

МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 621.113

Н. Н. Горбатенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ СТУПЕНЕЙ В ПЛАНЕТАРНОЙ КОРОБКЕ ПЕРЕДАЧ АВТОМОБИЛЯ

UDC 621.113

N. N. Gorbatenko

MATHEMATICAL MODELING OF GEARSHIFT PROCESS IN THE AUTOMOTIVE PLANETARY GEARBOX

Аннотация

Предложен подход к математическому моделированию процессов переключения ступеней в автомобильных планетарных коробках передач, основанный на использовании уравнений Лагранжа второго рода. Модель задаётся нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, количество и вид которых зависят от состояния фрикционных элементов коробки передач. Приведен пример использования предложенного подхода в задаче вывода уравнений динамики шестиступенчатой планетарной коробки передач.

Ключевые слова:

планетарная коробка передач, фрикционы, математическая модель, уравнения Лагранжа второго рода.

Abstract

An approach to mathematical modeling of the gearshift process in automotive planetary gearboxes is proposed which is based on the use of Lagrange equations of the second kind. The model is expressed by nonlinear systems of ordinary differential equations of the first order, the number and type of which depend on the state of friction elements in the gearbox. The application of the proposed approach is used as an example in the problem of deriving the equations of dynamics for a six-speed planetary gearbox.

Key words:

planetary gearbox, friction clutch coupling, mathematical model, Lagrange equations of the second kind.

Введение

Переключения ступеней в автомобильных планетарных коробках передач (ПКП) осуществляются, как правило, при помощи многодисковых фрикционных элементов, управляемых электрогидравлической системой [1, 2]. Если характеристики управления фрикционными выбраны неудачно, на упругих валах трансмиссии формируются значительные динамические нагрузки, вызываю-

щие рывки автомобиля. В связи с этим большое внимание уделяют разработке алгоритмов управления, обеспечивающих приемлемую плавность переключения ступеней. Для успешного решения данной задачи необходима математическая модель, подробно описывающая процесс функционирования ПКП на всех этапах переключения ступеней.

Разработка математической модели включает в себя составление эквивалентной динамической схемы исследу-



емой системы и её математическое описание. Обычно динамическую схему ПКП представляют в виде многомассовой механической системы, состоящей из отдельных сосредоточенных масс, соединенных безынерционными упругодемпфирующими и фрикционными элементами. Уравнения движения сосредоточенных масс получают одним из следующих методов: внутренних моментов [3–5], структурно-матричным [6], связанных графов [7, 8], диаграммы свободных материальных тел [9, 10]. Также уравнения динамики ПКП можно получить с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Этот метод отличается простотой использования, что объясняется высокой степенью формализации вывода уравнений. Важное его преимущество состоит в том, что число уравнений модели не зависит от количества сосредоточенных масс и равно числу степеней свободы динамической схемы.

Обзор литературы по тематике рассматриваемой задачи показал, что широких исследований, посвященных применению уравнений Лагранжа второго рода для моделирования динамики автомобильных ПКП, не проводилось. В отдельных публикациях [3, 11–13] представлены уравнения Лагранжа второго рода, которые использовались для вывода дифференциальных уравнений движения простейшего планетарного механизма, включающего центральное колесо, эпицикл и водило.

Целью работы автора являлось развитие подхода к моделированию процесса переключения ступеней в ПКП на основе уравнений Лагранжа второго рода и иллюстрация возможностей предлагаемого подхода на примере шестиступенчатой ПКП.

Описание методики формирования уравнений математической модели

Автомобильная ПКП является событийно-управляемой динамической

системой, имеющей конечное множество структурных состояний (режимов функционирования), смена которых происходит при наступлении событий, вызванных переходом фрикционных из замкнутого состояния в разомкнутое и наоборот. Каждому сочетанию состояний фрикционных, участвующих в переключении ступеней, соответствует определенная структура связей между звеньями планетарных механизмов, через которые поток энергии передается от входного на выходной вал. Все структурные состояния ПКП должны быть представлены в математической модели в виде соответствующих систем дифференциальных уравнений. Кроме этого, математическая модель должна содержать уравнения, определяющие условия перехода ПКП из одного структурного состояния в другое.

Предлагается следующая последовательность действий для вывода уравнений математической модели.

1. Разрабатывают динамическую схему. В качестве динамической схемы рекомендуется использовать непосредственно кинематическую схему ПКП в виде совокупности приведенных сосредоточенных масс, соединенных между собой упругими, демпфирующими и фрикционными элементами.

2. Выписывают уравнения кинематических связей планетарных механизмов, входящих в состав динамической схемы. Конкретный вид этих уравнений определяется схемой механизма. Уравнение связей простейшего планетарного механизма с однозвеновыми сателлитами и разноименным зацеплением имеет вид [1]:

$$\omega_{ki} - \omega_{\partial i} k_i - (1 - k_i) \omega_{vi} = 0, \quad (1)$$

где ω_{ki} , $\omega_{\partial i}$, ω_{vi} – угловые скорости центрального зубчатого колеса, эпицикла и водила i -го планетарного механизма; k_i – кинематический параметр i -го планетарного механизма.

