ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технология машиностроения»

ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ, ИЗОБРЕТАТЕЛЬСТВА И ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения»

Могилёв 2013

УДК 621.01:338.2
ББК 34.4
О 75

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Технология машиностроения» 27 ноября 2012 г., протокол № 5

Составители: д-р техн. наук, проф. Г. Ф. Шатуров;
ассистент Д. Г. Шатуров

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. М. Довгалев

В методических указаниях изложен порядок выполнения заданий к практическим занятиям.

Учебное издание

ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ, ИЗОБРЕТАТЕЛЬСТВА И ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Ответственный за выпуск А. В. Капитонов

Технический редактор И. В. Русецкая

Компьютерная верстка И. А. Алексеюс

Подписано в печать . Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

Введение

Современный инженер-технолог машиностроительного предприятия в своей практической деятельности для принятия правильного решения по оценке технологического процесса вынужден проводить различные эксперименты. Эти эксперименты позволяют выбрать для каждых конкретных условий оптимальное решение по выбору режимов обработки.

В соответствии с учебным планом подготовки инженеров по специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» предусматривается преподавание учебной дисциплины «Основы исследований, изобретательства и инновационной деятельности в машиностроении».

При изучении этой дисциплины студенты должны освоить теоретические основы, приобрести знания и практические навыки по измерению различных физических величин, освоить методы математической обработки и статистического анализа экспериментальных данных для формирования заключения по результатам исследований.

В предлагаемых методических указаниях излагаются методики оценки и проведения статистического и регрессионного анализа экспериментальных данных технологического процесса.

1 Экспериментальные погрешности и методы их оценки. Оценка грубых погрешностей эксперимента

Одной из важных особенностей исследований, связанных с планированием эксперимента, является повышенная требовательность к точности измерения при фиксировании факторов и при оценке значений критериев оптимизации в отдельных опытах. Исследователь должен уметь правильно определить и оценивать ошибки измерений.

Задачей измерения является не только определения значения самой измеряемой величины, но также и оценка погрешности, допущенной при измерении (ошибки измерения).

Различают несколько видов ошибок измерения или погрешностей: грубые, систематические и случайные.

Оценка грубых погрешностей эксперимента.

При проведении анализа технологических процессов (ТП) встречаются случаи, когда в результате эксперимента вкрадывается грубая погрешность измерения.

Грубая погрешность измерения может возникать в результате ошибки при измерении деталей, неправильного базирования заготовки, резких толчков или ударов при измерении и, особенно, в тех случаях, когда предмет исследования имеет разброс механических характеристик (например, твердости).

Грубые погрешности измерения нередко оказывают решающее влияние на оценку точности исследуемого процесса, т. к. результаты наблюдений по своей величине значительно отличаются от других. Если есть уверенность, что такие наблюдения являются результатом ошибки, то эти наблюдения не следует учитывать при последующем анализе. Если же такой уверенности нет, то для определения того, являются ли резко выделяющиеся измерения результатом грубой ошибки или случайного отклонения, используются следующие методы обнаружения грубых погрешностей эксперимента.

Метод Грэббса. Предварительно по опытным данным эксперимента вычисляют характеристики: среднее арифметическое значение $\overline{X}$ и среднее квадратическое отклонение S.

Величину $\overline{X}$, которая считается наиболее вероятным значением измеряемой величины, находят по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (1.1)$$

где x_i – измеряемые значения;

n – число повторных измерений (опытов).

Среднеквадратичное отклонение σ определяется из формулы

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2, \tag{1.2}$$

где σ^2 – дисперсия измерений;

S – среднее квадратическое отклонение (рассеяние погрешностей).

В качестве оценки среднеквадратичного отклонения σ используется рассеяние S.

Затем определяют величину квантиля по формуле

$$t_k = \frac{\left|\left(x_i^{/} - \bar{x}\right)\right|}{S}, \tag{1.3}$$

где $x_i^{/}$ – резко выделяющееся (наибольшее или наименьшее) значение.

Задавшись процентом риска P, при котором грубая ошибка может быть принята за случайную (при технологических исследованиях чаще всего P = 5 %), по таблице 1.1 в зависимости от объема выборки n находят критическое значение $t_k^{/}$, которое сравнивают с ранее вычисленным значением t_k по формуле (1.3).

Таблица 1.1 – Критическое значение $t_k^{/}$ при P = 5 %

n	5	10	15	20	25	30	35	40	50	75	100
$t_k^{/}$	2,353	2,445	2,528	2,62	2,717	2,792	2,839	2,904	2,956	3,102	3,187

Если $t_k^{/} \le t_k$, то резко выделяющееся значение можно отбросить из опытных данных. После исключения грубой ошибки из опытных данных следует снова рассчитать уточненные характеристики распределения $\bar{x}$ и S.

Метод Ирвина. Также, как и в предыдущем методе, по данным выборки определяют характеристики $\bar{x}$ и S. Все опытные данные выборки располагают в возрастающем или убывающем порядке. Из полученного ряда выбирают два наибольших значения случайной величины x_n и x_{n+1} и вычисляют величину

$$\lambda_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{S}. \tag{1.4}$$

По таблице 1.2 в зависимости от объема выборки n при уровне зависимости $\alpha = 0{,}95$ находим критическое значение $\lambda_{0,95}$.

Таблица 1.2 – Критерий Ирвина $\lambda_{0,95}$

n	5	10	15	20	30	50	100	400	1000
$\lambda_{0,95}$	1,45	1,4	1,35	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Если $\lambda_n \le \lambda_{0,95}$, то оцениваемый результат является случайным отклонением и отбрасывать его нельзя. Если же $\lambda_n > \lambda_{0,95}$, то наибольшее или наименьшее значение x_{n+1} может быть отброшено. В этом случае после исключения грубой ошибки необходимо снова вычислить характеристику распределения $\bar{x}$ и S.

Метод Романовского. При этом методе на основе полученных опытных данных измерений вычисляют характеристики $\bar{x}$ и S, предварительно исключив из нее резко выделяющееся значение $x_i^/$.

Затем определяют величину t_β по формуле.

$$t_\beta = \frac{\left|x_i^/ - \bar{x}\right|}{S}. \tag{1.5}$$

Допустимые значения t_β приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Допустимые значения $t_\beta^/$ при уровне значимости $P = 0{,}05$

n	5	10	15	20	25	30	40	50	120
$t_\beta^/$	2,32	2,25	2,19	2,14	2,10	2,08	2,05	2,02	1,99

Если $t_\beta \le t_\beta^/$, то $x_i^/$ является случайным отклонением и его отбрасывать нельзя. Если же $t_\beta > t_\beta^/$, то резко выделяющееся значение $t_t^/$ является грубой ошибкой и должно быть исключено из выборки.

При использовании данного метода после исключения из выборки резко выделяющихся значений отсутствует необходимость повторного пересчета характеристик $\bar{x}$ и S.

Пример 1. При шлифовании поршневых колец по торцу при объеме экспериментов (выборки) равным 50 колец получены следующие характеристики: $\bar{x} = 3{,}23$ мм; $S = 0{,}0285$ мм. При расположении данных измерения колец в возрастающем порядке первые два числа полученного ряда соответственно равны $x_1 = 3{,}11$ мм; $x_2 = 3{,}17$ мм. Возникло подозрение, что размер $x_1 = 3{,}11$ мм является грубой ошибкой. Можно ли исключить этот результат из дальнейшей обработки?

Оценку резко выделяющегося значения проведём вышеперечисленными методами.

Метод Грэббса. Определяем квантиль t_k по формуле (1.3)

$$t_k = \frac{|3{,}11 - 3{,}23|}{0{,}0285} \cong 4{,}2 .$$

По таблице 1.1 в зависимости от $n = 50$ находим, что значение $t_k' = 2{,}956$. Так как $t_k' < t_k$, то значение $x_1 = 3{,}11$ мм можно считать грубым выбросом и его можно исключить из выборки. Уточнение характеристики выборки (без учета значения $x_1 = 3{,}11$ мм) составляет $\bar{x}_1 = 3{,}234$ мм; $S_1 = 0{,}0241$ мм. Оценим этим же методом значение случайной величины $x_2 = 3{,}17$ мм.

$$t_k = \frac{|3{,}17 - 3{,}234|}{0{,}0241} \cong 2{,}66,$$

$$t_k' = 2{,}956,$$

$$2{,}66 < 2{,}956.$$

Так как $t_k' > t_k$, то значение $x_2 = 3{,}17$ мм является случайным и его исключать из выборки нельзя.

