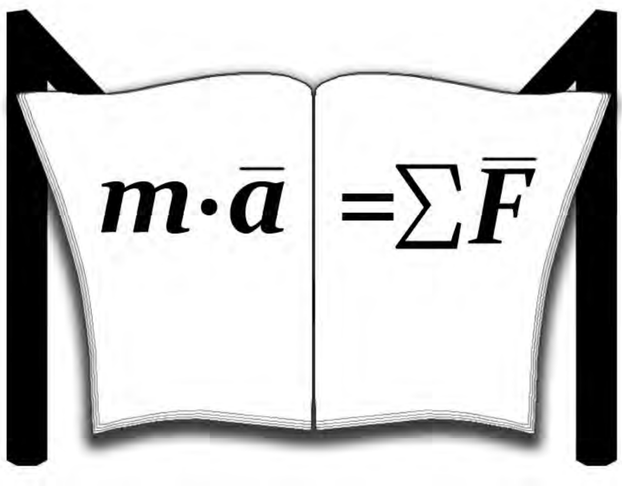
ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» дневной формы обучения



Могилев 2018

УДК 531
ББК 22.21
Т 33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «29» ноября 2017 г., протокол № 3

Составители: канд. техн. наук, доц. Л. Г. Доконов;
канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов;
канд. техн. наук, доц. Ю. В. Машин

Рецензент канд. техн. наук А. П. Прудников

Методические рекомендации предназначены к практическим занятиям для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» дневной формы обучения. Содержится материал для аудиторной и самостоятельной подготовки студентов.

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ответственный за выпуск П. Н. Громыко

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84 /16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Указания по подготовке к практическим занятиям

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин», «Гидравлика», «Строительная механика и металлические конструкции» и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты специальности 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» дневной формы обучения изучают теоретическую механику в 3-м семестре.

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;
– выполнение и защита индивидуальных заданий;
– выполнение контрольных работ.
– учет активности на практических занятиях.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;
– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. В установленные преподавателем сроки индивидуальные задания защищают во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

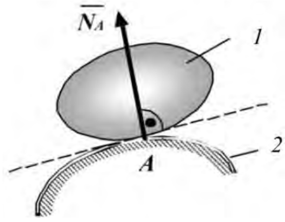
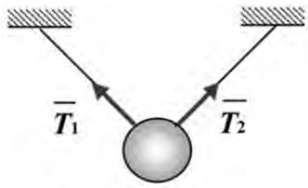
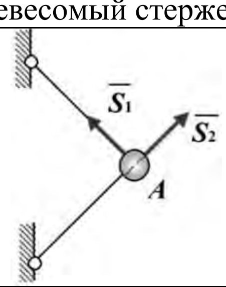
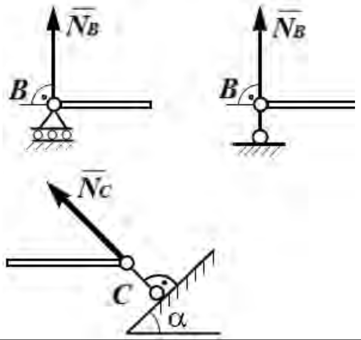
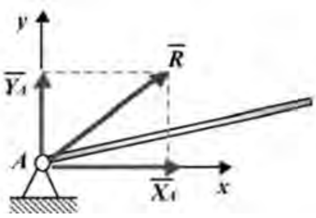
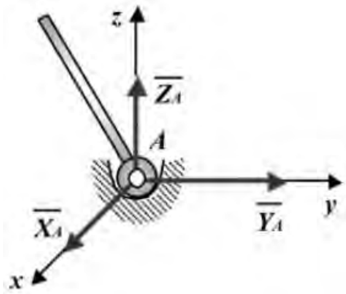
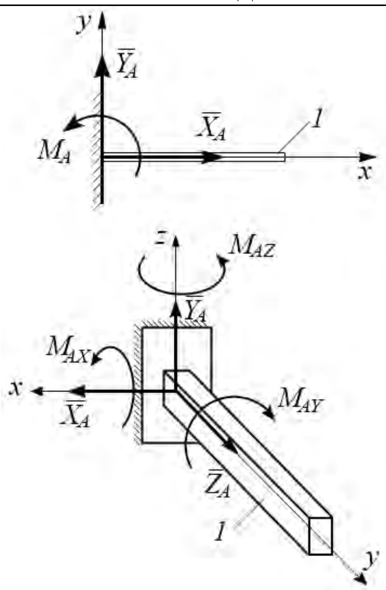
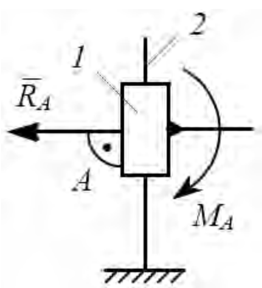
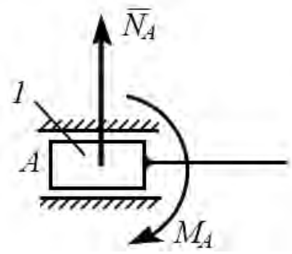
Студенты, не защитившие индивидуальные задания, не допускаются к зачету по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

2 Статика

2.1 Основные типы связей и их реакции

Основные типы связей и их реакции представлены в таблице 1.

Таблица 1

Гладкая поверхность	Нить	Невесомый стержень
		
Шарнирно-подвижная опора	Цилиндрический шарнир	Сферический (шаровый) шарнир
		
Жесткая заделка	Ползун *1* на стержне *2*	Ползун *1* в направляющих
		

Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется сосредоточенной (рисунок 1, *а*).

Система распределенных сил характеризуется интенсивностью q, Н/м, т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

Распределенную нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределенная нагрузка) или треугольника заменяют одной сосредоточенной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рисунок 1, *б*). Величина сосредоточенной равнодействующей силы численно равна площади фигуры, образованной распределенной нагрузкой. Для нагрузки, распределенной в виде прямоугольника, $Q = q \cdot l$, а в виде треугольника – $Q = \frac{1}{2} q \cdot l$.

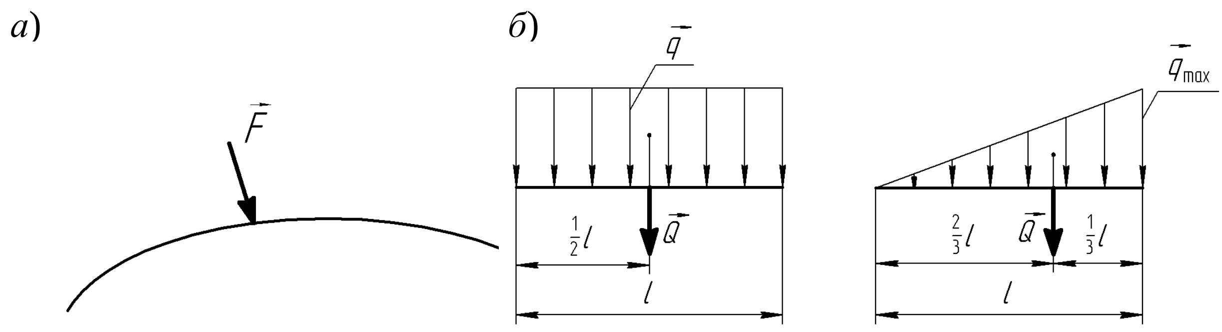


Рисунок 1

Задача 1. Шар *1* весом 16 Н и шар *2* связаны нитью, перекинутой через блок *D*, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30^\circ$ (рисунок 2).

Решение

Расставим все силы и реакции на расчетной схеме. Применим принцип освобождаемости от связей. Так как шар *1* удерживается в равновесии шаром *2*, то усилие в тросе между двумя шарами будет равно весу шара *2*. Шар *1* свободно опирается на наклонную поверхность. В точке касания возникает реакция связи *N*, направленная перпендикулярно опоре. Направим оси координат.

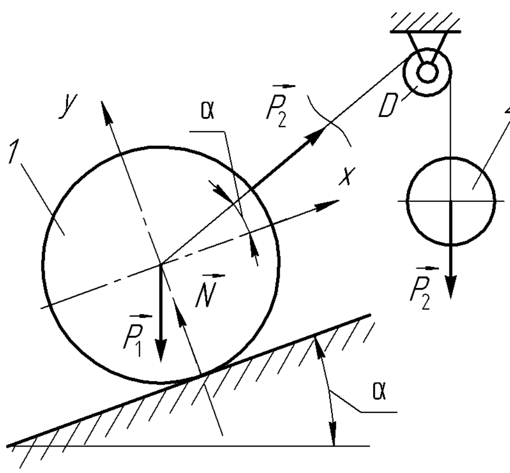


Рисунок 2

Для шара *1* составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на координатную ось *Ox*.

$$\sum \vec{F}_{iX} = 0: -P_1 \cdot \sin\alpha + P_2 \cdot \cos\alpha = 0.$$

$$P_2 = \frac{P_1 \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = P_1 \cdot \text{tg}\alpha = 16\text{tg}30° = 9{,}24 \text{ Н}.$$

Ответ: $P_2 = 9{,}24$ Н.

