ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Экономика и управление»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направления подготовки 27.03.05 «Инноватика» дневной формы обучения

Могилев 2018

УДК 330.4
ББК 65.631
М 54

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Экономика и управление» «23» февраля 2018 г., протокол № 6

Составители: канд. техн. наук доц. К. А. Токменинов;
ст. преподаватель О. В. Боровикова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. В. Александров

Методические рекомендации содержат методику проведения лабораторных работ, изложенных по темам в соответствии с учебной программой, для студентов направления подготовки 27.03.05 «Инноватика» дневной формы обучения, перечень рекомендуемой литературы.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Ответственный за выпуск	И. В. Ивановская
Технический редактор	С. Н. Красовская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Лабораторная работа № 1. Постановка и решение задачи простейшего анализа экономического объекта

Цель работы: постановка и решение задачи простейшего анализа экономического объекта.

Задачи работы: разработка алгоритма решения поставленной задачи для функции полезности методом Лагранжа и нахождение функции спроса.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

1.1 Общие теоретические положения

Будем считать, что потребитель располагает доходом I, который он полностью тратит на потребление благ (продуктов). Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ. Математическая модель такого поведения называется *моделью потребительского выбора*.

1.2 Постановка математической задачи

Формально задача потребительского выбора имеет следующий вид:

$$u(x_1, x_2)\ (\max) \tag{1.1}$$

при условиях:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Допустимое множество (т. е. множество наборов благ, доступных для потребителя) представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой. На этом множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Поиск этой точки можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности (вправо – вверх) до тех пор, пока эти линии еще имеют общие точки с допустимым множеством.

Набор (x_1^0, x_2^0), который является решением задачи потребительского выбора, принято называть оптимальным для потребителя или локальным рыночным равновесием потребителя.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (ибо решение (x_1^0, x_2^0) этих двух задач одно и то же)

$$u(x_1, x_2)\ (\max) \tag{1.2}$$

при условии:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I.$$

1.3 Описание метода решения

Для решения этой задачи на условный экстремум применим метод Лагранжа. Выписываем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I). \tag{1.3}$$

Находим ее первые частные производные по переменным x_1, x_2, λ, приравниваем эти частные производные к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u'_{x_1} - \lambda p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = u'_{x_2} - \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - I = 0. \tag{1.4}$$

Решение (x_1^0, x_2^0) этой системы есть «укороченная» критическая точка функции Лагранжа. Доказано, что «укороченная» критическая точка (x_1^0, x_2^0) функции Лагранжа обязательно есть решение задачи потребительского выбора.

Геометрически решение (x_1^0, x_2^0) можно итерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u(x_1, x_2)$ с бюджетной прямой (рисунок 1.2).

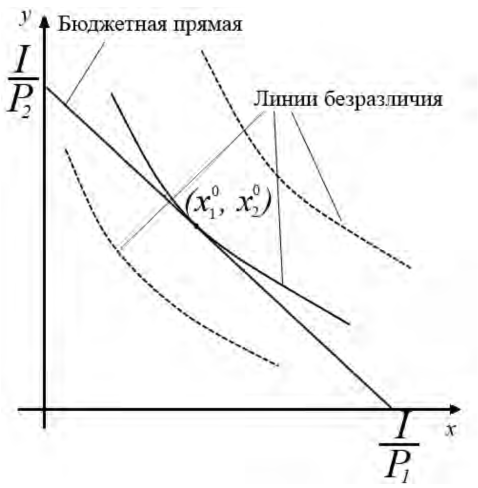

Рисунок 1.2 – Линии уровня

Координаты x_1^0 и x_2^0 решения (x_1^0, x_2^0) задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I:

$$x_1^0 = x_1^0(p_1, p_2, I);$$

$$x_2^0 = x_2^0(p_1, p_2, I).$$

Полученные функции называются функциями спроса на первый и второй продукты.

Введем функцию спроса для конкретной функции потребительского предпочтения, называемой функцией Р. Стоуна. Эта функция имеет вид

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \to \max, \qquad (1.5)$$

где a_i – минимально необходимое количество i-го блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора. Для того, чтобы набор $\{a_i\}$ мог быть полностью приобретен, необходимо, чтобы доход I был больше $\sum_i p_i a_i$ – количества денег, необходимого для покупки этого набора. Коэффициенты степени $\alpha_i > 0$ характеризуют относительную «ценность» благ для потребителя.

В таблице 1.1 представлены исходные данные по вариантам заданий.

Таблица 1.1 – Исходные данные

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	10	15	20	25	25	20	10	15	20
p_2	25	20	15	10	15	20	20	10	10
I	100	120	150	200	80	60	140	160	90

1.4 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы выполняется в следующей последовательности:

1) составить алгоритм решения поставленной задачи;

2) для функции полезности $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ методом Лагранжа найти функции спроса x_1^0 и x_2^0 как функции параметров p_1, p_2, I;

3) построить бюджетную линию и линии безразличия;

4) найти оптимальный набор благ графическим и аналитическим способами.

2 Лабораторная работа № 2. Анализ экономического объекта на основе простейшей модели

Цель работы: анализ экономического объекта на основе простейшей модели.

Задачи работы: приняв за базу многономенклатурное предприятие, определить план приобретения машин, обеспечивающий предприятию наивысшую производительность нового участка.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

Рассмотрим анализ объекта на примере: предприятие может изготавливать четыре вида продукции 1, 2, 3 и 4. Сбыт любого ее объема обеспечен. Предприятие располагает в течение квартала трудовыми ресурсами в 100 человеко-смен, полуфабрикатами массой 260 кг, станочным оборудованием в 370 станко-смен. Нормы расхода ресурсов и прибыль от единицы каждого вида продукции представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Исходные данные

Ресурс	Продукция				Объем ресурса
	1	2	3	4	
Трудовые ресурсы, человеко-смен	4	2	2	8	4 800
Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2 400
Станочное оборудование, станко-смен	1	0	2	1	1 500
Прибыль от единицы продукции, д. е.	65	70	60	120	
План выпуска	x_1	x_2	x_3	x_4	

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором достигается максимум прибыли.

Целью работы является максимизация прибыли предприятия, поэтому целевая функция выглядит следующим образом:

$$\max Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4. \tag{2.1}$$

Коэффициентом целевой функции является прибыль от единицы продукции соответствующего вида, а x_1, x_2, x_3 и x_4 – это объем выпускаемой продукции 1, 2, 3 и 4-го вида соответственно.

Переменные x_1, x_2, x_3 и x_4 являются управляемыми переменными задачи, т. к. при изменении их значений оптимизируется критерий оценки эффективности функционирования объекта исследования (целевая функция).

