

УДК 629.3

*В. П. Тарасик*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНЕТАРНОЙ КОРОБКИ ПЕРЕДАЧ

UDC 629.3

*V. P. Tarasik*

## PLANETARY GEARBOX SIMULATION

### Аннотация

Изложена предлагаемая методика построения математической модели планетарной коробки передач, обеспечивающая адекватное отображение её физических свойств. Методика позволяет получить математическую модель планетарной коробки передач сложной структуры, кинематическая схема которой может иметь практически любое число степеней свободы. Приведены необходимые формулы и графики полученных результатов моделирования процесса разгона автомобиля с гидромеханической трансмиссией, содержащей планетарную коробку передач с тремя степенями свободы.

### Ключевые слова:

гидромеханическая трансмиссия, планетарная коробка передач, трехзвенный дифференциальный трансформатор, трансформаторный элемент, фрикцион, планетарный ряд, центральное зубчатое колесо, водило, кинематическая схема, число степеней свободы.

### Abstract

The method for constructing a mathematical model of a planetary gearbox is given, which provides an adequate presentation of its physical properties. The proposed method makes it possible to construct a mathematical model of the planetary gearbox with a complex structure, the kinematic diagram of which can have virtually any number of degrees of freedom. The necessary formulas and graphs are presented which show the simulation of acceleration process of a vehicle with hydromechanical transmission containing a planetary gearbox with three degrees of freedom.

### Keywords:

hydromechanical transmission, planetary gearbox, three-link differential transformer, transformer element, friction clutch, planetary gear set, sun gear, planet gear carrier, kinematic diagram, number of degrees of freedom.

Для осуществления моделирования планетарной коробки передач (ПКП) необходима динамическая модель, адекватно отображающая её физические свойства. При моделировании объектов механической природы учитываются инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные и фрикционные свойства. Структуру динамической модели ПКП составляют планетарные ряды. Каждый планетарный ряд состоит из трёх основных звеньев – двух центральных зубчатых колёс

(солнца и короны) и водила. Взаимодействие между ними осуществляется посредством сателлитов.

Характерная особенность планетарного ряда – высокая жёсткость его звеньев, поэтому при разработке динамической модели ПКП учитываются лишь инерционные свойства звеньев. В этом случае модель оказывается с топологическими вырождениями. Это создаёт проблему построения адекватной математической модели и требует применения соответствующей методики



моделирования.

Известны два способа решения этой проблемы. Первый заключается в применении уравнений Лагранжа второго рода [1]. Он требует выполнения большого объёма ручной подготовительной работы. При необходимости изменения структуры ПКП в процессе её исследования подготовительная работа повторяется заново.

Иной способ предложен в [2]. При его применении, кроме системы дифференциальных уравнений, составляется и используется система алгебраических уравнений, описывающих условия равновесия взаимодействующих звеньев ПКП, подлежащая решению на каждом шаге интегрирования, что существенно осложняет реализацию вычислительного процесса.

Наиболее просто моделирование осуществляется на основе структурно-матричного метода [1]. Он обеспечивает

полную формализацию процесса построения математической модели. Но его применение требует исключения топологических вырождений в исходной динамической модели.

Рассмотрим простейшую однорядную планетарную передачу, выполненную по кинематической схеме на рис. 1, а. Она содержит солнце  $a$ , корону  $b$ , водило  $h$ , сателлит  $s$  и позволяет получить двухступенчатую передачу. Обозначим моменты инерции этих звеньев соответственно  $J_a, J_b, J_h$ . Их значения вычисляются с учётом момента инерции сателлита  $J_s$  в его относительном и переносном движениях [1]. Выберем в качестве входного звена  $a$ , а выходного – водило  $h$  и введём два фрикциона  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  для управления передачей. Динамическая модель полученной передачи приведена на рис. 1, б.

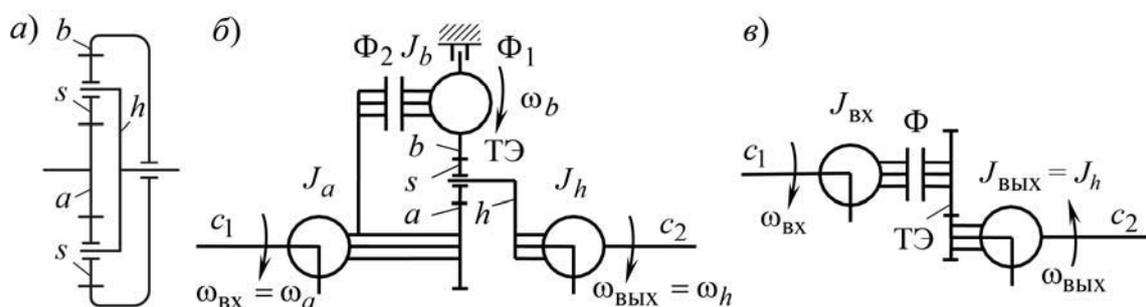


Рис. 1. Кинематическая схема (а) и динамическая модель ПКП: б – исходная; в – эквивалентная