3. Определяют множество струк-



турных состояний $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, в которых может пребывать динамическая схема ПКП в ходе переключения ступеней. Размерность m множества S определяется числом допустимых сочетаний состояний фрикционов, участвующих в переключении. Например, если в процесс переключения вовлечены фрикционы Φ_1 и Φ_2 , первый из которых выключается, а второй включается, то ПКП может находиться в трёх структурных состояниях:

– состояние S_1 : Φ_1 замкнут, Φ_2 разомкнут;

– состояние S_2 : Φ_1 разомкнут, Φ_2 разомкнут;

– состояние S_3 : Φ_1 разомкнут, Φ_2 замкнут.

4. Для каждого S_j структурного состояния ПКП выполняют следующие действия:

– вычисляют число степеней свободы динамической схемы

$$n_j = n_{\Pi} - n_c, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где n_{Π} – число подвижных сосредоточенных масс; n_c – число уравнений кинематических связей (1), накладываемых на механическую систему;

– формируют вектор-столбец обобщенных переменных

$\omega_o = [\omega_{o1}, \omega_{o2}, \dots, \omega_{on_j}]^T$ размерностью n_j и вектор-столбец необобщенных переменных

$\omega_n = [\omega_{n1}, \omega_{n2}, \dots, \omega_{nr}]^T$ размерностью $r = n_{\Pi} - n_j$ (где T – это символ транспонирования);

– используя уравнения связей (1), выражают компоненты вектора ω_n через обобщенные переменные:

$$\omega_{ni} = f_i(\omega_{o1}, \omega_{o2}, \dots, \omega_{on_j}),$$

$$i = 1, \dots, r; \quad (3)$$

– находят кинетическую энергию ПКП в виде функции обобщенных переменных

$$T = \sum_{l=1}^{n_j} \frac{J_l \omega_{ol}^2}{2} + \sum_{i=1}^r \frac{J_i \omega_{ni}^2}{2}; \quad (4)$$

– определяют обобщенные моменты сил M_l , соответствующие обобщенным переменным ω_{ol} , с учетом того, что при изменении только одной обобщенной переменной $\delta\omega_{ol}$ и нулевых значениях остальных обобщенных переменных элементарная мощность обобщенного момента силы M_l была бы равна сумме элементарных мощностей всех внешних моментов, приложенных к механической системе:

$$M_l = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{M_{vi} \delta\omega_i}{\delta\omega_{ol}}, \quad l = 1, \dots, n_j, \quad (5)$$

где M_{vi} – внешний момент, действующий на i -ю сосредоточенную массу; $\delta\omega_i$ – вариация угловой скорости сосредоточенной массы;

– вычисляют производные, указанные в уравнениях Лагранжа второго рода:

$$M_l = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{M_{vi} \delta\omega_i}{\delta\omega_{ol}}, \quad l = 1, \dots, n_j; \quad (6)$$

– представляют систему уравнений (6) в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{J} \frac{d\omega_o}{dt} = \mathbf{M}, \quad (7)$$

где \mathbf{J} – прямоугольная ($n \times n$) матрица инерционных параметров ПКП; \mathbf{M} – n -мерный вектор-столбец,

составленный из обобщенных моментов сил;

– определяют выражения

$$\lambda_{\Phi_i} = \begin{cases} 1, & \text{если } |M_{п(\Phi_i)}| \leq M_{тр(\Phi_i)} \text{ и } |\omega_{\Phi_i}| \leq \varepsilon; \\ 0, & \text{если } |M_{п(\Phi_i)}| \geq M_{тр(\Phi_i)} \text{ или } M_{тр(\Phi_i)} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где λ_{Φ_i} – дискретная переменная, описывающая состояние i -го фрикциона, $\lambda_{\Phi_i} = 1$ – фрикцион замкнут, $\lambda_{\Phi_i} = 0$ – фрикцион разомкнут; $M_{тр(\Phi_i)}$ – момент трения, развиваемый фрикционом; $M_{п(\Phi_i)}$ – вращающий момент, передаваемый фрикционом в замкнутом состоянии; ω_{Φ_i} – относительная скорость вращения дисков фрикциона; ε – допуск на замыкание фрикциона.

Момент трения фрикциона

$$M_{тр(\Phi_i)} = C_{\Phi_i} \mu_{\Phi_i}(\omega_{\Phi_i}) p_{\Phi_i}(t), \quad (9)$$

где C_{Φ_i} – константа фрикциона, определяемая параметрами конструкции; $\mu_{\Phi_i}(\omega_{\Phi_i})$ – коэффициент трения, зависящий от скольжения дисков;

$p_{\Phi_i}(t)$ – управляющее давление фрикциона.