Решить задачи 1.1.5, 1.1.31, 1.2.7, 1.2.10, 1.2.23, 1.4.3, 1.4.9 из [5].

2.2 Приведение системы сил к простейшему виду. Равновесие тела под действием систем сил. Равновесие системы тел

Основная теорема статики о приведении произвольной системы сил к заданному центру: любая плоская система сил эквивалентна одной силе, равной главному вектору системы $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, приложенному в некоторой точке (центре приведения), и паре сил, момент которой равен главному моменту сил системы относительно центра приведения $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду.

1 $\vec{R} = 0$, а $\vec{M}_O \neq 0$ – система приводится к одной паре сил с моментом, равным главному моменту системы, причем значение главного момента системы сил не зависит от выбора центра приведения.

2 $\vec{R} \neq 0$, а $\vec{M}_O = 0$ – система сил приводится к равнодействующей, равной главному вектору системы, линия действия которой проходит через центр *O* приведения.

3 $\vec{R} \neq 0$, и $\vec{M}_O \neq 0$ – система сил сводится к одной равнодействующей $\vec{R}$, равной главному вектору системы, линия действия которой смещена от предыдущего центра приведения на расстояние $d = \frac{M_O}{R}$.

4 Если главный вектор $\vec{R} = 0$ и главный момент $\vec{M}_O = 0$, то система сил будет уравновешенной.

Задача 2. Привести систему сил, действующую на куб, к простейшему виду, если a = 2 м, F_1 = 8 Н, F_2 = 16 Н, F_3 = 8 Н, F_4 = $8\sqrt{2}$ Н (рисунок 3).

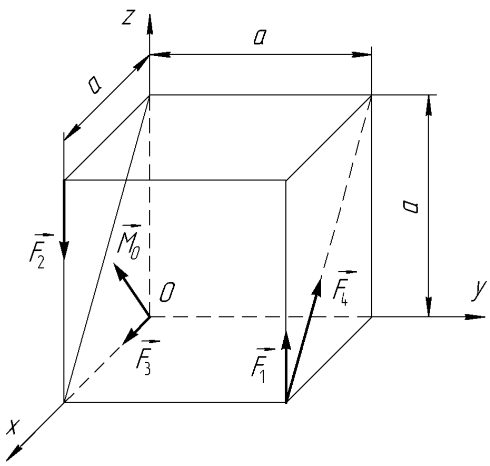


Рисунок 3

Решение

Определим модуль и направление главного вектора:

$$R_X = \sum_{i=1}^{n} F_{iX} = F_3 - F_4 \cdot \cos 45° = 8 - 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$R_Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0;$$

$$R_Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} = F_1 - F_2 + F_4 \cdot \cos 45° = 8 - 16 + 8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = 0.$$

Определим модуль и направление главного момента:

$$M_X = F_1 \cdot a + F_4 \cdot a \cdot \sin 45° = 8 \cdot 2 + 8\sqrt{2} \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 32 \text{ Н·м};$$

$$M_Y = F_2 \cdot a - F_2 \cdot a + F_4 \cdot a \cdot \cos 45° = 16 \cdot 2 - 8 \cdot 2 - 8\sqrt{2} \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ Н·м};$$

$$M_Z = F_4 \cdot a \cdot \cos 45° = 8\sqrt{2} \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ Н·м};$$

$$M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{35^2 + 16^2} = 16\sqrt{5} \text{ Н·м};$$

$$\cos(x,\hat{\ }\vec{M}_O) = \frac{M_X}{M_O} = \frac{32}{16\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos(z,\hat{\ }\vec{M}_O) = \frac{M_Z}{M_O} = \frac{16}{16\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, система сил приводится к главному моменту, лежащему в плоскости Oxz. Направление главного момента определяется найденными косинусами.

2.2.1 Равновесие тела под действием систем сил.

Для произвольной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия.

Первая форма уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Уравнение моментов составляют относительно произвольной точки. Лучше всего брать точку, которую пересекает наибольшее количество линий действия неизвестных сил.

Вторая форма уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0.$$

При использовании второй формы уравнений равновесия необходимо, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB.

Третья форма уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = 0.$$

При использовании третьей формы уравнений равновесия необходимо, чтобы точки A, B, C не лежали на одной прямой.

Задача 3. Определить реакции опор, если F = 10 кН, q = 2 кН/м, M = 3 кН·м (рисунок 4).

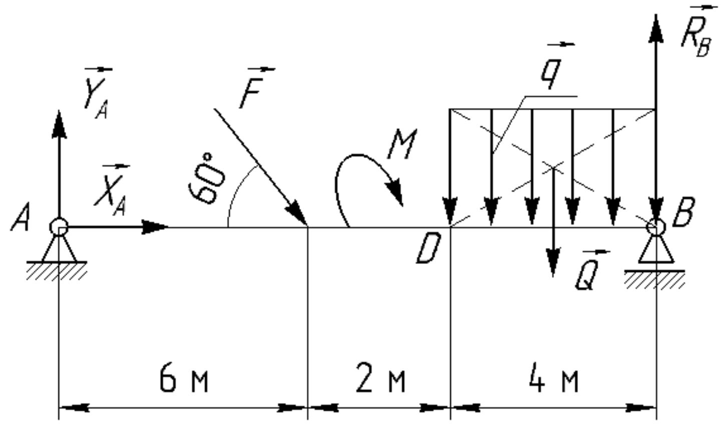


Рисунок 4

Решение

Рассмотрим равновесие балки AB под действием силы F, момента M, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = 4q = 8$ кН, которая приложена в середине участка BD:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + F \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A - F \cdot \sin 60° - Q + R_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -6 \cdot F \cdot \sin 60° - M - 10 \cdot Q + 12 \cdot R_B = 0.$$

Из первого уравнения находим $X_A = -F \cdot \cos 60° = -10 \cdot 0{,}5 = -5$ кН, из третьего

$$R_B = \frac{6F \cdot \sin 60° + M + 10Q}{12} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 10 \cdot 8}{12} = 11{,}25 \text{ кН},$$

из второго

$$Y_A = F \cdot \sin 60° + Q - R_B = 10\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11{,}25 = 5{,}41 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -5$ кН, $Y_A = 5{,}41$ кН, $R_B = 11{,}25$ кН. Знак «минус» показывает, что направление X_A противоположно направлению, показанному на рисунке 4.

2.2.2 Равновесие системы тел.

Инженерные конструкции часто представляют собой системы тел, соединенные друг с другом какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются внутренними в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с другими телами, в нее не входящими. Соответственно, силы взаимодействия между телами системы являются внутренними, а силы, действующие на рассматриваемую систему тел со стороны других тел, – внешними.

Если система тел находится в равновесии, то рассматриваем равновесие каждого тела в отдельности, учитывая внутренние силы взаимодействия между телами. Если задана плоская произвольная система n тел, то для этой системы можно составить $3n$ уравнений равновесия. Задача будет статически определимой, если число неизвестных не будет превышать числа уравнений равновесия. При решении задач на равновесие системы тел можно также рассматривать равновесие системы как для тел в целом, так и для любых сочетаний тел.

В случае рассмотрения равновесия системы в целом внутренние силы взаимодействия между телами не учитываются на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия.

Задача 4. Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки, если $M = 8$ кН/м, $q = 2$ кН/м, $P = 6$ кН (рисунок 5).

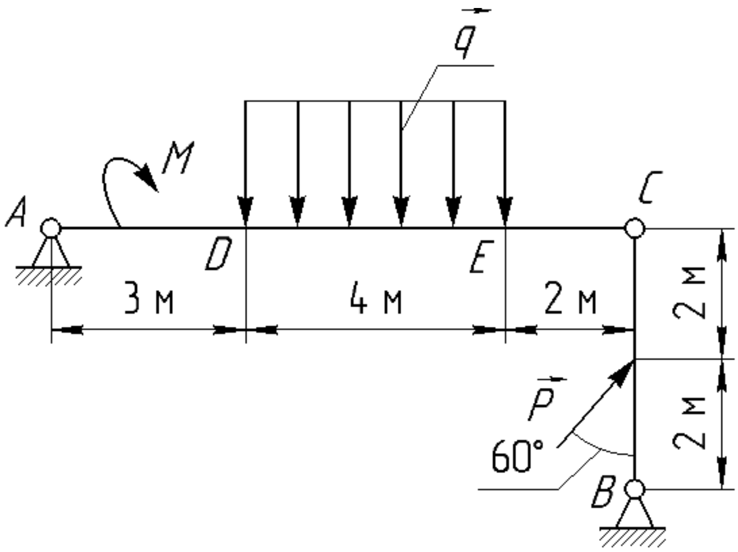


Рисунок 5

Решение

Расчленим составную балку по шарниру C и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q и реакций $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, шарнирно-неподвижной опоры A и реакций $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ шарнира C (рисунок 6).