Метод Ирвина. Определяем по формуле (1.4) величину λ_n

$$\lambda_n = \frac{3{,}17 - 3{,}11}{0{,}0285} \cong 2{,}1 .$$

По таблице 1.2 в зависимости от $n = 50$ находим, что критерий Ирвина $\lambda_{0,95} = 1{,}1$. Так как $\lambda_n > \lambda_{0,95}$, то значение $x_1 = 3{,}11$ мм может быть исключено.

Метод Романовского. По формуле (1.5) определяем величину t_β

$$t_\beta = \frac{|3{,}11 - 3{,}232|}{0{,}0241} \cong 5{,}06 .$$

По таблице 1.3 в зависимости от $n = 50$ находим, что значение $t_\beta' = 2{,}02$. Так как $t_\beta > t_\beta'$, то резко выделяющееся значение $x_1 = 3{,}11$ мм является грубой ошибкой и может быть исключено из выборки.

Задание 1

Осуществляется заточка переднего угла γ призматического резца на универсально заточном станке модели 3Д642Е алмазным кругом формы А2ПП диаметром 80 мм зернистостью 125/100.

Резцы устанавливаются в приспособлении, смонтированном на столе заточного станка. При обработке опытных данных выборки заточенных резцов объемом $n = 20$ шт. получили следующие характеристики выборки по углам заточки: $\bar{\gamma} = \bar{x} = 8^\circ$, $S = 2{,}1^\circ$. При расположении данных измерения передних углов в возрастающем порядке первые два числа полученного ряда передних углов равны: $\gamma_1 = 2^\circ$ и $\gamma_2 = 4^\circ$.

Определить, являются ли значения углов $\gamma_1 = 2^\circ$ и $\gamma_2 = 4^\circ$ грубой ошибкой, возникшей в результате неправильной установки резцов в приспособлении или это случайная погрешность рассеяния, обусловленная технологическим процессом заточки. После исключения минимального значения угла $\gamma = 2^\circ$ среднее квадратическое отклонение составило $S = 1{,}99^\circ$. Оценку двух крайних значений углов провести вышеописанными тремя методами. А так же определить доверительный интервал значений углов при 5-процентном уровне значимости и необходимый объем выборки, если уменьшить доверительный интервал на 30 и 50 %.

2 Систематические погрешности

Систематическая погрешность – это такая погрешность, которая для всех заготовок рассматриваемой партии остается постоянной или же закономерно изменяется при переходе от каждой обрабатываемой заготовки к следующей.

В первом случае погрешность принято называть постоянной систематической погрешностью, а во втором случае – переменной систематической погрешностью.

Систематические погрешности вызываются воздействием факторов, которые проявляются одинаково при многократном повторении одних и тех же измерений. Ошибки такого рода имеют, например, место, если при измерениях используют прибор с неправильной регулировкой, приведшей к смещению начала отсчета. Или имеет место неточность, износ и деформация станков, приспособлений и инструментов, деформация обрабатываемых заготовок, тепловые явления.

Систематическая погрешность определяется следующим образом

$$E_s \approx \bar{x} - x, \tag{2.1}$$

где $\bar{x}$ – среднее значение измерительных величин;

x – истинное значение.

В связи с тем, что систематическая погрешность является воспроизводимой, ее можно определить и учесть при проведении измерений. При проведении исследований, предполагается, что до начала обработки экспериментальных данных все возможные систематические погрешности уже выявлены и устранены или учтены.

3 Случайные погрешности. Определение объема выборки и степени надежности

Случайная погрешность – это такая погрешность, которая для разных заготовок рассматриваемой партии имеет различные значения, причем ее появление не подчиняется видимой закономерности.

Случайные погрешности – это следствие воздействий, которые неодинаковы при каждом измерении и не могут быть учтены в отдельности.

Подобные погрешности связаны с суммарным эффектом влияния многих факторов: рассеянием размеров заготовок, колебанием твердости обрабатываемого материала и величиной снимаемого припуска, погрешностями базирования и закрепления и т. д. При обработке исследований, связанных с планированием эксперимента, считают, что грубые и систематические погрешности должны быть предварительно устранены.

Статистический анализ выборочных параметров технологического процесса производится с помощью больших и малых выборочных совокупностей. С помощью малых выборочных совокупностей в основном осуществляется анализ надежности технологических процессов (ТП). Выборочная совокупность (выборка) – совокупность части элементов, которые отбираются из генеральной совокупности для получения достоверных сведений о всей генеральной совокупности. Число членов n, образующих выборку, составляет ее объем. Большой выборочной совокупностью считается выборка объемом $n > 20$, а малой – $n < 20$. Для построения гистограммного (нормального) распределения случайной величины рекомендуется, чтобы объем выборки составлял не менее 50 штук.

От правильного объема выборки зависит объем исследований, точность и надежность результатов исследования. Используя выборочную совокупность необходимо быть уверенным в том, что характеристики, полученные на основании выборки, отличаются от соответствующих характеристик генеральной совокупности с заданной точностью и надежностью. Это позволит распространить выводы, полученные путем анализа выборки, на всю генеральную совокупность.

К основным статистическим характеристикам генеральной совокупности относится среднее арифметическое значение изучаемого признака $\overline{X}_0$, среднее квадратическое отклонение σ_0 и коэффициент вариации $V_0 = \sigma_0 / \overline{X}_0$. Выборочные характеристики процесса $\overline{X}$, S и V, определяемые на основе ограниченного числа наблюдений, могут приближаться к истинным значениям характеристик процесса $\left(\overline{X}_0, \sigma_0, V_0\right)$ с определенной точностью ε и надежностью α.

Вероятность P_0 осуществления следующих неравенств – есть надежность α.

$$\left.\begin{aligned} P_0\left(\overline{X} - \varepsilon < X_0 < \overline{X} + \varepsilon\right) = \alpha; \\ P_0\left(S - \varepsilon < \sigma_0 < S + \varepsilon\right) = \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

В технологии машиностроения обычно принимают надежность α равной 0,95 (95-процентный уровень надежности). Точность ε может быть задана в единицах измерения исследуемого признака и в процентах от величины характеристики изучаемого признака.

В общем случае объем выборки n в зависимости от точности ε и надежности α выборочной и генеральной совокупности может быть определен по формулам

$$n = \frac{t^2 \cdot S^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{при} \quad n > 20; \tag{3.2}$$

$$n = \frac{t_s^{\,2} \cdot S^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{при} \quad n \le 20, \tag{3.3}$$

где t – аргумент функции Лапласа (таблица А.1);

t_s – аргумент функции Стьюдента (таблица А.3).

Аргумент t определяется по таблице А.1 в зависимости от надежности $\alpha = 2\varphi(t)$.

Алгоритм определения выборки по формулам (3.2) и (3.3) заключается в следующем:

– выбирают предварительную выборку малого объема $n_1 \le 10$;

– по данным этой выборки объемом n_1 определяют среднее квадратическое отклонение S;

– вычисляют функцию $S_n(t_s)$ в зависимости от заданной надежности по формуле

$$S_n(t_s) = \frac{\alpha + 1}{2}. \tag{3.4}$$

При $\alpha = 0{,}95$ функция $S_n(t_s) = 0{,}975$.

– по таблицам А.1 и А.3 в зависимости от значения $\alpha = 2\varphi(t)$ и

$S_n(t_s)$ и n_1 находят величину аргумента функции Лапласа и Стьюдента;

– по формулам (3.2) и (3.3) определяют объем малой выборки.