Обозначим угловые скорости входного и выходного звеньев передачи соответственно  $\omega_{ВХ} = \omega_a$ ,  $\omega_{ВЫХ} = \omega_h$ , а её передаточное число, согласно определению,

$$u = \omega_{ВХ} / \omega_{ВЫХ} \quad (1)$$

Для определения передаточного числа планетарной передачи используется уравнение кинетики

$$\omega_a - K\omega_b - (1 - K)\omega_h = 0, \quad (2)$$

где  $K$  – кинематический параметр ПКП, представляющий собой передаточное число между центральными зубчатыми колесами  $a$  и  $b$  при остановленном водиле  $h$ ,  $K = \omega_a / \omega_b$  при  $\omega_h = 0$ .

При определении значения  $K$  учитываются взаимные направления угловых скоростей  $\omega_a$  и  $\omega_b$ . Для схемы, приведенной на рис. 1, а, значение  $K$  отрицательно. При включении фрикциона  $\Phi_1$  затормаживается звено  $b$ , получаем  $\omega_b = 0$ . Тогда, согласно уравнению (2),



$u_1 = 1 - K$ . Так как  $K < 0$ , то  $u_1 > 1$ ; следовательно, это понижающая передача. При включении фрикциона  $\Phi_2$   $\omega_a = \omega_b = \omega_h$ , поэтому  $u_2 = 1$ .

Динамическая модель, представленная на рис. 1, б, содержит топологические вырождения, т. к. сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_a$ ,  $J_b$  и  $J_h$  не разделены между собой упругими элементами. В этом случае построение корректной математической модели требует разработки и применения соответствующей методики.

### Цель исследования

Цель исследования состоит в разработке методики построения математической модели планетарной коробки передач без ограничения сложности структуры и числа степеней свободы, адекватно отображающей её физические свойства при моделировании процесса функционирования в реальных эксплуатационных условиях эксплуатации автомобиля.

### Методика исследования

Основой построения адекватной математической модели является разработка расчётной динамической модели планетарной коробки передач, не содержащей в своей структуре топологических вырождений. При их наличии в динамической модели необходимо выполнять её соответствующие преобразования с целью построения эквивалентной динамической модели, в полной мере отображающей физические свойства исследуемой планетарной коробки передач.

Преобразования осуществляются на основе закона сохранения энергии. Рассмотрим их сущность на примере передачи, динамическая модель которой представлена на рис. 1, б. Она обладает только инерционными свойствами, поэтому эквивалентная динамическая мо-

дель при исследовании процесса функционирования объекта должна иметь такую же кинетическую энергию, как и исходная модель.

Объединим инерционные элементы  $J_a$  и  $J_b$ , сохраняя при этом неизменной кинетическую энергию объекта. Обозначим момент инерции объединённого элемента  $J_{\text{вх}}$ . На рис. 1, в представлена полученная при этом эквивалентная динамическая модель. В ней отсутствуют топологические вырождения.

Значение момента инерции  $J_{\text{вх}}$  найдём из соотношения

$$\frac{J_{\text{вх}}\omega_{\text{вх}}^2}{2} = \frac{J_a\omega_{\text{вх}}^2}{2} + \frac{J_b\omega_b^2}{2},$$

где  $\omega_{\text{вх}}$  – угловая скорость вращения входного звена  $a$  ТДТ с моментом инерции  $J_a$ ;  $\omega_b$  – угловая скорость звена  $b$  с моментом инерции  $J_b$ .

В результате получаем

$$J_{\text{вх}} = J_a + J_b(\omega_b/\omega_{\text{вх}})^2. \quad (3)$$

На выходе эквивалентной динамической модели остаётся инерционный элемент с моментом инерции  $J_{\text{вых}} = J_h$ , отображающий инерционные свойства звена  $h$ .

В процессе переключения передач значение  $\omega_b$  изменяется: при включении низшей передачи звено  $b$  затормаживается фрикционом  $\Phi_1$ , а при включении высшей передачи, наоборот, разгоняется посредством фрикциона  $\Phi_2$ .