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 4q = 8$ кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рисунке 6.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + X_C = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A + Y_C - Q = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -M - Q \cdot 5 + Y_C \cdot 9 = 0. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\vec{P}$, реакции $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ шарнирно-неподвижной опоры B и реакции $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ шарнира C (рисунок 7).

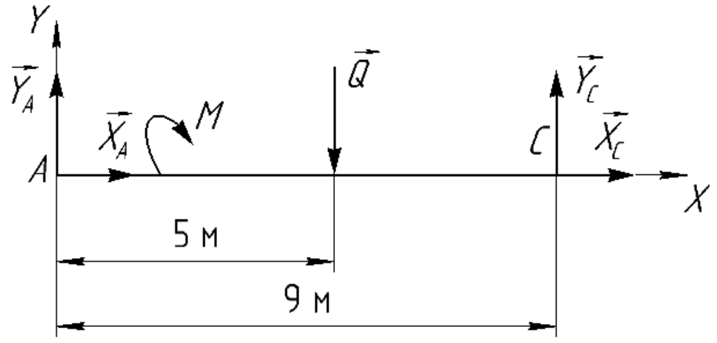


Рисунок 6

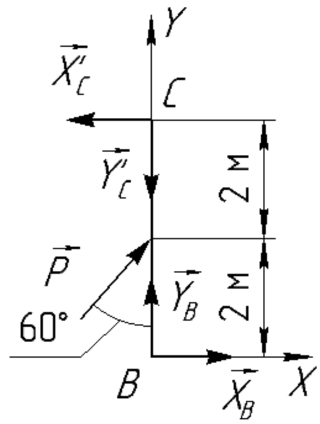


Рисунок 7

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X'_C\,, \quad Y_C = Y'_C\,, \text{ причем } \vec{X}_C = -\vec{X}'_C\,, \quad \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C\,.$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_B - X'_C + P \cdot \cos 30° = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = -Y'_C + P \cdot \sin 30° + Y_B = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = P \cdot 2\cos 30° + X_B \cdot 4 = 0. \tag{6}$$

Находим из уравнения (6)

$$X_B = \frac{-P \cdot 2\cos 30°}{4} = \frac{-6 \cdot 2\cos 30°}{4} = -2{,}6 \text{ кН},$$

из (4)

$$X'_C = X_B + P \cdot \cos 30° = -2{,}6 + 6\cos 30° = 2{,}6 \text{ кН},$$

из (3)

$$Y_C = \frac{M + Q \cdot 5}{9} = \frac{8 + 8 \cdot 5}{9} = 5{,}33 \text{ кН},$$

из (5)

$$Y_B = -P \cdot \sin 30° + Y'_C = -6\sin 30° + 5{,}33 = 2{,}33 \text{ кН},$$

из (2)

$$Y_A = -Y_C + Q = -5{,}33 + 8 = 2{,}67 \text{ кН},$$

из (1)

$$X_A = -X_C = -2{,}6\,\text{кН}.$$

Ответ: X_A = – 2,6 кН, Y_A = 2,67 кН, $X_в$ = – 2,6 кН, $Y_в$ = 2,33 кН, X_c = 2,6 кН, Y_c = 5,33 кН.

Знак «минус» показывает, что реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{X}_A$ направлены противоположно направлению, показанному на рисунке 7.

Решить задачи 2.4.5, 2.4.6, 3.3.4, 3.3.7, 5.4.4, 5.4.5 из [5].

2.3 Контрольная работа. Решение смешанных задач по статике

3 Кинематика

3.1 Кинематика точки

Материальной точкой считают твердое тело, размерами которого в данном случае можно пренебречь. Движение точки считают заданным, если известен способ, позволяющий установить ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, а если кривая – криволинейным.

Существуют три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения заключается в определении положения точки в пространстве радиус-вектором, который является векторной функцией времени, относительно выбранной системы отсчета.

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки в виде известных, непрерывных, дважды дифференцируемых функций времени.

Естественный способ задания движения считается известным, если заданы траектория движения точки, начало отсчета, положительное и отрицательное направления движения, закон движения точки по траектории $S = S(t)$.

Закон движения $S = S(t)$ также называют дуговой координатой, которую отсчитывают от начального положения. Дуговую координату не следует смешивать с длиной пути пройденного точкой, т. к. за начало отсчета может быть выбрана любая точка или движение может быть колебательным.

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей принимают естественные (оси естественного трехгранника): $\vec{\tau}$ – касательная, $\vec{n}$ – нормаль, $\vec{b}$ – бинормаль. Данные оси связывают непосредственно с движущейся точкой.

Переход от координатного к естественному способу задания движения.

Если движение точки задано координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то для перехода к естественному необходимо:

– установить траекторию, если возможно, т. е. получить уравнение траектории в явном виде:

$$y = f_1(x),\ z = f_2(x);$$

– определить закон движения точки по этой траектории $S = S(t)$ по формуле

$$\int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\,dt;$$

– установить начало отсчета, подставив в уравнение движения начальное время. Если это время не задано, то подставляют $t_0 = 0$;

– определить положительное направление движения, которое можно узнать или по вектору скорости, или подставляя значения времени в уравнения движения, чтобы получить новую точку на траектории.

Задача 1. Определить ускорение точки через 2 с после начала движения из состояния покоя, если движение задано уравнениями $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.

Решение

Находим проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$V_X = \dot{x} = 6t;\quad V_X = 12\ \text{м/с};\quad V_Y = \dot{y} = 8t;\quad V_Y = 16\ \text{м/с};$$

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\ \text{м/с};$$

$$a_X = \ddot{x} = 6\ \text{м/с}^2;\quad a_Y = \ddot{y} = 8\ \text{м/с}^2;$$

$$a_\tau = \frac{|V_X \cdot a_X + V_Y \cdot a_Y|}{V} = \frac{12 \cdot 6 + 16 \cdot 8}{20} = 10\ \text{м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{|V_X \cdot a_Y - V_Y \cdot a_X|}{V} = \frac{|12 \cdot 8 - 16 \cdot 6|}{20} = 0\ \text{м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a_\tau = 10$ м/с^2, $a_n = 0$ м/с^2, $a = 10$ м/с^2.

Решить задачи 7.3.6, 7.4.9, 7.4.20, 7.5.8, 7.5.10, 7.6.9, 7.7.17, 7.8.8 из [5].

3.2 Поступательное движение твердого тела. Плоскопараллельное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Точки твердого тела, совершающего поступательное движение, перемещаются как по прямолинейным, так и по криволинейным траекториям.

Поступательное движение твердого тела характеризуется заданием движения одной его точки, обычно центра тяжести, и может быть задано любым из изученных способов. Для задания поступательного движения тела в декартовой системе координат достаточно записать $x_c = f_1(t)$, $y_c = f_2(t)$, $z_c = f_3(t)$. Эти выражения будут законом поступательного движения.

Основные свойства поступательного движения твердого тела определяются теоремой: при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Скорость и ускорение твердого тела находят по формулам, применяемым в кинематике точки.

Задача 2. Точка A шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ движется по закону $S = 0{,}5\pi t^2$ (рисунок 8). Определить скорость и ускорение точки C стержня AB, если $AC = BC$, $O_1B = OA = 0{,}4$ м, $t = 2$ с.

