

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности*

*1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»  
дневной и заочной форм обучения*



УДК 539.3/6  
ББК 305.1212  
С 64

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «31» октября 2017 г., протокол № 2

Составители: канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович;  
канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало

Рецензент канд. техн. наук, доц. О. В. Голушкова

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Сопrotивление материалов» для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», содержат материал для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям и контрольным работам, перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Технический редактор	А. А. Подошеvко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 135 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 24.01.2014.  
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский  
университет», 2018



## Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений.....	5
2 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брусе.....	9
3 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусьев.....	13
4 Расчет простейших статически неопределимых систем.....	16
5 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе.....	20
6 Расчеты на жесткость при прямом поперечном изгибе.....	24
7 Косой изгиб.....	27
8 Внецентренное растяжение-сжатие брусьев большой жесткости.....	31
9 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения.....	38
10 Расчет валов круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения.....	42
11 Устойчивость продольно сжатых стержней.....	44
Список литературы.....	47



## Введение

Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» – приобретение студентами основных знаний и умений по расчету типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

ПК-14. Определять актуальные направления научных исследований в области строительства с целью внедрения в практику эффективных строительных материалов, конструкций и технологий.

ПК-22. Формулировать и реализовывать мероприятия по повышению качества строительной продукции, снижению энергоемкости и материальных затрат при выполнении строительно-монтажных работ.

ПК-26. Работать с научной, технической, юридической литературой в области промышленного и гражданского строительства.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–8], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

Методические рекомендации предназначены для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и могут использоваться для самостоятельной работы студентами специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» в рамках изучения дисциплины «Сопротивление материалов и теория упругости» на протяжении 3-го и 4-го семестров.

# 1 Геометрические характеристики поперечных сечений

## Пример 1

Определить координату центра тяжести составного сечения относительно оси  $y$ . Размеры сечения на рисунке 1.1 даны в миллиметрах.

### Решение

Положение центров тяжести прямоугольника и круга с координатами относительно оси  $y$  указано на рисунке 1.1. Площади отдельных фигур

$$A_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3,14 \cdot 1,5^2 = 7,065 \text{ см}^2.$$

Координата  $x_c$  определяется по формуле

$$x_c = \frac{\sum S_Y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(-4) \cdot 32 - (-6) \cdot 7,065}{32 - 7,065} = -3,43 \text{ см}.$$

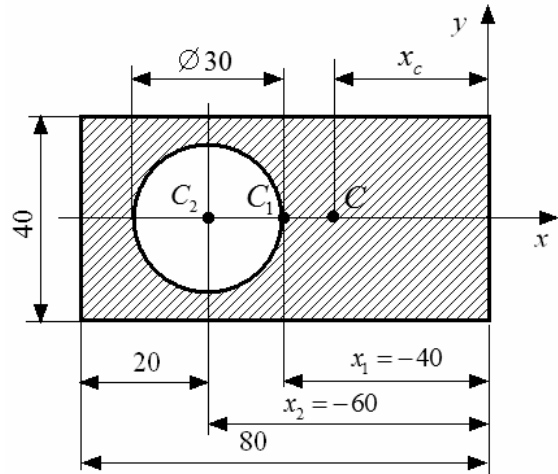


Рисунок 1.1

## Пример 2

Определить осевые моменты инерции поперечного сечения (рисунок 1.2) относительно указанных осей  $x$  и  $y$ . Размеры сечения на рисунке 1.2 даны в миллиметрах.

### Решение

По рисунку видно, что заданная ось  $x$  и центральная ось  $x_c$  совпадают, а между вертикальными осями  $y$  и  $y_c$  есть межосевое расстояние  $b$ .

Моменты инерции

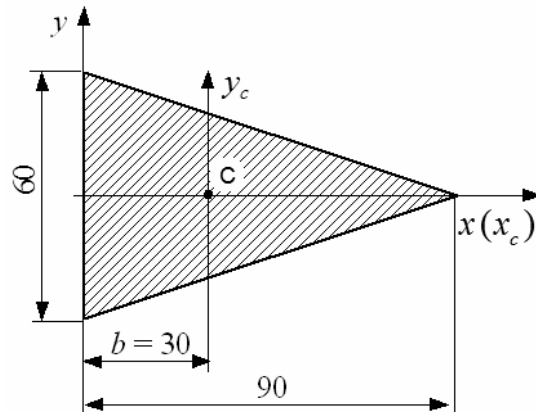


Рисунок 1.2

$$I_x = I_{x_c} = \frac{9 \cdot 6^3}{48} = 40,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot A = \frac{6 \cdot 9^3}{36} + 3^2 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 354,5 \text{ см}^4.$$

### Пример 3

Для заданного сечения (рисунок 1.3) определить положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции. Размеры сечения даны в миллиметрах.

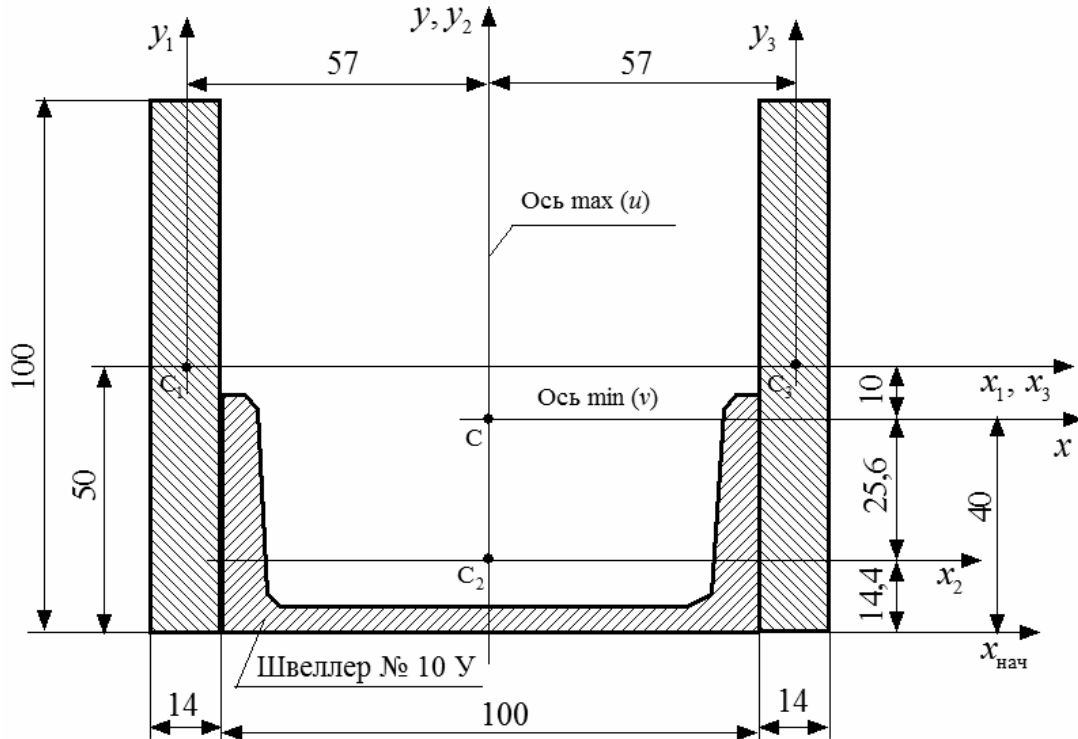


Рисунок 1.3

### Решение

Определим собственные геометрические характеристики фигур.

Прямоугольники:  $A_1 = A_3 = 10 \cdot 1,4 = 14 \text{ см}^2$ ;

$$I_{x_1} = I_{x_3} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{12} = 116,7 \text{ см}^4; \quad I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{10 \cdot 1,4^3}{12} = 2,3 \text{ см}^4.$$

Для швеллера из таблиц ГОСТ 8240–97, с учетом горизонтального расположения фигуры,

$$A_2 = 10,9 \text{ см}^2; \quad I_{x_2} = 20,4 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 174 \text{ см}^4; \quad h = 10 \text{ см}; \quad z_0 = 1,44 \text{ см}.$$

В данном сечении ось  $y$  является осью симметрии (главной центральной осью инерции), поэтому центр тяжести всего сечения расположен на этой оси. Определим его координату  $y_c$  относительно оси  $x_{нач}$ :

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 14 + 1,44 \cdot 10,9 + 5 \cdot 14}{14 + 10,9 + 14} = 4 \text{ см},$$

где  $y_1, y_2, y_3$  – координаты центров тяжести прямоугольников и швеллера относительно начальной оси  $x_{нач}$  (см. рисунок 1.3).

Через найденный центр тяжести проводим вторую главную центральную ось инерции сечения –  $x$ .

Расстояния между главными центральными осями всего сечения и центральными осями отдельных фигур

$$c_1 = c_3 = y_1 - y_c = 5 - 4 = 1 \text{ см}; \quad c_2 = y_c - y_2 = 4 - 1,44 = 2,56 \text{ см};$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1,4}{2} + \frac{10}{2} = 5,7 \text{ см}; \quad d_2 = 0.$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения относительно осей  $xu$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (116,7 + 1^2 \cdot 14) \cdot 2 + (20,4 + 2,56^2 \cdot 10,9) = 353,2 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

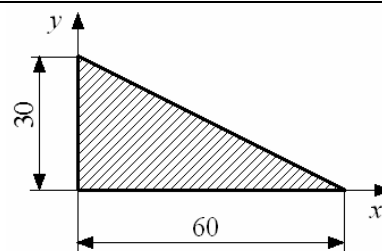
$$\begin{aligned} I_y &= (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (2,3 + 5,7^2 \cdot 14) \cdot 2 + (174 + 0 \cdot 10,9) = 1088,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Так как  $I_x = I_{\min}$ , а  $I_y = I_{\max}$ , то ось  $y$  проходит через плоскость максимальной жесткости сечения, а ось  $x$  – минимальной.

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

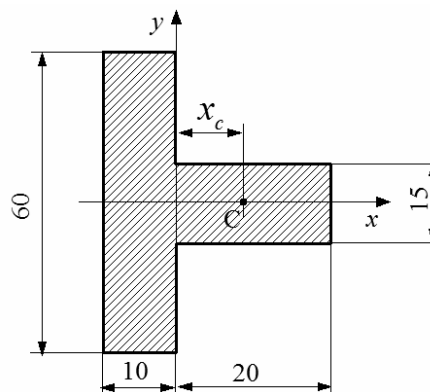
1 Координата центра тяжести треугольника относительно указанных осей:

- а)  $x_c = 1$  см;
- б)  $x_c = 2$  см;
- в)  $x_c = -2$  см;
- г)  $x_c = 3$  см



2 В каком ответе дано правильное значение координаты центра тяжести сечения  $x_c$ :

- а)  $x_c = 0$  см;
- б)  $x_c = -1/3$  см;
- в)  $x_c = 1/3$  см;
- г)  $x_c = 2/3$  см

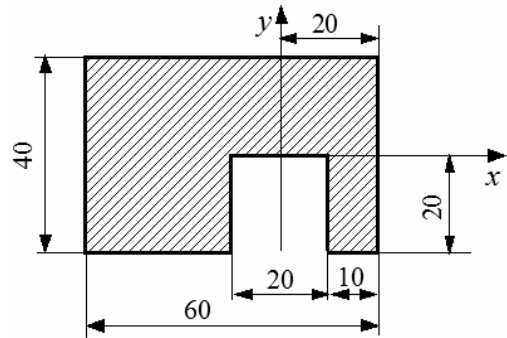


3 По какой формуле определяется статический момент простого сечения площадью  $A$  относительно произвольной оси  $y$ :

- а)  $S_y = x_c \cdot A$ ;  
 б)  $S_y = y_c \cdot A$ ;  
 в)  $S_y = x_c / A$ ;  
 г)  $S_y = y_c / A$

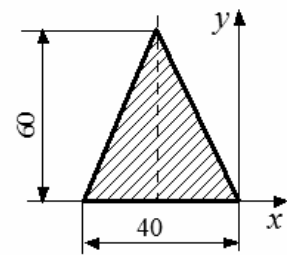
4 В каком ответе дано правильное значение статического момента сечения относительно оси  $x$ :

- а)  $S_x = 0 \text{ см}^3$ ;  
 б)  $S_x = 4 \text{ см}^3$ ;  
 в)  $S_x = 44 \text{ см}^3$ ;  
 г)  $S_x = 52 \text{ см}^3$



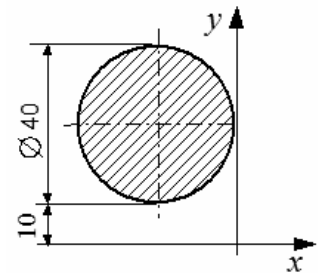
5 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси  $y$ :

- а)  $I_y = 32 \text{ см}^4$ ;  
 б)  $I_y = 58 \text{ см}^4$ ;  
 в)  $I_y = 56 \text{ см}^4$ ;  
 г)  $I_y = 54 \text{ см}^4$



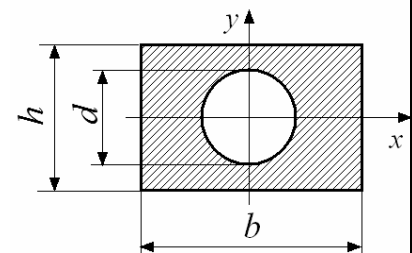
6 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

- а)  $I_{xy} = 0 \text{ см}^4$ ;  
 б)  $I_{xy} = -8 \cdot \pi \text{ см}^4$ ;  
 в)  $I_{xy} = -24 \cdot \pi \text{ см}^4$ ;  
 г)  $I_{xy} = 24 \cdot \pi \text{ см}^4$



7 По какой формуле определяется момент инерции  $I_x$  указанного поперечного сечения:

- а)  $I_x = \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$ ; в)  $I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$ ;  
 б)  $I_x = \frac{bh^3}{12} + \frac{\pi d^4}{64}$ ; г)  $I_x = \frac{bh^3}{36} - \frac{\pi d^4}{64}$



8 Какое утверждение может быть верно для главных центральных осей  $x$  и  $y$ :

- а)  $I_x > 0, I_y < 0$ ;  
 б)  $I_x = I_{\max}, I_y = I_{\min}$ ;  
 в)  $I_x = 0, I_y = 0$ ;  
 г)  $I_x + I_y = 0$



## 2 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брусе

### Пример 1

Стальной брус (рисунок 2.1) площадью поперечного сечения  $A = 50 \text{ см}^2$  сжимается силой  $F = 300 \text{ Н}$ . Удельный вес материала  $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$ . Построить эпюру продольных сил  $N$  с учетом собственного веса бруса.