Вращающие моменты, передаваемые фрикционами в замкнутом состоянии, находят из уравнений равновесия сил, действующих на звенья планетарных механизмов ПКП.

Таким образом, после выполнения описанных действий образуется m систем дифференциально-алгебраических уравнений (7) и (3), каждая из которых описывает движение сосредоточенных масс ПКП в соответствующем структурном состоянии, при этом переход от одной системы уравнений к другой происходит при смене значений дискретных переменных λ_{Φ_i} , определяемых по формуле (8). Логика перехода от одной системы уравнений к другой показана на рис. 1.

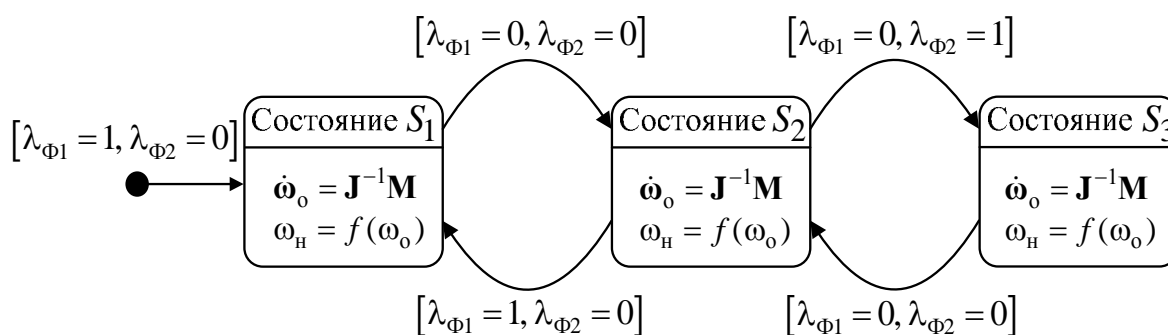


Рис. 1. Граф состояний и переходов процесса переключения ступеней в ПКП

Процесс переключения ступеней в ПКП осуществляется с участием двух фрикционов Φ_1 и Φ_2 , первый из которых выключается, второй включается.

Путём интегрирования системы уравнений (7) находят обобщенные скорости сосредоточенных масс динамической схемы:



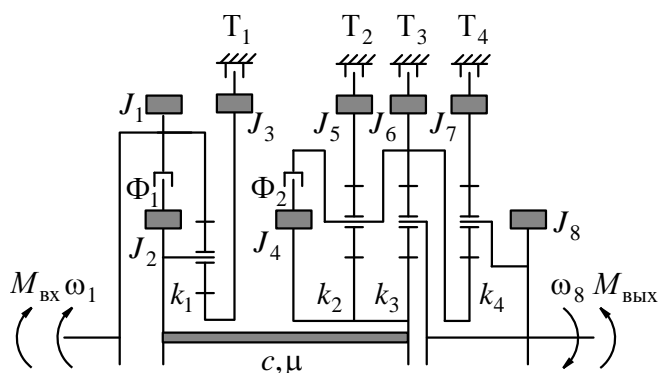
$$\begin{aligned} \omega_{o1} &= \omega_{o1}(t); \omega_{o2} = \omega_{o2}(t); \dots; \\ \omega_{on} &= \omega_{on}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

угловые скорости остальных сосредоточенных масс определяют из уравнений (3).

Вывод уравнений математической модели

В качестве примера использования предлагаемого подхода осуществим вывод уравнений движения сосредоточенных масс динамической схемы ПКП, показанной на рис. 2, для случая переключения $2 \rightleftharpoons 3$. Сосредоточенные массы $J_i, i = 1, \dots, 8$, выделенные в схеме, учитывают инерционные свойства

ПКП; их моменты инерции относительно осей вращения эквивалентны моментам инерции соответствующих звеньев планетарных рядов. Упругий c и диссипативный μ элементы отражают упругие и диссипативные свойства вала, расположенного между делителем и базовым редуктором коробки передач. Фрикционные элементы учитывают воздействия многодисковых муфт (Φ_1, Φ_2) и тормозов ($T_i, i = 1, \dots, 4$) на звенья планетарных рядов. Входным воздействием для ПКП является вращающий момент $M_{вх}$, подводимый от турбинного вала гидротрансформатора, $M_{вых}$ – это момент сопротивления вращению выходного вала.



Состояние фрикционов ПКП

Номер ступени	Φ_1	T_1	Φ_2	T_2	T_3	T_4
Н		⊗				
1		⊗			⊗	
2	⊗				⊗	
3		⊗		⊗		
4	⊗			⊗		
5		⊗	⊗			
6	⊗		⊗			
R		⊗				⊗

Примечание – ⊗ – фрикцион замкнут

Рис. 2. Динамическая схема ПКП

Уравнения кинематических связей звеньев планетарных рядов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 - \omega_1 k_1 - (1 - k_1) \omega_2 &= 0; \\ \omega_4 - \omega_5 k_2 - (1 - k_2) \omega_6 &= 0; \\ \omega_4 - \omega_6 k_3 - (1 - k_3) \omega_8 &= 0; \\ \omega_6 - \omega_7 k_4 - (1 - k_4) \omega_8 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_8$ – угловые скорости сосредоточенных масс; k_1, \dots, k_4 – кинематические параметры планетарных рядов.