В распоряжении предприятия находятся трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование в количестве 4 800 человеко-смен, 2 400 кг и 1 500 станко-смен соответственно. В процессе производства можно использовать весь запас ресурса или его часть, поэтому неравенства в системе ограничений «≤» имеют вид:

1) на трудовые ресурсы: $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4\,800$;

2) на полуфабрикаты: $2x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 0x_4 \le 2\,400$;

3) на станочное оборудование: $1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 \le 1\,500$;

4) условие неотрицательности: $x_j \ge 0;\quad j = \overline{1,4}$.

Последнее ограничение обусловлено тем, что объем выпускаемой продукции не может быть отрицательной величиной.

Последовательность действий при решении задачи распределения ресурсов осуществляется в прикладном пакете Microsoft Excel.

На рисунке 2.1 представлен вид диалогового окна «Результаты поиска решений».

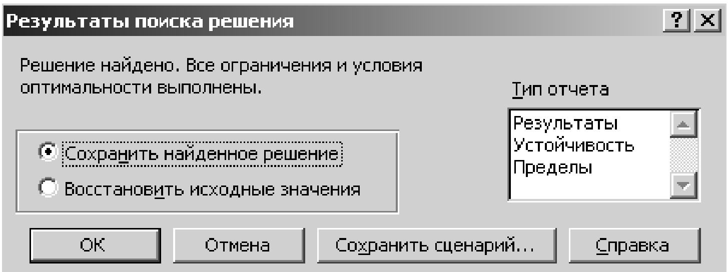

Рисунок 2.1 – Вид диалогового окна «Результаты поиска решений»

Первоначальная таблица заполняется результатами, полученными при решении. (рисунок 2.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4		Ресурсы	Продукция				Объем ресурса	Расход ресурса
5			1	2	3	4		
6		Трудовые ресурсы, человеко-смен	4	2	2	8	4 800	4800
7		Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2 400	2400
8		Станочное оборудование, станко-смен	1	0	2	1	1 500	1300
9		Прибыль от единицы продукции,	65	70	60	120		
10		План выпуска	0	0	400	500		
11								
12		Целевая функция Max Z	84000					
13								

Рисунок 2.2 – Результаты вычислений процедуры «Поиск решений»

2.1 Отчет о выполнении лабораторной работы.

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя решение следующей поставленной задачи.

На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено B_1 денежных единиц. Оборудование должно быть размещено на площади в B_2 метров квадратных. Предприятие может заказать машины типа *A* стоимостью A_{11} денежных единиц, занимающие площадь (с учетом проходов)

A_{21} метров квадратных и выпускающие C_1 ед. продукции за смену; и машины типа *Б* стоимостью A_{12} денежных единиц, занимающие площадь A_{22} метров квадратных и обеспечивающие выпуск C_2 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа *А* можно заказать не более B_3 штук. Определите план приобретения машин, обеспечивающий предприятию наивысшую производительность нового участка.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Параметры машин типа А и типа Б

Параметры	Вариант задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_1	30	20	272	36	80	49	50	48	24	72
B_2	850	660	27	672	5 200	2 128	3 875	2 604	984	1 968
B_3	4	3	8	5	7	5	9	11	10	7
A_{11}	5	5	17	6	8	7	5	4	2	8
A_{12}	3	2	52	3	5	3	3	3	4	4
A_{21}	85	55	3	32	208	112	155	124	41	82
A_{22}	111	102	3	91	505	228	543	363	322	191
C_1	9	8	6	7	10	10	8	7	4	10
C_2	7	5	9	10	13	12	13	12	14	13

3 Лабораторная работа № 3. Разработка программы анализа производственных функций

Цель работы: разработка программы анализа производственных функций.

Задачи работы: используя производственную функцию Кобба-Дугласа, определить основные параметры труда и капитала.

Лабораторная работа включает:
– теоретическую часть;
– описание алгоритма решения;
– отчет о выполнении работы.

Производственная функция Кобба-Дугласа – модель, показывающая зависимость объёма производства Y от создающих его факторов производства – труда L и капитала K. Функция имеет следующий вид:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \tag{3.1}$$

где Y – объем производства;
L – труд;
K – капитал;
A – технологический коэффициент;
α – коэффициент эластичности по капиталу;

β – коэффициент эластичности по труду.

Объем производства Y определяется двумя факторами K (количеством капитала, т. е. используемых производственных фондов) и L (количеством труда). Степенные показатели α и β показывают, на сколько процентов увеличится продукция, если увеличить на 1 % соответственно количество капитала и труда, каждый раз оставляя количество другого фактора фиксированным.

Производственная функция входит в статические модели, позволяя исследовать текущие соотношения затрат ресурсов и результатов производства. Есть динамические варианты, предназначенные для прогнозирования экономического роста.

Числовые параметры производственной функции – A, α, β – подчиняются условиям:

$$0 \le \alpha \le 1; \quad 0 \le \beta \le 1; \qquad A > 0; \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Выделяют следующие основные свойства производственной функции:

– производственная функция обращается в нуль, если отсутствует хотя бы один из ресурсов. Невозможно полностью заменить один фактор производства комбинацией других факторов. Возможно лишь частичное замещение одного фактора другими в некоторой ограниченной области;

– с увеличением любого из ресурсов объем производства возрастает;

– при увеличении любого из ресурсов предельная эффективность является убывающей функцией;

– производство должно обладать свойством масштабируемости – при одновременном увеличении всех затрат в λ раз количество произведенного продукта также должно увеличиться в λ раз.

Первое и второе ограничения означают, что объём выпускаемой продукции увеличивается при постоянном значении одного из факторов и росте другого фактора. Однако если один из факторов производства фиксирован, а другой фактор возрастает, то каждая дополнительная (предельная) единица возрастающего фактора менее полезна (с точки зрения прироста выпуска продукции), чем предыдущая единица.

Основные характеристики производственного процесса, описываемого производственной функцией:

– средние производительности капитала и труда соответственно равны:

$$A_K = Y / K = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} / K \qquad \text{и} \qquad A_L = Y / L = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} / L;$$

– предельные производительности (предельный продукт) капитала и труда равны:

$$M_K = \partial Y / \partial K = \partial (A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}) / \partial K \qquad \text{и} \qquad M_L = \partial Y / \partial L = \partial\ (A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}) / \partial L;$$

– предельные нормы замещения капитала трудом и труда капиталом равны:

$$MRST_{L,K} = M_L / M_K = \beta / \alpha \cdot K / L \quad \text{и} \quad MRST_{K,L} = M_K / M_L = \alpha / \beta \cdot L / K.$$

– коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала и труда равны:

$$E_K(Y) = K / Y \cdot \partial Y / \partial K = \alpha \quad \text{и} \quad E_L(Y) = L / Y \cdot \partial Y / \partial L = \beta.$$

3.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя решение следующих поставленных задач.

