УДК 517.91

О ДОСТИЖЕНИЯХ СТУДЕНТОВ В РЕШЕНИИ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. АСТАШОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносов
Москва, Россия

Научные результаты студенческих работ являются существенным вкладом в качественную теорию дифференциальных уравнений. Предметом исследования этих работ является дифференциальное уравнение типа Эмдена-Фаулера высокого порядка

$$y^{(n)} + p(x,y,y',...,y^{(n)}) \mid y \mid^k \operatorname{sgn} y=0, \qquad (1)$$

$n > 2$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$, $p \in C\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ и его частный случай

$$y^{(n)} + p_0 \mid y \mid^k \operatorname{sgn} y=0, \qquad (2)$$

$n > 2$, k, $p_0 \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$. Асимптотическое поведение решений нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка со степенной нелинейностью изучалось в работах российских и зарубежных математиков с середины 20-го века. Библиографические ссылки на основные работы в этом направлении можно найти в [1, 2]. Тем не менее, ряд вопросов, связанных с исследованием асимптотического и качественного поведения решений этого уравнения до сих пор остается неисследованным. Приведем некоторые результаты, полученные студентами.

1. О существовании решений с заданным числом нулей (В. В. Рогачев) [3].

Для уравнения (2) изучается задача о существовании решений с заданным числом нулей на заданном отрезке, интервале или полуинтервале при различных значениях *n* и *k*.

Теорема 1.1. *При* $n = 3,4$, *для любых* $k \in (1,\infty)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 0$, $\mathrm{a<b}$, $m \in \mathbb{N}$ *уравнение (2) имеет решение, определенное на отрезке* $\left[a,b\right]$ *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на этом отрезке ровно* m *нулей.*

Теорема 1.2. *При* $n = 3$ *для любых* $k \in (1,\infty)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 0$, $\mathrm{a<b}$, $m \in \mathbb{N}$ *уравнение (2) имеет решение, определенное на полуинтервале* $\left(a,b\right]$, *равное нулю в точке* b *и имеющее на этом полуинтервале ровно* m *нулей, а также решение, имеющее на этом полуинтервале счетное число нулей*.

Теорема 1.3. *При* $n = 3$ *для любых* $k \in \left(0,1\right)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 0$, $a < b$, $m \in \mathbb{N}$ *уравнение (2) имеет решение, определенное на отрезке* $\left[a,b\right]$, *рав-*

ное нулю в точках a, b и имеющее на этом отрезке ровно m нулей, а также решение, имеющее на этом отрезке счетное число нулей, и ненулевое решение, имеющее на этом отрезке континуум нулей.

Аналогичные результаты получены при $n=4$. Обобщение этих результатов на уравнение (1) произвольного порядка в случае $k \in (0,1)$ опубликовано в [4].

2. О свойствах решений уравнения (1) второго порядка (Т. А. Корчемкина).

Рассматривается уравнение (1) второго порядка, где функция $p(x,u,v)$ знакопостоянна, непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам.

Теорема 2.1 [4]. *Пусть в уравнении (1) $n=2$, $k>1$ функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по последним двум аргументам, отрицательна, ограничена и отделена от нуля. Тогда для любых конечных значений x_*, x^* таких, что $x_* < x^*$, существует решение уравнения (1), определенное на $\left(x_*, x^*\right)$ и имеющее вертикальные асимптоты $x = x_*$ и $x = x^*$.*

В [5] приведена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений уравнения как в случае регулярной, так и в случае сингулярной $(0<k<1)$ нелинейности. В [6] также исследовано поведение решений в случае неограниченного потенциала p, найдены необходимые или достаточные условия существования "*black hole*" решений, то есть решений, удовлетворяющих условиям, $0 < \lim\limits_{x \to x^*-0} y(x) < +\infty$, $\lim\limits_{x \to x^*-0} y'(x) = +\infty$.

Теорема 2.2 [6]. *Пусть в уравнении (1) $n=2$ и существуют такие значения $u_0>0$, $v_0>0$, что при $u_0>0$, $v_0>0$, функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по последним двум аргументам, отрицательна и отделена от нуля в случае $k>1$ (в случае $0<k<1$ функция $\dfrac{p(x,u,v)}{|v|}$ отделена от нуля), и справедливо неравенство $p(x,u,v) \ge g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна и ограничена снизу положительной константой, причём $\displaystyle\int_{v_0}^{+\infty} \frac{v\,dv}{g(v)} < +\infty$. Тогда любое максимально продолженное решение с начальными данными $u>u_0$, $v>v_0$ является black hole решением.*

Для уравнения (1) при $n=2$ с положительным потенциалом p в [7] доказана колеблемость всех решений и получены оценки отношения значений решения в последовательных экстремумах, а также оценено отношение значений производной в последовательных нулях решения. В [8] приведены результаты о поведении колеблющихся решений вблизи правой границы области определения при различных условиях на потенциал.