В табл. 1 приведены характеристики структурных состояний ПКП во время переключения ступеней $2 \rightleftharpoons 3$.

Состояние S_1 . В этом состоянии динамическая схема ПКП имеет две степени свободы. Фрикцион Φ_1 и тормоз T_3 замкнуты, следовательно, $\omega_2 = \omega_1, \omega_6 = 0$. Примем в качестве обобщенных переменных угловые скорости первой и четвертой сосредоточенных масс, т. е. $\omega_0 = [\omega_1, \omega_4]^T$. Ис-



пользуя уравнения связей (11), выразим угловые скорости масс J_3 , J_5 , J_7 и J_8 через обобщенные переменные ω_1 и ω_4 :

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 k_1 + (1 - k_1) \omega_2 = \omega_1, \\ \omega_7 &= \frac{-(1 - k_4)}{k_4(1 - k_3)} \omega_4; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\omega_5 = \frac{\omega_4}{k_2}, \quad \omega_8 = \frac{\omega_4}{1 - k_3}. \quad (13)$$

Табл. 1. Структурные состояния ПКП при переключении ступеней $2 \rightleftharpoons 3$

Состояние ПКП	Состояние фрикционов				Число степеней свободы динамической схемы ПКП
	Φ_1	T_1	T_2	T_3	
S_1	1	0	0	1	2
S_2	0	0	0	0	4
S_3	0	1	1	0	2

Примечание – 1 – фрикцион замкнут, 0 – фрикцион разомкнут

Подставляя формулы (12), (13) в выражение кинетической энергии (4) и группируя члены, находим

$$T = \frac{1}{2} (J_a \omega_1^2 + J_b \omega_2^2), \quad (14)$$

где J_a , J_b – инерционные параметры ПКП,

$$J_a = J_1 + J_2 + J_3;$$

$$J_b = J_4 + \frac{J_5}{k_2^2} +$$

$$+ J_7 \frac{(1 - k_4)^2}{(1 - k_3)^2 k_4^2} + \frac{J_8}{(1 - k_3)^2}. \quad (15)$$

Уравнение для нахождения обобщенного момента M_1 , соответствующего обобщенной переменной ω_1 , выраженное через мощности, имеет вид:

$$\begin{aligned} M_1 \omega_1 &= M_{\text{вх}} \omega_1 - \\ &- M_{\text{тр}(T_1)} \omega_3 \text{sign}(\omega_3) - M_y \omega_2, \end{aligned} \quad (16)$$

или

$$M_1 = M_{\text{вх}} - M_{\text{тр}(T_1)} \text{sign}(\omega_1) - M_y. \quad (17)$$

Поступая аналогично, находим обобщенный момент M_4 , соответствующий обобщенной переменной ω_4 :

$$\begin{aligned} M_4 &= M_y - M_{\text{тр}(T_2)} \times \\ &\times \frac{\omega_5}{\omega_4} \text{sign}(\omega_5) - M_{\text{вых}} \frac{\omega_8}{\omega_4}. \end{aligned} \quad (18)$$

После подстановки в (18) выражений (13) имеем

$$\begin{aligned} M_4 &= M_y - M_{\text{тр}(T_2)} \times \\ &\times \frac{1}{k_2} \text{sign} \left(\frac{\omega_4}{k_2} \right) - M_{\text{вых}} \frac{1}{1 - k_3}. \end{aligned} \quad (19)$$

В формулах (17) и (19) M_y – это момент, прикладываемый к сосредоточенным массам со стороны упругого вала, расположенного между делителем и базовым редуктором коробки передач:

$$M_y = M_c + \mu(\omega_2 - \omega_4); \quad (20)$$

$$\frac{dM_c}{dt} = c(\omega_2 - \omega_4). \quad (21)$$

После подстановки (14) в (6) и взятия производных получим систему уравнений



$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= M_1 / J_a; \\ \dot{\omega}_4 &= M_4 / J_b. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Таким образом, в рассматриваемом структурном состоянии математическая модель ПКП включает дифференциальные уравнения (21), (22) и алгебраические уравнения (12), (13), (20).