1 Необходимо построить производственную функцию Кобба-Дугласа

$$Q = \alpha L^{\beta_1} K^{\beta_2} ,$$

где Q – объем выпуска продукции, д. е.;

L и K – трудозатраты и капиталовложения соответственно, д. е.;

α, β_1, β_2 – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению по выборочным данным $q_i, l_i, k_i, (i = 1, 2, ..., n)$.

Логарифмируя функцию *КД*, приходим к задаче построения регрессионной зависимости $\ln Q = \beta_0 + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln K$ $(\beta_0 = \ln \alpha)$. Эта задача легко решается в пакете Microsoft Excel. После определения коэффициентов регрессии функцию КД можно считать построенной $(\alpha = e^{\beta_0})$.

Так как построенная модель не является линейной, то качество (адекватность) модели можно проверить с помощью средней относительной ошибки аппроксимации

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{q_i - \hat{Q}_i}{q_i} \right| \cdot 100\ \% \quad \left(\hat{Q}_i = \alpha (l_i)^{\beta_1} (k_i)^{\beta_2} \right). \qquad (3.2)$$

Если $E < 10\ \%$, то построенную функцию можно считать адекватной исходным данным и применять ее для прогнозирования.

2 Оценить объем выпуска продукции при заданных значениях объемов трудовых ресурсов и капитала.

Исходные данные по вариантам приведены в таблицах 3.1–3.5.

2 Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид

$$Y = (3 + N) K^{(0{,}1N)} \mathrm{L}^{(0{,}3N)},$$

где N – номер варианта

Необходимо найти:

1) среднюю фондоотдачу и среднюю производительность труда при K = 100 и L= 50;

2) предельные продукты;

3) предельную норму замещения капитала трудом и труда капиталом;

4) коэффициенты эластичности выпуска по затратам капитала и по затратам трудовых ресурсов.

Таблица 3.1 – Исходные данные

Вариант 1				Вариант 2			
Номер точки	*Q*	*L*	*K*	Номер точки	*Q*	*L*	*K*
1	2350,2	2034,2	1870,4	1	2866,6	2440,8	2244
2	2470,1	2125,2	2150,1	2	3013	2550	2580
3	2110,2	1931	1450,4	3	2573,8	2316	1740
4	2560,5	2165	2242,5	4	3122,8	2595,6	2688
5	2650,4	2266,2	2751,6	5	3232,6	2718	3300
6	2240,3	1979,8	1640,9	6	2732,4	2373,6	1968
7	2430,6	2084,8	2003,6	7	2964,2	2496	2400
8	2530,8	2142,6	2166,4	8	3086,2	2564,4	2592
9	2550,7	2148,8	2184,9	9	3110,6	2575,2	2616
10	2450,4	2103,8	2091,6	10	2988,6	2523,6	2508
11	2290,2	2001,2	1780,4	11	2793,4	2401,2	2136
12	2160,1	1953,3	1540,1	12	2634,8	2343,6	1848
13	2400,3	2067,3	1960,9	13	2927,6	2480,4	2352
14	2490	2130,2	2150	14	3037,4	2556	2580
15	2590,4	2170,5	2301,6	15	3159,4	2604	2760
Прогноз		2100	2000	Прогноз		2500	2100

Таблица 3.2 – Исходные данные

Вариант 3				Вариант 4			
Номер точки	*Q*	*L*	*K*	Номер точки	*Q*	*L*	*K*
1	2997	2542,5	2337,5	1	2478,3	2135,7	1963,5
2	3150,1	2656,2	2687,5	2	2604,9	2231,2	2257,5
3	2691	2412,5	1812,5	3	2225,2	2026,5	1522,5
4	3264,9	2703,7	2800	4	2699,8	2271,1	2352
5	3379,6	2831,2	3437,5	5	2794,7	2378,2	2887,5
6	2856,8	2472,5	2050	6	2362,3	2076,9	1722
7	3099,1	2600	2500	7	2562,7	2184	2100
8	3226,6	2671,2	2700	8	2668,1	2243,8	2268
9	3252,1	2682,5	2725	9	2689,2	2253,3	2289
10	3124,6	2628,7	2612,5	10	2583,8	2208,1	2194,5
11	2920,5	2501,2	2225	11	2415	2101	1869
12	2754,7	2441,2	1925	12	2277,9	2050,6	1617
13	3060,8	2583,7	2450	13	2531	2170,3	2058
14	3175,6	2662,5	2687,5	14	2626	2236,5	2257,5
15	3303,1	2712,5	2875	15	2731,4	2278,5	2415
Прогноз		2600	2100	Прогноз		2200	1900

Таблица 3.3 – Исходные данные

Вариант 5				Вариант 6			
Номер точки	*Q*	*L*	*K*	Номер точки	*Q*	*L*	*K*
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2607,2	2237,4	2057	1	2684,8	2298,4	2113,1
2	2740,4	2337,5	2365	2	2821,9	2401,2	2429,5
3	2340,9	2123	1595	3	2410,6	2180,9	1638,5
4	2840,2	2379,3	2464	4	2924,7	2444,1	2531,2
5	2940,1	2491,5	3025	5	3027,6	2559,4	3107,5
6	2485,2	2175,8	1804	6	2559,1	2235,1	1853,2
7	2696	2288	2200	7	2776,2	2350,4	2260
8	2806,9	2350,7	2376	8	2890,5	2414,8	2440,8
9	2829,1	2360,6	2398	9	2913,3	2424,9	2463,4
10	2718,2	2313,3	2299	10	2799,1	2376,3	2361,7
11	2540,7	2201,1	1958	11	2616,3	2261,1	2011,4
12	2396,4	2148,3	1694	12	2467,7	2206,8	1740,2
13	2662,7	2273,7	2156	13	2741,9	2335,7	2214,8
14	2762,5	2343	2365	14	2844,8	2406,9	2429,5
15	2873,5	2387	2530	15	2959	2452,1	2599
Прогноз		2200	2100	Прогноз		2400	2200