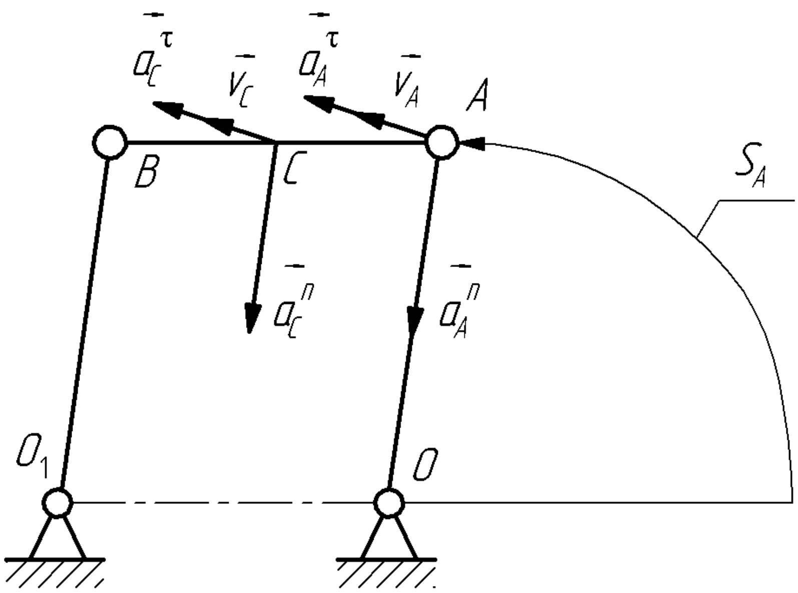


Рисунок 8

Решение

Стержень AB совершает поступательное движение, т. к. в любой момент времени прямая AB остается параллельной самой себе.

Следовательно, скорости и ускорения точек *A*, *B*, *C* будут одинаковы:

$$V_C = V_A = \dot{S} = \pi t;$$

$$a_A^\tau = \dot{V}_A = \pi = 3{,}14;$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{AO} = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6;$$

$$a_C = a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65.$$

Ответ: $V_C = 2\pi$ м/с; $a_C = 98{,}65$ м/с^2.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через данные неподвижные точки, называется осью вращения. Точки тела, не принадлежащие оси вращения, двигаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени. Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Полученный знак при дифференцировании угла поворота по времени определяет направление вращения. Если $\omega > 0$, то вращение происходит против хода часовой стрелки, если $\omega < 0$, то вращение – по ходу часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту и направление изменения угловой скорости в данный момент времени. Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Полученный знак производной определяет направление углового ускорения. Если $\varepsilon > 0$, то угловое ускорение направлено против хода часовой стрелки, если $\varepsilon < 0$, то угловое ускорение – по ходу часовой стрелки.

Задача 3. Груз *1* опускается по закону $x = 2{,}4t^2 - 4t$. Определить угловую скорость, угловое ускорение барабана, а также скорость и ускорение точки *M* в момент времени t = 1 с, если $R = 3r = 0{,}6$ м (рисунок 9).

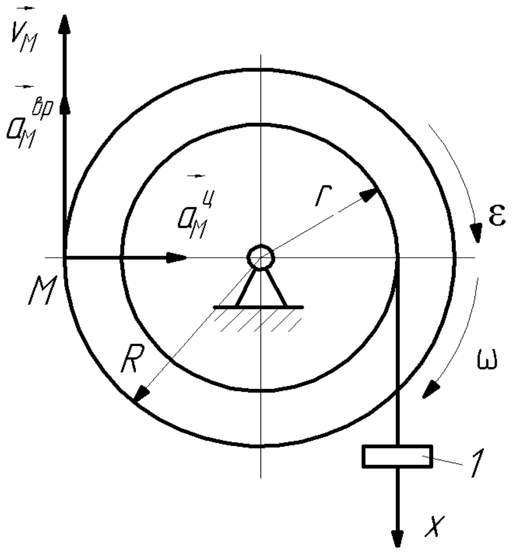


Рисунок 9

Решение

Определяем скорость груза:

$$V = \dot{x} = 4{,}8t - 4.$$

Находим угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{4{,}8t - 4}{0{,}2} = 24t - 20;$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 24 \text{ рад/с}^2, \ \omega = 24t - 20 = 4 \text{ рад/с}.$$

Скорость точки *M*

$$V_M = \omega \cdot R = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Вращательное ускорение точки *M*

$$a_M^{BP} = \varepsilon \cdot R = 24 \cdot 0{,}6 = 14{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки *M*

$$a_M^{Ц} = \omega^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0{,}6 = 9{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки *M*:

$$a = \sqrt{a_{BP}^2 + a_{Ц}^2} = \sqrt{14{,}4^2 + 9{,}6^2} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega = 4$ рад/с, $\varepsilon = 24$ рад/с^2, V_M = 2,4 м/с, a = 17,31 м/с^2.

Решить задачи: 8.2.2, 8.2.8, 8.3.3, 8.3.13, 8.3.15, 8.3.16 из [5].

Плоским или плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Уравнения плоского движения твердого тела.

Для задания движения сечения твердого тела достаточно описать движение какого-либо отрезка *CA*, принадлежащего этому сечению. Положение отрезка *CA* определяется координатами точки *C*, выбранной за полюс, и углом поворота отрезка, который отсчитывается от выбранного начального положения (рисунок 10). Тогда уравнениями плоского движения твердого тела будут следующие:

$$X_C = f_1(t); \quad Y_C = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

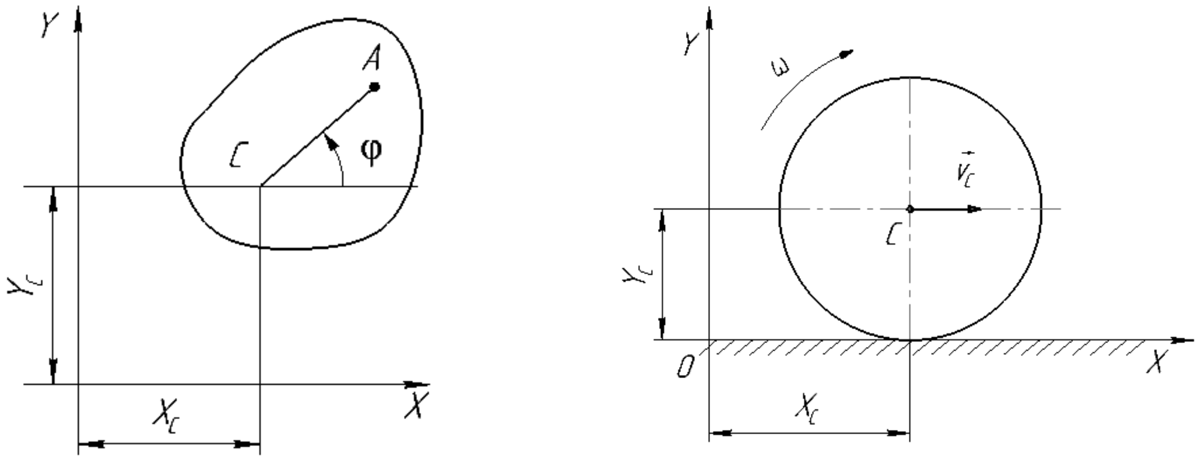


Рисунок 10

Первые два уравнения описывают поступательное движение плоской фигуры, определяемое движением полюса *C*. Поступательное движение плоской фигуры зависит от выбора полюса. Третье уравнение описывает вращательное движение плоской фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющие эти точки, равны между собой. При этом проекции должны иметь одинаковый знак.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей в точках их приложения.

Если известны МЦС и угловая скорость вращения, то вектор скорости любой точки будет перпендикулярен отрезку, соединяющему МЦС с данной точкой, и направлен в соответствии с угловой скоростью. Модуль скорости равен произведению угловой скорости на расстояние от точки до МЦС.

Задача 4. В положении механизма, схема которого приведена на рисунке 11, определить угловую скорость шатуна AB и скорость точки B, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, OA = 0,2 м, AB = 1,6 м, BC = 0,8 м, h = 0,8 м.

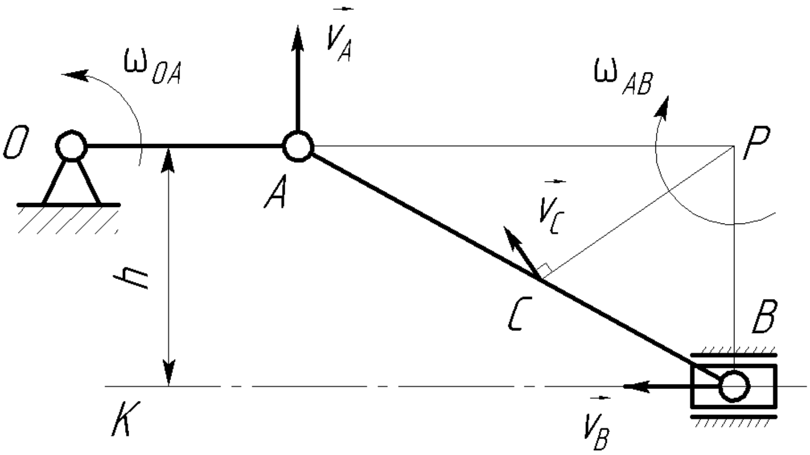


Рисунок 11

Решение

Найдем скорость точки A:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}; \qquad \vec{V}_A \perp OA.$$

Скорость ползуна B должна быть направлена по прямой KB.