Вращающий момент $M_{п(\Phi_i)}$, передаваемый фрикционом в замкнутом состоянии, определим из совместного решения двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_{п(\Phi_1)} &= M_{вх} - J_1 \dot{\omega}_1; \\ J_a \dot{\omega}_1 &= M_1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Исключив из системы (23) $\dot{\omega}_1$, получим формулу для вычисления момента, передаваемого фрикционом в замкнутом состоянии:

$$M_{п(\Phi_1)} = ((J_a - J_1)M_{вх} + J_1[M_{тр(T_1)}\text{sign}(\omega_1) + M_y]) / J_a. \quad (24)$$

Момент, подводимый к фрикциону T_3 в замкнутом состоянии,

$$M_{п(T_3)} = M_{тр(T_2)}\text{sign}(\omega_5) \times \left(\frac{1 - k_2 - k_3}{k_2} \right) - M_y k_3. \quad (25)$$

Состояние S_2 . В этом состоянии динамическая схема имеет четыре степени свободы. Выберем в качестве обобщенных переменных угловые скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_8$ соответствующих сосредоточенных масс. Используя уравнения связей (11), выразим угловые скорости масс J_3, J_5, J_6 и J_7 через обобщенные переменные:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 k_1 + (1 - k_1)\omega_2; \\ \omega_5 &= \frac{k_2 + k_3 - 1}{k_2 k_3} \omega_4 + \frac{(1 - k_2)(1 - k_3)}{k_2 k_3} \omega_8; \\ \omega_6 &= \frac{1}{k_3} \omega_4 - \frac{1 - k_3}{k_3} \omega_8; \\ \omega_7 &= \frac{1}{k_3 k_4} \omega_4 - \frac{1 - k_3 k_4}{k_3 k_4} \omega_8. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Подставляя (26) в выражение кинетической энергии (4) и группируя члены, получим

$$T = \frac{1}{2} (J_a \omega_1^2 + 2J_b \omega_1 \omega_2 + J_c \omega_2^2 + J_d \omega_4^2 + 2J_e \omega_4 \omega_8 + J_f \omega_8^2), \quad (27)$$

где $J_a, J_b, J_c, J_d, J_e, J_f$ – инерционные параметры ПКП,

$$\left. \begin{aligned} J_a &= J_1 + J_3 k_1^2; \\ J_b &= J_3 k_1 (1 - k_1); \\ J_c &= J_2 + J_3 (1 - k_1)^2; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$J_d = J_4 + J_5 \left(\frac{k_2 + k_3 - 1}{k_2 k_3} \right)^2 + \frac{J_6}{k_3^2} + \frac{J_7}{k_3^2 k_4^2}; \quad (29)$$

$$J_e = J_5 \frac{(k_2 + k_3 - 1)(1 - k_2)(1 - k_3)}{k_2 k_3} - J_6 \frac{1 - k_3}{k_3^2} - J_7 \frac{1 - k_3 k_4}{k_3^2 k_4^2}; \quad (30)$$

$$J_f = J_8 + J_5 \frac{(1 - k_2)^2 (1 - k_3)^2}{k_2^2 k_3^2} + J_6 \frac{(1 - k_3)^2}{k_3^2} + J_7 \frac{(1 - k_3 k_4)^2}{k_3^2 k_4^2}. \quad (31)$$

Уравнение для нахождения обобщенного момента M_1 , соответствующего переменной ω_1 , имеет вид:

$$M_1\omega_1 = M_{\text{вх}}\omega_1 - M_{\text{тр}(\Phi 1)}\omega_1 \times \text{sign}(\omega_1 - \omega_2) - M_{\text{тр}(\Gamma 1)}\omega_3\text{sign}(\omega_3), \quad (32)$$

или

$$M_1 = M_{\text{вх}} - M_{\text{тр}(\Phi 1)} \times \text{sign}(\omega_1 - \omega_2) - M_{\text{тр}(\Gamma 1)} \frac{\omega_3}{\omega_1} \text{sign}(\omega_3). \quad (33)$$

Из первого уравнения системы (26) следует, что при $\omega_2 = 0$ $\omega_3 / \omega_1 = k_1$, поэтому

$$M_1 = M_{\text{вх}} - M_{\text{тр}(\Phi 1)}\text{sign}(\omega_1 - \omega_2) - M_{\text{тр}(\Gamma 1)}k_1\text{sign}(\omega_3). \quad (34)$$

Поступая аналогично, можно получить следующие формулы для вычисления обобщенных моментов сил:

$$M_2 = M_{\text{тр}(\Phi 1)}\text{sign}(\omega_1 - \omega_2) - M_{\text{тр}(\Gamma 1)}(1 - k_1)\text{sign}(\omega_3) - M_y; \quad (35)$$

$$M_4 = M_y - M_{\text{тр}(\Gamma 2)} \frac{k_2 + k_3 - 1}{k_2 k_3} \times \text{sign}(\omega_5) - \frac{M_{\text{тр}(\Gamma 3)}}{k_3} \text{sign}(\omega_6); \quad (36)$$

$$M_8 = -M_{\text{тр}(\Gamma 2)} \frac{(1 - k_2)(1 - k_3)}{k_2 k_3} \times \text{sign}(\omega_5) + M_{\text{тр}(\Gamma 3)} \frac{1 - k_3}{k_3} \times \text{sign}(\omega_6) - M_{\text{вых}}. \quad (37)$$