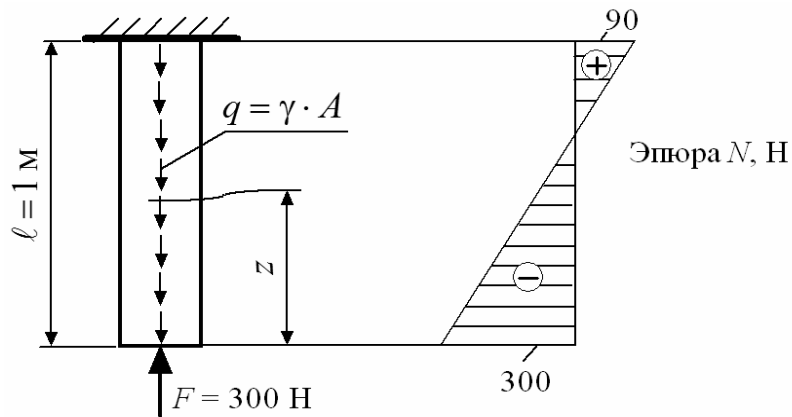


Рисунок 2.1

### Решение

Построение эпюры  $N$ :

$$N = -F + \gamma \cdot A \cdot z = -300 + 78 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot z = -300 + 390 \cdot z;$$

$$z = 0; \quad N = -300 \text{ Н};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad N = 90 \text{ Н}.$$

### Пример 2

Для заданного ступенчатого вала (рисунок 2.2) построить эпюру крутящих моментов. Предварительно вал уравновесить.

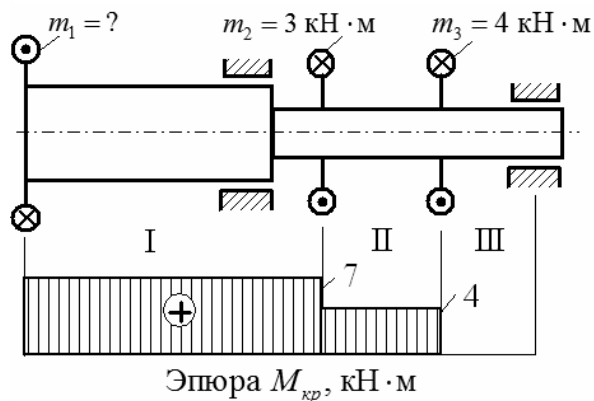


Рисунок 2.2

*Решение*

Для определения скручивающего момента  $m_1$  составим уравнение статики:

$$\sum m = m_2 + m_3 - m_1 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m_2 + m_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение эпюры  $M_{кр}$ :

$$M_1 = m_1 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = m_1 - m_2 = 7 - 3 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = m_1 - m_2 - m_3 = 7 - 3 - 4 = 0.$$

**Пример 3**

Для балки, изображенной на рисунке 2.3, построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .

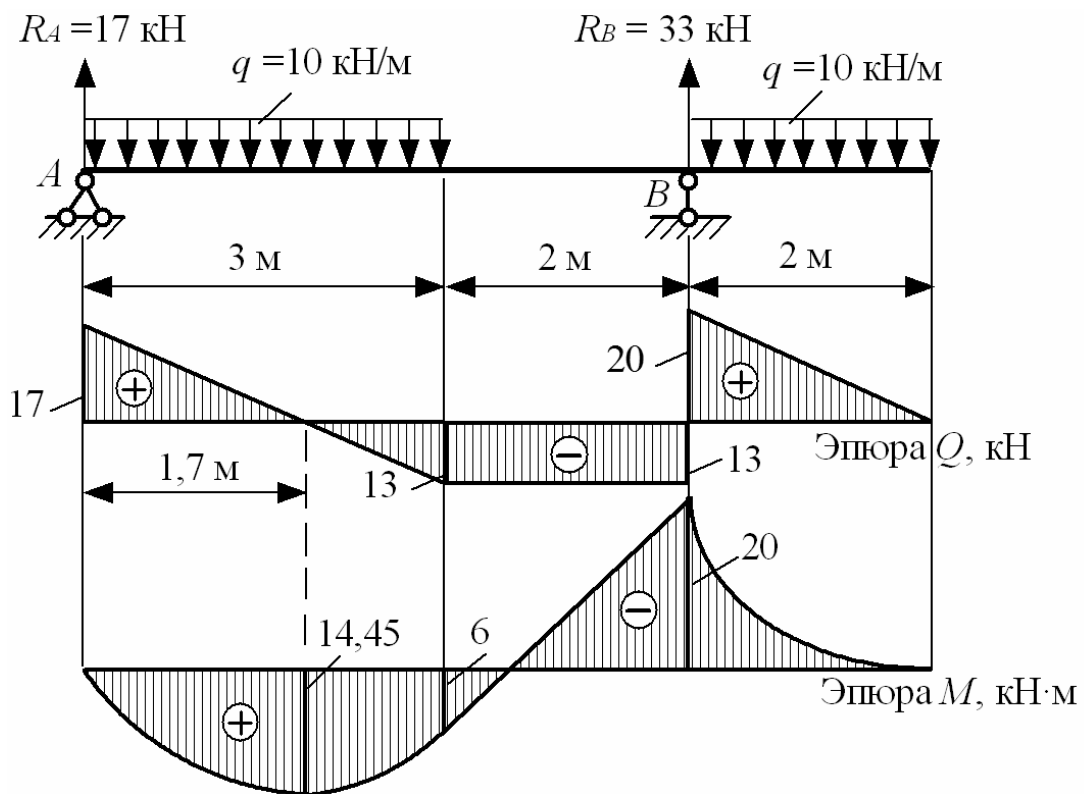


Рисунок 2.3

Решение

Определение реакций на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0; \quad R_B = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 \cdot 6)}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_A = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 3,5 - 10 \cdot 2 \cdot 1)}{5} = 17 \text{ кН}.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Участок I:  $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$ .

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1; \quad M = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2;$$

$$z_1 = 0; \quad Q = 17 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; \quad Q = -13 \text{ кН}; \quad M = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0; \quad z_1 = 1,7 \text{ м};$$

$$M_{\text{экстр}} = 17 \cdot 1,7 - 5 \cdot 1,7^2 = 14,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II:  $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$ .

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН};$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2) = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M = 17 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; \quad M = 17 \cdot 5 - 30 \cdot 3,5 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III:  $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$ .

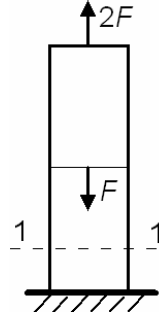
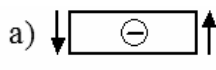
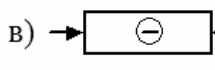
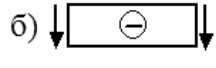
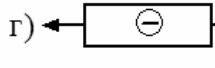

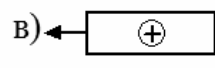
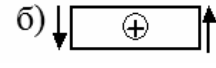
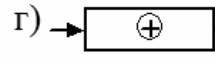

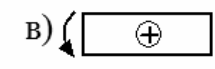
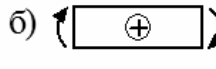
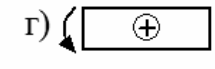
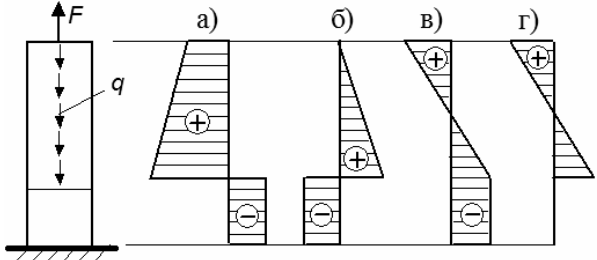
$$Q = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3; \quad M = -0,5 \cdot q \cdot z_3^2 = -5 \cdot z_3^2;$$

$$z_3 = 0; \quad Q = 0; \quad M = 0;$$

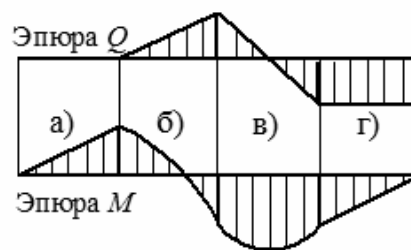
$$z_3 = 2 \text{ м}; \quad Q = 20 \text{ кН}; \quad M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



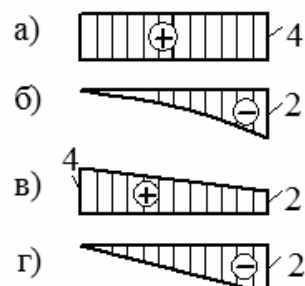
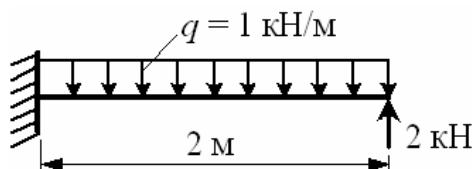
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

<p>1 Метод, позволяющий определить внутренние усилия в сечении стержня, называется:</p>	<p>а) метод сил; б) метод начальных параметров; в) метод независимости действия сил; г) метод сечений</p>
<p>2 Если <math>N &gt; 0</math>, то участок стержня:</p>	<p>а) сжат; б) изогнут; в) растянут; г) испытывает сдвиг</p>
<p>3 Для стержня, схема которого изображена на рисунке, продольная сила, действующая в сечении 1–1, будет:</p> <p>а) растягивающей; б) сжимающей; в) сдвигающей; г) равна нулю</p>	
<p>4 Укажите верное правило знаков для продольной силы <math>N</math>:</p>	<p>а)  в)  б)  г) </p>
<p>5 Укажите верное правило знаков для поперечной силы <math>Q</math>:</p>	<p>а)  в)  б)  г) </p>
<p>6 Укажите верное правило знаков для изгибающего момента <math>M</math>:</p>	<p>а)  в)  б)  г) </p>
<p>7 Для стержня, изображенного на рисунке, эпюра продольных сил <math>N</math> будет иметь вид:</p>	
<p>8 Укажите правильную дифференциальную зависимость:</p>	<p>а) <math>M = \frac{dq}{dz}</math>;                      в) <math>q = \frac{dM}{dz}</math>; б) <math>Q = \frac{dM}{dz}</math>;                      г) <math>M = \frac{dQ}{dz}</math></p>

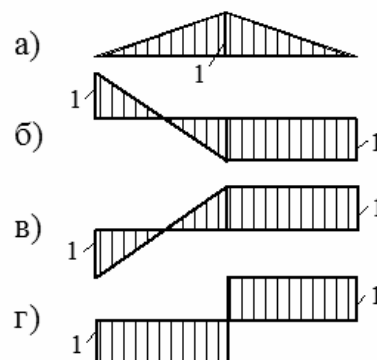
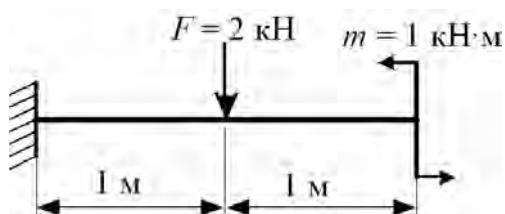
9 На каком участке не соблюдаются дифференциальные зависимости между  $Q$  и  $M$ :



10 Какая эпюра поперечных сил верна для указанной балки:



11 Какая эпюра изгибающих моментов верна для указанной балки:



### 3 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусьев

#### Пример 1

Произвести проверку прочности и жесткости стального ступенчатого бруса, показанного на рисунке 3.1.

Исходные данные:  $A_1 = 3$  см<sup>2</sup>;  $A_2 = 5$  см<sup>2</sup>;  $R = 160$  МПа;  $[\Delta \ell] = 1$  мм;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\gamma_c = 1$ .