Мгновенный центр шатуна AB находится в точке P пересечения перпендикуляров, восстановленных к направлениям векторов скоростей точек A и B.

Угловая скорость шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

Определим величины AP, BP и CP с учетом того, что $BP = h = 0,8$ м:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = 1,39 \text{ м.}$$

$$\cos\angle PBC = \frac{h}{AB} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5 \rightarrow \angle PBC = 60°.$$

Треугольник ΔPBC равносторонний, следовательно,

$$CP = BP = BC = 0,8 \text{ м.}$$

Находим угловую скорость:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0,4}{1,39} = 0,29 \text{ рад/с.}$$

Определяем скорости точек B и C:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с}.$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определяется по направлению вращения вектора $\vec{V}_A$ скорости точки A относительно мгновенного центра скоростей P. Угловая скорость шатуна AB направлена по часовой стрелке. Скорости точек B и C должны показывать такое же направление. Для построения вектора $\vec{V}_C$ восстанавливаем перпендикуляр к отрезку CP и направляем вектор $\vec{V}_C$ в соответствии с направлением ω_{AB}.

Ответ: $\omega_{AB} = 0,29$ рад/с, $V_B = V_C = 0,23$ м/с.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг данного полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC} \quad \text{или} \quad \vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}^{BP} + \vec{a}_{MC}^{Ц}.$$

***Задача* 5.** Используя условие задачи 4, определить ускорение точки B.

Решение

За полюс выберем точку A, т. к. ускорение этой точки можно найти:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{BP} + \vec{a}_A^{Ц}.$$

Так как кривошип OA вращается равномерно, $\omega = \text{const} \to \varepsilon = \dot{\omega} = 0$, получим

$$a_A^{Ц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}_A^{BP} = \varepsilon \cdot AO = 0.$$

Вектор $\vec{a}_A^{Ц}$ направлен по AO от точки A к точке O (рисунок 12).

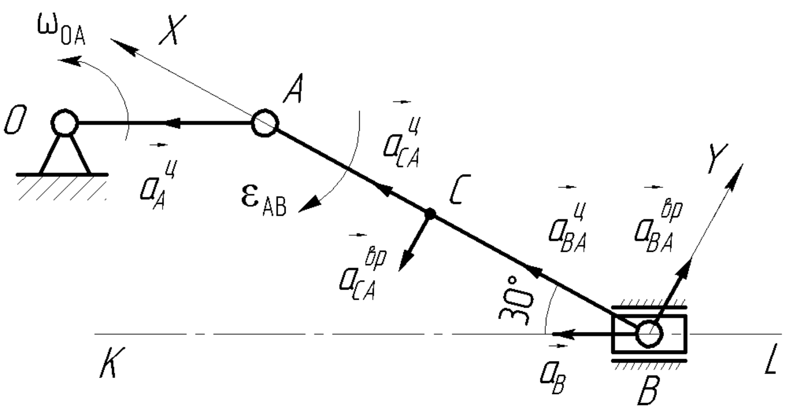


Рисунок 12

Определяем ускорение точки *B*:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{BP} + \vec{a}_A^{Ц} + \vec{a}_{BA}^{BP} + \vec{a}_{BA}^{Ц}.$$

Находим $\vec{a}_{BA}^{BP}$ и $\vec{a}_{BA}^{Ц}$:

$$\vec{a}_A^{BP} = |\varepsilon_{AB}| \cdot AB.$$

Так как ε_{AB} неизвестно, то зададим направление вектора $\vec{a}_{BA}^{BP}$, учитывая, что $\vec{a}_{BA}^{BP} \perp BA$.

$$\vec{a}_{BA}^{Ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}29^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}135 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^{Ц}$ направлен по *BA* от точки *B* к полюсу *A*. Проецируем выражение для определения ускорения точки *B* на выбранные оси (*X*, *Y*):

$$\text{ось } X\text{: } a_B \cdot \cos 30° = a_A^{Ц} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{Ц};$$

$$\text{ось } Y\text{: } -a_B \cdot \cos 60° = a_{BA}^{BP} - a_A^{Ц} \cdot \cos 60°.$$

Из предпоследнего равенства находим

$$a_B = \frac{a_A^{Ц} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{Ц}}{\cos 30°} = \frac{0{,}8\cos 30° + 0{,}135}{\cos 30°} = 0{,}96 \text{ м/с}^2,$$

из последнего

$$a_{BA}^{BP} = a_A^{Ц} \cdot \cos 60^{\circ} - a_B \cdot \cos 60° = 0{,}8\cos 60° - 0{,}96\cos 60° = -0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что вектор $\vec{a}_{BA}^{BP}$ направлен в противоположную сторону, выбранную на рисунке 12.

Определим угловое ускорение шатуна *AB*:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^{BP}|}{AB} = \frac{0{,}08}{1{,}6} = 0{,}05 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{AB} будет по часовой стрелке.

Ответ: a_B = 0,96 м/с^2.

Решить задачи 8.1.4, 8.1.5, 8.2.2, 8.2.8, 9.2.2, 9.2.4 из [5].

4 Динамика

4.1 Первая задача динамики точки

Закон инерции (первый закон Ньютона): если действующая на материальную точку система сил уравновешена, то точка находится в покое либо в состоянии прямолинейного и равномерного движения.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется инерциальной системой отсчета. Инерциальную систему отсчета можно считать неподвижной.

Система отсчета, не обладающая вышеуказанными свойствами, называется неинерциальной системой отсчета. В последней точка, на которую не действуют силы, движется с ускорением, и ее скорость может меняться как по величине, так и по направлению.

Основной закон динамики (второй закон Ньютона): сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление силы.

Запись этого закона в векторной форме имеет вид:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} ,$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точку;

$\vec{a}$ – ускорение точки;

m – масса точки.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона): две материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине и направленными в противоположные стороны вдоль одной прямой.

Закон независимости действия сил (закон суперпозиции сил): при действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно сумме ускорений, которые имела бы точка при действии на нее каждой силы в отдельности.

То есть если

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

то

$$m \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1; \; m \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2,$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, действующие на материальную точку массой m;

$\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – ускорения точки, вызванные силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ соответственно.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 .$$

4.1.1 Первая задача динамики точки.

Зная массу точки и закон ее движения, определить действующие на данную точку силы.

Так, если движение точки задано в прямоугольной системе координат, то суть задачи состоит в следующем: известны m, $x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$, необходимо определить F_X, F_Y, F_Z.

Первая задача динамики точки решается методом дифференцирования ее уравнений движения.

Задача 1. Материальная точка массой m = 1,4 кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке (рисунок 13).

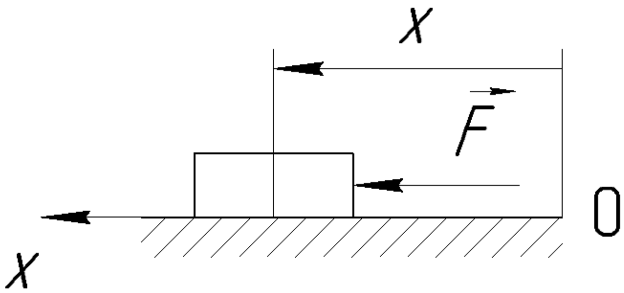


Рисунок 13

Решение

Запишем основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$.

Спроецируем это уравнение на ось X:

$$ma_X = \sum F_{kx}.$$

Определим значение проекции ускорения на ось X, для чего 2 раза продифференцируем по времени закон движения. Получим

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 12t + 6 \text{ м/с}; \qquad a_X = \frac{dVx}{dt} = 12 \text{ м/с}^2;$$

$$F = 1,4 \cdot 12 = 16,8 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 16,8$ Н.

4.1.2 Вторая задача динамики точки.

Зная массу точки и действующие на нее силы, определить закон движения данной точки.

Так, если движение точки задано в прямоугольной системе координат, то суть задачи состоит в следующем: известны m, F_X, F_Y, F_Z, необходимо определить $x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$.

Вторая задача динамики точки решается интегрированием уравнений, определяющих закон изменения силы. При этом следует иметь в виду, что сила, действующая на материальную точку, может быть постоянной или зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости и др.

Задача 2. На материальную точку массой m = 200 кг, которая находится на горизонтальной поверхности, действует вертикальная подъемная сила $F = 10t^2$ (рисунок 14). Определить время *t*, при котором начнется движение точки.