После подстановки (27) в (6) и вычисления соответствующих производных получим

$$J_a\dot{\omega}_1 + J_b\dot{\omega}_2 = M_1; \quad (38)$$

$$J_b\dot{\omega}_1 + J_c\dot{\omega}_2 = M_2; \quad (39)$$

$$J_d\dot{\omega}_4 + J_e\dot{\omega}_8 = M_4; \quad (40)$$

$$J_e\dot{\omega}_4 + J_f\dot{\omega}_8 = M_8. \quad (41)$$

Следует отметить, что система уравнений (38)–(41) относительно производных обобщенных переменных является линейной, а матрица \mathbf{J} коэффициентов этой системы имеет блочно-диагональную структуру, состоящую из четырех блоков размерностью 2×2 , причём блоки не расположенные на главной диагонали – нулевые матрицы. В связи с этим систему уравнений можно разделить на две подсистемы и решение каждой из них найти независимо друг от друга [14]. Решив уравнения (38) и (39) относительно $\dot{\omega}_1$ и $\dot{\omega}_2$, а уравнения (40) и (41) – относительно $\dot{\omega}_4$ и $\dot{\omega}_8$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{M_1 J_c - M_2 J_b}{J_a J_c - J_b^2}; \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{M_2 J_a - M_1 J_b}{J_a J_c - J_b^2}; \\ \dot{\omega}_4 &= \frac{M_4 J_f - M_8 J_e}{J_d J_f - J_e^2}; \\ \dot{\omega}_8 &= \frac{M_8 J_d - M_4 J_e}{J_d J_f - J_e^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

В данном случае в состав математической модели ПКП входят дифференциальные уравнения (42), (43), (21) совместно с выражениями (20), (34)–(37).

Состояние S_3 . В этом состоянии динамическая схема ПКП имеет две степени свободы. Фрикционы Γ_1 и Γ_2 замкнуты, $\omega_3 = 0$, $\omega_5 = 0$. Пусть $\omega_0 = [\omega_1, \omega_4]^T$. Тогда угловые скорости сосредоточенных масс J_2 , J_6 , J_7 и J_8 будут вычисляться по формулам:

$$\omega_2 = \frac{-k_1}{1 - k_1} \omega_1; \quad \omega_6 = \frac{1}{1 - k_2} \omega_4; \quad (44)$$



$$\begin{aligned} \omega_7 &= \frac{(1-k_3) - (1-k_4)(1-k_2-k_3)}{k_4(1-k_2)(1-k_3)} \omega_4; \\ \omega_8 &= \frac{1-k_2-k_3}{(1-k_2)(1-k_3)} \omega_4, \end{aligned} \quad (45)$$

а дифференциальные уравнения движения сосредоточенных масс в обобщенных переменных примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = M_1 / J_a; \\ \dot{\omega}_4 = M_4 / J_b, \end{cases} \quad (46)$$

где J_a , J_b – инерционные параметры ПКП; M_1 – обобщенный момент, соответствующий обобщенной переменной ω_1 ; M_4 – обобщенный момент, соответствующий обобщенной переменной ω_4 .

Значения J_a , J_b , M_1 , M_4 определяются по следующим формулам:

$$J_a = J_1 + J_2 \frac{k_1^2}{(1-k_1)^2}; \quad (47)$$

$$\begin{aligned} J_b &= J_4 + J_6 \frac{1}{(1-k_2)^2} + \\ &+ J_7 \left(\frac{(1-k_3) - (1-k_4)(1-k_2-k_3)}{k_4(1-k_2)(1-k_3)} \right)^2 + \\ &+ J_8 \left(\frac{1-k_2-k_3}{(1-k_2)(1-k_3)} \right)^2; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{\text{вх}} - M_{\text{тр}(\Phi_1)} \text{sign}(\omega_1 - \omega_2) \times \\ &\times \left(1 + \frac{k_1}{1-k_1} \right) + M_y \frac{k_1}{1-k_1}; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} M_4 &= M_y - M_{\text{тр}(\Gamma_3)} \frac{1}{1-k_2} \text{sign} \left(\frac{\omega_6}{1-k_2} \right) - \\ &- M_{\text{вых}} \frac{1-k_2-k_3}{(1-k_2)(1-k_3)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Вращающие моменты, подводимые к фрикционам T_1 и T_2 в замкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} M_{\text{п}(\Gamma_1)} &= -\frac{1}{k_1} [M_{\text{вх}} - \\ &- M_{\text{тр}(\Phi_1)} \text{sign}(\omega_1 - \omega_2)]; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} M_{\text{п}(\Gamma_2)} &= k_2 \left[M_y k_3 - M_{\text{тр}(\Gamma_3)} \times \right. \\ &\times \left. \text{sign}(\omega_6) \right] / (1-k_2-k_3). \end{aligned} \quad (52)$$

Результаты моделирования

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (22), (42), (43), (46) была разработана компьютерная программа на языке программирования *Matlab*, осуществляющая интегрирование уравнений с помощью солвера *ode113*. При выполнении расчётов значения параметров динамической схемы задавались согласно данным табл. 2 и 3, кинематические параметры планетарных рядов принимались равными $k_1 = -2,78$, $k_2 = -1,83$, $k_3 = -2,35$, $k_4 = -2$. Момент сопротивления $M_{\text{вых}}$ устанавливался равным 6000 Н·м.

