можно выполнять следующие виды расчета на прочность.

1 Проектировочный расчет – определение минимально допустимого значения площади поперечного сечения:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad \text{или} \quad A \geq \frac{c \cdot F}{[\sigma]}, \quad \text{откуда} \quad A_{\min} = \frac{N}{[\sigma]} \quad \text{или} \quad A_{\min} = \frac{c \cdot F}{[\sigma]}. \quad (1.9)$$

2 Определение допускаемой нагрузки:

$$F \leq [\sigma] \cdot A \quad \text{или} \quad F \leq \frac{[\sigma] \cdot A}{c}, \quad \text{откуда} \quad F_{\text{доп}} = [\sigma] \cdot A \quad \text{или} \quad F_{\text{доп}} = \frac{[\sigma] \cdot A}{c}. \quad (1.10)$$

3 Проверочный расчет, целью которого является определение максимального напряжения  $\sigma_{\max}$ . Полученное напряжение сравниваем с допускаемым напряжением  $[\sigma]$  и делаем вывод о выполнении или невыполнении условия прочности.

### 1.3 Пример выполнения задачи 1

Спроектировать брус (стержень) равного сопротивления круглого поперечного сечения (рисунок 1.2).

Дано:  $F = 60$  кН,  $a = 0,2$  м, материал – серый чугун, механические характеристики которого:  $E = 1,15 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma]_p = 40$  МПа,  $[\sigma]_{\text{СЖ}} = 135$  МПа (таблица 1.3).

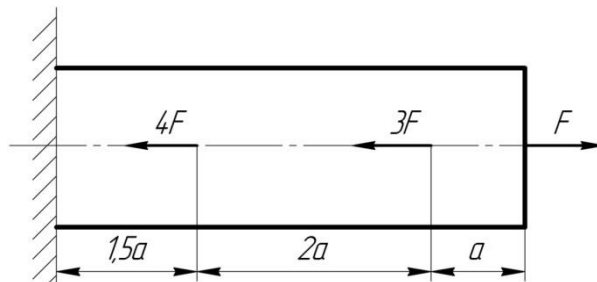


Рисунок 1.2 – Расчетная схема бруса



*Решение*

1 Определение продольных сил на участках бруса.

Сечение I  $\sum Z = 0$ ;  $F - N_1 = 60$  кН (растяжение).

Сечение II  $\sum Z = 0$ ;  $F - 3F + N_2 = 0$ ;  $N_2 = 2F = 120$  кН (сжатие).

Сечение III  $\sum Z = 0$ ;  $F - 3F - 4F + N_3 = 0$ ;  $N_3 = 6F = 360$  кН (сжатие).

*Примечание* – Продольную силу  $N$  можно направлять произвольно.

Если при решении уравнения равновесия она получается положительной, значит её направление выбрано верно; если отрицательной, её направление следует изменить на противоположное и в дальнейших расчетах использовать со знаком «+».

Строим эпюру продольных сил (рисунок 1.3, эпюра  $N$ ).

2 Подбор сечения бруса равного сопротивления.

Условие прочности для участка АВ

$$\sigma_{\max}^{\text{AB}} = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_{\text{P}} ;$$

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}.$$

Тогда условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max}^{\text{AB}} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} \leq [\sigma]_{\text{P}},$$

откуда рассчитываем диаметр:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot N_1}{\pi \cdot [\sigma]_{\text{P}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 43,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 43,7 \text{ мм}.$$

По таблице 1.1 принимаем ближайшие значения диаметра:  $d_1 = 42$  мм и  $d_1 = 44$  мм.

Таблица 1.1 –Таблица нормальных размеров

В миллиметрах

Ряды нормальных размеров												
3,0	11	21	35	52	78	105	155	210	310	410	510	610
3,5	12	22	36	55	80	110	160	220	320	420	520	620
4,0	13	23	38	58	82	115	165	230	330	430	530	630
4,5	14	24	40	60	85	120	170	240	340	440	540	640
5,0	15	25	42	62	88	125	175	250	350	450	550	650
6,0	16	26	44	65	90	130	180	260	360	460	560	660
7,0	17	28	45	68	92	135	185	270	370	470	570	670
8,0	18	30	46	70	95	140	190	280	380	480	580	680
9,0	19	32	48	72	98	145	195	290	390	490	590	690
10,0	20	34	50	75	100	150	200	300	400	500	600	700