#### Решение

Проверку прочности производим по условию

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} \leq R \cdot \gamma_c.$$

По эпюре продольных сил и конфигурации стержня определяем опасный участок:

$$\sigma_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 140 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 140 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

Для проверки жесткости стержня строим эпюру  $\Delta l$ , определяя деформацию каждого участка по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

Начало расчета находится в сечении, примыкающем к жесткой заделке, перемещение которого равно нулю:  $z = 0$ ;  $\Delta l = 0$ .

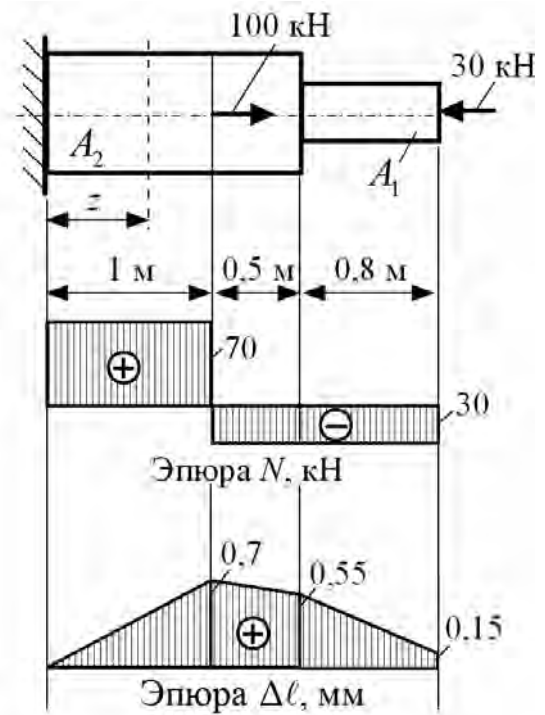


Рисунок 3.1

$$z = 1 \text{ м}; \quad \Delta l = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм};$$

$$z = 1,5 \text{ м}; \quad \Delta l = 0,7 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,55 \text{ мм};$$

$$z = 2,3 \text{ м}; \quad \Delta l = 0,55 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,15 \text{ мм}.$$

$$\Delta l_{\max} = 0,7 \text{ мм} < [\Delta l] = 1 \text{ мм}.$$

Жесткость бруса обеспечена.

### Пример 2

Бетонная колонна (рисунок 3.2) круглого поперечного сечения длиной  $\ell = 5 \text{ м}$  сжимается силой  $F = 500 \text{ кН}$ .

Определить диаметр колонны, если коэффициент  $\gamma_c = 1$ , расчетное сопротивление на сжатие  $R = 5 \text{ МПа}$ , а удельный вес бетона  $\gamma = 20 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ .

### Решение

При постоянной площади поперечного сечения  $A$  полный вес колонны  $G = \gamma \cdot A \cdot \ell$ . Эпюра продольных сил  $N$  показана на рисунке 3.2.

В опасном сечении  $N_{\max} = F + \gamma A \ell$ .

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \ell \leq R \cdot \gamma_c.$$

$$A \geq \frac{F}{R \cdot \gamma_c - \gamma \cdot \ell} = \frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 \cdot 1 - 20 \cdot 10^3 \cdot 5} = 0,102 \text{ м}^2.$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,102}{\pi}} = 0,36 \text{ м} = 360 \text{ мм}.$$

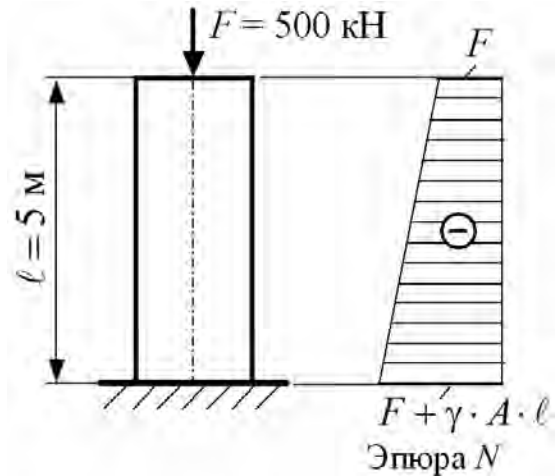


Рисунок 3.2

### Пример 3

Определить наибольшее значение допустимой силы  $F$  для ступенчатого чугунного бруса (рисунок 3.3), если  $R_{\text{раст}} = 60$  МПа,  $R_{\text{сж}} = 120$  МПа,  $A = 10 \text{ см}^2$ ,  $\gamma_c = 1$ .

### Решение

Эпюра продольных сил  $N$ , выраженная в долях от силы  $F$ , показана на рисунке 3.3.

Расчет допустимой силы по условию прочности в сжатой области:

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{сж}} = \frac{F}{A} \leq R_{\text{сж}};$$

$$[F]_{\text{сж}} \leq A \cdot R_{\text{сж}} = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 120 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Расчет допустимой силы по условию прочности в растянутой области:

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{раст}} = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot A} \leq R_{\text{раст}};$$

$$[F]_{\text{раст}} \leq \frac{2 \cdot A \cdot R_{\text{раст}}}{1,5} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,5} = 80 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

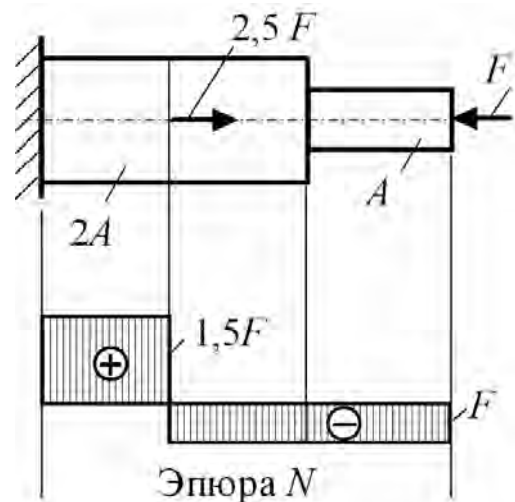

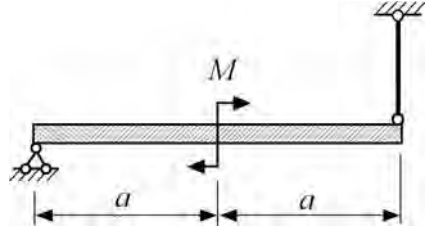


Рисунок 3.3



Допустимой силой для бруса будет меньшая из рассчитанных сил:  
 $[F] = 80 \text{ кН}$ .

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

<p>1 По какой формуле определяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении-сжатии:</p>	<p>а) <math>\sigma = \frac{M}{W}</math>;    в) <math>\sigma = G \cdot \varepsilon</math>;          б) <math>\sigma = \frac{N}{A}</math>;    г) <math>\sigma = \frac{N}{E \cdot A}</math></p>
<p>2 По какой формуле определяется абсолютная деформация бруса при растяжении-сжатии:</p>	<p>а) <math>\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}</math>;    в) <math>\Delta l = \frac{\varepsilon}{l}</math>;          б) <math>\Delta l = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}</math>;    г) <math>\Delta l = \frac{N}{A}</math></p>
<p>3 Образец диаметром 0,02 м разрушился под действием силы <math>F = 0,15 \text{ МН}</math>. Тогда величина предела прочности материала равна:</p> <p>а) 7,5 МПа;    в) 209,3 МПа;          б) 375 МПа;    г) 477,7 МПа</p>	
<p>4 Жесткий брус, нагруженный моментом <math>M</math>, поддерживается в горизонтальном положении стальным стержнем площадью поперечного сечения <math>A</math>. Условие прочности стержня:</p> <p>а) <math>\frac{M}{2 \cdot a \cdot A} \leq R</math>;    в) <math>\frac{M}{A} \leq R</math>;          б) <math>\frac{M \cdot A}{2 \cdot a} \leq R</math>;    г) <math>\frac{M \cdot a}{A} \leq R</math></p>	

## 4 Расчет простейших статически неопределимых систем

### Пример 1

Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 4.1), если площадь поперечного сечения  $A = 3 \text{ см}^2$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , расчетное сопротивление  $R = 160 \text{ МПа}$ , коэффициент  $\gamma_c = 1$ .

### Решение

Составим уравнение статики:

$$\sum X = R_C - 60 + 40 - R_B = 0.$$



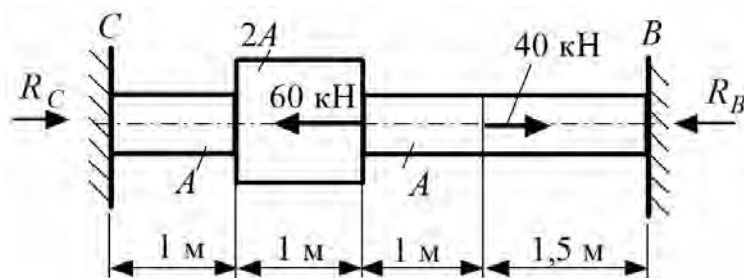


Рисунок 4.1

Стержень один раз статически неопределим, так как единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_R = 0,$$

где  $\Delta l_P$  и  $\Delta l_R$  – деформации стержня соответственно от внешних сил и реакций на опорах.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору  $C$  и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением эпюры  $N_P$  и под действием реакции  $R_C$  с построением эпюры  $N_R$  (рисунок 4.2).

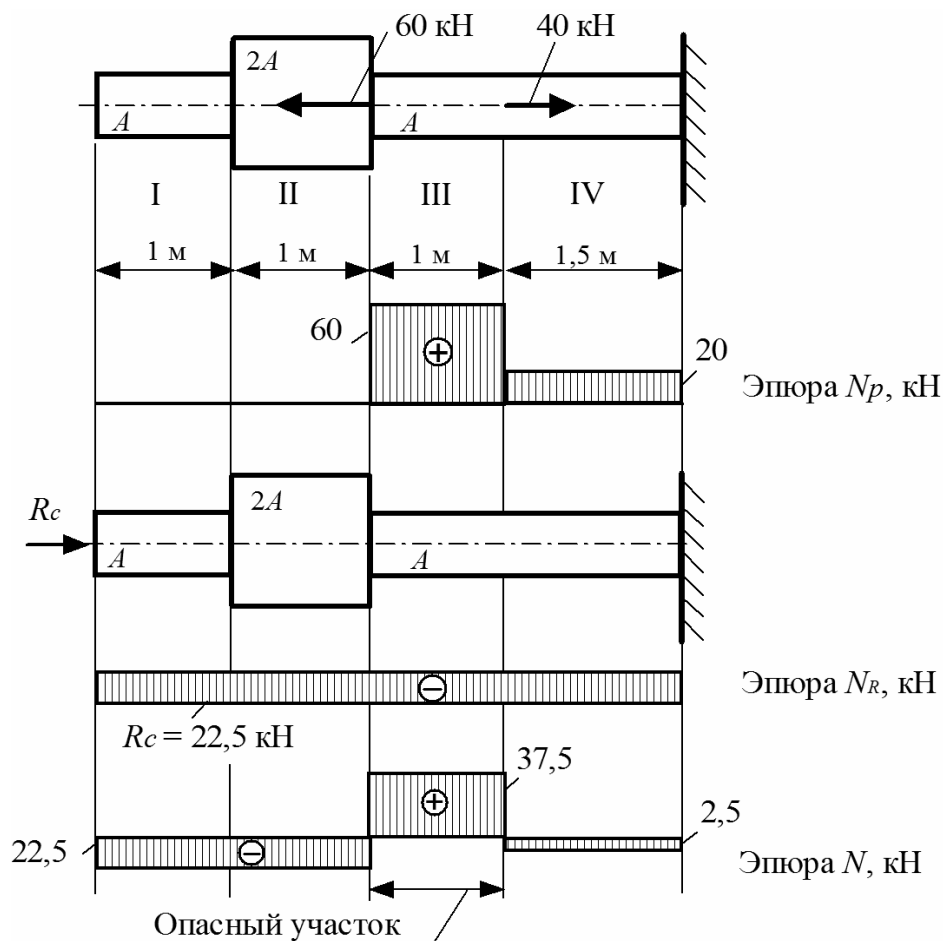


Рисунок 4.2

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta l_P = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1,5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_R = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = -\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1,5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta l = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A} = 0, \quad \text{откуда } R_C = 22,5 \text{ кН.}$$

Окончательную эпюру продольных сил  $N$  строим суммированием эпюр  $N_P$  и  $N_R$ . Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

### Пример 2

Железобетонная колонна (рисунок 4.3) нагружена силой  $F$ .

Площадь поперечного сечения продольной арматуры  $A_a = 50 \text{ см}^2$ .

Модули продольной упругости для арматуры и бетона

$$E_a = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad \text{и} \quad E_b = 1,4 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

Определить напряжения в арматуре  $\sigma_a$  и бетоне  $\sigma_b$ .