Таблица 3.4 – Исходные данные

Вариант 7				Вариант 8			
Номер точки	*Q*	*L*	*K*	Номер точки	*Q*	*L*	*K*
1	2788,6	2379,7	2187,9	1	2840,6	2420,4	2225,3
2	2931	2486,2	2515,5	2	2985,6	2528,7	2558,5
3	2503,8	2258,1	1696,5	3	2550,5	2296,7	1725,5
4	3037,8	2530,7	2620,8	4	3094,4	2573,9	2665,6
5	3144,6	2650	3217,5	5	3203,2	2695,3	3272,5
6	2658	2314,2	1918,8	6	2707,6	2353,8	1951,6
7	2883,5	2433,6	2340	7	2937,3	2475,2	2380
8	3002,2	2500,2	2527,2	8	3058,2	2543	2570,4
9	3025,9	2510,8	2550,6	9	3082,3	2553,7	2594,2
10	2907,2	2460,5	2445,3	10	2961,5	2502,5	2487,1
11	2717,4	2341,1	2082,6	11	2768	2381,1	2118,2
12	2563,1	2285	1801,8	12	2610,9	2324	1832,6
13	2847,9	2418,3	2293,2	13	2901	2459,7	2332,4
14	2954,7	2492,1	2515,5	14	3009,8	2534,7	2558,5
15	3073,4	2538,9	2691	15	3130,7	2582,3	2737
Прогноз		2400	2300	Прогноз		2300	2100

Таблица 3.5 – Исходные данные

Вариант 9				Вариант 10			
Номер точки	*Q*	*L*	*K*	Номер точки	*Q*	*L*	*K*
1	2918,7	2481,4	2281,4	1	3049,3	2583,1	2374,9
2	3067,8	2592,5	2623	2	3205,1	2698,7	2730,5
3	2620,6	2354,6	1769	3	2737,9	2451,1	1841,5
4	3179,5	2638,8	2732,8	4	3321,8	2747	2844,8
5	3291,3	2763,3	3355	5	3438,6	2876,5	3492,5
6	2782,1	2413,1	2000,8	6	2906,6	2512	2082,8
7	3018,1	2537,6	2440	7	3153,2	2641,6	2540
8	3142,3	2607,1	2635,2	8	3282,9	2713,9	2743,2
9	3167,1	2618,1	2659,6	9	3308,9	2725,4	2768,6
10	3042,9	2565,6	2549,8	10	3179,1	2670,8	2654,3
11	2844,2	2441,2	2171,6	11	2971,5	2541,2	2260,6
12	2682,7	2382,6	1878,8	12	2802,8	2480,3	1955,8
13	2980,8	2521,7	2391,2	13	3114,2	2625	2489,2
14	3092,6	2598,6	2623	14	3231	2705,1	2730,5
15	3216,8	2647,4	2806	15	3360,8	2755,9	2921
Прогноз		2400	2500	Прогноз		2600	2500

4 Лабораторная работа № 4. Анализ производственных функций

Цель работы: анализ производственных функций

Задачи работы: анализ возможностей производственной функции Кобба-Дугласа.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

По данным лабораторной работы № 3 провести следующий анализ в среде MS Excel:

1) построить графики производственной функции при фиксированном значении каждой из переменных;

2) найти уравнения изоквант производственной функции и построить их графики при трех значения выпуска продукции.

4.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя выводы по результатам проведенного анализа.

5 Лабораторная работа № 5. Разработка программы анализа равновесного состояния экономических систем на основе агрегированных моделей

Цель работы: разработка программы анализа равновесного состояния экономических систем на основе агрегированных моделей

Задачи работы: используя продукт Microsoft Excel, по имеющимся исходным данным разработать схему межотраслевого баланса и рассчитать плановый межотраслевой баланс.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

Модель межотраслевого баланса (МОБ) – система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса в разрезе каждой отрасли между производимым количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. Информационной базой модели МОБ выступает отчетный МОБ, который отражает на уровне народного хозяйства производство и распределение валовой продукции в отраслевом разрезе (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Схема межотраслевого баланса

Производящая отрасль	Потребляющая отрасль					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	I	…	…	II	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация Оплата труда Чистый доход	c_1 v_1 m_1	c_2 v_2 m_2	c_3 v_3 m_3	… … …	c_n v_n m_n	III	
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	IV	

Первый квадрант МОБ содержит показатели x_{ij} – величины межотраслевых потоков продукции (i и j, соответственно, номера отраслей производящих и потребляющих). Во втором квадранте представлена конечная продукция

(продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования) всех отраслей материального производства. Третий квадрант МОБ характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава, как сумму чистой продукции и амортизации. Чистая продукция понимается как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумма амортизации c_j и чистой продукции (v_j + m_j) некоторой j-й отрасли называется условно чистой продукцией этой отрасли и обозначается Z_j. Четвертый квадрант отражает конечное распределение и использование национального дохода.

Столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов, так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.1}$$

Валовая продукция отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли.

Для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равное a_{ij}. Оно не зависит от объема производства в отрасли и является стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат и равны

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; \quad j,i = \overline{1,n}. \tag{5.2}$$

Используя коэффициенты прямых затрат, систему уравнений МОБ можно записать в следующем виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.3}$$

или в матричной форме:

$$X = AX + Y. \tag{5.4}$$

Полученное уравнение называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева).

Пример – Для условной экономики, состоящей из трех отраслей, за отчетный период известны межотраслевые потоки $X_{ОТЧ}$ и вектор конечного использования $Y_{от}$.

Необходимо:

– построить схему межотраслевого баланса;

– рассчитать плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановый период известен валовой выпуск продукции $X_{пл}^{T} = \begin{pmatrix} X_1^{pl} & X_2^{pl} & X_3^{pl} \end{pmatrix}$. Привести числовую схему баланса;

– проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых затрат:

$$X_{ОТЧ} = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 55 \\ 25 & 40 & 70 \\ 45 & 60 & 65 \end{pmatrix}; \quad Y_{ОТ} = \begin{pmatrix} 190 \\ 160 \\ 180 \end{pmatrix}; \quad X_{ПЛ} = \begin{pmatrix} 290 \\ 270 \\ 300 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{pmatrix}; \quad \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,7 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Для решения задачи используем процессор Microsoft Excel. Схема межотраслевого баланса представлена в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Схема межотраслевого баланса

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежуточное потребление	Конечное использование	Валовой выпуск
	1	2	3			
1	60	30	55	145	190	335
2	25	40	70	135	160	295
3	45	60	65	170	180	350
Промежуточные затраты	130	130	190	450	530	980
Валовая добавленная стоимость	205	165	160	410		
Валовой выпуск	335	295	350	860		

Валовая добавленная стоимость равна $X_i - \sum x_{ij}$.