Пример 1. Определить, какой должен быть объем выборки n, если оценить внутренний диаметр обрабатываемой втулки с надежностью $\alpha = 0{,}95$ и точностью $\varepsilon = 10$ мкм. Из предварительных опытов известно, что $S = 0{,}05$ мм.

По таблице А.1 $\alpha = 2\varphi(t) = 0{,}95$, находим, что значение $t = 1{,}96$. Объем выборки n вычисляем по формуле (3.2)

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}05^2}{0{,}01^2} = 96 \text{ шт.}$$

Пример 2. Определить объем малой выборки, чтобы оценить средний диаметр втулки с точностью $\varepsilon = 0{,}05$ мм и надежностью $\alpha = 0{,}95$.

Для вычисления среднего квадратического отклонения S берем предварительную выборку объемом $n_1 = 5$ шт.

Предположим, что в результате обработки опытных данных этой выборки $S = 0{,}06$ мм.

Определяем по формуле (3.4) функцию $S_n(t_s)$

$$S_n(t_s) = \frac{0{,}95 + 1}{2} = 0{,}975.$$

По таблице А.3 в зависимости от значения $S_n(t_s) = 0{,}975$ и $n_1 = 5$ находим значение $t_s = 2{,}8$.

Тогда, используя формулу (3.3), получим объем малой выборки

$$n = \frac{2{,}8^2 \cdot 0{,}06^2 + 0{,}05^2}{0{,}05^2} = 12{,}3.$$

Следовательно, объем малой выборки составит $n = 13$ шт.

Задание 1

Определить объем малой выборки с надежностью $\alpha = 0{,}95$ и точностью ε_i, если при предварительной выборке объемом n_1 получены следующие средние квадратические отклонения S_i (см. таблицу 3.1).

До сих пор шла речь о соответствии надежности и точности исследуемых характеристик измеряемых величин при малой выборке генеральной совокупности.

Таблица 3.1 – Результаты предварительной выборки

ε_i, мм	0,025	0,03	0,04	0,048	0,07
n_1, шт.	10	8	7	6	5
S_i, мм	0,05	0,055	0,06	0,08	0,10

На практике важно знать о допустимых отклонениях среднего арифметического отклонения $\overline{X}$ от истинных значений X измеряемой величины.

Величину $\overline{x}$, которая считается наиболее вероятным значением измеряемой величины, находят по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i , \qquad (3.5)$$

где x_i – измеряемая величина;

n – число повторных наблюдений.

Величину дисперсии, которую в данном случае называют дисперсией измерений, находят из уравнения (при n < 30)

$$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 . \qquad (3.6)$$

Средней квадратичной ошибкой (просто стандартом) называют величину, которая равна $\sigma \approx S = +\sqrt{S^2}$.

При оценке результатов важно знать не только точность, но и надежность измерений. Степень надежности полученного результата можно оценить, если известна его доверительная вероятность (коэффициент надежности).

Обозначим истинное значение измеряемой величины через x, а погрешность измерения ее среднего арифметического значения $\overline{x}$ через Δx, тогда

$$P\left(\overline{x} - \Delta x \le x \le \overline{x} + \Delta x\right) = \alpha , \qquad (3.7)$$

где α – доверительная вероятность, или вероятность того, что результат измерений попадает в доверительный интервал (отличается от среднего на величину, которая не больше Δx).

Доверительным интервалом называется интервал значений от $\overline{x} - \Delta x$ до $\overline{x} + \Delta x$.

Доверительные границы – границы доверительного интервала, внутри него располагаются значения x в общей совокупности при данном уровне значимости $(1-\alpha)$.

В случае 5-процентного уровня значимости доверительные границы для среднего значения результата измерений можно найти, если известны значения дисперсии для данного числа измерений.

$$x = \bar{x} \pm 1{,}96 \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{3.8}$$

Надежность результата можно рассматривать как наименьшую вероятность того, что результат является правильным.

Уровень значимости характеризует риск ошибки при оценке надежности результата. Например, если *доверительная вероятность* α равна 0,95 (или 95 %). Тогда *уровень значимости* $(1-\alpha)$ равен 0,05 (или 5 %).

При увеличении доверительного интервала повышается надежность того, что результаты измерений попадут в него.

Значение величины S дает возможность определить величину доверительного интервала для любой величины доверительной вероятности. Вычисления облегчаются при использовании таблицы 3.2, в которой приводятся доверительные вероятности α для величин Δx, выраженных в долях средней квадратичной ошибки $\Theta = \Delta x / \sigma$ или $\Theta = \Delta x / S$ (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Доверительная вероятность α в зависимости от отношения $\Delta x / \sigma$

$\Theta = \Delta x / S$	3,9	2,6	2,4	2,0	1,65	0,7	0,3	0,15	0,05
α	0,9999	0,99	0,984	0,95	0,9	0,51	0,24	0,12	0,04

Пример 3. При измерении некоторой неизвестной величины было сделано 100 измерений $(n = 100)$. Определено $\bar{x} = 1{,}27$. Тогда допустим получено среднее квадратическое отклонение S

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{100} (x_i - 1{,}27)^2}{99}} = 0{,}03.$$

Доверительному интервалу, в который попадает примерно 95 % результатов, соответствует доверительная вероятность $\alpha = 0{,}95$. Из таблицы 3.2 устанавливаем, что принятому значению $\alpha = 0{,}95$ соответствует $\Theta = 2{,}0$.

Отсюда $\Delta x = \Theta \cdot S = 2{,}0 \cdot 0{,}03 = 0{,}06$.

Таким образом, указанной доверительной вероятности ($\alpha = 0{,}95$) соответствует интервал

$$\bar{x} - 0{,}06 \le x \le \bar{x} + 0{,}06$$

или

$$1{,}21 \le x \le 1{,}33.$$

Можно записать $x = 1{,}27 \pm 0{,}06$ при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

В том случае, когда число измерений, учитываемых при определении средней квадратичной ошибки, не очень велико, то соответствующие задачи могут быть решены, если Δx определяется из следующего соотношения

$$\Delta x = \pm \frac{t \cdot S}{\sqrt{n}}, \qquad (3.9)$$

где t – критерий Стьюдента;

S – приближенное значение квадратичной ошибки (σ);

n – число измерений.

Значения критерия Стьюдента для $\alpha = 0{,}95$ для разных n приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Значения критерия Стьюдента (t-критерия) для $\alpha = 0{,}95$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	–	12,71	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26

Окончание таблицы 3.3

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13	2,12	2,11	2,10	2,09

При $n = 30...120...\infty$ критерий $t = 2{,}0$.

Тогда зависимость (3.7) имеет вид

$$P\left(\bar{x} - \frac{tS}{\sqrt{n}} \le x \le \bar{x} + \frac{tS}{\sqrt{n}}\right) = \alpha. \qquad (3.10)$$

Соотношение (3.10) используют для определения доверительных интервалов и доверительных вероятностей при любом небольшом числе измерений, в том числе при оценке допустимых отклонений $\bar{x}$ от истинного значения.

Пример 4. Определить доверительные границы, между которыми лежит среднее значение результата измерений при 5-процентном уровне значимости $(1 - \alpha = 0{,}05)$.

После пяти измерений было установлено, что $\bar{x} = 31{,}2$ и

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{5}(x_1 - 31{,}2)^2}{4}} = 0{,}24.$$

При доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$, соответствующей 5-процентному уровню значимости, при $n = 5$ $(f = 4)$ из таблицы 3.3 находим $t_{0,05} = 2{,}78$. Отсюда имеем:

$$\Delta x = \pm\frac{2{,}78 \cdot 0{,}24}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}30,$$

или

$$31{,}20 - 0{,}30 \le x \le 31{,}20 + 0{,}30,$$

$$30{,}9 \le x \le 31{,}5.$$

Таким образом, с доверительной вероятностью 0,95 можно утверждать, что значение $\bar{x}$ лежит в общей совокупности между границами 30,9 и 31,5.