*Решение*

Площадь поперечного сечения бетона

$$A_b = A - A_a = 40 \cdot 40 - 50 = 1550 \text{ см}^2.$$

Уравнение проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = \sigma_a \cdot A_a + \sigma_b \cdot A_b - F = 0. \quad (4.1)$$

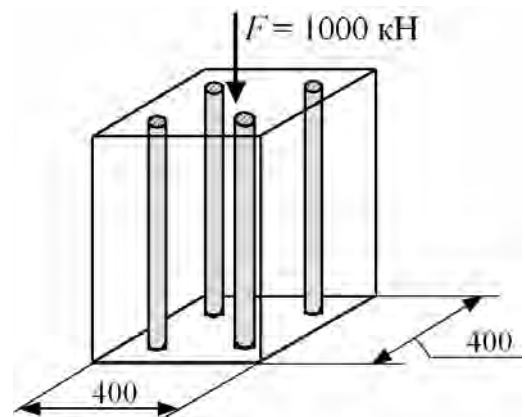


Рисунок 4.3

Для решения задачи требуется дополнительное деформационное уравнение. В железобетонных элементах арматура соединена и работает совместно с бетоном. Следовательно, относительное удлинение арматуры  $\varepsilon_a$  и бетона  $\varepsilon_b$  должно быть одинаковым:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon, \text{ или } \varepsilon = \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b}.$$

Откуда

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \cdot \sigma_b. \quad (4.2)$$

Решая совместно выражения (4.1) и (4.2), получим

$$\frac{E_a}{E_b} \cdot \sigma_b \cdot A_a + \sigma_b \cdot A_b - F = 0.$$

Напряжения

$$\sigma_b = \frac{F}{\frac{E_a}{E_b} \cdot A_a + A_b} = \frac{1000 \cdot 10^3}{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{1,4 \cdot 10^{10}} \cdot 50 \cdot 10^{-4} + 1550 \cdot 10^{-4}} = 4,35 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,35 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \cdot \sigma_b = \frac{2,1 \cdot 10^5}{1,4 \cdot 10^4} \cdot 4,35 = 65,25 \text{ МПа}.$$

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

<p>1 Сколько независимых уравнений статики можно составить для плоской стержневой системы:</p> <p>а) одно;      б) два;      в) три;      г) четыре</p>
<p>2 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой стержневой системы:</p> <p>а) одно;      б) два;      в) три;      г) четыре</p>
<p>3 Укажите условие прочности для статически неопределимой системы, работающей на растяжение-сжатие:</p> <p>а) <math>\frac{Q}{A} \leq R \cdot \gamma_c</math>;      б) <math>\frac{M}{W} \leq R \cdot \gamma_c</math>;      в) <math>\frac{N}{E} \leq R \cdot \gamma_c</math>;      г) <math>\frac{N}{A} \leq R \cdot \gamma_c</math></p>

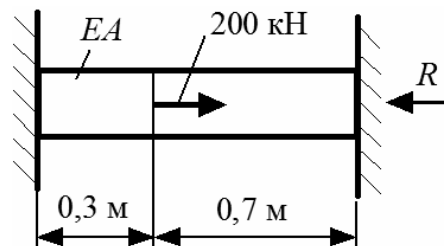


4 Какое свойство не присуще статически неопределимым системам:

- а) возможность возникновения температурных напряжений;
- б) возможность возникновения монтажных напряжений;
- в) возможность свободного деформирования;
- г) перераспределение внутренних усилий при нарушении одной связи

5 Определите реакцию на правой опоре  $R$ , если жесткость поперечного сечения  $EA$  постоянна по величине:

- а) 60 кН;
- б) 200 кН;
- в) 85,7 кН;
- г) 140 кН



## 5 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе

### Пример 1

Проверить прочность балки таврового сечения при нормальных условиях работы ( $\gamma_c = 1$ ), если  $R_{раст} = 30$  МПа и  $R_{сж} = 60$  МПа (рисунок 5.1).

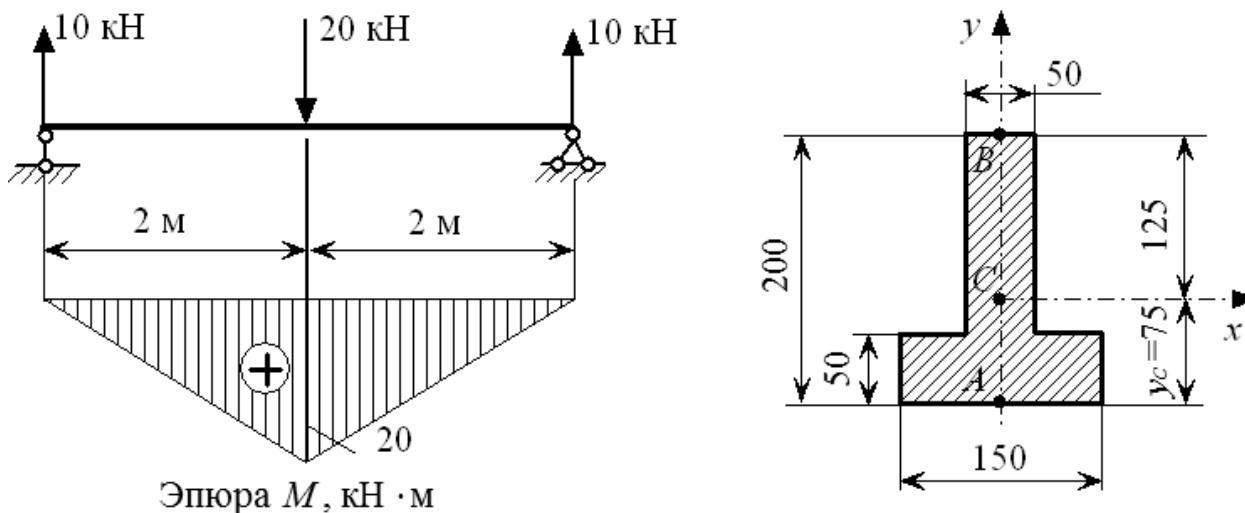


Рисунок 5.1

### Решение

Определение координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$y_c = \frac{15 \cdot 5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 5 \cdot 12,5}{15 \cdot 5 + 15 \cdot 5} = 7,5 \text{ см.}$$

Определение главного центрального момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 = 5312,5 \text{ см}^4 = 5312,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Определение моментов сопротивления поперечного сечения относительно оси  $x$ :

$$W_A = \frac{I_x}{y_A} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{7,5 \cdot 10^{-2}} = 708 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_B = \frac{I_x}{y_B} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{12,5 \cdot 10^{-2}} = 425 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_A = \frac{M_{\max}}{W_A} = \frac{20 \cdot 10^3}{708 \cdot 10^{-6}} = 28,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,25 \text{ МПа} < R_{\text{раст}} = 30 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{W_B} = \frac{20 \cdot 10^3}{425 \cdot 10^{-6}} = 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа} < R_{\text{сж}} = 60 \text{ МПа}.$$

### Пример 2

Подобрать двутавровое поперечное сечение стальной балки (рисунок 5.2) и проверить его прочность по нормальным и касательным напряжениям.

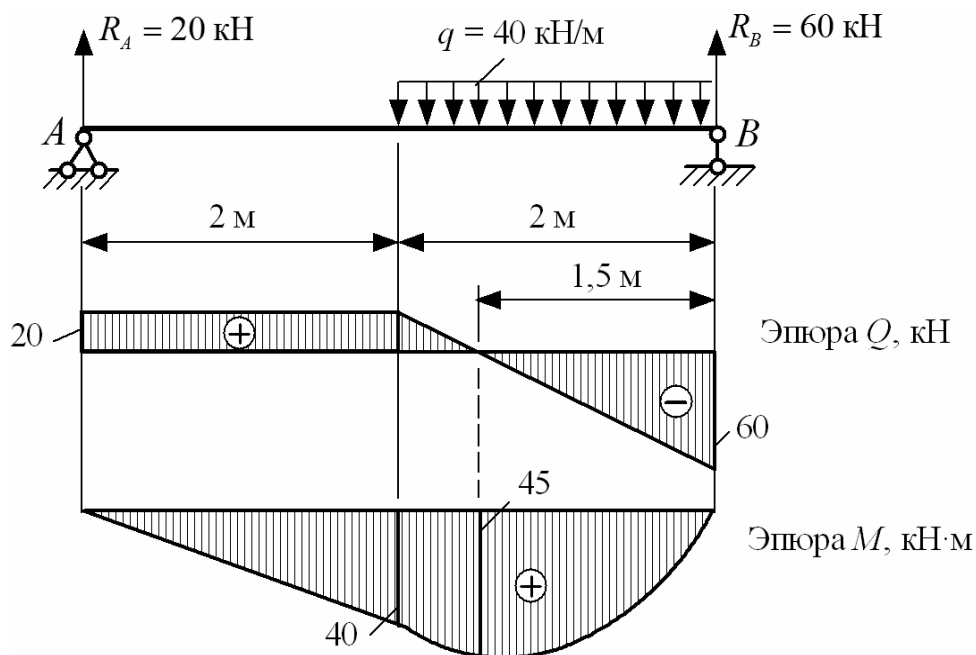


Рисунок 5.2



Исходные данные:  $R = 160$  МПа;  $R_S = 100$  МПа;  $\gamma_c = 1$ .

*Решение*

Поперечное сечение выбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 1} = 281,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 281,25 \text{ см}^3.$$

Рассчитанному моменту сопротивления в наибольшей степени подходит двутавр № 24 ( $W_x = 289 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 3460 \text{ см}^4$ ;  $S_x^* = 163 \text{ см}^3$ ;  $b^* = 5,6 \text{ мм}$ ).

Проверяем прочность двутавра по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{b^* \cdot I_x} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,5 \text{ МПа} < R_S = 100 \text{ МПа}.$$

### Пример 3

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой  $F$  (рисунок 5.3). Определить допустимую величину силы  $[F]$  при  $R = 10$  МПа и  $\gamma_c = 1$ . Проверить прочность балки по касательным напряжениям при  $R_S = 1$  МПа.

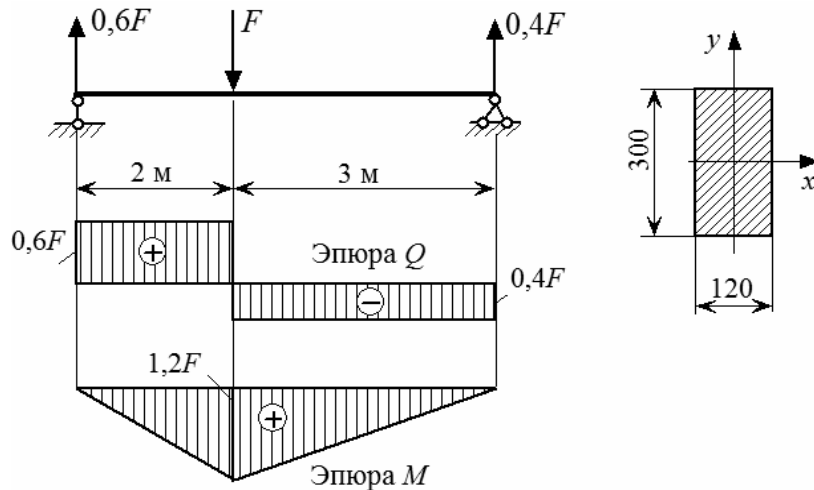


Рисунок 5.3

*Решение*

Осейвой момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 30^2}{6} = 1800 \text{ см}^3 = 1800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Допустимую силу рассчитаем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1,2 \cdot [F]}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$[F] = \frac{W_x \cdot R}{1,2} = \frac{1800 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 1}{1,2} = 15000 \text{ Н} = 15 \text{ кН}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,6 \cdot 15 \cdot 10^3}{12 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,375 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,375 \text{ МПа} < R_s = 1 \text{ МПа}.$$

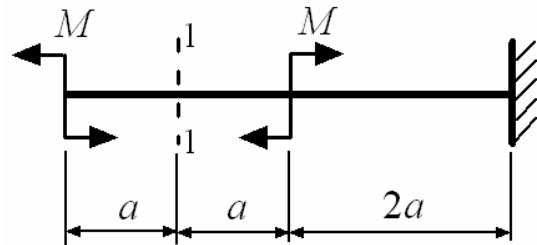
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки имеет вид:

а)  $\frac{M}{W} \leq R \cdot \gamma_c$ ;    б)  $\frac{M \cdot l}{W} \leq R \cdot \gamma_c$ ;    в)  $\frac{M}{E \cdot I} \leq R \cdot \gamma_c$ ;    г)  $\frac{F}{W} \leq R \cdot \gamma_c$

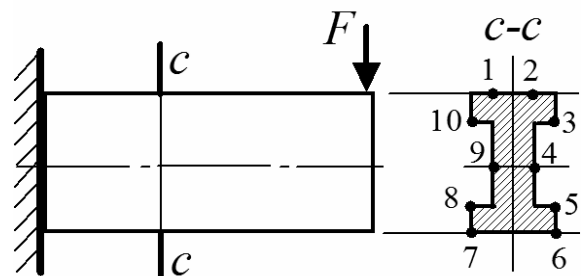
2 В сечении 1-1 возникают внутренние силовые факторы:

- а)  $M \neq 0, Q = 0$ ;  
 б)  $M = 0, Q = 0$ ;  
 в)  $M \neq 0, Q \neq 0$ ;  
 г)  $M = 0, Q \neq 0$