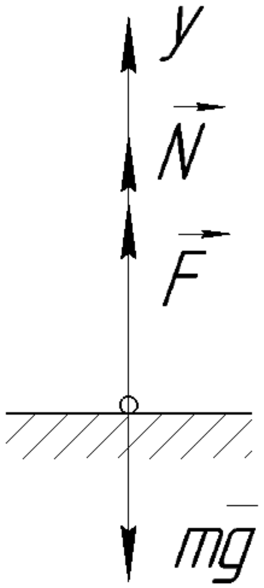


Рисунок 14

Решение

Запишем основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$.

Для условия данной задачи имеем $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}$.

Спроецируем это уравнение на ось *Y*:

$$ma_Y = F - mg + N.$$

С учетом того, что в момент отрыва $N = 0$ и $a_Y = 0$, получим

$$0 = F - mg \;\Rightarrow\; F = mg.$$

С учетом исходных данных имеем

$$10t^2 = 200 \cdot 9{,}81 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{200 \cdot 9{,}81}{10}} = 14 \text{ с}.$$

Ответ: $F = 14$ с.

4.1.3 Свободные колебания точки.

Общим признаком всех колебательных движений является их многократная повторяемость через определенные промежутки времени. Колебательное движение материальной точки происходит при условии наличия восстанавливающей силы.

Восстанавливающая сила – сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия.

Проекция восстанавливающей силы на ось *OX* может быть найдена из выражения

$$F_x = -c \cdot x,$$

где *c* – коэффициент пропорциональности.

Кроме восстанавливающей силы, при колебаниях на точку может действовать возмущающая сила, т. е. такая сила, которая зависит от времени. Обычно в качестве возмущающей силы рассматривают силу, проекция которой на ось *OX* определяется следующим выражением:

$$Q_x = H \cdot \sin(p \cdot t + \delta),$$

где *H*, *p* и δ – некоторые постоянные величины.

При колебаниях возникает сила сопротивления. Обычно эту силу рассматривают как функцию скорости движения точки и называют силой вязкого трения. При этом ее проекция на ось OX определяется из выражения

$$R_x = -b \cdot \dot{x},$$

где b – коэффициент пропорциональности.

В зависимости от наличия восстанавливающей силы, возмущающей силы и силы сопротивления колебания материальной точки классифицируются следующим образом.

1 Свободные колебания, при которых присутствует только восстанавливающая сила. Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0,$$

где k – циклическая (круговая) частота колебаний (число колебаний за 2π секунд).

При колебании груза на пружине циклическая частота может быть определена как

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

где c – жесткость пружины;

m – масса груза.

В случае свободных колебаний их период определится согласно выражению

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

2 Свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие колебания) – это колебания при наличии восстанавливающей силы и силы сопротивления.

3 Вынужденные колебания возникают, когда в колебательном процессе участвуют восстанавливающая и возмущающая силы.

Задача 3. Определить угловую частоту свободных вертикальных колебаний груза массой $m = 2$ кг, если коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2 = c_3 = 300$ Н/м (рисунок 15).

Решение

Угловая частота свободных вертикальных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}},$$

где $c_{экв}$ – эквивалентная жесткость системы пружин.

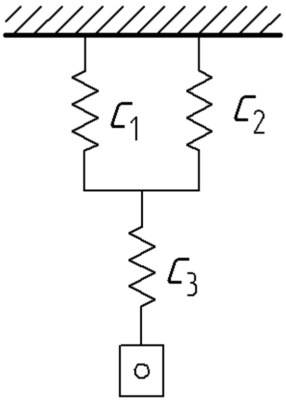


Рисунок 15

Так как система состоит из пружин, соединенных и последовательно, и параллельно, то определим вначале эквивалентную жесткость параллельно соединенных пружин c_{12}:

$$c_{12} = c_1 + c_2 = 300 + 300 = 600 \text{ Н/м}.$$

Далее определим эквивалентную жесткость последовательного соединения пружин:

$$\frac{1}{c_{экв}} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_3} = \frac{c_3 + c_{12}}{c_{12} \cdot c_3} \Rightarrow$$

$$c_{экв} = \frac{c_{12} \cdot c_3}{c_3 + c_{12}} = \frac{600 \cdot 300}{300 + 600} = \frac{180000}{900} = 200 \text{ Н/м}.$$

Тогда

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $k = 10$ с$^{-1}$.

Решить задачи 13.1.16, 13.1.24, 13.2.25, 13.3.3, 13.4.6, 13.4.14 из [5].

4.2 Общие теоремы динамики материальной точки механической системы

4.2.1 Теорема о движении центра масс.

Механическая система – любая совокупность взаимосвязанных между собой материальных точек. Действующие на механическую систему силы подразделяются на внешние $\vec{F}^{E}$ и внутренние $\vec{F}^{J}$, активные $\vec{F}$ и реакции связей $\vec{R}$.

Внешние силы – силы, действующие на точки (тела) механической системы со стороны точек (тел), не входящих в данную механическую систему. Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками (телами) самой механической системы.

В силу третьего закона Ньютона главный вектор и главный момент внутренних сил относительно произвольной точки *O* равны нулю, т. е.

$$\vec{R}_{Г}^{J} = 0; \quad \vec{M}_{ГО}^{J} = 0.$$

Несмотря на это, движение системы происходит под действием внешних и внутренних сил.

Центром масс или центром инерции механической системы называется геометрическая точка, положение которой определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M};$$

в свою очередь координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M}, \qquad y_c = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M}, \qquad z_c = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M},$$

где m_i – масса i-й материальной точки системы;

$\vec{r}_i$ – радиус-вектор этой точки;

x_i, y_i и z_i – координаты точки;

M – масса всей системы, $M = \sum m_i$.

Теорема о движении центра масс: центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

$$M \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_Г^{\mathrm{E}}.$$

Из теоремы о движении центра масс механической системы следует, что движение всей механической системы можно рассматривать как движение одной точки – центра масс.

Используя вышеописанные уравнения, можно определять движение центра масс системы, не определяя движения отдельных ее точек.

Задача 4. Тело *1* массой m_1 = 0,7 кг может двигаться по горизонтальной направляющей (рисунок 16). Определить ускорение тела *1* в момент времени t = 0,25 с, если относительно него под действием внутренних сил системы движется тело *2* массой m_2 = 0,1 кг согласно уравнению $S = \sin 4t$.

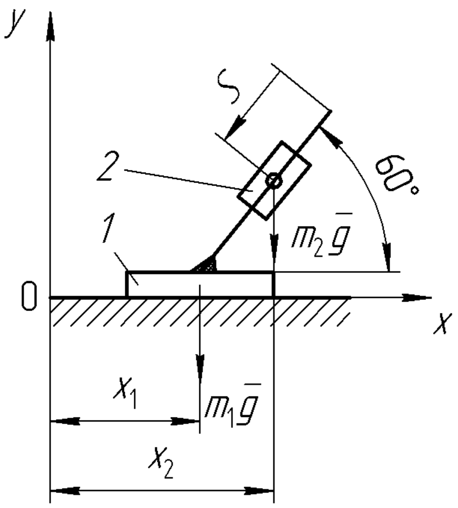


Рисунок 16

Решение

Выберем начало системы отсчета. Расстояние от оси *Y* до центра масс тела *1* обозначим X_1, а до тела *2* – X_2. При перемещении тела *2* в нижнее положение вся система должна сместиться вправо на расстояние Δ согласно теореме о сохранении центра масс. Координата центра масс первого тела будет равна $X_1+\Delta$, а второго – $X_2 - S\cdot\cos 60^{\circ} + \Delta$.

Запишем уравнения для определения центра масс всей системы в первом и втором положениях:

$$X_{C1} = \frac{m_1\cdot X_1 + m_2\cdot X_2}{m_1+m_2}; \qquad X_{C2} = \frac{m_1(X_1+\Delta)+m_2(X_2 - S\cdot\cos 60^{\circ}+\Delta)}{m_1+m_2}.$$

Так как $\sum F_{ix}^E = 0$, следовательно, $X_{C1} = X_{C2}$.