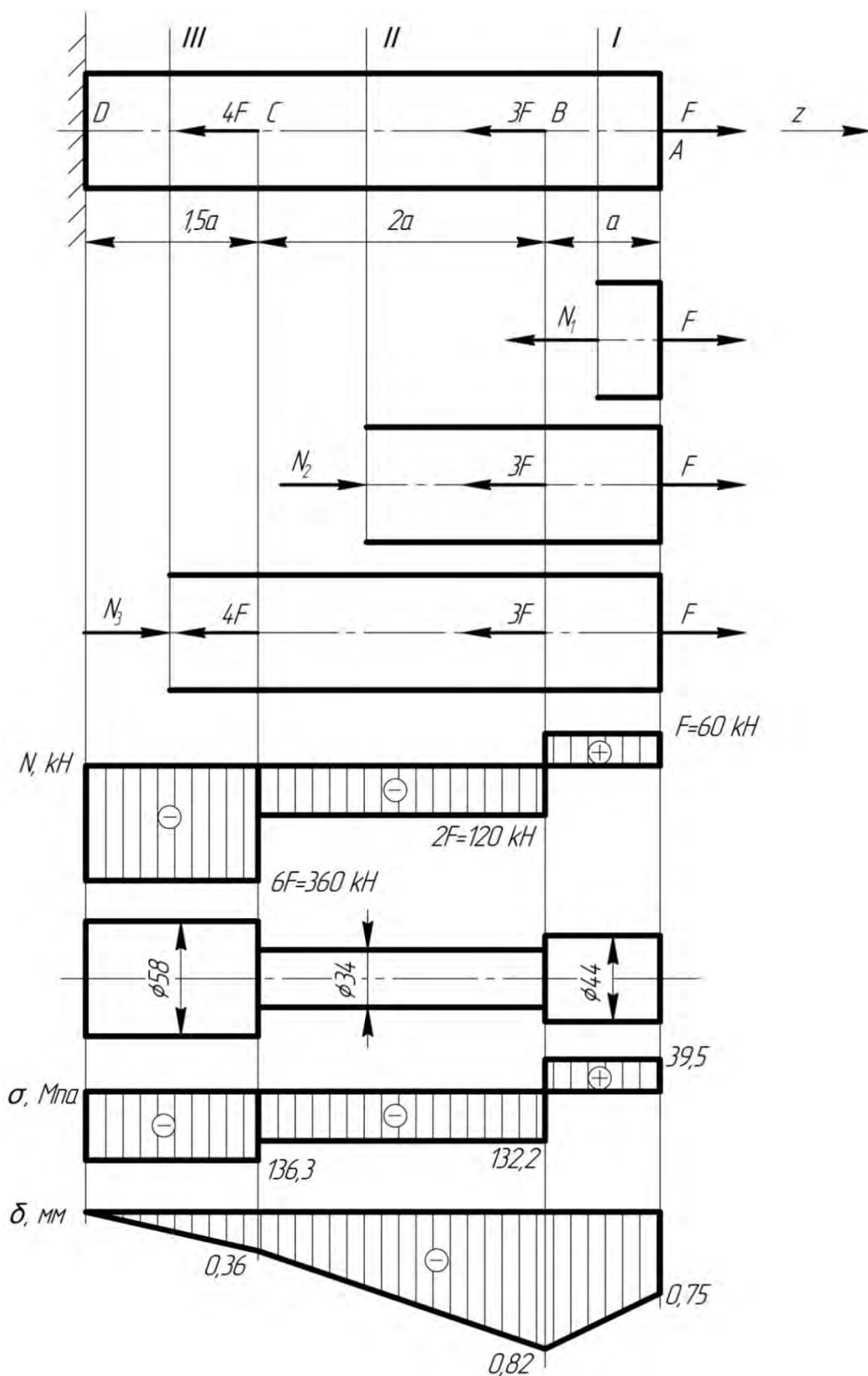


Рисунок 1.3 – Построение эпюр для бруса

Проверяем прочность:

$$\sigma_{\max}^{\text{AB}} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (42 \cdot 10^{-3})^2} = 43,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 43,3 \text{ МПа} \geq [\sigma]_{\text{p}} = 40 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет:  $\frac{43,3 - 40}{40} \cdot 100 \% = 8,3 \%$ , что недопустимо,

т. к. перегрузка не должна превышать 5 %. Принимаем  $d_1 = 44 \text{ мм}$ .

Условие прочности для участка ВС

$$\sigma_{\max}^{\text{BC}} = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_{\text{СЖ}};$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}.$$

Тогда условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max}^{\text{BC}} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} \leq [\sigma]_{\text{СЖ}},$$

откуда определяем диаметр:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot N_2}{\pi \cdot [\sigma]_{\text{СЖ}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 135 \cdot 10^6}} = 33,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 33,6 \text{ мм}.$$

По таблице 1.1 принимаем ближайшие значения диаметра:  $d_1 = 32 \text{ мм}$  и  $d_1 = 34 \text{ мм}$ .

Проверяем прочность:

$$\sigma_{\max}^{\text{BC}} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi \cdot d_2^2} = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (32 \cdot 10^{-3})^2} = 149,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 149,3 \text{ МПа} \geq [\sigma]_{\text{СЖ}} =$$

= 135 МПа.

Перенапряжение составляет:  $\frac{149,3 - 135}{135} \cdot 100 \% = 10,6 \%$ , что недопустимо,

т. к. перегрузка не должна превышать 5 %. Принимаем  $d_2 = 34 \text{ мм}$ .