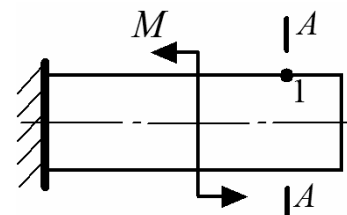
3 Максимальные нормальные напряжения действуют в точках:

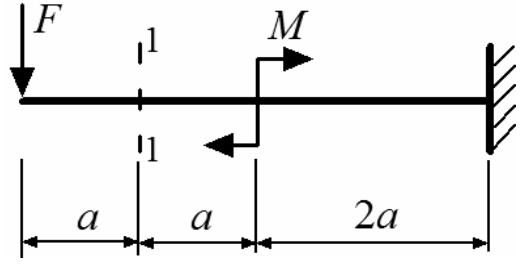
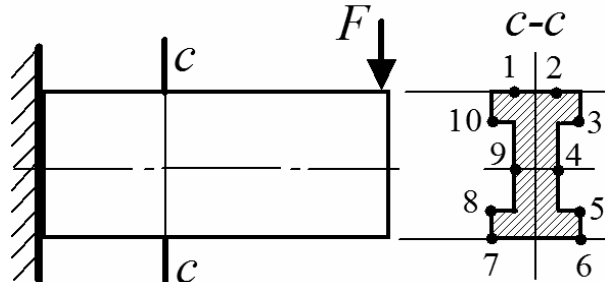
- а) 10, 3, 8, 5;  
 б) 3, 5, 6;  
 в) 1, 2, 7, 6;  
 г) 9, 4



4 Какие напряжения действуют в точке 1:

- а) нет напряжений;  
 б) действуют нормальное и касательное напряжения;  
 в) действует нормальное напряжение;  
 г) действует касательное напряжение



<p>5 Какой закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки:</p>	<p>а) постоянный; б) гиперболический; в) параболический; г) линейный</p>
<p>6 В сечении 1–1 возникают внутренние силовые факторы:</p> <p>а) <math>M \neq 0, Q = 0</math>; б) <math>M = 0, Q = 0</math>; в) <math>M \neq 0, Q \neq 0</math>; г) <math>M = 0, Q \neq 0</math></p>	
<p>7 Максимальные касательные напряжения действуют в точках:</p> <p>а) 10, 3, 8, 5; б) 3, 5, 6; в) 1, 2, 7, 6; г) 9, 4</p>	
<p>8 Какой закон распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки:</p>	<p>а) постоянный б) гиперболический в) параболический г) линейный</p>

## 6 Расчеты на жесткость при прямом поперечном изгибе

### Пример 1

Проверить жесткость двутавровой балки (рисунок 6.1), если допустимый прогиб  $[y] = 6$  мм.

Исходные данные: двутавр № 20 ( $I_x = 1840$  см<sup>4</sup>);  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

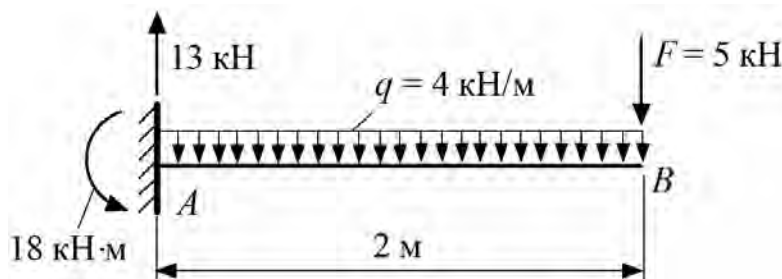


Рисунок 6.1



*Решение*

Уравнение прогибов для данной балки по методу начальных параметров имеет вид:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z - 18 \cdot \frac{z^2}{2!} + 13 \cdot \frac{z^3}{3!} - 4 \cdot \frac{z^4}{4!}.$$

Начальные параметры следующие:  $y_0 = 0$ ;  $\theta_0 = 0$ .

Максимальный прогиб  $y_{\max} = y_B$  при  $z = 2$  м.

$$EI_x y_B = -18 \cdot \frac{2^2}{2} + 13 \cdot \frac{2^3}{6} - 4 \cdot \frac{2^4}{24} = -21,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_{\max} = y_B = \frac{21,33}{EI_x} = \frac{21,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0058 \text{ м} = 5,8 \text{ мм} < [y] = 6 \text{ мм}.$$

**Пример 2**

Методом начальных параметров определить прогиб сечения  $C$  и угол поворота сечения  $D$  деревянной балки прямоугольного поперечного сечения указанных размеров (рисунок 6.2).

Модуль продольной упругости материала  $E = 10^4 \text{ МПа} = 10^{10} \text{ МПа}$ .

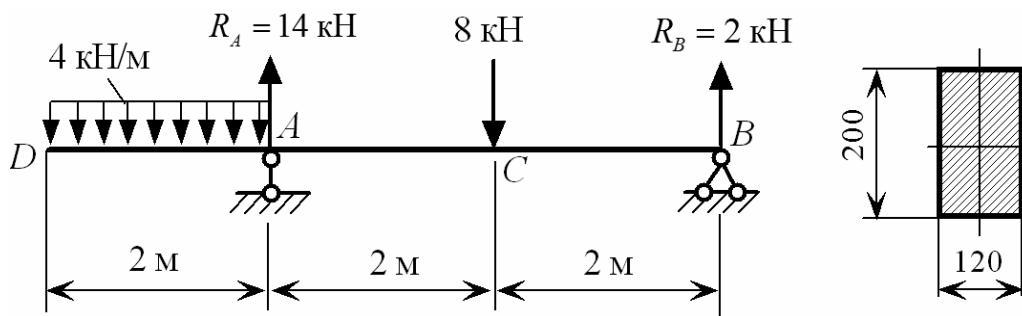


Рисунок 6.2

*Решение*

Определение осевого момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Определение начальных параметров:



$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{2^4}{4!} = 0;$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{6^4}{4!} + 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 14 \cdot \frac{4^3}{3!} - 8 \cdot \frac{2^3}{3!} = 0;$$

$$EI_x y_0 = -\frac{40}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_x \theta_0 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

### Прогиб сечения C

$$\begin{aligned} EI_x y_C &= EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 14 \cdot \frac{2^3}{3!} = \\ &= -\frac{40}{3} + 8 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{24} + 4 \cdot \frac{2^4}{24} + 14 \cdot \frac{2^3}{6} = -\frac{8}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \end{aligned}$$

$$y_C = -\frac{8}{3 \cdot EI_x} = -\frac{8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = -0,33 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -3,3 \text{ мм}.$$

Угол поворота сечения D равен начальному параметру  $\theta_0$ :

$$\theta_D = \frac{8}{EI_x} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 0,01 \text{ рад}.$$

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите наиболее общее определение «начальные параметры»:

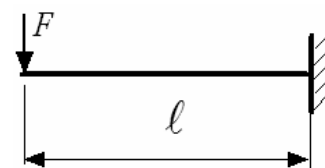
- а) прогиб и угол поворота в опорном сечении;
- б) прогиб и угол поворота в крайнем левом сечении балки;
- в) прогиб и угол поворота в жесткой заделке;
- г) прогиб и угол поворота в крайнем правом сечении балки

2 Укажите жесткость поперечного сечения при изгибе:

- а)  $GI_x$ ;      б)  $EI_p$ ;      в)  $EI_x$ ;      г)  $EA$

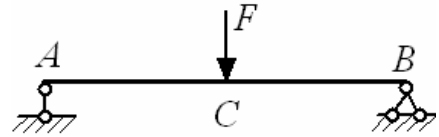
3 Начальные параметры показанной балки равны:

- а)  $y_0 \neq 0, \theta_0 = 0$ ;
- б)  $y_0 \neq 0, \theta_0 \neq 0$ ;
- в)  $y_0 = 0, \theta_0 = 0$ ;
- г)  $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$



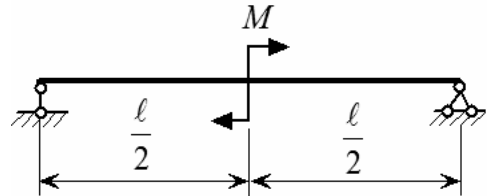
4 В каком сечении показанной балки прогиб равен нулю:

- а) сечение  $A$ ;
- б) сечение  $C$ ;
- в) сечение  $B$ ;
- г) сечения  $A$  и  $B$



5 Балка нагружена сосредоточенным моментом  $M$ . Жесткость поперечного сечения балки равна  $EI_x$ . Начальный параметр  $\theta_0$  равен:

- а)  $\theta_0 = \frac{M \cdot l}{8 \cdot EI_x}$ ;
- б)  $\theta_0 = 0$ ;
- в)  $\theta_0 = -\frac{M \cdot l}{8 \cdot EI_x}$ ;
- г)  $\theta_0 = \frac{M \cdot l}{24 \cdot EI_x}$



## 7 Косой изгиб

### Пример 1

Стальная балка двутаврового поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 7.1). Проверить прочность балки.

Дано: двутавр № 30 ( $W_x = 472 \text{ см}^3$ ;  $W_y = 49,9 \text{ см}^3$ );  $R = 160 \text{ МПа}$ ;  $\gamma_c = 1$ .

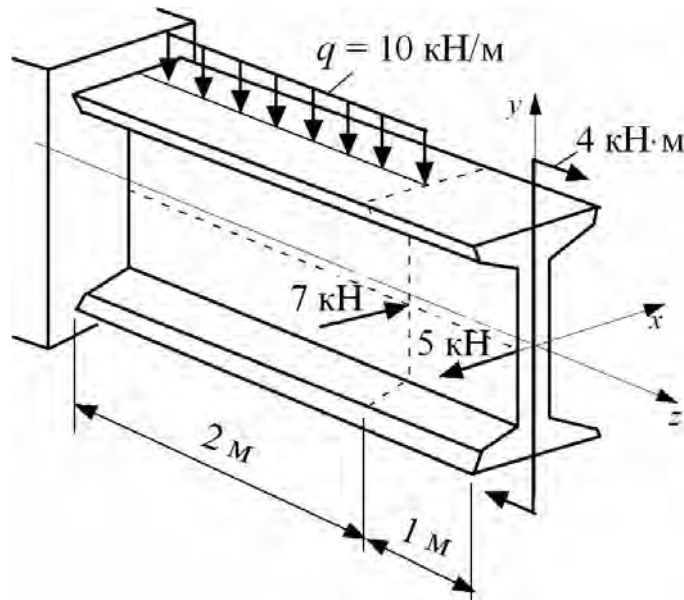


Рисунок 7.1

## Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. Вертикальные силы изгибают балку в вертикальной плоскости, создавая момент  $M_x$ . Горизонтальные силы изгибают балку в горизонтальной плоскости, создавая момент  $M_y$ . Промежуточные расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 7.2.

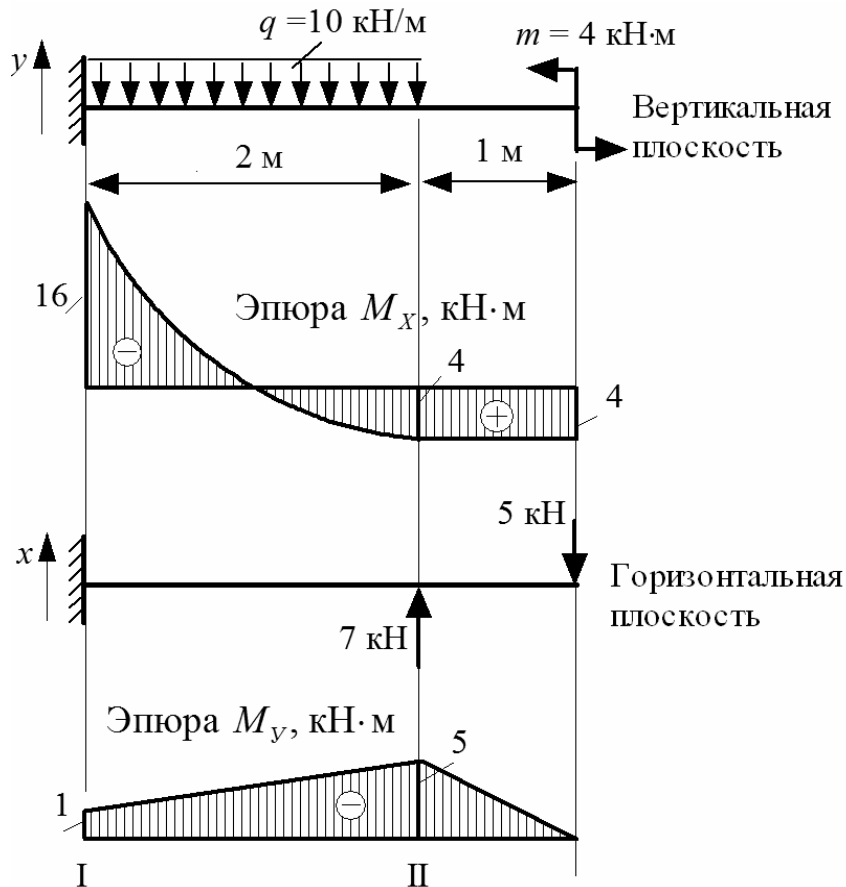


Рисунок 7.2

Выполним проверку прочности в предполагаемых опасных сечениях по условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R \cdot \gamma_c.$$

Напряжение в сечении I

$$\sigma_I = \frac{16 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{1 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 54 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Напряжения в сечении II

$$\sigma_{II} = \frac{4 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Наиболее опасным оказалось сечение II. Условие прочности выполняется:

$$\sigma_{\max} = 109 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

### Пример 2

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 7.3). Определить минимальные размеры поперечного сечения ( $b_{\min}$ ), если  $R = 10 \text{ МПа}$  и  $\gamma_c = 1$ .