Для определения  $\omega_b$  используется уравнение (2), согласно которому и учитывая, что  $\omega_a = \omega_{\text{вх}}$ ,  $\omega_h = \omega_{\text{вых}}$ , получаем

$$\omega_b = \frac{\omega_{\text{вх}} - \omega_{\text{вых}}(1 - K)}{K}. \quad (4)$$

В составе трансмиссии машины взаимодействие планетарной передачи с другими компонентами трансмиссии осуществляется посредством валов,



карданных передач, эластичных муфт, обладающих упругими свойствами, что отображено на рис. 1, б, в элементами с коэффициентами жёсткости  $c_1$  и  $c_2$ .

Особенности процесса функционирования планетарной передачи рассмотрим на конкретном примере. Примем следующие значения параметров:  $J_a = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J_b = 0,7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J_c = 0,8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $K = -1,5$ . Передаточное число на первой передаче  $u_1 = 2,5$ , на второй –  $u_2 = 1$ . Зададим функции изменения во времени скоростей вращения входного  $n_{\text{вх}i}(t)$  и выходного  $n_{\text{вых}i}(t)$  звеньев:  $n_{\text{вх}i}(t) = n_{\text{вх}i0} - \Delta n_{\text{вх}i}t$ ;

$n_{\text{вых}i}(t) = n_{\text{вых}i0} + \Delta n_{\text{вых}i}t$ , где  $i$  – номер включаемой передачи. Параметры функций на первой передаче:  $n_{\text{вх}10} = 500 \text{ об/мин}$ ;  $\Delta n_{\text{вх}1} = 10 \text{ об/(мин}\cdot\text{с)}$ ;  $n_{\text{вых}10} = 0$ ;  $\Delta n_{\text{вых}1} = 30 \text{ об/(мин}\cdot\text{с)}$ ; на второй передаче:  $n_{\text{вх}20} = 1500$ ;  $\Delta n_{\text{вх}2} = 10$ ;  $n_{\text{вых}20} = 600$ ;  $\Delta n_{\text{вых}2} = 20$ . Включение передач осуществляется фрикционными  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

На рис. 2, а показаны графики изменения скоростей вращения звеньев планетарной передачи, а на рис. 2, б – изменения их моментов инерции при разгоне машины с переключением передач.

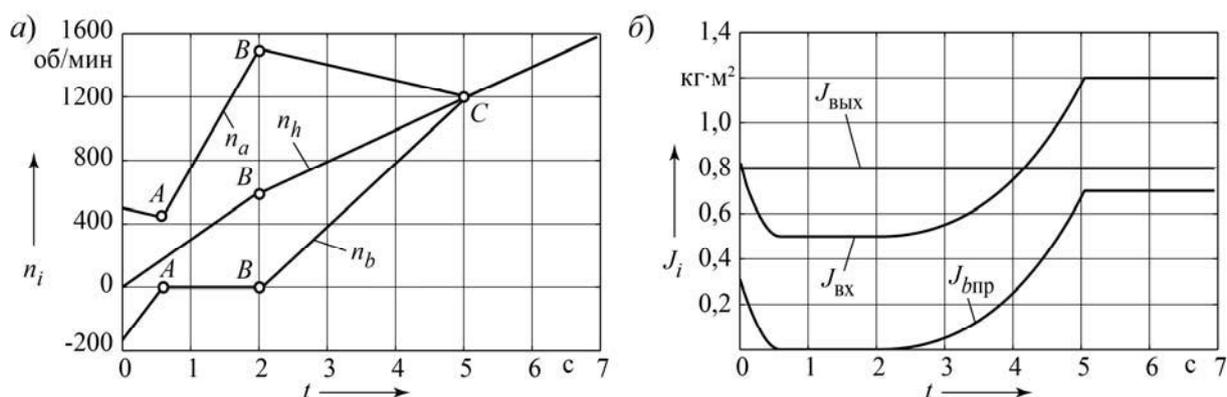


Рис. 2. Графики разгона машины с планетарной передачей

Трогание с места машины осуществляется на низшей ступени включением фрикциона  $\Phi_1$  (см. рис. 1, б). В процессе буксования фрикциона  $\Phi_1$  скорость вращения звена  $b$  с моментом инерции  $J_b$  снижается по абсолютной величине и её кинетическая энергия поглощается фрикционом. В точке  $A$  относительная скорость дисков фрикциона оказывается равной нулю, фрикцион  $\Phi_1$  замыкается и масса  $J_b$  останавливается. При этом её приведенный момент инерции  $J_{b\text{пр}} = 0$ , поэтому момент инерции входного звена  $J_{\text{вх}}$  снижается (см. рис. 2, б). После разгона