Тогда

$$\frac{m_1\cdot X_1 + m_2\cdot X_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(X_1+\Delta)+m_2(X_2 - S\cdot\cos 60^{\circ}+\Delta)}{m_1+m_2}.$$

Решим полученное уравнение:

$$m_1\cdot X_1 + m_2\cdot X_2 = m_1(X_1+\Delta)+m_2(X_2 - S\cdot\cos 60^{\circ}+\Delta);$$

$$m_1\cdot X_1 + m_2\cdot X_2 = m_1\cdot X_1 + m_1\cdot\Delta + m_2\cdot X_2 - m_2\cdot S\cdot\cos 60^{\circ} + m_2\cdot\Delta;$$

$$0 = m_1\cdot\Delta - m_2\cdot S\cdot\cos 60^{\circ} + m_2\cdot\Delta;$$

$$\Delta = \frac{m_2\cdot S\cdot\cos 60^{\circ}}{m_1+m_2} = \frac{0,1\cdot\sin 4t\cdot\cos 60^{\circ}}{0,7+0,1} = 0,0625\cdot\sin 4t \text{ м}.$$

Для определения ускорения тела *1* необходимо дважды продифференцировать по времени полученную зависимость:

$$V = \frac{d\Delta}{dt} = 0,0625\cdot\cos 4t\cdot 4;$$

$$a = \frac{dV}{dt} = -0,0625\cdot 4\cdot\sin 4t\cdot 4 = -\sin 4\cdot 0,25 = -0,841 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = -0,841$ м/с^2.

4.2.2 Теорема об изменении количества движения.

Количество движения материальной точки – это вектор, имеющий направление вектора скорости и равный произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{q} = m\cdot\vec{v}.$$

Производная по времени от количества движения материальной точки равна равнодействующей сил, действующих на точку:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \sum \vec{F} \ .$$

Данное утверждение – это теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме. Выражение теоремы об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме имеет вид:

$$\vec{q} - \vec{q}_0 = \vec{S} \ .$$

Изменение количества движения материальной точки $\vec{q} - \vec{q}_0$ за некоторый промежуток времени $t - t_0$ равно импульсу $\vec{S}$ равнодействующей сил, действующих на точку за тот же промежуток времени:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt \ .$$

Если сила $\vec{F} = \text{const}$, то импульс силы

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot (t - t_0) \ .$$

Количество движения механической системы – вектор, равный сумме векторов количеств движения всех точек, входящих в систему:

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_i \ .$$

Данное равенство можно представить в виде

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C \ .$$

Таким образом, количество движения механической системы есть вектор, равный произведению массы системы на скорость центра масс данной механической системы.

Производная от вектора количества движения механической системы по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_{Г}^{E} \ .$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: изменение количества движения механической системы равно импульсу главного вектора внешних сил, действующих на систему:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_o = \vec{S}_{Г}^{E} \ ,$$

где $\vec{S}_{Г}^{E}$ – импульс главного вектора внешних сил, равный векторной сумме импульсов составляющих сил,

$$\vec{S}_{Г}^{E} = \sum \vec{S}_{i}^{E} .$$

Задача 5. По горизонтальному участку пути движутся два вагона, массы которых $m_1 = 6 \cdot 10^4$ кг, $m_2 = 2 \cdot 10^4$ кг и скорости $V_1 = 1$ м/с, $V_2 = 3$ м/с (рисунок 17). Второй вагон догоняет первый и сцепляется с ним. Пренебрегая сопротивлением движению, определить скорость вагонов после сцепления.

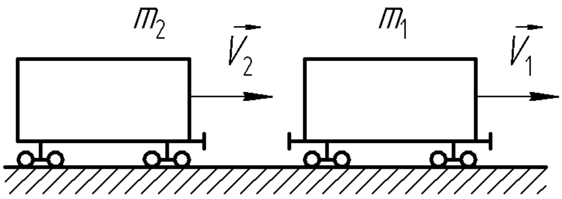


Рисунок 17

Решение

Согласно теореме об изменении количества движения импульс внешних сил

$$S^E = Q_2 - Q_1 ,$$

где $Q_1 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$;
$Q_2 = (m_2 + m_1) \cdot V$.

Так как к системе никаких внешних сил не было приложено, то $S^E = 0$, и $Q_2 = Q_1$, следовательно,

$$(m_2 + m_1) \cdot V - (m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2) = 0 .$$

$$V = \frac{(m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2)}{(m_2 + m_1)} = \frac{(6 \cdot 10^4 \cdot 1 + 2 \cdot 10^4 \cdot 3)}{(6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)} = 1{,}5 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V = 1{,}5$ м/с.

4.2.3 Теорема об изменении кинетического момента.

При поступательном движении мерой инерции твердого тела является масса. При вращательном движении инертность тела определяется распределением его массы относительно оси вращения, т. е. моментом инерции.

Момент инерции тела относительно полюса – скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до полюса:

$$I_0 = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) .$$

Момент инерции относительно оси – скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до оси:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) .$$

Радиус инерции определяет то расстояние от оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы она имела такой же момент инерции, как и рассматриваемое тело.

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}.$$

Для определения моментов инерции относительно параллельных осей используется теорема Гюйгенса-Штейнера, согласно которой момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между ними.

$$I_z = I_{zc} + m \cdot d^2.$$

Для однородных простейших симметричных тел формулы для определения моментов инерции имеются в соответствующей справочной литературе. Так, например, для однородного тела, имеющего форму диска, момент инерции относительно оси диска определяется как $I_z = \dfrac{m \cdot R^2}{2}$.

Моментом количества движения материальной точки относительно центра O называется вектор

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} = \vec{r} \times \vec{q},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки относительно точки O.

При движении точки в плоскости относительно некоторого центра O ее кинетический момент относительно данного центра может быть определен как алгебраическая величина следующим образом (поступательное движение):

$$l_O = m \cdot v \cdot h,$$

где h – кратчайшее расстояние между точкой O и вектором скорости $\vec{v}$.

Главный момент количеств движения материальных точек механической системы относительно некоторого центра O является кинетическим моментом системы относительно данного центра O и определяется как

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_i.$$

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на его угловую скорость:

$$L_z = I_z \cdot \omega.$$

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра O равна сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0 \ .$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы: производная по времени вектора кинетического момента системы относительно некоторого центра O равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}^{E}_{ГО} \, .$$

Задача 6. По стержню AB движется ползун C согласно закону $AC = 0{,}2 + 1{,}2t$ (рисунок 18). Ползун считать материальной точкой массой $m = 1$ кг. Момент инерции вала OA относительно оси Z $I_z = 2{,}5$ кг·м^2. Определить угловую скорость вала в момент времени $t_1 = 1$ с, если начальная угловая скорость $\omega_0 = 10$ рад/с.

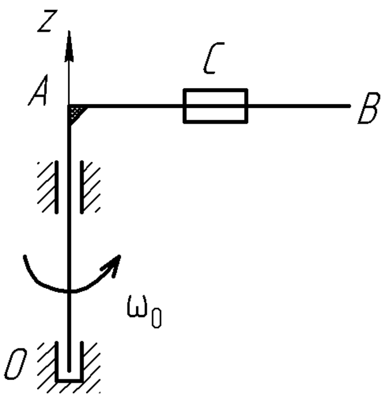


Рисунок 18

Решение

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что

$$I_0 \cdot \omega_0 = I \cdot \omega \ \Rightarrow \ \omega = \frac{I_0 \cdot \omega_0}{I} \, .$$

При $t_0 = 0$ имеем $I_0 = I_z + AC^2 \cdot m$,

а при $t_1 = 1$ с – $I = I_z + AC^2 \cdot m$.

В итоге получим

$$\omega = \frac{I_z + AC^2 \cdot \omega_0}{I_z + AC^2} = \frac{2{,}5 + \left(0{,}2 + 1{,}2 \cdot 0\right)^2 \cdot 10}{2{,}5 + \left(0{,}2 + 1{,}2 \cdot 1\right)^2} = 5{,}695 \text{ рад/с.}$$

Ответ: $\omega = 5{,}695$ рад/с.

4.2.4 Теорема об изменении кинетической энергии.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, численно равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий составляющих ее точек:

$$T = \sum T_i .$$

Кинетическая энергия твердого тела в случае его поступательного движения

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2},$$

где v_C – скорость центра масс твердого тела;

M – масса твердого тела.

В случае вращательного движения твердого тела с угловой скоростью ω относительно неподвижной оси z

$$T = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении равна сумме энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения вокруг центра масс:

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i .$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы имеет следующий вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I ,$$

где A_i^E – работа равнодействующей внешних сил, действующих на i-ю материальную точку;

A_i^I – работа равнодействующей внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку.

Если механическая система является неизменяемой, т. е. в которой расстояние между любыми двумя точками во все время остается постоянным, то для данной системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E .$$

Задача 7. Определить скорость груза *2* в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние S = 4 м, если массы грузов m_1 = 2 кг, m_2 = 4 кг. Система тел вначале находилась в покое (рисунок 19).