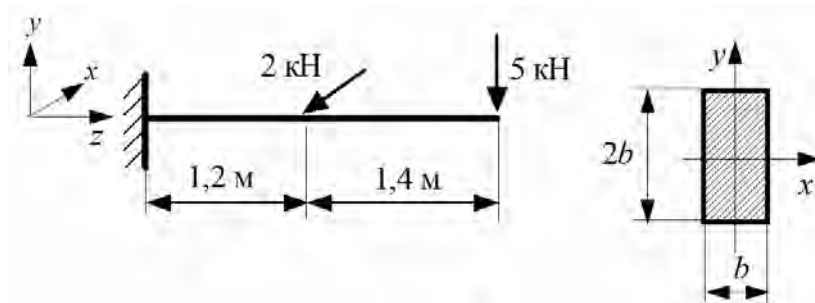


Рисунок 7.3

### Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. От силы, действующей в вертикальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$ . От силы, действующей в горизонтальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (рисунок 7.4).

Осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения выразим через размер  $b$ :

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3};$$

$$W_y = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Условие прочности для опасного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{13 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{2,4 \cdot 10^3 \cdot 3}{b^3} = \frac{26,7 \cdot 10^3}{b^3} = R \cdot \gamma_c = 10 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Определим размер  $b_{\min}$ :

$$b_{\min} = \sqrt[3]{\frac{26,7 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,1387 \text{ м} \approx 140 \text{ мм}.$$

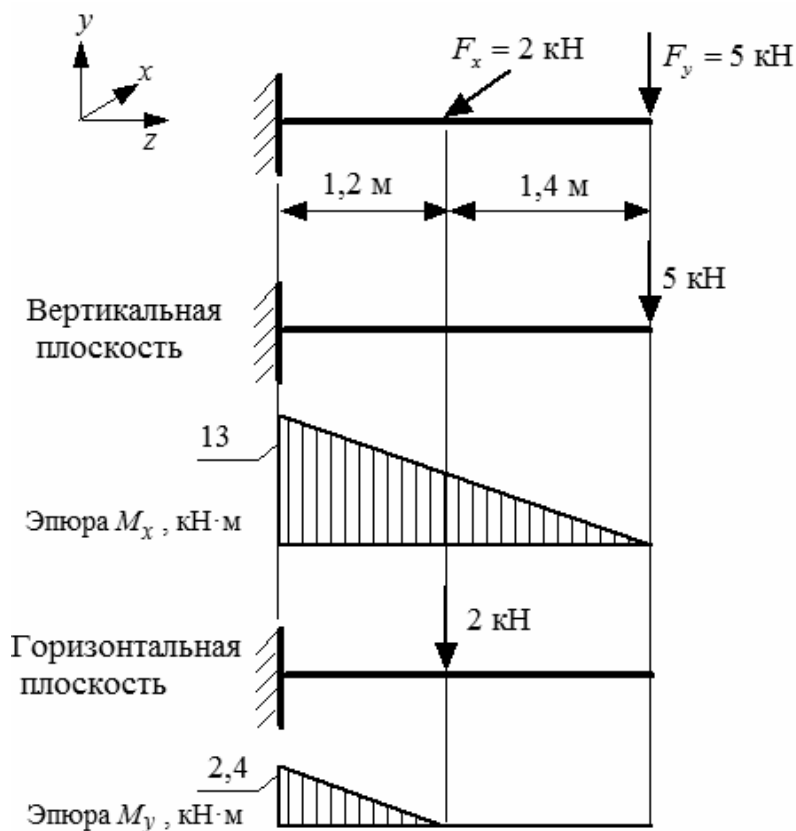


Рисунок 7.4

*Вывод:* для заданной балки следует использовать деревянный брус с минимальными размерами 140 × 280 мм.

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 По какой формуле определяются нормальные напряжения при косом изгибе:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; & \text{в) } \sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; \\ \text{б) } \tau = \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y}; & \text{г) } \sigma = \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y} \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \end{array}$$

2 При косом изгибе нулевая линия:

- а) перпендикулярна плоскости суммарного изгибающего момента;
- б) перпендикулярна плоскости суммарного прогиба;
- в) совпадает с плоскостью суммарного изгибающего момента;
- г) совпадает с плоскостью суммарного прогиба

3 При косом изгибе нулевая линия проходит:

- а) касательно к поперечному сечению;
- б) вне поперечного сечения;
- в) через центр тяжести поперечного сечения;
- г) пересекает поперечное сечение в стороне от центра тяжести

4 По какой формуле определяются максимальные напряжения при косом изгибе для сечений, которые вписываются в прямоугольник:

$$\text{а) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y}; \quad \text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}; \quad \text{в) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \text{г) } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}$$

5 Максимальные нормальные напряжения при косом изгибе возникают в точках поперечного сечения, которые:

- а) максимально удалены от нейтральной оси;
- б) во всех угловых точках;
- в) в центре тяжести поперечного сечения;
- г) во всех точках по внешнему контуру сечения

6 Для каких поперечных сечений косой изгиб невозможен:

- а) двутавр и прямоугольник;
- б) квадрат и равносторонний треугольник;
- в) швеллер и равнобедренный треугольник;
- г) равнополочный уголок

## 8 Внецентренное растяжение-сжатие брусьев большой жесткости

### Пример 1

Проверить прочность бетонной колонны, если  $F = 7$  кН,  $R_{расч} = 0,6$  МПа,  $R_{сж} = 6$  МПа,  $\gamma_c = 1$ . Размеры на рисунке 8.1 показаны в миллиметрах.

*Решение*

Условие прочности для сжимающей силы

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_{on}}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_{on}}{i_x^2} \right) \leq R \cdot \gamma_c.$$

Чтобы им воспользоваться, нужно определить положение нейтральной оси и опасные точки в сечении с координатами  $x_{on}$ ,  $y_{on}$ .

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны.



Площадь

$$A = 20 \cdot 18 = 360 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 18^3}{12} = 9720 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 20^3}{12} = 12000 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{9720}{360} = 27 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{12000}{360} = 33,3 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы следующие:  $x_F = 15 \text{ см}$ ,  $y_F = 0$ .

Положение нейтральной оси определяется по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (рисунок 8.2):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{33,3}{15} = -2,2 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{27}{0} = -\infty.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части. Определим координаты опасных точек.

В *растянутой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например, точку 1:  $x_1 = -10 \text{ см}$ ,  $y_1 = 0$ .

В *сжатой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например, точку 2:  $x_2 = 10 \text{ см}$ ,  $y_2 = 0$ .

Проверка прочности в *сжатой области*:

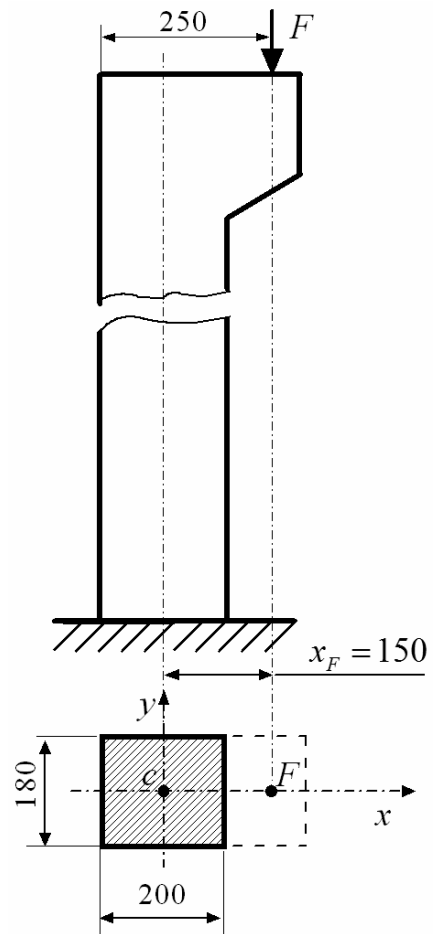


Рисунок 8.1

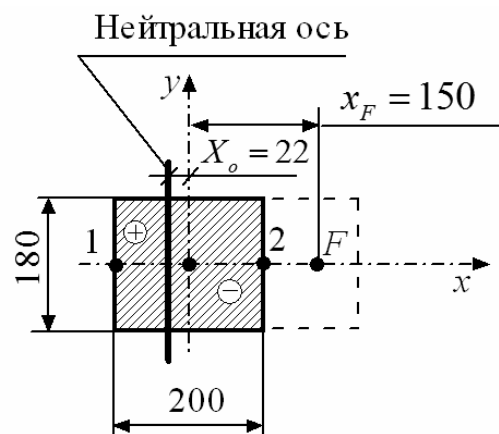


Рисунок 8.2





$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_2 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot 10}{33,3} + 0\right) = -1,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{сж} = 1,07 \text{ МПа} < R_{сж} \cdot \gamma_c = 6 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности в *растянутой области*:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot (-10)}{33,3} + 0\right) = 0,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,68 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{раст} = 0,68 \text{ МПа} > R_{раст} \cdot \gamma_c = 0,6 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{0,68 - 0,6}{0,6} \cdot 100 \% = 13,3 \% > 5 \%,$$

что недопустимо.

*Вывод:* так как условие прочности на растяжение не выполняется, то прочность колонны не обеспечена.

### Пример 2

Определить минимальный диаметр стального стержня, к которому приложена растягивающая сила  $F = 30 \text{ кН}$  (рисунок 8.3), если расчетное сопротивление материала  $R = 180 \text{ МПа}$ ,  $\gamma_c = 1$ .

*Решение*

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,785 \cdot d^2.$$

Квадрат радиуса инерции

$$i_x^2 = i_y^2 = d^2/16.$$

Координаты точки приложения силы

$$x_F = 0, y_F = -d/4.$$

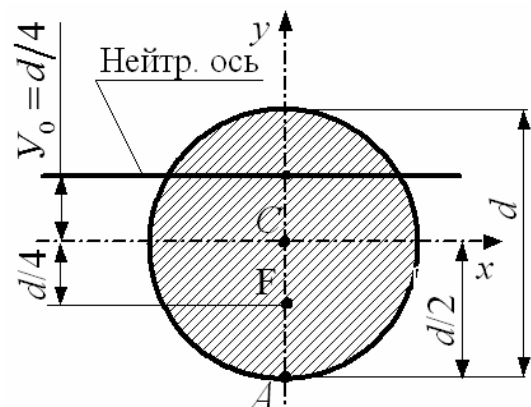


Рисунок 8.3

Отрезки, которые отсекает нейтральная линия на осях координат,



$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{d^2/16}{0} = -\infty; \quad Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{d^2/16}{-d/4} = \frac{d}{4}.$$

Опасной является точка  $A$ , как самая удаленная точка от нейтральной оси. Ее координаты следующие:  $x_A = 0$ ,  $y_A = -d/2$ .

Определим минимальный диаметр стержня из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{0 \cdot 0}{d^2/16} + \frac{(-d/4) \cdot (-d/2)}{d^2/16} \right) = \frac{F}{0,785 \cdot d^2} \cdot 3 = R \cdot \gamma_c;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{F \cdot 3}{R \cdot \gamma_c \cdot 0,785}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{180 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 0,785}} = 0,025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

### Пример 3

Определить допустимую сжимающую силу для чугунного стержня коробчатого поперечного сечения (рисунок 8.4), если расчетное сопротивление материала  $R_{\text{раст}} = 60$  МПа,  $R_{\text{сж}} = 150$  МПа,  $\gamma_c = 1$ . Построить ядро сечения. Размеры на рисунке 8.4 показаны в миллиметрах.

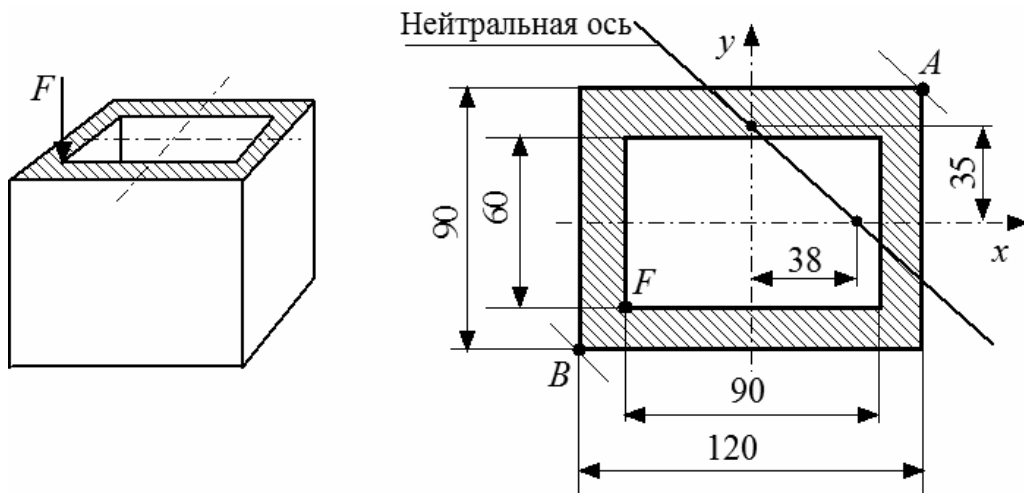


Рисунок 8.4

### Решение

Площадь поперечного сечения  $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$ .