Условие прочности для участка CD



$$\sigma_{\max}^{\text{CD}} = \frac{N_3}{A_3} \leq [\sigma]_{\text{СЖ}};$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d_3^2}{4}.$$

Тогда условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max}^{\text{CD}} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi d_3^2} \leq [\sigma]_{\text{СЖ}},$$

откуда диаметр

$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot N_3}{\pi \cdot [\sigma]_{\text{СЖ}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 360 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 135 \cdot 10^6}} = 58,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 58,3 \text{ мм}.$$

По таблице 1.1 принимаем ближайшие значения диаметра:  $d_1 = 58 \text{ мм}$  и  $d_1 = 60 \text{ мм}$ .

Проверяем прочность:

$$\sigma_{\max}^{\text{CD}} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi \cdot d_3^2} = \frac{4 \cdot 360 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (58 \cdot 10^{-3})^2} = 136,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 136,3 \text{ МПа} \geq [\sigma]_{\text{СЖ}} = 135 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет:  $\frac{136,3 - 135}{135} \cdot 100 \% = 1 \%$ , что допустимо. Принимаем  $d_3 = 58 \text{ мм}$ .

Вычерчиваем схему бруса с указанием принятых размеров (см. рисунок 1.3).

3 Определение напряжений на участках стержня с учетом принятых размеров.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (44 \cdot 10^{-3})^2} = 39,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 39,5 \text{ МПа} -$$

растяжение.

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (32 \cdot 10^{-3})^2} = 132,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 132,2 \text{ МПа} -$$

сжатие.

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi d_3^2} = \frac{4 \cdot 360 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (58 \cdot 10^{-3})^2} = 136,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 136,3 \text{ МПа} -$$

сжатие.

Строим эпюру нормальных напряжений (см. рисунок 1.3, эпюра  $\sigma$ ).

4 Определение абсолютных деформаций участков стержня, если

$$E = 1,15 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 1,15 \cdot 10^{11} \text{ Па.}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{4 \cdot N_1 \cdot a}{E \cdot \pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{1,15 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (44 \cdot 10^{-3})^2} = 0,07 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,07 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 2a}{E \cdot A_2} = \frac{4 \cdot N_2 \cdot 2a}{E \cdot \pi \cdot d_2^2} = -\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{1,15 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (34 \cdot 10^{-3})^2} = -0,46 \cdot 10^{-3} \text{ м} =$$

$$= -0,46 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A_3} = \frac{4 \cdot N_3 \cdot 1,5 \cdot a}{E \cdot \pi \cdot d_3^2} = -\frac{4 \cdot 360 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{1,15 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (58 \cdot 10^{-3})^2} = -0,36 \cdot 10^{-3} \text{ м} =$$

$$= -0,36 \text{ мм.}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,07 - 0,46 - 0,36 = -0,75 \text{ мм.}$$

5 Строим эпюру перемещений.

$$\delta_D = 0;$$

$$\delta_C = \Delta l_3 = -0,36 \text{ мм};$$

$$\delta_B = \delta_C + \Delta l_2 = -0,36 - 0,46 = -0,82 \text{ мм};$$

$$\delta_A = \delta_D + \Delta l_1 = -0,82 + 0,07 = -0,75 \text{ мм.}$$

Строим эпюру перемещений (см. рисунок 1.3, эпюра  $\delta$ ).

**Задача 1. «Проектирование бруса равного сопротивления».**

На брус квадратного или круглого поперечного сечения действуют осевые растягивающие и сжимающие силы  $F$  (рисунок 1.4).

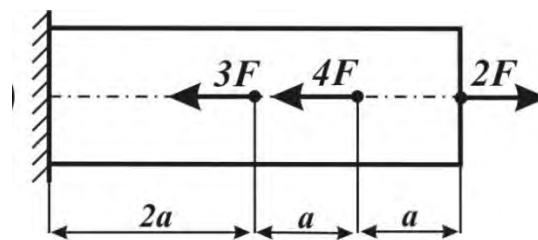


Рисунок 1.4 – Схема к задаче

1 Спроектировать брус равного сопротивления, для чего необходимо:

– определить продольные усилия на каждом участке бруса и построить эпюру продольных сил (исходные данные для расчета представлены в таблице 1.1);

– из расчета на прочность, используя для заданных материалов данные таблицы 1.2, определить для каждого участка размеры поперечного сечения бруса (диаметр для круглого и сторону квадрата для квадратного сечения) и привести размеры в соответствии с таблицей нормальных размеров (таблица 1.1);

2 Вычертить в выбранном масштабе схему бруса по заданной длине и найденным размерам сечений.

3 Построить эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  и перемещений  $\delta$ .