Для первой отрасли 335 – 130 = 205, для второй 292 – 130 = 165, для третьей 350 – 190 = 160.

Можно рассчитать плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановый период известен валовой выпуск продукции.

Коэффициенты прямых затрат равны:

$$A = \begin{pmatrix} 0,179 & 0,102 & 0,157 \\ 0,075 & 0,136 & 0,200 \\ 0,134 & 0,203 & 0,186 \end{pmatrix}.$$

Матрица полных материальных затрат равна

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 0,821 & -0,102 & -0,157 \\ -0,075 & -0,864 & -0,200 \\ -0,134 & -0,203 & 0,814 \end{pmatrix}.$$

Вектор конечного использования равен произведению матрицы B на $X_{ПЛ}$

$$\text{(Функция } МУМНОЖ\text{)} \; Y_{ПЛ} = \begin{pmatrix} 163,46 \\ 151,75 \\ 150,42 \end{pmatrix}.$$

Объемы межотраслевых поставок определяются по формуле

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_{плi}\,.$$

Матрица прямых материальных затрат планового периода равна

$$x_{ПЛ} = \begin{pmatrix} 51,94 & 27,46 & 47,14 \\ 21,64 & 36,61 & 60,00 \\ 38,96 & 54,92 & 55,71 \end{pmatrix}.$$

Схема баланса на плановый период представлена в таблице 5.3.

Экономическая система способна обеспечить положительный конечный выпуск по всем трем отраслям, если матрица A продуктивна. Для этого определим обратную матицу $C = (E - A)^{-1}$ и вычислим определитель матрицы $(E - A)$, который равен 1,94. Это доказывает продуктивность матрицы коэффициентов прямых затрат.

Таблица 5.3 – Схема межотраслевого баланса на плановый период

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежуточное потребление	Конечное использование	Валовой выпуск
	1	2	3			
1	51,94	27,46	47,14	126,54	163,46	290,00
2	21,64	36,61	60,00	118,25	151,75	270,00
3	38,96	54,92	55,71	149,58	150,42	300,00
Промежуточные затраты	112,54	118,98	162,86	394,38	465,62	860,00
Валовая добавленная стоимость	177,46	151,02	137,14	465,62		
Валовой выпуск	290,00	270,00	300,00	860,00		

Структура затрат отчетного периода сформировалась исходя из того, что на заработную плату приходится в соответствующих отраслях 0,4; 0,3; 0,32 % от валовой добавленной стоимости. Рост зарплаты отстает от роста цен, коэффициент эластичности «зарплата – цены» составляет 0,7. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде неизменна.

Зарплата в первой отрасли равна $205 \cdot 0,4 = 82$; во второй – $165 \cdot 0,3 = 49,5$ и в третьей – $160 \cdot 0,32 = 51,2$.

Другие элементы добавочной стоимости (123; 115,5; 108,8):

$$205-82=123;\quad 165-49,5=115,5;\quad 160-51,2=108,8.$$

Балансовое соотношение для прогнозирования цен

$$\sum_i x_{ij}p_j+\sum_i \gamma_{ij}p_j=x_jp_j.$$

Величина затрат во второй отрасли не влияет на формирование цен. Система балансовых уравнений первой и третьей отраслей имеет вид:

$$60p_1+25\cdot 2+45p_3+p_1(82\cdot 0,7+123)=295p_1;$$
$$55p_1+70\cdot 2+65p_3+p_3(51,2\cdot 0,7+108,8)=350p_3.$$

Система в матричном виде

$$\begin{pmatrix}-94,6 & 45\\ 40 & -140,36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-50\\ -140\end{pmatrix}.$$

Решая систему в прикладном пакете Microsoft Excel с помощью процедуры «Поиск решения», получим вектор p, равный $\begin{pmatrix}1,21\\ 1,43\end{pmatrix}$. Таким образом, при увеличении зарплаты во второй отрасли в 2 раза в первой цена увеличится на 21 %, а в третьей – на 43 %.

5.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает решение следующей поставленной задачи.

Для условной экономики, состоящей из трех отраслей, за отчетный период известны межотраслевые потоки $X_{ОТЧ}$ и вектор конечного использования $Y_{от}$.

Необходимо:

– построить схему межотраслевого баланса;

– рассчитать плановый межотраслевой баланс при условии, что в плановый период известен валовой выпуск продукции $X_{пл}^T=\begin{pmatrix}X_1^{pl} & X_2^{pl} & X_3^{pl}\end{pmatrix}$. Привести числовую схему баланса;

– проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых затрат.

Исходные данные представлены в таблице 5.4.

Таблица 5.4 – Исходные данные

Номер задачи	$X_{ОТЧ}$	$Y_{ОТ}$	$X_{ПЛ}$	β	α
1	$\begin{pmatrix} 70 & 15 & 25 \\ 15 & 60 & 5 \\ 10 & 30 & 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 \\ 220 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 5 & 15 & 30 \\ 35 & 40 & 35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 65 \\ 55 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 55 \\ 80 \\ 75 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}4 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 30 & 28 & 15 \\ 10 & 25 & 10 \\ 7 & 18 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 67 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ 50 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}32 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 40 & 30 & 20 \\ 25 & 30 & 16 \\ 10 & 15 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 33 \\ 40 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 130 \\ 50 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 50 & 40 & 25 \\ 30 & 40 & 20 \\ 40 & 60 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 56 \\ 42 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 80 & 60 & 40 \\ 26 & 50 & 32 \\ 40 & 70 & 24 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 170 \\ 220 \\ 150 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}35 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 20 & 22 & 10 \\ 6 & 20 & 8 \\ 5 & 22 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 26 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 \\ 102 \\ 80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}35 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 90 & 60 & 45 \\ 30 & 40 & 37 \\ 22 & 75 & 26 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 160 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}5 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 50 & 70 & 50 \\ 35 & 60 & 40 \\ 25 & 80 & 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 110 \\ 84 \\ 65 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 240 \\ 270 \\ 180 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}35 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 48 & 70 & 50 \\ 35 & 80 & 40 \\ 35 & 80 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 102 \\ 98 \\ 101 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 240 \\ 180 \\ 180 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$

6 Лабораторная работа № 6. Анализ равновесных состояний экономического объекта

Цель работы: анализ равновесных состояний экономического объекта.

Задачи работы: определить взаимное влияние отраслей при изменении отдельных параметров функционирования.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

По данным лабораторной работы 5 проведите анализ в среде MS Excel: определите, какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение заработной платы отрасли α_1 в 2 раза на изменение цен в других отраслях. Структуру затрат отчетного периода сформировать самостоятельно исходя из того, что на заработную плату приходится в соответствующих отраслях процентов β_1, β_2, β_3 от валовой добавленной стоимости и коэффициент эластичности зарплаты по цене равен α_2.