Задание 2

Определить погрешность измерения ΔX случайной величины $X = 20$ при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ для данных, приведенных в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Величина средней квадратической ошибки S при числе измерений n

n	12	14	16	18	20
S	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1

4 Математико-статистические методы планирования и проведения эксперимента. Планы первого порядка (линейные планы)

Планирование эксперимента связано с изучением зависимости критериев оптимизации (функции отклика) от величины управляющих (входных) параметров и выражается формулой

$$y = \varphi(x_1; x_2 \ldots x_n), \tag{4.1}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – независимые переменные факторы.

Пли планировании эксперимента учитывают, что неизвестная исследователю функция отклика (4.1) аппроксимируется полиномом той или иной степени

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + ... + b_{12...k}x_1x_2...x_k. \qquad (4.2)$$

Для двух факторов это уравнение имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2. \qquad (4.3)$$

Для трех факторов

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \qquad (4.4)$$

Установление статистических зависимостей (4.2), (4.3), (4.4) и т. д. осуществляется с использованием разработанных планов экспериментальных исследований.

Применение известных планов удобно тем, что:

– отпадает необходимость в тщательном обдумывании техники проведения каждого опыта;

– фактически автоматически проводится статистический анализ как каждого опыта, так и всего эксперимента в целом;

– сразу получается аналитическое выражение для описания исследуемого объекта;

– облегчен графический анализ влияющих факторов.

Последовательность построения математических зависимостей следующая.

1 Выявление необходимых оптимизирующих параметров (t, S, V) или других $\left(h_з, T_0, \delta_p\right)$ и т. д.

2 Выбор основных факторов, определяющих значения оптимизирующих параметров.

3 Выбор разумных интервалов и уровней варьирования факторов.

При выборе области определения факторов рекомендуется обращать специальное внимание на выбор нулевой точки. Желательно, чтобы данная точка была в области оптимума или как можно ближе к ней, тогда ускоряется поиск оптимальных решений. Интервал варьирования не может быть выбран меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора.

Следует учитывать, что увеличение интервала варьирования затрудняет возможность линейной аппроксимации функции отклика и увеличивает количество экспериментов.

Для удобства записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных уровни варьирования факторов кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний -1, а основной 0. Обычно при записи цифра 1 опускается и кодовая запись уровней факторов имеет вид «+», «-», «0».

Кодированное значение фактора x_i определяют по выражению

$$x_i = \frac{C_i - C_{0i}}{\varepsilon_i}, \tag{4.5}$$

где x_i – кодированное значение фактора (безразмерная величина);
C_i – натуральное значение i-го фактора;
C_{0i} – натуральное значение i-го фактора на основном уровне;
ε_i – натуральное значение интервала варьирования i-го фактора.

4 Выбор плана эксперимента.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов называют полным факторным экспериментом (ПФЭ), а результаты оцениваются в результате статистического анализа. Если число уровней каждого фактора m, а число факторов k, то число N всех возможных сочетаний уровней факторов, а следовательно и число опытов в ПФЭ определяется выражением.

$$N = m^k. \tag{4.6}$$

Цель первого этапа планирования эксперимента – это получение *линейной модели*. Он предусматривает варьирование факторов на двух уровнях. Возможное количество сочетаний уровней факторов в этом случае равно 2^k.

Факторный эксперимент осуществляется с помощью матрицы эксперимента, в которой используют кодированные значения факторов. В таблице 4.1 представлена матрица эксперимента для числа факторов от двух до четырех.

5 Выбор уровней и интервалов варьирования факторов.

6 По матрице эксперимента и уровням факторов строят матрицу планирования и рабочую матрицу эксперимента (таблица 4.2). Так, например, для уравнения (4.3) от двух факторов матрица планирования экспериментов имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 .$$

Опыты № 5–7 – это опыты в нулевой (основной) точке, предназначенные для оценки однородности (адекватности) результатов.

Таблица 4.1 – Матрица эксперимента

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	+	+	+	+	+
2	+	–	+	+	+
3	+	+	–	+	+
4	+	–	–	+	+
5	+	+	+	–	+
6	+	–	+	–	+
7	+	+	–	–	+
8	+	–	–	–	+
9	+	+	+	+	–
10	+	–	+	+	–
11	+	+	–	+	–
12	+	–	–	+	–
13	+	+	+	–	–
14	+	–	+	–	–
15	+	+	–	–	–
16	+	–	–	–	–

Таблица 4.2 – Матрица планирования эксперимента и результаты

Номер опыта	План			Взаимодействие	Отклик Y_u
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	
1	+	+	+	+	
2	+	–	+	–	
3	+	+	–	–	
4	+	–	–	+	
5	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	

7 После реализации плана эксперимента рассчитывают коэффициенты уравнения (4.3).

Расчет коэффициентов производят по следующим формулам

$$b_0 = \frac{\sum_{1}^{n} Y_u}{N}, \tag{4.7}$$

где N – число опытов в плане без учета опытов в нулевой точке (для рассматриваемого двухфакторного эксперимента $N = 4$).

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_{iu} \cdot Y_u , \tag{4.8}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_{iu} \cdot X_{ju} \cdot Y_u \;, \tag{4.9}$$

где X_{iu} – значение i-го фактора в i-м опыте;

X_{ju} – значение j-го фактора в i-м опыте;

Y_u – значение (величина) отклика.

Для каждой колонки плана производят умножение кодированного значения фактора (+1, -1) на полученное значение отклика (Y_u). После суммирования данных по колонкам и деления на соответствующее число опытов получают коэффициенты.

8 Статистический анализ в нулевых точках.

Определяют среднее арифметическое значение оптимизирующего параметра

$$\bar{Y}_0 = \frac{\sum_{1}^{n_0} Y_{ou}}{n_0}, \tag{4.10}$$

где Y_{ou} – значение оптимизирующего параметра в нулевой точке;

n_0 – число опытов в нулевой точке.

Оценивают дисперсию воспроизводимости, когда опыты повторяются только в нулевой точке (дисперсия ошибки опыта)

$$S_{\bar{Y}} = S_0^2 = \frac{\sum_{1}^{n_0}\left(\bar{Y}_0 - Y_{0i}\right)^2}{f}, \tag{4.11}$$

$$f = n_0 - 1,$$

где f – степень свободы.

Определяют среднее квадратическое отклонение в нулевой точке

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n_0}\left(\bar{Y}_0 - Y_{0i}\right)^2}{n_0 - 1}}. \tag{4.12}$$

9 Полученные результаты служат основанием для установления значимости коэффициентов.

Оценка значимости коэффициентов регрессии связана с построением доверительных интервалов. Коэффициент уравнения регрессии значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала. Доверительный интервал равен

$$P\left(b_i - \Delta b_i \le \beta_i \le b_i + \Delta b_i\right) = \alpha,$$

где α – доверительная вероятность;

Δb_i – доверительный интервал.

Проверку значимости коэффициентов можно производить двумя способами:

– сравнением абсолютной величины коэффициентов с доверительным интервалом;

– с помощью t-критерия Стьюдента.

При проверке значимости коэффициентов первым способом для определения доверительного интервала вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии по выражению

$$S^2\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}^2}{N}, \tag{4.13}$$

где $S^2\{b_i\}$ – дисперсия i-го коэффициента регрессии;

N – число опытов в плане без учета опытов в нулевой точке.

Из формулы (4.13) следует, что дисперсии всех коэффициентов равны. Затем определяют среднюю квадратическую ошибку в определении коэффициентов

$$S\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}}{\sqrt{N}}. \tag{4.14}$$

Доверительный интервал Δb_i находят по формуле

$$\Delta b_i = \pm t S_{\{b_i\}}, \tag{4.15}$$

где t – табличное значение критерия Стьюдента при принятом уровне значимости и числе степеней свободы f, с которым определялась дисперсия $S_{\bar{Y}}^2$.

Значения t-критерия Стьюдента приведены в таблице 4.3. Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала, т. е. $b_i > \Delta b_i$.