Таблица 1.2 – Исходные данные к задаче 1

Номер строки	Нагрузка F, кН	Длина участка, м	Материал	Форма сечения
0	30	0,20	Сталь Ст 3	
1	45	0,25	Чугун серый	
2	50	0,30	Латунь	
3	25	0,22	Бронза	
4	40	0,30	Стеклопластик	
5	35	0,20	Древесина	
6	48	0,25	Сплав титана BT14	
7	60	0,35	Алюминий	
8	55	0,18	Сталь Ст 3	
9	28	0,23	Дюралюминий	
	а	б	а	в

Таблица 1.3 – Механические характеристики и допускаемые напряжения для материалов

Материал	Модуль продольной упругости $E$ , МПа	Временное сопротивление $\sigma_b$ , МПа	Предел текучести $\sigma_t$ , МПа	Допускаемое напряжение $[\sigma]$ МПа	
				Растяжение $[\sigma]_p$	Сжатие $[\sigma]_{сж}$
Сталь Ст 3	$2 \cdot 10^5$	380–470	240	160	160
Чугун серый	$1,15 \cdot 10^5$	120–380	–	40	135
Сплав титана ВТ4	$1,1 \cdot 10^5$	800–900	700–800	350	350
Алюминий	$0,7 \cdot 10^5$	220	110	55	55
Дюралюминий	$1,0 \cdot 10^5$	450–500	330	115	115
Латунь	$1,1 \cdot 10^5$	400	210	105	105
Бронза	$0,1 \cdot 10^5$	380	160	90	90
Текстолит	$0,1 \cdot 10^5$	100	–	35	35
Древесина	$0,1 \cdot 10^5$	100	–	8	12
Стеклопластик	$0,6 \cdot 10^5$	260–480	–	130	130

### ***Вопросы к практическим занятиям***

- 1 Какой вид деформаций называется осевым растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении стержня при осевом растяжении-сжатии?
- 3 Сформулируйте правило знаков для определения нормальной силы.
- 4 Какие напряжения возникают при осевом растяжении-сжатии? Запишите формулу для их определения.
- 5 Запишите формулы для определения относительной и абсолютной деформаций при осевом растяжении-сжатии.
- 6 Какое свойство материала характеризует модуль продольной упругости?
- 7 Сформулируйте условие прочности при осевом растяжении-сжатии.
- 8 Какая величина определяется произведением  $E \cdot A$ ?
- 9 Какое свойство материала характеризует модуль продольной упругости?
- 10 Сформулируйте условие прочности при осевом растяжении-сжатии.
- 11 Сформулируйте задачи, решаемые из условия прочности при осевом растяжении-сжатии.
- 12 Запишите формулу для определения величины допускаемого напряжения.

## 2 Расчет валов круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

### 2.1 Основные положения теории

Совместное действие изгиба и кручения является распространенным видом нагружения в технике (валы редукторов, коробок скоростей, валы приводов конвейеров и т. д.).

Силы, действующие на вал (собственный вес вала и вес колес, давление на зубья шестерен, натяжение ремней шкивов и т. п.), вызывают в его поперечном сечении возникновение внутренних силовых факторов (ВСФ):  $M_{кр}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ . Действием поперечных сил  $Q_x$ ,  $Q_y$ , как правило, пренебрегают. В практических расчетах действие крутящих моментов  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  рассматривают по отдельности с последующим суммированием результата по соответствующим теориям прочности.

Передаваемая валом мощность  $N$  является работой внешнего скручивающего момента  $m$  и определяется по формуле

$$N = m \cdot \omega = m \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (2.1)$$

где  $n$  – частота вращения вала, об/мин;

$\omega$  – угловая скорость,  $c^{-1}$ .

Соответственно внешний скручивающий момент можно найти по формуле

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n}. \quad (2.2)$$

Основными изгибающими силами являются окружные усилия на зубьях шестерен  $F$  и усилия натяжения ветвей ременной передачи на шкивах  $T$  и  $t$ . Приведение изгибающих усилий к центру тяжести вала диаметром  $d$  в том его сечении, где располагается шестерня, показано на рисунке 2.1, а; в том сечении, где располагается шкив, – на рисунке 2.1, б. Окружное усилие на зубчатом колесе средним диаметром  $D$  находят по формуле

$$F = \frac{2 \cdot m}{D}. \quad (2.3)$$

Изгибающую силу на шкиве диаметром  $D$  при отношении усилий ременной передачи  $T = 2t$  определяют по формуле

$$F = T + t = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D}, \quad (2.4)$$





где  $T$  – усилие натяжения на ведущей ветви передачи;  
 $t$  – усилие натяжения на ведомой ветви передачи.