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931,5}{54} = 17,25 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы следующие:  $x_F = -4,5 \text{ см}$ ;  $y_F = -3 \text{ см}$ .

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (см. рисунок 8.4):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17,25}{-4,5} = 3,8 \text{ см}; \quad Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,5}{-3} = 3,5 \text{ см}.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части.

В *растянутой области* составим условие прочности для опасной точки  $A$  с координатами  $x_A = 6 \text{ см}$  и  $y_A = 4,5 \text{ см}$ :

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{(-4,5) \cdot 6}{17,25} + \frac{(-3) \cdot 4,5}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot (-1,85)}{A} \leq R_{раст} = 60 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot R_{раст}}{1,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,85} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

В *сжатой области* составим условие прочности для опасной точки  $B$  с координатами  $x_B = -6 \text{ см}$  и  $y_B = -4,5 \text{ см}$ :

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{(-4,5) \cdot (-6)}{17,25} + \frac{(-3) \cdot (-4,5)}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot 3,85}{A} \leq R_{сж} = -150 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot R_{сж}}{3,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{3,85} = 210 \cdot 10^3 \text{ Н} = 210 \text{ кН}.$$

Допустимой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил:  $[F] = 175 \text{ кН}$ .

Для построения *ядра сечения* (рисунок 8.5) нужно провести касательные линии к контуру сечения и определить координаты угловых точек ядра по следующим формулам:

$$x_{я} = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{я} = -\frac{i_x^2}{Y_0}.$$



Касательная 1–1:  $X_0 = -6$  см,  
 $Y_0 = \infty$

Точка 1:

$$x_1 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{-6} = 2,9 \text{ см,}$$

$$y_1 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 2–2:  $X_0 = \infty$ ,  
 $Y_0 = 4,5$  см.

Точка 2:

$$x_2 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0, \quad y_2 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{4,5} = -2,3 \text{ см.}$$

Касательная 3–3:  $X_0 = 6$  см,  $Y_0 = \infty$ .

$$\text{Точка 3: } x_3 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{6} = -2,9 \text{ см, } y_3 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 4–4:  $X_0 = \infty$ ,  $Y_0 = -4,5$  см.

$$\text{Точка 4: } x_4 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0, \quad y_4 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{-4,5} = 2,3 \text{ см.}$$

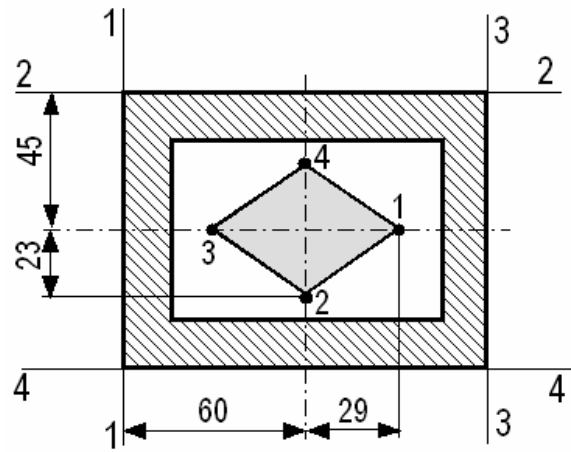


Рисунок 8.5

Найденные точки соединяются прямыми линиями (см. рисунок 8.5).

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии:

- а) продольная сила и поперечная сила;
- б) только продольная сила;
- в) только изгибающие моменты;
- г) изгибающие моменты и продольная сила

2 По какой формуле определяются напряжения при внецентренном растяжении-сжатии:

$$\text{а) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; \quad \text{в) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x}{i_x^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_y^2} \right);$$

$$\text{б) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y}; \quad \text{г) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right)$$

3 При внецентренном растяжении-сжатии нулевая линия:

- а) проходит через центр тяжести поперечного сечения;
- б) проходит через точку приложения силы;
- в) находится за центром тяжести поперечного сечения напротив силы;
- г) находится между центром тяжести и точкой приложения силы

4 При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения максимальны:

- а) на границе ядра сечения;
- б) в точке, наиболее удаленной от нулевой линии;
- в) в точке приложения силы;
- г) в центре поперечного сечения

5 Какой закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении-сжатии:

- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный

6 Какие напряжения испытывает брус, если сжимающая внецентренная сила приложена в ядре сечения:

- а) нормальные напряжения на растяжение и на сжатие;
- б) нормальные напряжения только на сжатие;
- в) нормальные напряжения только на растяжение;
- г) касательные напряжения на сдвиг

7 Какое положение занимает нейтральная линия, если продольная сила приложена на границе ядра сечения:

- а) касается поперечного сечения;
- б) проходит вне сечения;
- в) пересекает поперечное сечение за пределами ядра;
- г) касается ядра сечения

8 Для каких из перечисленных материалов сжимающую нагрузку необходимо прикладывать в ядре сечения:

- а) дерево;
- б) сталь;
- в) бетон;
- г) медь

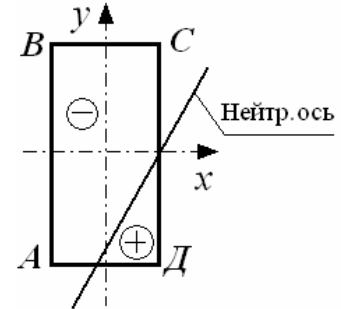


9 Где нужно прикладывать продольную силу, чтобы напряжения в поперечном сечении не менялись:

- а) на границе ядра;
- б) на границе поперечного сечения;
- в) на нейтральной оси;
- г) в центре тяжести поперечного сечения

9 Опасные точки для бетонной колонны:

- а) *A* и *C*;
- б) *B* и *D*;
- в) *A*, *B*, *C* и *D*;
- г) только *B*



## 9 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения

### Пример 1

Проверить прочность и жесткость ступенчатого стального бруса (рисунок 9.1). Исходные данные:  $R_s = 60$  МПа;  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа;  $[\varphi] = 0,03$  рад.

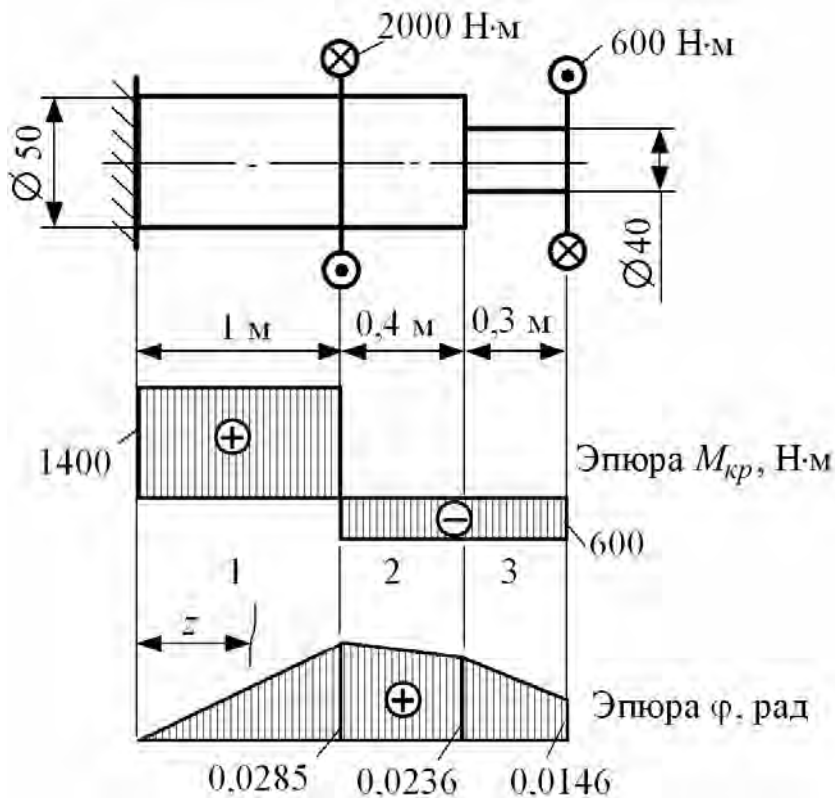


Рисунок 9.1

*Решение*

Геометрические характеристики вала следующие:

$$I_{\rho 1} = I_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4 = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4 = 25,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_{\rho 1} = W_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,53 \text{ см}^3 = 24,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3 = 12,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверка прочности вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{kp}}{W_{\rho 1}} = \frac{1400}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 57,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 57,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{kp}}{W_{\rho 2}} = \frac{600}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{kp}}{W_{\rho 3}} = \frac{600}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 57,1 \text{ МПа} < R_S = 60 \text{ МПа}.$$

Проверка жесткости вала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{kpi} \cdot \ell_i}{G_i \cdot I_{\rho i}};$$

$$z = 0 \text{ м}; \quad \varphi = 0 \text{ рад};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 = \frac{1400 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0285 \text{ рад};$$

$$z = 1,4 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0285 - \frac{600 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0236 \text{ рад};$$



$$z = 1,7 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_3 = 0,0236 - \frac{600 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,12 \cdot 10^{-8}} = 0,0146 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\max} = 0,0285 \text{ рад} < [\varphi] = 0,03 \text{ рад}.$$

### Пример 2

Определить минимальный диаметр стального вала (рисунок 9.2), если  $R_S = 90 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\Theta] = 0,03 \text{ рад/м}$ .

### Решение

По эпюре  $M_{кр}$  определим опасный участок, на котором действует максимальный крутящий момент  $5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

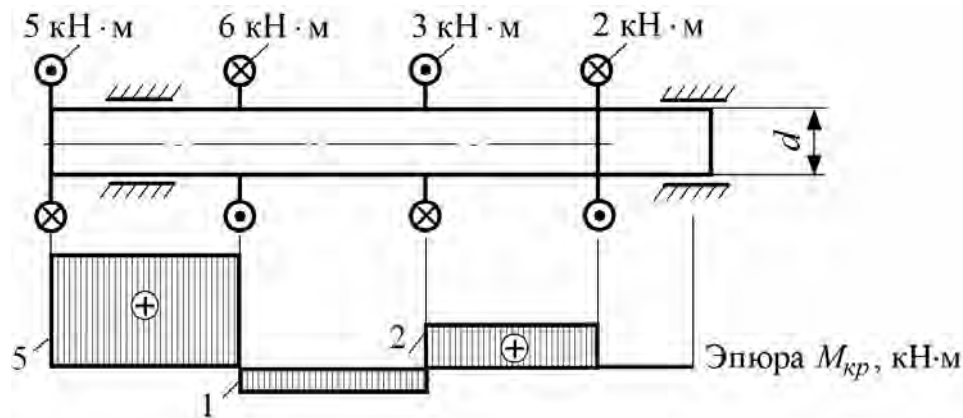


Рисунок 9.2

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot R_S}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,0657 \text{ м}.$$

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,03}} = 0,0679 \text{ м}.$$

В качестве минимального диаметра вала выбираем значение

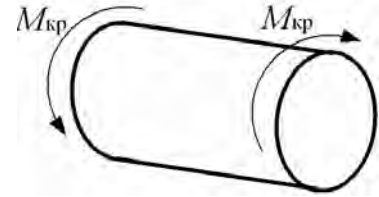
$$d = 0,0679 \text{ м} = 67,9 \text{ мм}.$$



### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Определите из расчета на прочность максимальное допустимое значение момента  $[M_{кр}]$ , если диаметр вала 2 см, а расчетное сопротивление  $R_s = 80$  МПа :

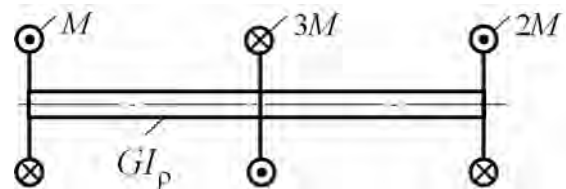
- а)  $50 \cdot \pi$  Н·м;  
 б)  $60 \cdot \pi$  Н·м;  
 в)  $40 \cdot \pi$  Н·м;  
 г)  $30 \cdot \pi$  Н·м



2 Укажите формулу для расчета максимальных касательных напряжений при кручении:

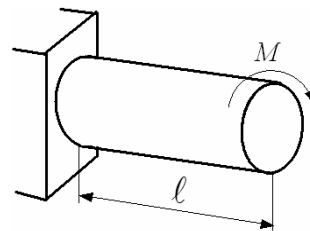
а)  $\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{W_p}$ ;    б)  $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_p}$ ;    в)  $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p}$ ;    г)  $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$

3 Укажите условие жесткости показанного вала постоянного поперечного сечения при допуске относительного угла закручивания  $[\theta]$  рад/м:



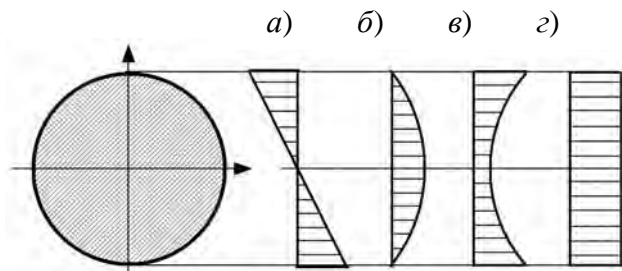
а)  $\frac{M}{GI_p} \leq [\theta]$ ;    б)  $\frac{2M}{GI_p} \leq [\theta]$ ;    в)  $\frac{6M}{GI_p} \leq [\theta]$ ;    г)  $\frac{3M}{GI_p} \leq [\theta]$

4  $[\varphi]$  – допустимый угол закручивания. Из расчета на жесткость максимальное допустимое значение момента  $[M_{кр}]$  равно:



а)  $M \leq GI_p \cdot [\varphi]$ ;    б)  $M \leq \frac{GI_p \cdot [\varphi]}{\ell}$ ;    в)  $M \leq \frac{3GI_p \cdot [\varphi]}{\ell}$ ;    г)  $M \leq \frac{GI_p \cdot [\varphi]}{2\ell}$

5 Как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении:



## 10 Расчет валов круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

### Пример 1

На вал круглого сплошного сечения диаметром  $d = 68$  мм насажены шестерня средним диаметром  $D_1 = 0,23$  м и шкив ременной передачи диаметром  $D_2 = 0,39$  м и весом  $G = 600$  Н (рисунок 10.1, а). Вал делает 660 об/мин и передает мощность 40 кВт. Расчетное сопротивление материала вала  $R = 80$  МПа.