При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют расчетное значение t_p-критерия Стьюдента по выражению

$$t_p = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}. \qquad (4.16)$$

Для каждого коэффициента уравнения (4.3) составляют расчетное и табличное значение критерия Стьюдента (см. таблицу 4.3). Коэффициент b_i значим, если $t_p > t$ для принятого уровня значимости и числа степеней свободы $f = n_0 - 1$, с которым определялась дисперсия $S^2_{\bar{Y}}$. Критерий t_p вычисляют для каждого коэффициента регрессии. Если расчетное значение меньше табличного, то соответствующий коэффициент считается равным нулю, а член уравнения отбрасывается. Таким образом, получаем уравнение (4.3) в измененном виде, при условии исключения какого-то коэффициента.

10 После отбрасывания ряда коэффициентов, оценивают новое уравнение на приемлемость его для оптимизации рассматриваемого процесса, т. е. оценивают адекватность нового уравнения.

Таблица 4.3 – Значения критерия Стьюдента при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$

Число измерений n_0	2	3	4	5	6	7	8	9	13	15	17
Число степеней свободы $f = n_0 - 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	12	14	16
Критерий Стьюдента t_p	12,71	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,30	2,18	2,15	2,12

Определяют дисперсию адекватности

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{1}^{N}\left(Y_u - Y_{up}\right)^2}{f_{ад}}, \qquad (4.17)$$

где $S_{ад}$ – дисперсия адекватности;

Y_u – фактическая величина отклика или критерия оптимизации (эксперимент);

Y_{up} – расчетное число критерия оптимизации, полученное из уравнения после исключения коэффициентов;

$f_{ад}$ – число степеней свободы при оценке дисперсии адекватности.

$$f_{ад} = N - (K + 1), \qquad (4.18)$$

где N – число опытов (без учета в нулевых точках);

K – число факторов.

Или

$$f_{ад} = N - m,$$

где m – число значимых коэффициентов с учетом коэффициента b_0.

11 Определяют расчетное значение Фишера.

$$F_p = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{\bar{Y}}} \quad \text{– если} \quad S^2_{ад} > S^2_{\bar{Y}};$$
$$F_p = \frac{S^2_{\bar{Y}}}{S^2_{ад}} \quad \text{– если} \quad S^2_{\bar{Y}} > S^2_{ад}. \qquad (4.19)$$

Если расчетное значение $F_p \le F_T$ (таблица А.2), то полученное уравнение адекватно и оно пригодно для оценки оптимизации исследуемых параметров.

12 Перевод полученного уравнения из использования кодированных факторов в именованные, используя соотношение (4.5).

Пример 1. Определить зависимость тангенциальной составляющей P_z силы резания от изменения переднего $\gamma_з$ и заднего $\alpha_з$ углов призматического резца.

Режимы обработки: скорость резания $V = 100$ м/мин, подача $S = 0{,}4$ мм/об, глубина резания $t = 0{,}8$ мм.

После анализа литературных данных выбираем интервалы варьирования фактов.

Предполагаем, что в выбранных интервалах варьирования тангенциальная составляющая P_z силы резания изменяется линейно. Выбираем двухфакторный план первого порядка (таблица 4.4). Уравнение имеет вид выражения (4.3) $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$.

Таблица 4.4 – Уровни и интервалы варьирования факторов

Фактор	Кодовое обозначение	Интервал варьирования факторов, град.	Уровень варьирования		
			Верхний +1	Основной 0	Нижний -1
$\gamma_з$ – передний угол заточки, град.	x_1	5	10	5	0
$\alpha_з$ – задний угол заточки, град.	x_2	4	10	6	2

Проводим эксперимент и полученные результаты сводим в таблицу 4.5.

Таблица 4.5 – План проведения эксперимента и результаты

Номер опыта	План в кодах		План в значениях		Результат Y_u, Н
	x_1	x_2	x_1	x_2	
1	+	+	10	10	565
2	–	+	0	10	680
3	+	–	10	2	620
4	–	–	0	2	770
5	0	0	5	6	640
6	0	0	5	6	650
7	0	0	5	6	660

Используя результаты экспериментов (см. таблицу 4.5) составляем таблицу 4.6 для расчета коэффициентов уравнения.

Таблица 4.6 – Расчет коэффициентов уравнения

Номер опыта	x_1	x_2	x_1x_2	Y_u
1	565	565	565	565
2	-690	680	-680	680
3	620	-620	-620	620
4	-770	-770	770	770
5	0	0	0	640
6	0	0	0	650
7	0	0	0	660
Сумма	-265	-145	35	4585

Используя зависимости (4.7)–(4.9), проводим расчет коэффициентов

$$b_0 = \frac{1}{4}(565 + 680 + 620 + 770) = \frac{2635}{4} = 658; \quad b_1 = -\frac{265}{4} = -66{,}25 \approx -66{,}3;$$

$$b_2 = -\frac{145}{4} = -36{,}25 \approx -36{,}3; \quad b_{12} = \frac{35}{4} = 8{,}75.$$

В результате обработки экспериментальных данных получено следующее уравнение

$$Y_u = 655 - 66{,}3x_1 - 36{,}3x_2 + 8{,}75x_1x_2. \tag{4.20}$$

Проводим статистический анализ в нулевой точке. Определяем среднее арифметическое значение оптимизирующего параметра, используя формулу (4.10)

$$\bar{Y}_0 = \frac{640 + 650 + 660}{3} = \frac{1950}{3} = 650.$$

Определяем дисперсию опыта в нулевой точке по формуле (4.11) (дисперсия ошибки опыта)

$$S_{\bar{Y}}^2 = S_0^2 = \frac{(650-640)^2 + (650-650)^2 + (650-660)^2}{(3-1) = 2} = 100,$$

$$S_{\bar{Y}}^2 = 100.$$

Определяем среднее квадратическое отклонение в нулевой точке по формуле (4.12)

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{100} = 10.$$

Определяем среднюю квадратичную ошибку в определении коэффициентов по формуле (4.13)

$$S\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}}{\sqrt{N}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5.$$

Результаты анализов в нулевой точке сводим в таблицу 4.7.

Таблица 4.7 – Статистические характеристики опытов в нулевой точке

Среднее арифметическое $\bar{Y}_0$	658
Дисперсия $S_{\bar{Y}}^2 = S_0^2$	100
Среднее квадратическое отклонение $S_{\bar{Y}}$	10
Средняя квадратическая ошибка в определении коэффициентов $S_{\{b_i\}}$	5

Оцениваем значимость коэффициентов по критерию Стьюдента (формула (4.16))

$$t_{p1} = \frac{658}{5} = 131{,}6; \qquad t_{p2} = \frac{66{,}3}{5} = 13{,}26; \qquad t_{p3} = \frac{36{,}3}{5} = 7{,}26;$$

$$t_{p12} = \frac{8{,}75}{5} = 1{,}75.$$

Сравниваем расчетный критерий Стьюдента с табличными значениями (см. таблицу 4.3) и результаты заносим в таблицу 4.8.

Поскольку $t_{p12} = 1{,}75$, $t_p = 4{,}3$, $1{,}75 < 4{,}3$, то $b_{12} = 0$.

Таблица 4.8 – Анализ коэффициентов уравнения (4.20)

Параметр	Коэффициент уравнения			
	b_0	b_1	b_2	b_{12}
Значения до анализа	658	-66,3	-36,3	8,75
Ошибка в определении коэффициентов уравнения	5	5	5	5
Расчетное значение критерия Стьюдента	131,6	13,26	7,26	1,75
Табличное значение критерия Стьюдента: $n_0 = 3$; $f = 2$	4,3	4,3	4,3	4,3
Значимость коэффициентов	658	-66,3	-36,3	0,00

Таким образом, окончательное (уточненное) уравнение для описания модели выглядит следующим образом

$$Y = 658 - 66{,}3x_1 - 36{,}3x_2 . \qquad (4.21)$$

Отрицательные значения коэффициентов b_1 и b_2 говорят о том, что увеличение значения углов уменьшает тангенциальную составляющую P_z силы резания. Поскольку коэффициент $|b_1| > |b_2|$, то изменение переднего угла в большей степени влияет (уменьшает) на величину силы P_z.

Проверка уравнения (4.21) *на адекватность.*

После отбрасывания ряда коэффициентов (в нашем случае одного), необходимо оценить приемлемость полученного уравнения от уравнения, когда были бы сохранены все коэффициенты, т. е. установить адекватность модели.