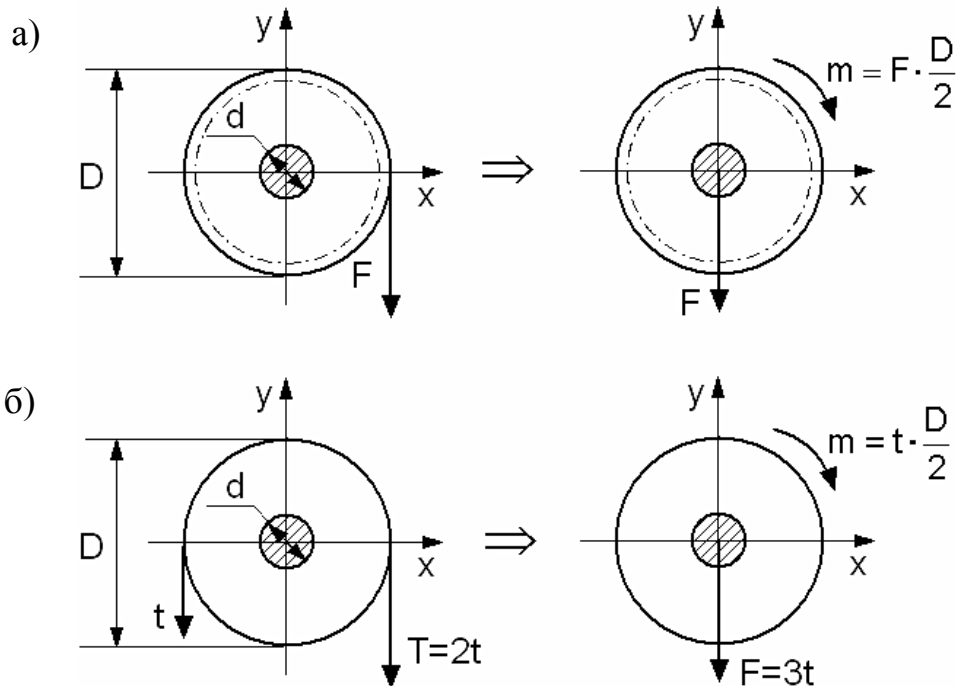


Рисунок 2.1 – Приведение изгибающих усилий на шестерне (а) и шкиве (б) к центру тяжести вала

Расчет вала на прочность ведется в **опасном сечении**, которое определяется по эпюрам крутящих и изгибающих моментов при их наиболее неблагоприятном сочетании. Для примера рассмотрим вал, на который действуют скручивающий момент  $m$  и изгибающая сила  $F$  (рисунок 2.2).

Опасным будет являться сечение, примыкающее к заделке, и опасными точками в нем – точки А и В, в которых достигаются максимальные значения нормальных напряжений  $\sigma_{\max}$  от изгибающего момента и максимальные значения касательных напряжений  $\tau_{\max}$  от крутящего момента:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x}; \quad (2.5)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}, \quad (2.6)$$

где  $W_x$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения вала;  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения

вала.

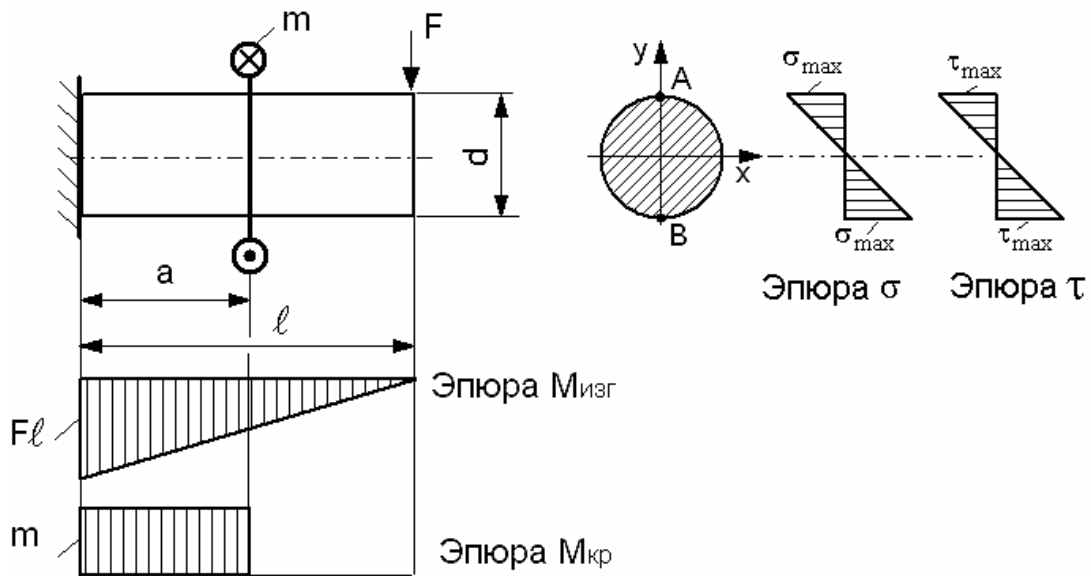


Рисунок 2.2 – Эпюры изгибающего и крутящего моментов и эпюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении вала

В точках А и В материал вала находится в плоском напряженном состоянии, при котором нормальные напряжения действуют только вдоль оси вала. Как правило, валы изготавливаются из стали, поэтому их расчет рекомендуется проводить по третьей или четвертой теориям прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4 \cdot \tau_{\text{max}}^2} \leq [\sigma]; \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{max}}^2} \leq [\sigma]. \quad (2.8)$$

Для вала круглого поперечного сечения осевой и полярный моменты сопротивления определяются по формулам

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad (2.9)$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 = 2 \cdot W_x. \quad (2.10)$$

Подставляя в теории прочности (2.7) и (2.8) вместо  $\sigma_{\text{max}}$  и  $\tau_{\text{max}}$  их значения, выраженные через осевой момент сопротивления  $W_x$ , получим следующее условие прочности для расчета вала при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.11)$$