6.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя выводы по результатам проведенного анализа.

7 Лабораторная работа № 7. Разработка программы анализа процессов функционирования экономических систем

Цель работы: разработка программы анализа процессов функционирования экономических систем

Задачи работы: исследовать анализ процессов функционирования экономических систем на примере игры.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

Анализ процессов функционирования экономических систем рассмотрим на примере игры, в которой игрок 1 располагает двумя стратегиями, а игрок 2 – тремя. Матрица выигрышей игрока 1 имеет следующий вид:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \qquad (7.1)$$

Так как рассматривается пример антагонистической игры, матрица выигрышей игрока 2 будет равна H_1, взятой с обратным знаком, т. е. $H_2 = -H_1$ (таблица 7.1).

Таблица 7.1 – Платежная матрица

Вершина графа	B_1	B_2	B_3	$\min_j$
A_1	2	1	4	1
A_2	–1	0	6	–1
$\max_i$	2	1	6	

Число h_H называется нижней чистой ценой игры и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2

$$\max_i \min_j a_{ij} = h_H . \tag{7.2}$$

В рассматриваемом примере нижняя чистая цена игры h_H равна 1. Число h_B называется чистой верхней ценой игры и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1

$$\min_j \max_i a_{ij} = h_B . \tag{7.3}$$

Если в игре $h_H = h_B$, то игра имеет решение в чистых стратегиях. В рассматриваемом примере оптимальной стратегией игрока 1 будет стратегия A_1, а игрока 2 – стратегия B_2. При этом выигрыш игрока 1 равен 1, а проигрыш игрока 2 равен –1. Если в игре $h_H \neq h_B$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях, а решается в смешанных.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей.

Сформированные задачи являются двойственными задачами линейного программирования (ЛП).

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число K, соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина $V^* = V + K$. В результате решения находятся значения целевых функций (для обоих игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_j . Величина V^* определяется по формуле $V^* = 1/z$.

Значения вероятностей выбора стратегий определяются следующим образом: для игрока 1 $p_i = x_i \cdot V^*$ и для игрока 2 $q_i = y_i \cdot V^*$.

Для определения цены игры V из величины V^* необходимо вычесть число K.

7.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя решение следующей поставленной задачи.

Два предприятия выделяют денежные средства на строительство объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль первого предприятия в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} -(5+N) & 15 & 3 & 20 \\ -(2+N) & 8 & 1+N & 5 \\ N & 10+N & -(3+N) & 90 \\ -(4+N) & 3 & -N & -(4+N) \end{pmatrix}.$$

где N – номер варианта.

Для упрощения задачи принять, что убыток второго предприятия равен прибыли первого.

Необходимо:

– определить максиминную и минимаксную стратегии предприятия;

– произвести возможные упрощения платежной матрицы с использованием пакета Microsoft Excel.

8 Лабораторная работа № 8. Анализ процессов функционирования экономических систем

Цель работы: анализ процессов функционирования экономических систем.

Задачи работы: исследовать анализ процессов функционирования экономических систем на примере матричной игры.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

На основании данных лабораторной работы № 7 проведите следующий анализ: решить матричную игру с использованием пакета Microsoft Excel:

– используя графический метод решения;

– сведя матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования.

8.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя результаты от проведенного анализа.

9 Лабораторная работа № 9. Разработка программы анализа экономических систем на основе линейных графов

Цель работы: разработка программы анализа экономических систем на основе линейных графов

Задачи работы: анализ некоторых параметров экономических систем на основе линейных графов.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

Граф – это некоторое множество точек плоскости или пространства и множество отрезков кривых или прямых линий, соединяющих все или некоторые из этих точек. Формально же граф G определяется заданием двух множеств X и U и обозначается $G = (X, U)$. Элементы множества X называют вершинами, обозначают буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Вершины изображают точками плоскости или пространства. Элементами множества U являются пары связанных между собой элементов множества X. Их изображают отрезками кривых или прямых линий ($u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$).

Алгоритм построения максимального потока (алгоритм Форда–Фалкерсона):

1) построить некоторый начальный поток $X^0 = \left\{x_{ij}^0\right\}$.

2) организовать процедуру составления подмножества A вершин, достижимых из истока I по ненасыщенным ребрам. Если в этом процессе сток S не попадет в подмножество A, то построенный поток максимальный и задача решена. Если же S попал в A, то перейти к пункту 3 алгоритма;

3) выделить путь из I в S, состоящий из ненасыщенных ребер, и увеличить поток x_{ij} по каждому ребру этого пути на величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, где минимум берется по ребрам (i, j) упомянутого пути. Тем самым будет построен новый поток $X^1 = \left\{x_{ij}^1\right\}$. После этого надо возвратиться к п. 2 алгоритма.

При выполнении п. 3 на каждом шаге по крайней мере одно из ненасыщенных ранее ребер становится насыщенным, а поскольку число ребер в сети конечно, через конечное число шагов максимальный поток будет построен.

На рисунке 9.1 изображена сеть.

В таблице 9.1 приведена матрица пропускных способностей (R) данной сети. В соответствии с п. 1 алгоритма на сети формируется начальный поток X^0

(таблица 9.2), в котором по пути 1–3–5–6 перемещается 2 ед.; по пути 1–2–5–6 – 1 ед.; по пути 1–4–6 – 2 ед.

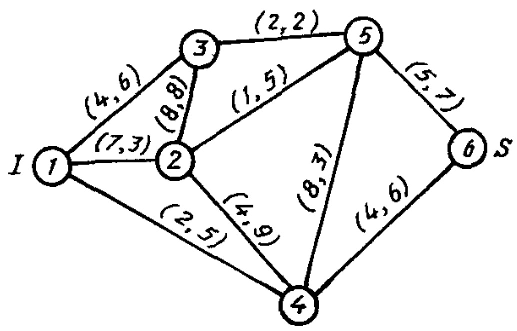

Рисунок 9.1 – Исходный граф

Таблица 9.1 – Матрица пропускных способностей X^0

Вершина графа	1	2	3	4	5	6
1	0	7	4	2	0	0
2	3	0	8	4	1	0
3	6	8	0	0	2	0
4	5	9	0	0	8	4
5	0	5	2	3	0	5
6	0	0	0	6	7	0

Таблица 9.2 – Начальный поток X^0

Вершина графа	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	2	0	0
2	–1	0	0	0	1	0
3	–2	0	0	0	2	0
4	–2	0	0	0	0	2
5	0	–1	–2	0	0	3
6	0	0	0	–2	–3	0

В соответствии с формулой мощность потока X^0 равна:

$$f = x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{46} + x_{56} = 1 + 2 + 2 = 2 + 3 = 5.$$

Составим матрицу $R - X^0$ (таблица 9.3), элементы которой позволяют судить о насыщенности ребер сети. Насыщенным ребрам будут соответствовать нулевые элементы, а ненасыщенным – ненулевые.