Табл. 2. Параметры динамической схемы ПКП

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	c	μ
19,37	2,73	1,89	2,25	1,50	27,31	4,20	5,77	1165745	1678,8
Примечание – Размерность J_i , $i = 1, \dots, 8$, кг/м ² ; c – Н·м/рад; μ – Н·м·с/рад									



Табл. 3. Конструктивные параметры фрикционных элементов ПКП

$C_{\Phi_1}, \text{ м}^3$	$C_{T_1}, \text{ м}^3$	$C_{T_2}, \text{ м}^3$	$C_{T_2}, \text{ м}^3$
0,2652	0,0682	0,1789	0,4474

Вращающий момент на входном валу ПКП описывался линейной функцией

$$M_{\text{вх}} = a + b\omega_1, \quad (53)$$

где a, b – коэффициенты аппроксимации; $a = 43000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $b = -190,9859 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с/рад}$.

Коэффициенты трения дисков фрикционов вычислялись по формуле

$$\mu_{\text{Фр}} = 0,065 + 0,095 e^{-0,2756 r_3 |\omega_{\text{Фр}}|}, \quad (54)$$

где r_3 – эквивалентный радиус дисков фрикциона, $r_3 = 0,2890 \text{ м}$; $\omega_{\text{Фр}}$ – угловая скорость скольжения дисков фрикциона.

Результаты моделирования (рис. 3) показывают, что на качественном уровне характер изменения фазовых переменных модели соответствует реальному процессу переключения ступеней.

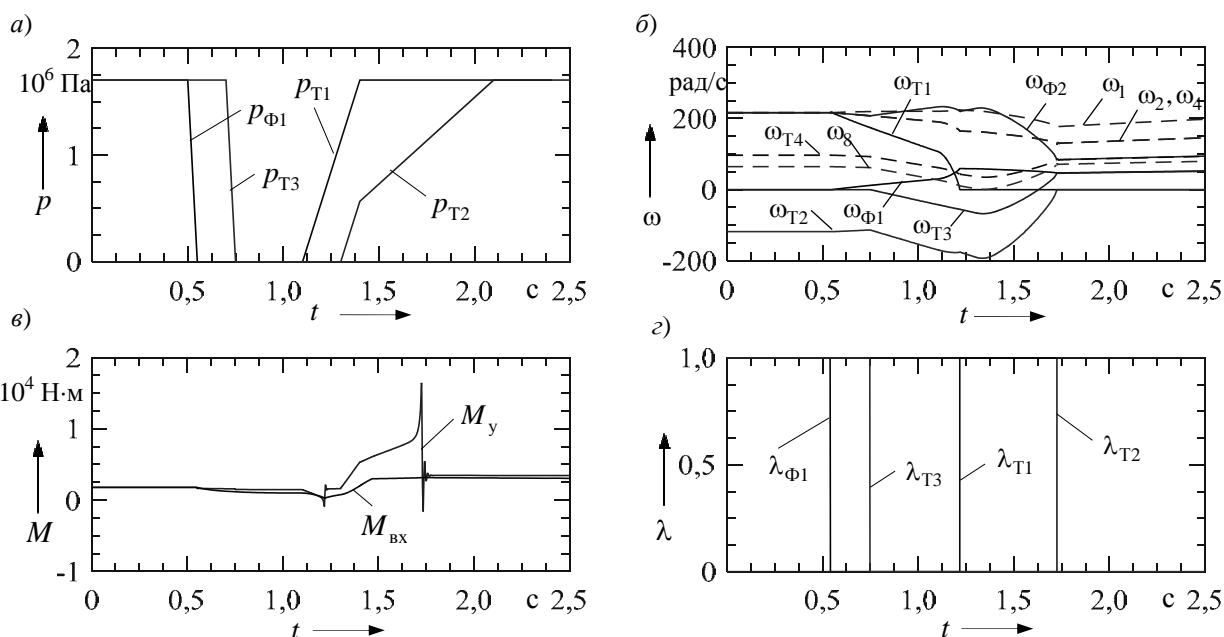


Рис. 3. Результаты моделирования процесса переключения ступеней 2 → 3 в ПКП: а – графики изменения давлений в цилиндрах фрикционов; б – графики изменения угловых скоростей обобщенных переменных и дисков фрикционов; в – графики изменения вращающих моментов на входе и упругом валу ПКП; г – графики изменения переменных состояния фрикционов