где  $M_{\text{ЭКВ}}$  – эквивалентный момент, равный, соответственно, по третьей и четвертой теориям прочности

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{ИЗГ}}^2 + M_{\text{КР}}^2}; \quad (2.12)$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{ИЗГ}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{КР}}^2}. \quad (2.13)$$

Изгибающие силы, действующие в разных плоскостях, раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие. Затем показывают отдельно схему изгиба вала от всех вертикальных сил и схему изгиба вала от всех горизонтальных сил. В каждой схеме изгиба определяют реакции на опорах. Под каждой схемой строится эпюра изгибающих моментов, причем вертикальные силы создают момент  $M_x$ , а горизонтальные – момент  $M_y$ . Так как у брусков круглого поперечного сечения кривой изгиб невозможен, то поперечное сечение вала будет испытывать прямой изгиб под действием полного изгибающего момента:

$$M_{\text{ИЗГ}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (2.14)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты, соответственно, в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

По результатам расчета полного (суммарного) изгибающего момента в характерных точках вала строится эпюра  $M_{\text{ИЗГ}}$ , которая характеризует только величину момента. Плоскости действия полных изгибающих моментов в различных сечениях вала различны, но на эпюре все ординаты условно расположены в плоскости чертежа. Для вала на шарикоподшипниковых опорах крайние участки эпюры полных изгибающих моментов очерчены прямыми линиями, внутренние – параболлами, выпуклостью, направленной к нулевой линии.

Эпюра крутящих моментов  $M_{\text{КР}}$  строится так же, как при чистом кручении.

При помощи эпюр  $M_{\text{КР}}$  и  $M_{\text{ИЗГ}}$  определяют **опасное сечение**, в котором наиболее неблагоприятно сложились крутящий и изгибающий моменты (для вала постоянного поперечного сечения).

Проверку прочности производят по формуле (2.11).

Проектировочный расчет позволяет определить диаметр вала:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} = \frac{M_{\text{ЭКВ}} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (2.15)$$



Расчеты следует вести в СИ. Диаметр вала, выраженный в миллиметрах, необходимо округлить в большую сторону в соответствии с рядом нормальных линейных размеров (таблица 2.1, графа Ra 40).

Таблица 2.1 – Ряд нормальных линейных размеров

Ряды				Ряды					
Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40	Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40		
10	10	10	10 10,5	100	100	100	100 105		
		11	11 15			110	110 120		
	12	12	12 13		125	125	125 130		
		14	14 15			140	140 150		
	16	16	16		16 17	160	160	160	160 170
			18		18 19			180	180 190
20		20	20 21	200	200		200 210		
		22	22 24		220		220 240		
25		25	25	25 26	250		250	250	250 260
			28	28 30				280	280 300
	32	32	32 34	320		320	320 340		
		36	36 38			360	360 380		
	40	40	40	40 42		400	400	400	400 420
			45	45 48				450	450 480
50		50	50 53	500	500		500 530		
		56	56 60		560		560 600		
63		63	63	63 67	630		630	630	630 670
			71	71 75				710	710 750
	80	80	80 85	800		800	800 850		
		90	90 95			900	900 950		

## 2.2 Пример выполнения задачи 2

На вал круглого сплошного сечения насажены шестерня средним диаметром  $D_1 = 0,23$  м и шкив ременной передачи диаметром  $D_2 = 0,39$  м (рисунок 2.3, а). Вес шкива  $G = 600$  Н, собственными весами шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допустимое напряжение материала вала  $[\sigma] = 80$  МПа.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности и округлить его значение до стандартных величин (см. таблицу 2.1, графу Ra 40).

### Решение

По формуле (2.2) определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов показана на рисунке 2.3, б.

Построение эпюры внутреннего силового фактора – крутящий момент  $M_{кр}$ , возникающего в сечениях вала, производим по участкам слева направо:

- участок 1  $M_{кр} = 0$ ;
- участок 2  $M_{кр} = m = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;
- участок 3  $M_{кр} = m - m = 0$ .

По формуле (2.3) определяем окружное усилие  $F_1$ , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

По формуле (2.4) определяем изгибающую силу  $F_2$  от ременной передачи на шкиве, действующую на вал в горизонтальной плоскости:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 2.3, в.

Для определения опорных реакций  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  составим уравнения статического равновесия вала:



$$\sum m_B^{\text{верт}} = 0; \quad R_{Ay} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,8 - 600 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1,2} = 3507 \text{ Н.}$$

$$\sum m_A^{\text{верт}} = 0; \quad R_{By} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1,2} = 2128 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов  $M_x$  по участкам.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 0,4$  м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 0,5$  м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot (0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м):

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Схема действия горизонтальных изгибающих сил, повернутых в плоскость чертежа, показана на рисунке 2.3, г.