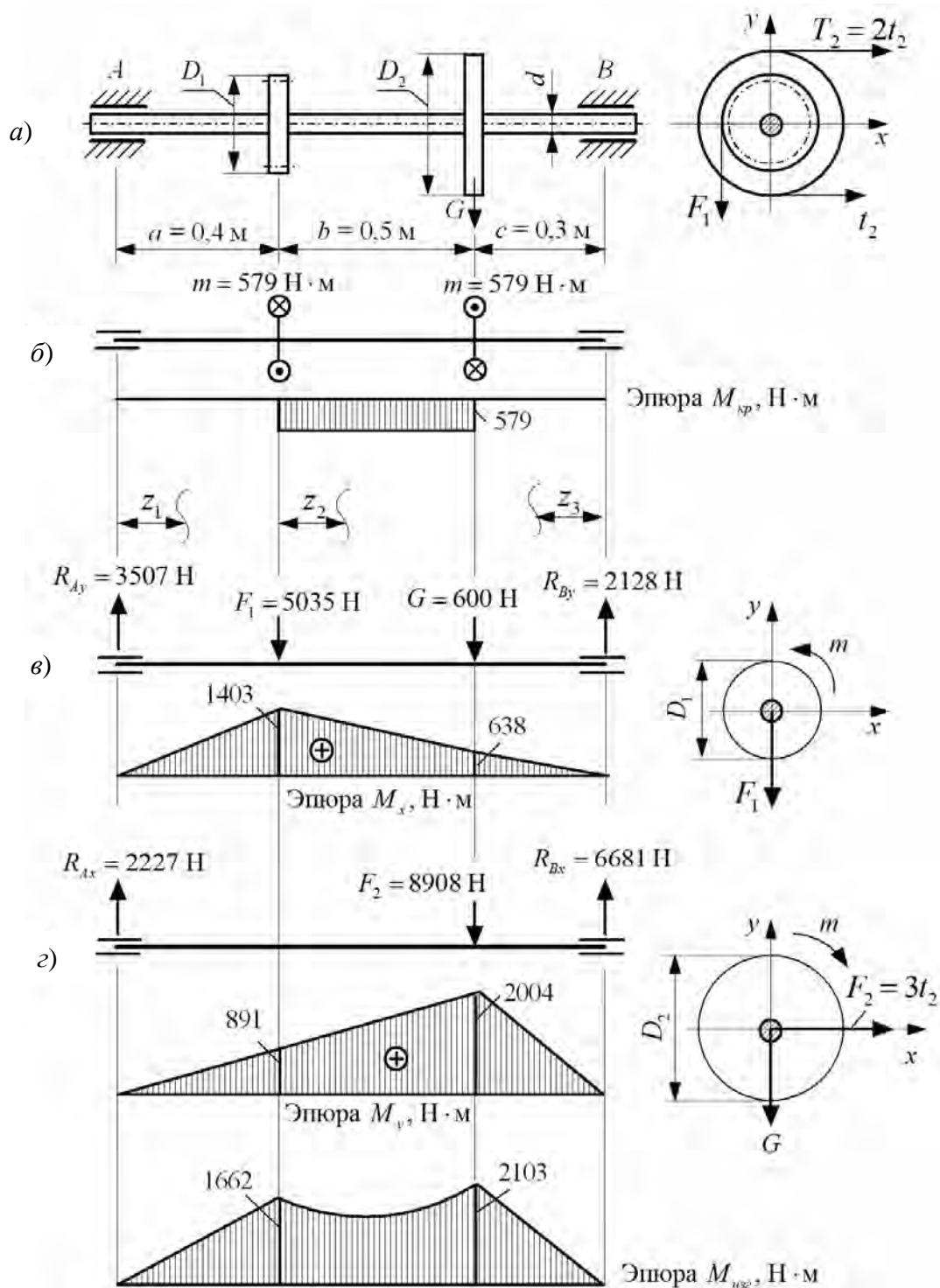


Рисунок 10.1

Проверить прочность вала в опасном сечении по четвертой теории прочности.

*Решение*

Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив,

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов и эпюра  $M_{кр}$  показаны на рисунке 10.1, б.

Окружное усилие  $F_1$ , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Изгибающая сила  $F_2$  от ременной передачи на шкиве, действующая на вал в горизонтальной плоскости,

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия изгибающих сил в вертикальной плоскости показана на рисунке 10.1, в. Опорные реакции  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов  $M_x$ .

Схема действия изгибающих сил в горизонтальной плоскости показана на рисунке 10.1, г. Опорные реакции  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$  определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов  $M_y$ .

Значения суммарных изгибающих моментов  $M_{изг}$  в характерных сечениях вала определим по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_A = 0; M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м}; M_B = 0.$$

По эпюре полных изгибающих моментов  $M_{изг}$  и эпюре крутящих моментов  $M_{кр}$  определим опасное сечение вала, в котором действуют наибольший изгибающий момент  $M_{изг} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и крутящий момент  $M_{кр} = 579 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно четвертой теории прочности,



$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Осевой момент сопротивления вала

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^3}{32} = 30,85 \text{ см}^3.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{W_x} = \frac{2162}{30,85 \cdot 10^{-6}} = 70,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,1 \text{ МПа} < R = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

### ***Тестовые вопросы и задачи для самопроверки***

<p>1 Какая теория прочности применяется для расчета стальных валов на совместное действие изгиба и кручения:</p> <p>а) <math>\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq R</math>;      в) <math>\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R</math>;  б) <math>\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \kappa \cdot \sigma_3 \leq R</math>;      г) <math>\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq R</math></p>
<p>2 Как определить эквивалентный момент по третьей теории прочности:</p> <p>а) <math>M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}</math>;      в) <math>M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2}</math>;  б) <math>M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}</math>;      г) <math>M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{изг}}^2}</math></p>
<p>3 Как определить суммарный изгибающий момент:</p> <p>а) <math>M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}</math>;      в) <math>M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x \cdot M_y}</math>;  б) <math>M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}</math>;      г) <math>M_{\text{изг}} = M_x + M_y</math></p>

## **11 Устойчивость продольно сжатых стержней**

### ***Пример 1***

Проверить устойчивость стального стержня (рисунок 11.1), определить его критическую силу  $F_{\text{кр}}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

Исходные данные:  $R = 200 \text{ МПа}$ ;  $\gamma_c = 0,9$ ; коэффициент приведения длины  $\mu = 0,7$ ; коэффициенты  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$ .



*Решение*

Площадь сечения  $A = 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$ .

Минимальный осевой момент инерции

$$I_y = I_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 162 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{162}{54}} = 1,73 \text{ см}.$$

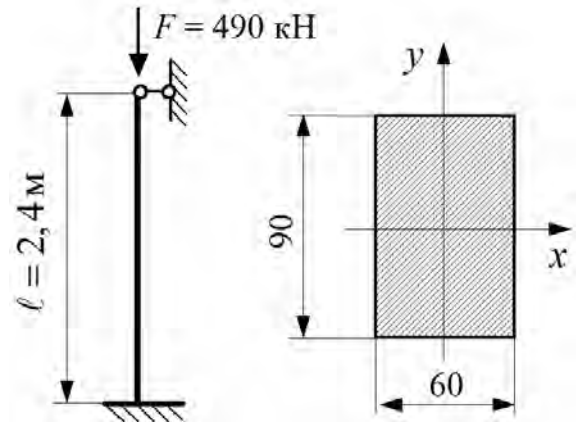


Рисунок 11.1

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 97,1.$$

Определим коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при  $\lambda = 90$   $\varphi = 0,665$ ; при  $\lambda = 100$   $\varphi = 0,599$ .

$$\varphi = 0,665 - \frac{0,665 - 0,599}{100 - 90} \cdot (97,1 - 90) = 0,618.$$

Проверим устойчивость стержня по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c.$$

$$\sigma = \frac{490 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^{-4}} = 90,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,74 \text{ МПа} < \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 0,618 \cdot 200 \cdot 0,9 = 111,24 \text{ МПа}.$$

Критическую силу определим по формуле Ясинского, т. к. гибкость стержня меньше предельной гибкости для стали ( $97,1 < 100$ ):

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 97,1) \cdot 54 \cdot 10^{-4} = 1076 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1076}{490} = 2,2.$$

**Пример 2**

Определить допустимое значение сжимающей силы  $[F]$  стального стержня (рисунок 11.2), его критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

Исходные данные: коэффициент приведения длины  $\mu = 0,5$ ; расчетное сопротивление  $R = 200$  МПа;  $\gamma_c = 0,8$ ; модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Решение**

Площадь и минимальный радиус инерции двутавра № 10

$$A = 12 \text{ см}^2; i_y = i_{\min} = 1,22 \text{ см.}$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 163,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при  $\lambda = 160$   $\varphi = 0,29$ ; при  $\lambda = 170$   $\varphi = 0,259$ .

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,259}{170 - 160} \cdot (163,9 - 160) = 0,278.$$

Из условия устойчивости найдем допустимое значение сжимающей силы:

$$[F] = A \cdot \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0,278 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,8 = 53,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 53,4 \text{ кН.}$$

Критическую силу определим по формуле Эйлера, т. к. гибкость стержня больше предельной гибкости для стали ( $163,95 > 100$ ):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{163,9^2} \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 88,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 88,1 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{88,1}{53,4} = 1,65.$$

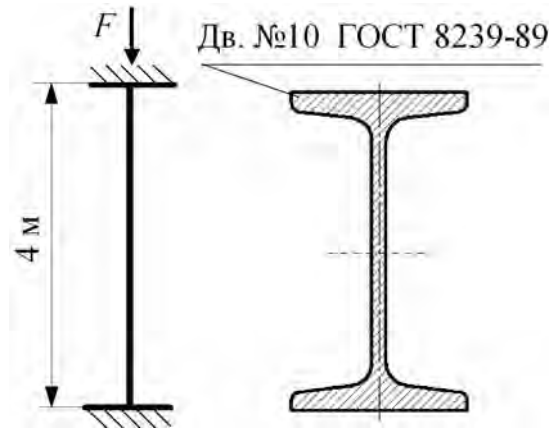


Рисунок 11.2



### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие устойчивости:	
а) $\sigma = A/F \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c$ ;	в) $\sigma = F/A \leq R \cdot \gamma_c$ ;
б) $\sigma = \varphi \cdot F/A \leq R \cdot \gamma_c$ ;	г) $\sigma = F/A \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c$
2 Формула Ясинского для стального стержня справедлива при:	
а) $0 < \lambda \leq 40$ ;	в) $40 < \lambda \leq 100$ ;
б) $100 < \lambda \leq 140$ ;	г) $\lambda \geq 100$
3 Формула Эйлера для стального стержня справедлива при:	
а) $0 < \lambda \leq 40$ ;	в) $40 < \lambda \leq 100$ ;
б) $80 < \lambda \leq 100$ ;	г) $\lambda \geq 100$
4 Коэффициент приведения длины $\mu$ зависит от:	
а) гибкости стержня;	в) величины критической силы;
б) условий закрепления стержня;	г) формы поперечного сечения

### Список литературы

1 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва : Юрайт, 2016. – 413 с.

2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва : ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.

3 Сопротивление материалов. Практикум : учеб.-метод. пособие / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2015. – 316 с. : ил.

4 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов : учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва : МГИУ, 2007. – 240 с.

5 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Дельта, 2008. – 816 с.

6 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

7 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

8 Сопротивление материалов. Сопротивление материалов и теория упругости : методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» / Сост. А. А. Катькало, И. А. Леонович. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2015 г. – 48 с.