Вершины подмножества A выделяют из всего множества вершин постепенно, начиная с истока I. С этой целью просматривают первую строку матрицы $R - X^0$ и выписывают номера вершин, соответствующих ненулевым элементам строки. Это и будут вершины, в которые можно попасть из истока I, перемещаясь по ненасыщенным ребрам. Выявленные вершины записываются в виде списка вершины I – $I||i_1, i_2, \ldots, i_k$. Для каждой из вершин полученного списка составляют свой список. При этом вершины, встречавшиеся в прежних списках, повторно не выписываются. Если в этом процессе сток S не встретится, то поток максимален, и задача решена; если же при составлении очередного списка в нем появится сток S, то поток не максимален и мощность его можно увеличить.

Таблица 9.3 – Матрица $R–X^0$

Вершина графа	1	2	3	4	5	6
1	0	6	2	0	0	0
2	4	0	8	4	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	9	0	0	8	2
5	0	6	4	3	0	2
6	0	0	0	8	10	0

В список вершины 1 войдут вершины 2 и 3, т. к. как элементы второго и третьего столбцов этой строки отличны от нуля – 1||2, 3. Во второй строке матрицы три элемента отличны от нуля: 4, 8, 4. Но 4 и 8 соответствуют вершинам 1 и 3, которые уже значатся в подмножестве А, поэтому повторно их в списки не включаем. Вершина 4 встречается впервые, поэтому включаем ее в список вершины 2 – 2||4. В третьей строке матрицы $R - X^0$ ненулевому элементу 8 соответствуют вершины 1 и 2, которые уже встречались в списках. Следовательно, список вершины 3 будет пустым – 3||. Далее аналогичным образом составляется список вершины 4 – 4||5, 6. В результате получим следующий набор списков: 1||2, 3; 2||4; 3|; 4||5, 6.

С помощью матрицы $R - X^0$ необходимо определить величину $\Delta = \min(r_{ij} - x_{ij})$, на которую нужно увеличить поток по каждому ребру (i, j) выделенного пути, чтобы получить новый поток X_1 мощности, большей на Δ ед. По ребру (1, 2) дополнительно можно пропустить 6 ед., по ребру (2, 4) – 4 ед., а по ребру (4, 6) – только 2 ед. Следовательно, увеличить поток по всему пути 1–2–4–6 можно лишь на 2 ед. Для построения матрицы нового потока X_1 к соответствующим элементам матрицы X_0 прибавляется найденное значение Δ (таблица 9.4).

По данным таблицы 9.4 получим набор списков:

1||2, 3; 2||4; 3||;. 4||5, 6.

Далее составляется матрица разности пропускной способности и созданного потока (таблица 9.5).

Таблица 9.4 – Матрица потока X^1

Вершина графа	1	2	3	4	5	6
1	0	3	2	2	0	0
2	–3	2	0	2	1	0
3	–2	0	0	0	2	0
4	–2	0	0	0	0	4
5	0	–2	–2	0	0	3
6	0	–1	0	–4	–3	0

Таблица 9.5 – Матрица $R - X^1$

Вершина графа	1	2	3	4	5	6
1	0	4	2	0	0	0
2	6	0	8	2	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	11	0	0	8	0
5	0	6	4	3	0	2
6	0	0	0	10	10	0

Для построения матрицы нового потока X^2 к соответствующим элементам матрицы X^1 прибавляется найденное значение $\Delta = \min(4, 2, 8, 2) = 2$ (таблица 9.6).

Таблица 9.6 – Матрица потока X^2

Вершина графа	1	2	3	4	5	6
1	0	5	2	2	0	0
2	–5	0	0	4	1	0
3	–2	0	0	0	2	0
4	–2	–4	0	0	2	4
5	0	–1	–2	–2	0	5
6	0	0	0	–4	–5	0

В таблице 9.7 приведена разность $R - X^2$.

По данным таблицы 9.7 получим набор списков:

$$1\|2, 3; \qquad 2\|;. \qquad 3\|.$$

Из списков видно, что сток S не попал в подмножество A вершин, достижимых из истока I по ненасыщенным путям. Значит, поток X^2 максимален. На рисунке 9.2 приведена сеть с указанием направления потоков по отдельным рёбрам.

Рёбра, образующие разрез A/B минимальной пропускной способности (1,4), (2,4), (2,5), (3,5), состав множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4, 5, 6\}$.

Таблица 9.7 – Матрица потока $R - X^2$

Вершины графа	1	2	3	4	5	6
1	0	2	2	0	0	0
2	8	0	8	0	0	0
3	8	8	0	0	0	0
4	7	13	0	0	6	0
5	0	6	4	5	0	0
6	0	0	0	10	12	0

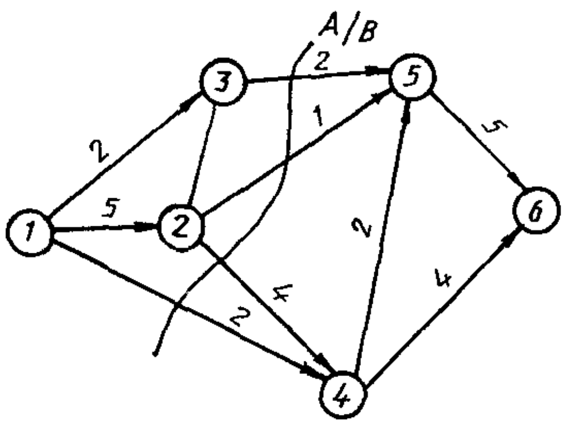

Рисунок 9.2 – Максимальный поток

9.1 Отчет о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя решение следующей поставленной задачи.

На заданной сети, используя пакет Microsoft Excel, сформировать поток максимальной мощности, направленный от истока I в сток S при условии, что пропускные способности ребер сети в обоих направлениях одинаковы.

Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности (рисунок 9.3).