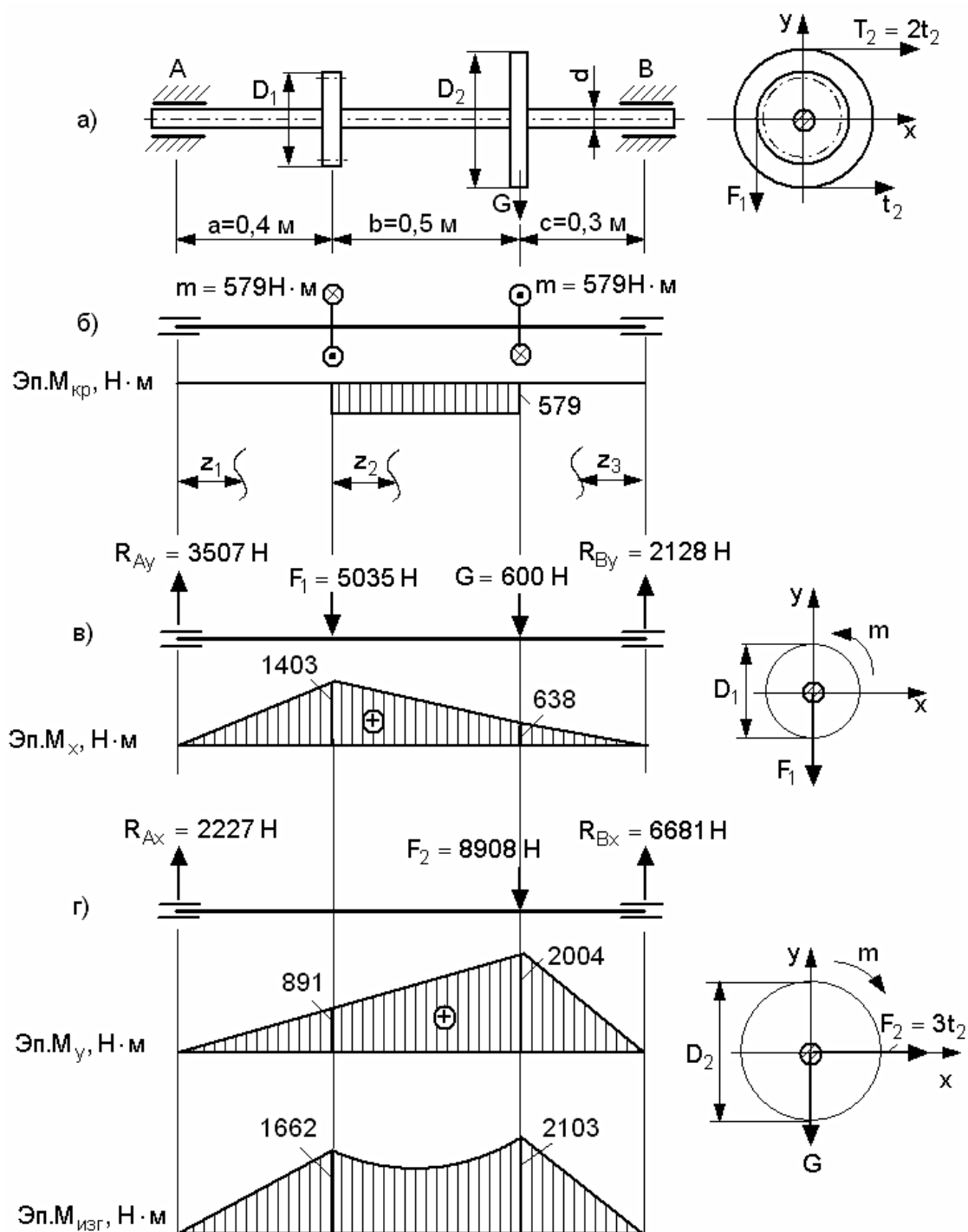


Рисунок 2.3 – Заданная схема вала и вспомогательные схемы и эпюры для примера к задаче 1 (эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  построены на сжатом волокне)

Для определения опорных реакций  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$  составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B^{\text{гоп}} = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н.}$$

$$\sum m_A^{\text{гоп}} = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\sum x = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов  $M_y$  по участкам.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 0,4$  м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 0,5$  м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м):

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов  $M_{\text{изг}}$  в характерных сечениях вала по формуле





$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов  $M_{\text{изг}}$  показана на рисунке 2.3.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива диаметром  $D_2$ , т. к. в нем действуют наибольший изгибающий момент  $M_{\text{изг}} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и крутящий момент  $M_{\text{кр}} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Определим значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности (формула (2.13)):

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим диаметр вала по формуле (2.15):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м} = 65 \text{ мм}.$$

Диаметр вала принимаем равным  $d = 67 \text{ мм}$  (см. таблицу 2.1, графу Ra 40).

**Задача 2.** На вал круглого сплошного сечения диаметром  $d$  насажены шестерня средним диаметром  $D_1$  и шкив ременной передачи диаметром  $D_2$  (рисунок 2.4). Вес шкива равен  $G$ , собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает  $n$  оборотов в минуту и передает мощность, равную  $N$  киловатт. Допустимое напряжение материала вала  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ .

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности и округлить его значение до стандартных величин (см. таблицу 2.1, графу Ra 40).

Исходные данные к задаче берутся из таблицы 2.2.

Приступая к решению задачи, необходимо повторить правила построения эпюр крутящих и изгибающих моментов по методу сечений.

На шарикоподшипниковых опорах реактивный крутящий момент отсутствует, поэтому эпюра  $M_{\text{кр}}$  строится только от внешних скручивающих моментов.

От изгибающих сил на опорах вала возникают реакции, которые определяются из уравнений статического равновесия.

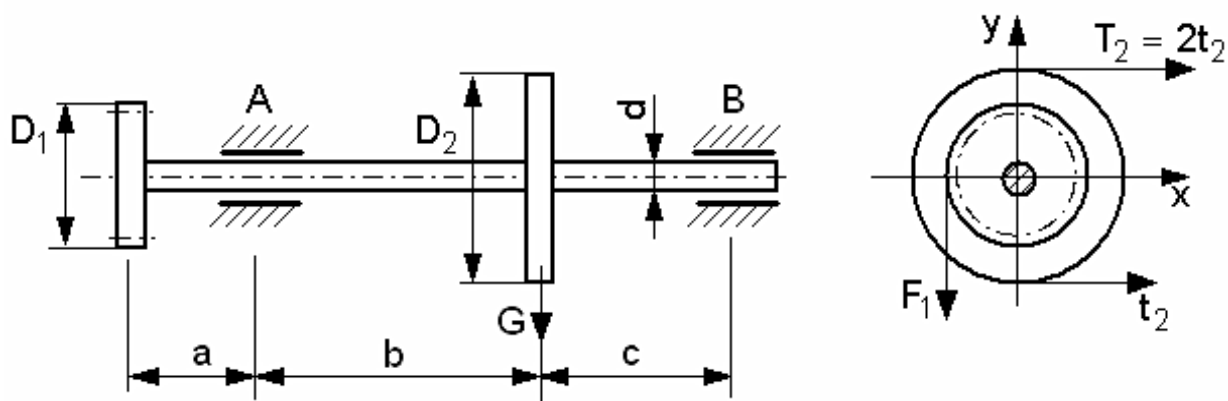


Рисунок 2.4 – Расчетная схема вала к задаче 1

Таблица 2.2 – Исходные данные к задаче 1

Номер строки	N, кВт	n, об/мин	G, Н	a, м	b, м	c, м	D <sub>1</sub> , мм	D <sub>2</sub> , мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320
3	30	1300	240	0,13	0,43	0,33	130	330
4	40	1400	260	0,14	0,44	0,34	140	340
5	50	1500	280	0,15	0,45	0,35	150	350
6	60	1600	300	0,16	0,46	0,36	160	360
7	70	1700	320	0,17	0,47	0,37	170	370
8	80	1800	340	0,18	0,48	0,38	180	380
9	90	1900	360	0,19	0,49	0,39	190	390
0	100	2000	380	0,20	0,50	0,40	200	400
	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>б</b>	<b>в</b>

*Примечание* – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки, т. е.

0 9 4 2 5 0  
а б в

Например, для шифра 094250 выбираем следующие исходные данные:  
N = 20 кВт; n = 1500 об/мин; G = 380 Н; a = 0,12 м; b = 0,45 м; c = 0,4 м; D<sub>1</sub> = 150 мм; D<sub>2</sub> = 400 мм

При построении эпюр изгибающих моментов используют следующее правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если от его действия участок изгибается выпуклостью вниз, и отрицательным, если от его действия участок изгибается выпуклостью вверх.

Эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  студенты специальности ПДМ строят на растянутом волокне, т. е. положительные ординаты откладывают вниз, отрицательные – вверх. Студенты остальных специальностей

строят эпюры изгибающих моментов на сжатом волокне, т. е. положительные ординаты откладывают вверх, отрицательные – вниз, как показано на рисунке 2.3.

### ***Вопросы к практическим занятиям***

1 Какой вид нагружения называют совместным действием изгиба и кручения?

2 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?

3 Как определяется внешний момент, если известна мощность, передаваемая колесом или шкивом?

4 Как определить силу давления на вал со стороны колеса?

5 Как определить силу давления на вал со стороны шкива?

6 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в вертикальной плоскости?

7 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в горизонтальной плоскости?

8 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.

9 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?

10 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?

11 Запишите выражение для определения эквивалентного момента по 3-й теории прочности.

12 Запишите выражение для определения эквивалентного момента 4-й теории прочности.

13 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

14 Какие задачи решают из условия прочности при совместном действии изгиба и кручения?

## Список литературы

1 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Изд-во Дельта, 2008. – 816 с.

2 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.

3 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов. Практикум по решению задач : учеб. пособие для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2009. – 688 с.

4 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

5 **Скопинский, В. Н.** Сопротивление материалов: учеб. пособие / В. Н. Скопинский, А. А. Захаров. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : МГИУ, 2005. – 165 с.

6 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В. Н. Скопинский. – М.: МГИУ, 2007. – 240 с.