Для этого в каждом опыте рассчитывают по полученному уравнению величину отклика и находят квадрат разности рассчитанного значения отклика от фактического.

Определяют дисперсию адекватности по формуле (4.17)

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_1^N \left(Y_u - \widehat{Y}_{up}\right)^2}{f_{ад}},$$

где Y_u – значение критерия оптимизации (эксперимент);

Y_{up} – расчетное число критерия оптимизации (по полученному уравнению (4.20);

$f_{ад}$ – число степеней свободы для линейной модели при оценке дисперсии адекватности по формуле (4.18).

В нашем случае $f_{ад} = 4 - (2+1) = 1$.

Используя результаты экспериментов (таблица 4.5), составляем таблицу 4.9 для расчета дисперсии адекватности $S_{ад}^2$.

Таблица 4.9 – Проверка пригодности уравнения

Номер опыта	Полученный результат		$Y_u - \widehat{Y}_{up}$	$\left(Y_u - \widehat{Y}_{up}\right)^2$
	Опытный Y_u	Рассчитанный $\widehat{Y}_{up}$		
1	565	555	10	100
2	680	688	8	64
3	620	628	8	64
4	770	760,6	9,4	88,3
5	640	658	18	324
6	650	658	8	64
7	660	658	2	4
				$\sum 708{,}3$

Определяем дисперсию адекватности

$$S_{a\partial}^2 = \frac{\sum\limits_1^N \left(Y_u - \widehat{Y}_{up}\right)^2}{f_{a\partial}} = \frac{708{,}3}{1} = 708{,}3.$$

По таблице А.2 находим, что при числе степеней свободы $f_{a\partial} = 1$ большей дисперсии $S_{a\partial}^2$ и числе степеней свободы $f = 2$ меньшей дисперсии $S_{\overline{Y}}$ табличное значение критерия Фишера равно 19,51.

Расчетное значение критерия Фишера равно

$$F_p = \frac{S_{ay}^2}{S_{\overline{Y}}^2}, \qquad S_{\overline{Y}}^2 = 100,$$

$$F_p = \frac{708{,}3}{100} = 7{,}08.$$

Поскольку $F_p = 7{,}08$; $F_T = 19{,}51$, 7,08 < 19,51, то уравнение (4.21) адекватно.

Осуществим замену в уравнении (4.21) кодированных величин на именованные, используя выражение (4.5)

$$X_1 = \frac{\gamma_з - 5}{5}, \qquad X_2 = \frac{\alpha_з - 6}{6}.$$

После подстановки кодированных величин в уравнение (4.21) получим

$$P_z = 760 - 13{,}26\gamma_з - 6{,}05\alpha_з.$$

Таким образом, увеличение переднего угла $\gamma_з$ приводит к большему уменьшению тангенциальной составляющей P_z силы резания, чем увеличение заднего угла $\alpha_з$.

Задание 1

Определить зависимость радиальной составляющей P_y силы резания от изменения переднего $\gamma_з$ и заднего $\alpha_з$ углов призматического резца. Режимы обработки: скорость резания $V = 100$ м/мин; подача $S = 0{,}4$ мм/об; глубина резания $t = 0{,}8$ мм. Интервалы изменения углов взять из таблицы 4.4. При проведении экспериментов имеем следующие значения радиальной составляющей P_y силы резания от углов $\gamma_з$ и $\alpha_з$ заточки резца (см. таблицу 4.5). В таблицу 4.10 сводим результаты эксперимента.

Таблица 4.10 – Результаты эксперимента

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7
$Y_u(P_y)$, Н	376	453	413	513	427	433	440

5 Планирование многофакторных экспериментов для получения параметра оптимизации в виде степенной функции

При исследовании процессов резания многие зависимости традиционно представляют уравнениями степенного вида.

Например, зависимость составляющих силы резания от элементов режима резания часто выражают уравнением

$$P = CS^x t^y V^z. \tag{5.1}$$

После логарифмирования уравнения (5.1) имеем линейную модель

$$\lg P = \lg C + x \lg S + y \lg t + z \lg V. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) можно выразить следующим образом

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \tag{5.3}$$

где $\lg P, x_1, x_2, x_3$ – кодированные значения S, t и V.

Кодированное значение x_i фактора определяется по выражению

$$x_i = \frac{2\left(\lg \tilde{x}_i - \lg \tilde{x}_{i\beta}\right)}{\lg \tilde{x}_{i\beta} - \lg \tilde{x}_{iн}}, \tag{5.4}$$

где x_i – кодированное значение i-го фактора;

$\tilde{x}_i$ – натуральное значение i-го фактора;

$\tilde{x}_{i\beta}$ – натуральное значение верхнего уровня i-го фактора;

$\tilde{x}_{iн}$ – натуральное значение нижнего уровня i-го фактора.

Для оценки коэффициентов уравнения (5.3) удобно использовать результаты многофакторного эксперимента. При этом результаты опытов обычно представляют полиномом вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (5.5)$$

Возможность представления результатов экспериментов вида (5.1) устанавливается проверкой гипотезы адекватности линейной модели при представлении результатов экспериментов полиномом вида (5.5). Методика получения функции отклика в виде полинома первой степени для двух факторов (4.3) изложена в разделе 4. Используя эту методику для рассматриваемого случая, рассмотрим на конкретном примере функцию отклика в виде полинома первой степени для трех факторов (5.5).

Рассмотрим определения зависимости тангенциальной составляющей P_z силы резания от режимов обработки, подачи S, глубины резания t и скорости резания V.

Устанавливаем уровни и интервалы варьирования факторов после анализа литературных данных (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Уровни и интервалы варьирования факторов

Фактор	Кодовое обозначение	Интервал варьирования	Уровень варьирования		
			-1	0	+1
Подача S, мм/об	x_1	0,15	0,35	0,5	0,65
Глубина резания t, мм	x_2	0,15	0,35	0,5	0,65
Скорость резания V, м/с	x_3	1,0	3	4	5

Кодированные значения факторов x_1, x_2, x_3 будут равны единице на верхнем уровне, нулю на основном уровне и минус единице на нижнем уровне при натуральных значениях факторов, указанных в таблице 5.1.

Кодированные значения факторов определяются по выражению (5.4)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2(\lg S - \lg 0,65)}{\lg 0,65 - \lg 0,35} = \frac{2(\lg S + 0,187)}{0,2688}; \\ x_2 &= \frac{2(\lg t - \lg 0,65)}{\lg 0,65 - \lg 0,35} = \frac{2(\lg t + 0,187)}{0,2688}; \\ x_3 &= \frac{2(\lg V - \lg 5)}{\lg 5 - \lg 3} = \frac{2(\lg V + 0,7)}{0,222}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для проведения опытов составляем матрицу планирования и рабочую матрицу.

Составляем таблицу 5.2, используя таблицу 5.1.

Таблица 5.2 – Матрица планирования и рабочая матрица

Номер опыта	Матрица планирования								Рабочая матрица			Результат
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	S, мм/об	t, мм	V, м/с	y_u / lg y_u
1	+	+	+	+	+	+	+	+	0,65	0,65	5	1096/3,04
2	+	–	+	+	–	–	+	–	0,35	0,65	5	646/2,81
3	+	+	–	+	–	+	–	–	0,65	0,35	5	631/2,8
4	+	–	–	+	+	–	–	+	0,35	0,35	5	380/2,58
5	+	+	+	–	+	–	–	–	0,65	0,65	3	660/2,82
6	+	–	+	–	–	+	–	+	0,35	0,65	3	398/2,6
7	+	+	–	–	–	–	+	+	0,65	0,35	3	380/2,58
8	+	–	–	–	+	+	+	–	0,35	0,35	3	229/2,36

Значения коэффициентов в уравнении (5.5) находили по формулам (4.7)–(4.9).