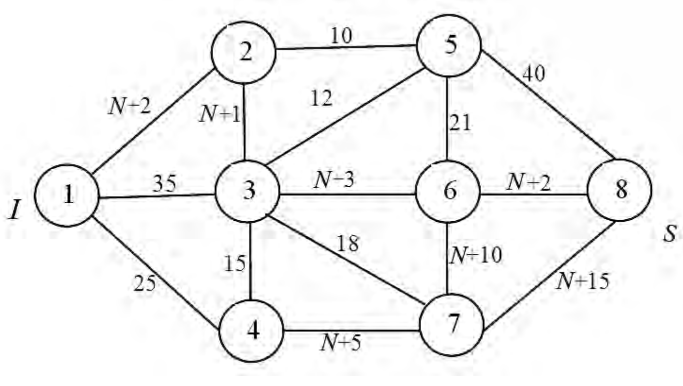

Рисунок 9.3 – Исходный граф

10 Лабораторная работа № 10. Анализ функционирования экономических объектов на основе использования линейных графов

Цель работы: анализ функционирования экономических объектов на основе использования линейных графов.

Задачи работы: освоение основных приемов построения сетевых графиков.

Лабораторная работа включает:

– теоретическую часть;

– описание алгоритма решения;

– отчет о выполнении работы.

Построение сетевой модели (структурное планирование) начинается с разбиения проекта на четко определенные работы, для которых определяется продолжительность.

Взаимосвязь работ и событий, необходимых для достижения конечной цели проекта, изображается с помощью сетевого графика (сетевой модели). Работы изображаются стрелками, которые соединяют вершины, изображающие события. Для указания конкретной работы используют код работы (i, j), состоящий из номеров начального (i-го) и конечного (j-го) событий (рисунок 10.1).

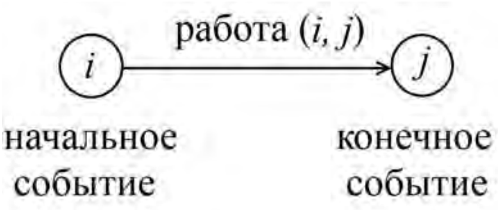

Рисунок 10.1 – Кодирование работы

При построении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

– длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;

– стрелка может не быть прямолинейным отрезком;

– для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных – пунктирные стрелки;

– каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;

– между одними и теми же событиями не должно быть **параллельных** работ, т. е. работ с одинаковыми кодами;

– следует избегать пересечения стрелок;

– не должно быть стрелок, направленных справа налево;

– номер начального события должен быть меньше номера конечного события;

– не должно быть **висячих** событий (т. е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;

– не должно быть **тупиковых** событий (т. е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;

– не должно быть циклов.

Рассмотрим пример построения сетевой модели.

Постройте сетевую модель программы опроса общественного мнения, которая включает разработку (*A*; 1 день) и распечатку анкет (*B*; 0,5 дня), прием на работу (*C*; 2 дня) и обучение (*D*; 2 дня) персонала, выбор опрашиваемых лиц (*E*; 2 дня), рассылку им анкет (*F*; 1 день) и анализ полученных данных (*G*; 5 дней).

Решение

Из условия задачи нам известно содержание работ, но явно не указаны взаимосвязи между работами. Поэтому для их установления необходимо проанализировать смысл каждой конкретной работы и выяснить, какие из остальных работ должны ей непосредственно предшествовать. Исходной работой, начинающей сетевой график, в данном случае является «прием на работу» (*C*), поскольку все остальные работы должны выполняться уже принятыми на работу сотрудниками (рисунок 10.2). Перед выполнением всех работ по опросу общественного мнения сотрудников необходимо обучить персонал (*D*). Перед тем как разослать анкеты (*F*), их надо разработать (*A*), распечатать (*B*) и выбрать опрашиваемых лиц (*E*), причем работу с анкетами и выбор лиц можно выполнять одновременно. Завершающей работой проекта является анализ полученных данных (*G*), который нельзя выполнить без предварительной рассылки анкет (*F*). В результате этих рассуждений построим сетевую модель и пронумеруем события модели (см. рисунок 10.2).

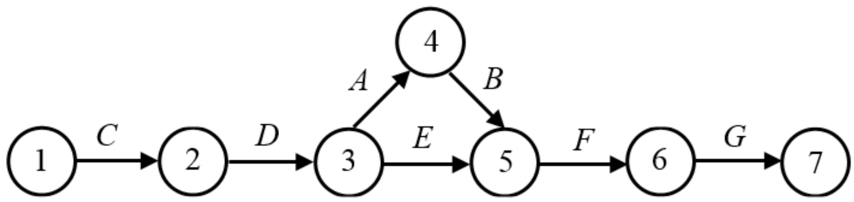

Рисунок 10.2 – Модель программы опроса общественного мнения

10.1 Отчет о выполнении

Отчет о выполнении лабораторной работы включает в себя решение следующей поставленной задачи.

1 Используя пакет Microsoft Excel, постройте сетевую модель разработки и производства станков, упорядочив работы из таблицы 10.1.

2 Используя пакет Microsoft Excel, постройте сетевую модель выступления хора при свечах по данным таблицы 10.2.

Таблица 10.1 – Исходные данные

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время, единица времени
Составление сметы затрат *A*	–	3
Согласование оценок *B*	*A*	6
Покупка собственного оборудования *C*	*B*	1
Подготовка конструкторских проектов *D*	*B*	2
Строительство основного цеха *E*	*D*	1
Монтаж оборудования *F*	*C*, *E*	5
Испытание оборудования *G*	*F*	4
Определение типа модели *H*	*D*	9
Проектирование внешнего корпуса *I*	*D*	7
Создание внешнего корпуса *J*	*H*, *I*	6
Конечная сборка *K*	*G*, *J*	3
Контрольная проверка *L*	*K*	7

Таблица 10.2– Исходные данные

Содержание работы	Длительность, единица времени
Выбор музыкального произведения *A*	21
Разучивание музыки *B*	14
Размножение нотных партий *C*	14
Репетиции хора *D*	70
Получение канделябров в прокат *E*	14
Закупка свечей *F*	1
Установка канделябров со свечами *G*	
Закупка декораций *H*	1
Установка декораций *I*	1
Заказ костюмов для хора *J*	7
Отглаживание костюмов *K*	7
Проверка системы усиления звука *L*	7
Настройка системы усиления звука *M*	1
Генеральная репетиция хора *N*	1
Банкет *O*	1
Проведение концерта *P*	1

Список литературы

1 **Морозов, В. К.** Моделирование информационных и динамических систем : учебное пособие / В. К. Морозов, Г. Н. Рогачев. – Москва : Академия, 2011. – 384 с.

2 **Орлова, И. В.** Экономико-математическое моделирование : практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Вузовский учебник ; ИНФРА-М, 2013. – 140 с.