3. О существовании решений с нестепенным поведением уравнения (2) (М. Васильев).

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении (2)* $n = 15$, $p_0 < 0$. *Тогда существует такое* $k \in (1,\infty)$, *что уравнение (2) имеет решение* $y(x) = p_0^{\frac{1}{1-k}}(x - x^*)^{-\alpha} h\Big(\ln\Big(x - x^*\Big)\Big)$, $x \to x^* - 0$, $x^* \in \mathbb{R}$, *где* h – *некоторая периодическая функция.*

Ранее этот результат был получен в [10] для $n = 12$, и в [11] для $n = 13,14$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кигурадзе, И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – Москва : Наука, 1990. – 180 с. : ил.

2. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. В. Асташова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: науч. изд. под ред. И. В. Асташовой. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – С. 22–288.

3. **Astashova, V. I.** On the number of zeros of oscillating solutions of the third- and fourth-order equations with power nonlinearities / **V. I. Astashova**, V. V. Rogachev // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 205, no. 6. – P. 733–748.

4. **Рогачев, В. В.** On existence of solutions to higher-order singular nonlinear Emden-Fowler type equation with given number of zeros on prescribed interval / В. В. Рогачев // Functional Differential Equations. – 2016. – Vol. 23. – pp. 141–151.

5. **Korchemkina, T.** On Existence of Solutions with Prescribed Domain to Second-Order Emden-Fowler type Differential Equations / T. Korchemkina // Functional Differentional Equations. – 2016. – Vol.23. – pp. 19–26.

6. **Dulina, K.** On Asymptotic Behavior of Solutions to Second-Order Regular and Singular Emden-Fowler Type Differential Equations with Negative Potential / K. Dulina, K. T. Korchemkina // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2016). – 2016. – pp. 71–76.

7. **Дулина,** К. М. О поведении решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с неограниченным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности / К. М. Дулина, Т. А. Корчемкина // Дифференциальные уравнения. Т. 52. – 2016. – № 11. – С. 1574–1576.

8. **Дулина,** К. М. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с положительным потенциалом / К. М. Дулина, Т. А. Корчемкина // Дифференциальные уравнения. Т. 51. – 2015. – №11. – С. 1547–1548.

9. **Korchemkina, T.** On oscillation of solutions to second-order Emden–Fowler type Differential equations with positive potential / T. Korchemkina // Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems, Брно, Чешская Республика, 10–13 января 2017г.

10. **Асташова, И. В.** положительных решениях с нестепенной асимптотикой уравнения типа Эмдена-Фаулера двенадцатого порядка / И. В. Асташова, С. Вьюн // Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения : сб. тр. междунар. миниконф. – Москва : МЭСИ, 2013. – С. 95–129.

11. **Astashova, I.** On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to emden-fowler type higher-order equations / I. Astashova // Advances in Difference Equations. SpringerOpen Journal. – 2013. – № 2013:220. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-220. – P. 1–15.

УДК 372.8

К ВОПРОСУ ОБ АКТУАЛЬНОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

А. М. БУТОМА
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»
Могилев, Беларусь

Одной из важнейших целей проведения математической олимпиады является развитие интереса учащихся к математике. Участников олимпиады привлекает возможность добровольного участия в соревновании, в котором они могут проверить свои математические умения и способности решать нестандартные задачи.

Любой участник олимпиады желает добиться лучших результатов. Для этого ему необходимо читать дополнительную литературу, более подробно изучать отдельные вопросы различных разделов математики. Тем самым развиваются способности к анализу решения задач, поиску нешаблонных решений, повышается результативность занятий математикой.

Проведение олимпиад любого уровня позволяет выявить учащихся, имеющих интерес и склонности к занятиям математикой, что весьма важно для решения вопроса о подготовке математических и научно-исследовательских кадров. Участвуя в математических соревнованиях, учащийся более объективно определяет свое отношение к математике как к предмету будущей профессии.

Подбор к олимпиаде нестандартных заданий, требующих применения особых приемов решения задач, предполагает наличие хороших математических навыков и от самого учителя математики. Поэтому проведение