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_0 y_u; \qquad b_i = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i y_u; \qquad b_{ii} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i y_i y_u, \tag{5.7}$$

где N – число опытов, $N = 8$.

$$b_0 = \frac{1}{8}(3{,}04 + 2{,}81 + 2{,}8 + 2{,}58 + 2{,}82 + 2{,}6 + 2{,}58 + 2{,}36) = \frac{21{,}59}{8} \approx 2{,}7;$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(3{,}04 - 2{,}81 + 2{,}8 - 2{,}58 + 2{,}82 - 2{,}6 + 2{,}58 - 2{,}36) = \frac{0{,}89}{8} \approx 0{,}11;$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(3{,}04 + 2{,}81 - 2{,}8 - 2{,}58 + 2{,}82 + 2{,}6 - 2{,}58 - 2{,}36) = \frac{0{,}95}{8} \approx 0{,}12;$$

$$b_3 = \frac{1}{8}(3{,}04 + 2{,}81 + 2{,}8 + 2{,}58 - 2{,}82 - 2{,}6 - 2{,}58 - 2{,}36) = \frac{0{,}88}{8} \approx 0{,}11;$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}(3{,}04 - 2{,}81 - 2{,}8 + 2{,}58 + 2{,}82 - 2{,}6 - 2{,}58 + 2{,}36) = 0{,}00125;$$

$$b_{13} = \frac{1}{8}(3{,}04 - 2{,}81 + 2{,}8 - 2{,}58 - 2{,}82 + 2{,}6 - 2{,}58 + 2{,}36) = \frac{0{,}01}{8} = 0{,}00125;$$

$$b_{23}=\frac{1}{8}(3{,}04+2{,}81-2{,}8-2{,}58-2{,}82-2{,}6+2{,}58+2{,}36)=-0{,}00125;$$

$$b_{123}=\frac{1}{8}(3{,}04-2{,}81-2{,}8+2{,}58-2{,}82+2{,}6+2{,}58-2{,}36)=0{,}00125.$$

Получили следующее уравнение

$$y=2{,}7+0{,}11x_1+0{,}12x_2+0{,}11x_3+0{,}00125x_1x_2+0{,}00125x_1x_3-\\-0{,}00125x_2x_3+0{,}00125x_1x_2x_3. \qquad (5.8)$$

Дисперсию $S^2_{\bar{y}}$ параметра оптимизации (4.11) вычисляли по результатам четырех опытов в центре плана: $S=0{,}5$ мм/об; $t=0{,}5$ мм; $V=4$ м/с. Результаты опытов представлены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 – Вспомогательная таблица для расчета $S^2_{\bar{y}}$

Номер опыта	y_u	$\bar{y}_u$	$y_u-\bar{y}$	$(y_u-\bar{y})^2$	$S^2_{\bar{y}}$
1	2,73	$\frac{\sum_1^4 y_u}{4}=2{,}745$	0,015	$\frac{2{,}25}{104}$	$\frac{\sum_1^{n_0}(y_u-\bar{y})^2}{n_0-1}=\frac{5{,}5}{10^4\cdot 3}=\frac{1{,}83}{10^4}$
2	2,75		0,005	$\frac{2{,}5}{10^5}=\frac{0{,}25}{10^4}$	
3	2,74		0,005	$\frac{0{,}25}{104}$	
4	2,76		0,015	$\frac{2{,}25}{10^4}$	
$\sum_1^4 y_u=10{,}98$			$\sum_1^4(y_u-\bar{y})^2=\frac{5{,}5}{10^4}$		n_0 – число опытов в центре плана

Определяем дисперсию коэффициентов регрессии по формуле (4.13)

$$S^2(b_i)=\frac{S^2_{\bar{y}}}{N}=\frac{1{,}83}{10^4\cdot 8}=\frac{0{,}22875}{10^4}.$$

Доверительный интервал коэффициентов находим по формуле (4.15)

$$\Delta b_i=\pm tS(b_i)=\pm 3{,}18\sqrt{\frac{0{,}22875}{104}}=\pm\frac{0{,}4782}{10^2}\cdot 3{,}18=\pm\frac{1{,}52}{100}=\pm 0{,}0152,$$

где t – табличное значение критерия Стьюдента, равное $t=3{,}18$ при

5-процентном уровне значимости и числе степеней свободы $f = n_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ (см. таблицу 4.3).

Коэффициенты уравнения (5.8), которые меньше доверительного интервала $b_i < \Delta b_i$ являются незначимыми, т. е. равными нулю. Тогда уравнение (5.8) примет вид

$$y = 2{,}7 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}11x_3. \qquad (5.9)$$

Для проверки гипотезы адекватности модели, представленной уравнением (5.9), находим дисперсию адекватности

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{1}^{N}\left(y_i - \widehat{y}_i\right)^2}{f_{ад}}, \qquad (5.10)$$

где y_i – экспериментальное значение параметра оптимизации в j-м опыте;

$\widehat{y}_i$ – значение параметра оптимизации j-м опыте определяется по формуле (5.9);

$f_{ад}$ – число степеней свободы.

$$f_{ад} = N - (k + 1), \qquad (5.11)$$

где k – число факторов, $k = 3$.

$$f_{ад} = 8 - (3 + 1) = 4.$$

Для вычисления суммы, входящей в выражение (5.10) составляем вспомогательную таблицу 5.4. Дисперсию адекватности определяем по формуле (5.10)

$$S^2_{ад} = \frac{2}{10^4 \cdot 4} = \frac{0{,}5}{10^4}, \qquad (f_{ад} = 4).$$

Дисперсия воспроизводимости равна по таблице 5.3 выражению

$$S^2_{\bar{y}} = \frac{1{,}83}{10^4}, \qquad (f = 3).$$

Таблица 5.4 – Вспомогательная таблица для расчета $S_{ад}^2$

Номер опыта	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	3,04	3,04	0	0
2	2,81	2,82	0,01	0,0001
3	2,8	2,81	-0,01	0,0001
4	2,58	2,58	0	0
5	2,82	2,82	0	0
6	2,6	2,6	0	0
7	2,58	2,58	0	0
8	2,36	2,36	0	0

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{2}{10^4}$$

Проверку гипотезы адекватности модели по формуле (5.9) проводили по F-критерию Фишера (см. формулу 4.1)

$$F_p = \frac{S_{\bar{y}}^2}{S_{ад}^2} = \frac{1{,}83}{0{,}5} = 3{,}66.$$

При 5-процентном уровне значимости и числах свободы для числителя $f_1 = 3$ и знаменателя $f_2 = 4$ табличное значение критерия Фишера $F_T = 6{,}59$. Так как $F_p = 3{,}66$; $F_T = 6{,}59$, 3,66 < 6,59, то модель, представленная уравнением (5.9), адекватна.

Для перехода от кодированных значений факторов к натуральным в уравнении (5.9) подставляем значения факторов x_1, x_2, x_3 по выражению (5.6). В результате определили

$$\lg P_z = 2{,}3263 + 0{,}82 \lg S + 0{,}89 \lg t + 0{,}1 \lg V.$$

После потенцирования получим силу P_z

$$P_z = 212 S^{0,82} \cdot t^{0,89} \cdot V^{0,1}. \tag{5.12}$$

Задание 1

Определить зависимость радиальной составляющей P_y силы резания от режимов обработки: подачи S, глубины резания t, скорости резания V. Уровни и интервалы варьирования факторов взять из таблиц 5.1 и 5.2. При проведении экспериментов получили следующие значения силы P_y, представленные в таблице 5.5.

Таблица 5.5 – Значения силы P_y

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
P_y, Н	230	158	132	91	268	185	154	106

При обработке на режимах, соответствующих центру плана (на нулевом уровне), получили следующие значения силы P_y (см. таблицу 5.3), представленные в таблице 3.6.

Таблица 5.6 – Значения силы P_y на нулевом уровне

Номер опыта	1	2	3	4
P_y, Н	166	172	162	164

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 1983. – 279 с.

2 **Спиридонов, А. А.** Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А. А. Спиридонов. – М. : Машиностроение, 1981. – 184 с.

3 **Канне, М. М.** Основы научных исследований в технологии машиностроения / М. М. Канне. – Минск : Выш. шк., 1987. – 231 с.