В интервале времени от 0 до 0,5 с в ПКП включена вторая ступень, поскольку фрикционы Φ_1 и T_3 замкнуты (угловые скорости скольжения дисков ω_{Φ_1} и ω_{T_3} равны нулю), а T_1 и T_2

разомкнуты (ω_{T_1} и ω_{T_2} не равны нулю). В момент времени $t = 0,5 \text{ с}$ начинается процесс переключения ступеней. Снижение давлений P_{Φ_1} и P_{T_3} приводит к размыканию фрикционов Φ_1



и T_3 , а подъём давлений p_{T1} , p_{T2} вызывает замыкание фрикционов T_1 и T_2 . После размыкания Φ_1 и T_3 угловые скорости ω_{Φ_1} и ω_{T3} возрастают, а при включении T_1 и T_2 угловые скорости ω_{T1} и ω_{T2} устремляются к нулевым значениям.

Таким образом, предложенный подход к моделированию динамики ПКП обеспечивает создание модели, адекватно описывающей все этапы, составляющие процесс переключения ступеней с сохранением его структуры и последовательности протекания во времени.

Заключение

В статье описан подход к моделированию процессов переключения ступеней в планетарной коробке передач

автомобиля с применением уравнений Лагранжа второго рода. Предложенный подход отличается высокой степенью формализации, а также тем, что в результате его применения динамика ПКП описывается в виде системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, при этом число итоговых уравнений модели равно числу обобщенных переменных динамической схемы и не зависит от числа сосредоточенных масс.

Использование предлагаемого подхода проиллюстрировано на примере вывода уравнений, описывающих процесс переключения со второй на третью передачу в ПКП. Показано, что полученная модель подробно описывает все этапы, составляющие процесс переключения ступеней с сохранением его структуры и последовательности протекания во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Афанасьев, Б. А.** Проектирование полноприводных колёсных машин : в 2 т. / Б. А. Афанасьев, Б. Н. Белоусов, Л. Ф. Жеглов ; под общ. ред. А. А. Полунгяна. – Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – Т. 2. – 640 с.
2. **Нагайцев, М. В.** Автоматические коробки передач современных легковых автомобилей / М. В. Нагайцев, С. А. Харитонов, Е. Г. Юдин. – Москва : Легион-Автодата, 2006. – 125 с.
3. **Альгин, В. Б.** Динамика трансмиссии автомобиля и трактора / В. Б. Альгин, В. Я. Павловский, С. Н. Поддубко. – Минск : Наука и техника, 1986. – 214 с.
4. **Альгин, В. Б.** Схематизация и расчёт мобильной машины как многомассовой системы. Динамика машинного агрегата / В. Б. Альгин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 2 (23). – С. 5–18.
5. **Альгин, В. Б.** Динамика многомассовых систем машин при изменении состояний фрикционных компонентов и направлений силовых потоков / В. Б. Альгин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 4 (29). – С. 21–32.
6. **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем: учебник / В. П. Тарасик. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
7. Bond Graph Modeling of Automotive Transmissions and Drivelines [Electronic resource] / Joško Deur [et al.]. – Mode of access: <https://ru.scribd.com/document/326778641>. – Data of access: 25.09.2017.
8. **Luo Yutaoa.** Dynamics Modeling of Planetary Gear Set Considering Meshing Stiffness Based on Bond Graph / Luo Yutaoa, Tan Dia // Procedia Engineering. – 2011. – Vol. 24. – P. 850–855.
9. **Chung-Hung Pan** Dynamic modeling and simulation of the Ford AOD automobile transmission / Chung-Hung Pan, John J. Moskwa // New developments in transmission and driveline design SAE sp-1087. – 1995. – P. 153–162.
10. System-Structure Coupling Dynamic Analysis of Planetary Gears [Electronic resource] / Haiwei Wang [et al.]. – Mode of access: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/350616>. – Data of access: 25.09.2017.
11. **Samanuhut, P.** Dynamics Equations of Planetary Gear Sets for Shift Quality by Lagrange Method [Electronic resource] / P. Samanuhut, A. Dogan // Dynamic Systems and Control Conference, October 20–22, 2008. – Arbor, Michigan (USA), 2008. – Mode of access: <https://www.researchgate.net/publication/267491002>. – Data of access: 25.09.2017.



12. Dynamics Analysis of planetary Gear Train with Two Degrees of Freedom [Electronic resource] / Lin Xu [et al.] // 2nd International Conference on Machinery, Materials Engineering, Chemical Engineering and Biotechnology. – 2015. – P. 896–901.

13. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – Москва : Наука, 1990. – 592 с.

14. Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – 2-е изд., стер. – Киев : Техника, 1977. – 768 с.

Статья сдана в редакцию 28 сентября 2017 года

Николай Николаевич Горбатенко, канд. техн. наук, доц., Белорусско-Российский университет.
Тел.: 8-0222-25-36-45.

Nikolai Nikolayevich Gorbatenko, PhD (Engineering), Associate Prof., Belarusian-Russian University.
Phone: 8-0222-25-36-45.