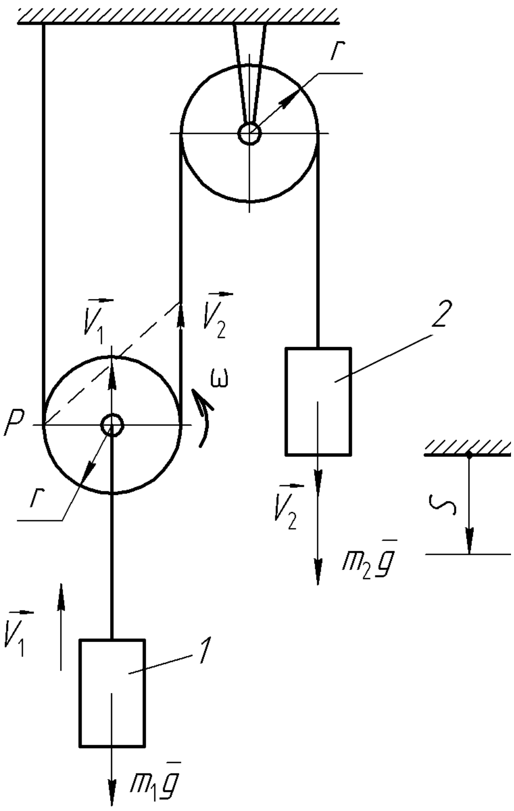


Рисунок 19

Решение

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A^E .$$

Определим кинетическую энергию механической системы:

$$T = T_1 + T_2 ; \quad T_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} ; \quad T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} .$$

Скорость первого тела выразим через скорость второго тела:

$$V_1 = \frac{V_2}{2} .$$

Тогда

$$T_1 = \frac{m_1 \dfrac{V_2^2}{4}}{2} = m_1 \frac{V_2^2}{8} ;$$

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} ;$$

$$T = m_1 \frac{V_2^2}{8} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) .$$

Определим работу внешних сил, приложенных к системе.

Работа силы тяжести первого тела будет отрицательной, т. к. направление силы тяжести не совпадает с направлением его перемещения. Работа силы тяжести второго тела будет положительной, т. к. сила совпадает с направлением перемещения S:

$$A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{S}{2}; \qquad A_2 = m_2 \cdot g \cdot S;$$

$$A = A_1 + A_2 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{S}{2} + m_2 \cdot g \cdot S = -2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 143{,}15 \text{ Дж.}$$

$$V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) = 143{,}15 \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{143{,}15}{\left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right)}} = 7{,}56 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_2 = 7{,}56$ м/с.

Решить задачи 14.1.13, 14.1.15, 14.2.25, 14.2.27, 14.5.13, 14.5.16, 15.5.5, 15.5.7 из [5].

4.3 Принцип Даламбера

Применение метода кинетостатики в теоретической механике даёт возможность решать методами статики многие задачи динамики. Особенно удобно использовать этот метод для учёта динамических нагрузок при силовых расчётах инженерных сооружений и конструкций.

Метод кинетостатики требует введение понятия даламберовой силы инерции.

Даламберова сила инерции – это вектор, имеющий размерность силы, по модулю равный произведению массы на ускорение, направленный противоположно ему, который можно включать в систему действующих на частицу сил и в процессе математических преобразований обращаться с ним, как с обычной силой.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

Принцип Даламбера для материальной точки

$$\sum \bar{F}_i + \sum \bar{R}_i + \bar{\Phi} = 0.$$

Векторная сумма активных сил, действующих на точку, реакций связей и даламберовой силы инерции равна нулю.

Принцип Даламбера для механической системы

$$\sum \bar{F}_i^E + \sum \bar{R}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0; \quad \sum M_{Oi}^E + \sum M_{Oi}^R + \sum M_{Oi}^{\Phi} = 0,$$

где $\sum \bar{F}_i^E$ – сумма внешних активных сил;

$\sum \bar{R}_i$ – сумма реакций связи со стороны тел, не входящих в систему;

$\sum \bar{\Phi}_i$ – сумма сил инерции точек;

$\sum \bar{M}_{Oi}^E$ – сумма моментов внешних активных сил относительно некоторого произвольного центра O;

$\sum \bar{M}_{Oi}^{R}$ – сумма моментов внешних реакций относительно некоторого произвольного центра O;

$\sum M_{Oi}^{\Phi}$ – сумма моментов сил инерции относительно того же центра.

Таким образом, условия динамического равновесия имеют вид:

$$\vec{R}_{\Gamma}^{E} + \vec{R}_{\Gamma}^{\Phi} = 0, \qquad \vec{M}_{\Gamma O}^{E} + \vec{M}_{\Gamma O}^{\Phi} = 0.$$

Главные вектор и главный момент внешних и даламберовых сил инерции равны нулю для любой механической системы.

Задача 8. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0,6t^2$ (рисунок 20). Определить натяжение каната, если радиус R = 0,4 м.

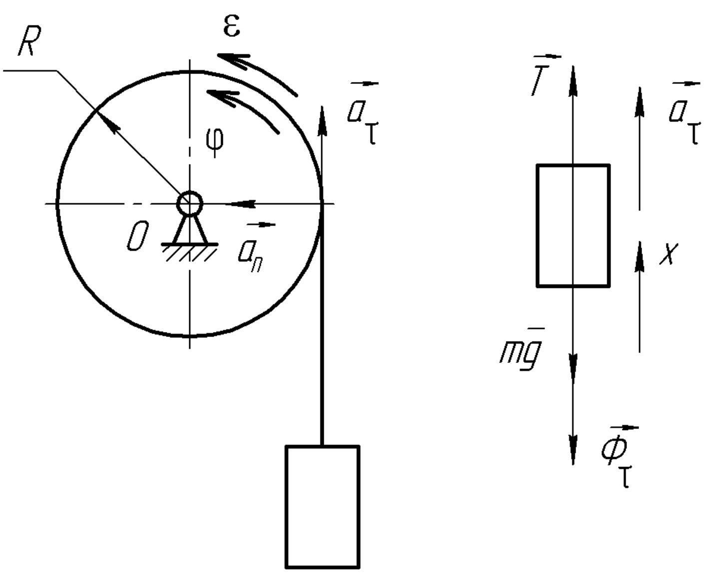


Рисунок 20

Решение

Согласно принципу Даламбера, $\vec{F} + \vec{\Phi} + \vec{R} = 0$.

Спроецируем данное уравнение на ось x:

$$-m \cdot g - \Phi_\tau + T = 0 \Rightarrow T = m \cdot g + \Phi_\tau .$$

На тело действует только касательное ускорение, поэтому сила инерции груза

$$\Phi_\tau = m \cdot a_\tau .$$

В свою очередь,

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r ,$$

где ε – угловое ускорение барабана,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 1,2 \text{ рад/с}^2.$$

Соответственно, имеем

$$a_\tau = 1,2 \cdot 0,4 = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

Тогда натяжение троса будет

$$T = m \cdot g + m \cdot a_\tau = m(g + a_\tau) = 60(9{,}81 + 0{,}48) = 617{,}4 \text{ Н}.$$

Ответ: $T = 617{,}4$ Н.

Решить задачи 17.1.17, 17.1.23, 17.3.11, 17.3.13, 17.3.25 из [5].

4.4 Контрольная работа. Решение смешанных задач по кинематике и динамике

Список литературы

1 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : учебник / А. А. Яблонский, В. А. Никифорова. – Москва : Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 427 с. : ил.

2 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. А. Никифорова. – Москва : Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 447 с. : ил.

3 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике : учебное пособие / И. В. Мещерский. – Москва : Наука, 1986. – 448 с. : ил.

4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для технических вузов / Под ред. А. А. Яблонского. – Москва : Высшая школа, 1985. – 367 с. : ил.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике : учебное пособие для втузов / О. Э. Кепе [и др.] ; под ред. О. Э. Кепе. – Москва : Высшая школа, 1989. – 368 с. : ил.

6 **Добронравов, В. В.** Курс теоретической механики : учебник / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – Москва : Высшая школа, 1983. – 430 с. : ил.

7 **Игнатищев, Р. М.** Курс теоретической механики / Р. М. Игнатищев, П. Н. Громыко, С. Н. Хатетовский. – Могилев : МГТУ, 2002. – 359 с.

8 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика / В. Л. Цывильский. – Москва : Высшая школа, 2001. – 319 с. : ил.

9 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах : учебное пособие для втузов в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва : Наука, 1990. – Т. 1–3.

10 **Чигарев, А. В**. Курс теоретической механики : учебное пособие / А. В. Чигарев. – Москва : Новое знание ; Минск : ЦУПР, 2010. – 399 с.

11 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика : учебник / В. Л. Цывильский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : КУРС ; ИНФРА-М, 2016. – 368 с.