4 Исследования и изобретательство в машиностроении / М. Ф. Пашкевич [и др.] ; под общ. ред. М. Ф. Пашкевича. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 294 с.

Приложение А
(*справочное*)

Таблица А.1 – Значение функции Лапласа

t	$2\varphi(t)$	$\varphi(t)$	t	$2\varphi(t)$	$\varphi(t)$
1	2	3	4	5	6
0,00	0,0000	0,000	0,62	0,4647	0,2325
0,01	0,0080	0,004	0,64	0,4778	0,2390
0,02	0,0160	0,008	0,66	0,4907	0,2455
0,03	0,0239	0,012	0,68	0,5035	0,2520
0,04	0,0319	0,016	0,70	0,5161	0,2580
0,05	0,0399	0,020	0,72	0,5285	0,2640
0,06	0,0478	0,024	0,74	0,5407	0,2705
0,07	0,0558	0,028	0,76	0,5527	0,2765
0,08	0,0638	0,032	0,78	0,5646	0,2825
0,09	0,0717	0,036	0,80	0,5763	0,2880
0,10	0,0797	0,040	0,82	0,5878	0,2940
0,11	0,0876	0,044	0,84	0,5991	0,2995
0,12	0,0955	0,048	0,86	0,6102	0,3050
0,13	0,1034	0,515	0,88	0,6211	0,3105
0,14	0,1113	0,0555	0,90	0,6319	0,3160
0,15	0,1192	0,0595	0,92	0,6424	0,3210
0,16	0,1271	0,0635	0,94	0,6528	0,3265
0,17	0,1350	0,0675	0,96	0,6629	0,3315
0,18	0,1428	0,0715	0,98	0,6729	0,3365
0,19	0,1507	0,0755	1,00	0,6827	0,3415
0,20	0,1585	0,0795	1,05	0,7063	0,3530
0,21	0,1663	0,0830	1,10	0,7287	0,3645
0,22	0,1741	0,0870	1,15	0,7499	0,3740
0,23	0,1810	0,0910	1,20	0,7699	0,3850
0,24	0,1897	0,0950	1,25	0,7887	0,3945
0,25	0,1974	0,0985	1,30	0,8064	0,4030
0,26	0,2051	0,1025	1,35	0,8230	0,4115
0,27	0,2128	0,1065	1,40	0,8385	0,4190
0,28	0,2205	0,1105	1,45	0,8529	0,4265
0,29	0,2282	0,1140	1,50	0,8664	0,4330
0,30	0,2358	0,1180	1,55	0,8789	0,4395
0,31	0,2434	0,1215	1,60	0,8904	0,4450
0,32	0,2510	0,1255	1,65	0,9011	0,4505
0,33	0,2586	0,1295	1,70	0,9109	0,4555
0,34	0,2661	0,1330	1,75	0,9199	0,4600
0,35	0,2737	0,1370	1,80	0,9281	0,4640
0,36	0,2812	0,1405	1,85	0,9357	0,4680
0,37	0,2886	0,1445	1,90	0,9426	0,4715
0,38	0,2961	0,180	1,95	0,9500	0,4750
0,39	0,3035	0,1515	2,00	0,9545	0,4775
0,40	0,3108	0,1555	2,10	0,9643	0,4820
0,41	0,3182	0,1590	2,20	0,9722	0,4860

Окончание таблицы А.1

1	2	3	4	5	6
042	0,3255	0,1630	2,30	0,9786	0,4895
0,43	0,3328	0,1665	2,40	0,9836	0,4920
0,44	0,3401	0,1700	2,50	0,9876	0,4940
0,45	0,3473	0,1735	2,60	0,9907	0,4955
0,46	0,3545	0,1770	2,70	0,9931	0,4965
0,47	0,3616	0,1810	2,80	0,9949	0,4975
0,48	0,3688	0,1845	2,90	0,9962	0,4980
0,49	0,3759	0,1880	3,00	0,9973	0,4986
0,50	0,3829	0,1915	3,20	0,9986	0,4993
0,52	0,3969	0,1985	3,40	0,9993	0,4996
0,54	0,4108	0,2055	3,60	0,9997	0,4998
0,56	0,4245	0,2125	3,80	0,9999	0,4999
0,58	0,4381	0,2190	4,00	0,99995	0,4999
0,60	0,4515	0,2255	5,00	0,99999	0,49999

Таблица А.2 – Значения критерия Фишера (*F*-критерия) при доверительной вероятности 0,95

Число степеней свободы для меньшей дисперсии	Число степеней свободы для большей дисперсии											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63,
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
100	3,94	3,09	2,60	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Таблица А.3 – Значения вероятностей $S_n\left(t_s\right)$ для распределения Стьюдента

t_c	n_1													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	∞
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,50000
0,2	0,563	0,570	0,573	0,574	0,575	0,576	0,576	0,577	0,577	0,577	0,578	0,578	0,578	0,578	0,57926
0,4	0,621	0,636	0,642	0,645	0,647	0,648	0,650	0,650	0,651	0,652	0,652	0,653	0,653	0,653	0,65542
0,6	0,672	0,695	0,705	0,710	0,713	0,715	0,716	0,717	0,718	0,720	0,721	0,721	0,722	0,722	0,72575
0,8	0,715	0,746	0,759	0,766	0,770	0,773	0,775	0,777	0,778	0,780	0,781	0,782	0,783	0,783	0,78814
1,0	0,750	0,788	0,804	0,813	0,818	0,822	0,825	0,827	0,828	0,831	0,832	0,833	0,834	0,835	0,84134
1,2	0,779	0,724	0,842	0,852	0,858	0,862	0,865	0,868	0,870	0,872	0,874	0,876	0,877	0,878	0,88493
1,4	0,803	0,852	0,872	0,883	0,890	0,894	0,898	0,900	0,902	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,91924
1,6	0,822	0,875	0,896	0,908	0,915	0,920	0,923	0,926	0,928	0,931	0,933	0,935	0,936	0,937	0,94520
1,8	0,839	0,893	0,915	0,927	0,934	0,939	0,943	0,945	0,947	0,950	0,952	0,954	0,955	0,956	0,96407
2,0	0,852	0,908	0,930	0,942	0,949	0,954	0,957	0,960	0,962	0,965	0,967	0,968	0,969	0,970	0,97725
2,2	0,864	0,921	0,942	0,954	0,960	0,965	0,968	0,970	0,972	0,975	0,977	0,978	0,979	0,980	0,98610
2,4	0,874	0,931	0,952	0,963	0,969	0,973	0,976	0,978	0,980	0,982	0,984	0,985	0,986	0,987	0,99180
2,6	0,883	0,938	0,960	0,970	0,976	0,980	0,982	0,984	0,986	0,988	0,989	0,990	0,991	0,991	0,99534
2,8	0,891	0,946	0,966	0,976	0,981	0,984	0,987	0,988	0,990	0,991	0,992	0,993	0,994	0,994	0,99744
3,0	0,898	0,952	0,971	0,980	0,985	0,988	0,990	0,992	0,992	0,994	0,995	0,996	0,996	0,996	0,99865
3,2	0,904	0,957	0,975	0,984	0,988	0,991	0,992	0,994	0,995	0,996	0,996	0,997	0,997	0,998	0,99931
3,4	0,909	0,962	0,979	0,986	0,990	0,993	0,994	0,995	0,996	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,99966
3,6	0,914	0,965	0,982	0,989	0,992	0,994	0,996	0,996	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999	0,998	0,99984
3,8	0,918,	0,969	0,986	0,990	0,994	0,996	0,997	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,99993
4,0	0,922	0,971	0,986	0,992	0,995	0,996	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000	0,99997
4,2	0,926	0,974	0,988	0,993	0,996	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	–	–	0,99999
4,4	0,929	0,976	0,989	0,994	0,996	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	–	–	–	–	0,99999
4,6	0,932	0,978	0,990	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	–	–	–	–	–	–
4,8	0,935	0,980	0,991	0,996	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	–	–	–	–	–	–
5,0	0,937	0,981	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000	–	–	–	–	–	–	–