массы  $J_h$  выходного звена до скорости  $n_h$ , соответствующей точке  $B$ , включается фрикцион высшей ступени  $\Phi_2$ , и разгон продолжается вначале при его буксовании, а затем после его замыкания при скорости  $n_h$  в точке  $C$ . Остановленная на предыдущей передаче масса  $J_b$  начинает разгоняться, её кинетическая энергия и приведенный момент инерции  $J_{b\text{пр}}$  возрастают, что приводит к постепенному увеличению момента инерции входного звена  $J_{\text{вх}}$ . Разгон массы  $J_b$  требует затрат энергии на увеличение её кинетической энергии, что со-



здаёт дополнительную нагрузку на фрикцион  $\Phi_2$ .

Изложенная методика позволяет построить динамическую модель автомобиля с планетарной коробкой передач для решения проектных и научно-исследовательских задач по созданию и доводке конструкции на основе методов компьютерного моделирования. Апробация и использование предлагаемой методики осуществлялись при разра-

ботке гидромеханических трансмиссий с планетарными коробками передач для карьерных самосвалов.

На рис. 3 приведена кинематическая схема планетарной коробки передачи, получившая широкое применение во многих зарубежных конструкциях гидромеханических трансмиссий, в частности, в разработках фирмы Allison (США) [3].

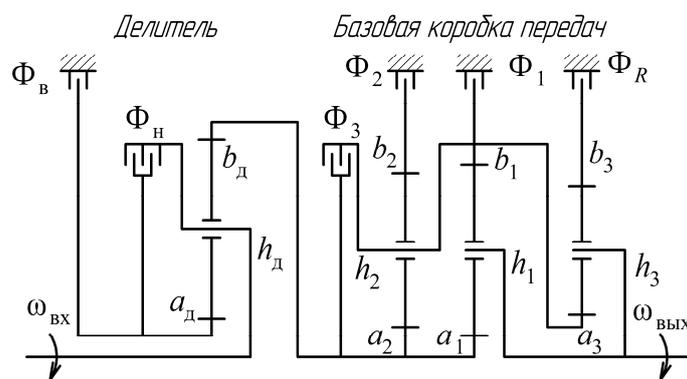


Рис. 3. Кинематическая схема ПКП с тремя степенями свободы

В данном случае ПКП имеет сложную структуру и выполнена по схеме с тремя степенями свободы. Она представляет собой сочетание двух планетарных передач – базовой трёхступенчатой коробки передач (БКП) и дополнительной коробки, выполняющей функции делителя, установленного на входе ПКП. Для включения любой передачи ПКП необходимо замкнуть одновременно два фрикциона – один в БКП, а другой в делителе. БКП содержит три планетарных ряда и четыре фрикциона. Фрикционы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  предназначены для включения 1-й, 2-й и 3-й передач БКП соответственно, а фрикционом  $\Phi_R$  включается передача реверса. В делителе использован один планетарный ряд и два фрикциона  $\Phi_H$  и  $\Phi_B$  для включения низшей и высшей ступеней. Переключение смежных передач ПКП осуществляется посред-

ством фрикционов делителя  $\Phi_H$  и  $\Phi_B$ .

Для построения адекватной математической модели ПКП сложной структуры необходимо предварительно осуществить декомпозицию её структуры, выделив из неё планетарные передачи, выполненные по схемам с двумя степенями свободы и расположенные последовательно, соединив их между собой посредством упругих связей. Затем выполняется преобразование динамических моделей этих передач с целью исключения топологических вырождений на основе предложенной методики. Полученная в результате этих преобразований динамическая модель позволяет решить поставленную задачу построения адекватной математической модели ПКП.

Принимая во внимание инерционные свойства звеньев ПКП, выполненной по кинематической схеме на рис. 3, и пренебрегая их упругими свойствами, выделим два компонента – делитель и



БКП. Исходные динамические модели этих компонентов представлены на рис. 4, а, б.

Выполним вначале преобразование модели делителя, исключив топологические вырождения. Для этого осуществим приведение момента инерции  $J_a$  звена  $a$  делителя к ведущему звену  $h$ . Получим эквивалентную динамическую модель, соответствующую рис. 1, в.

Момент инерции входной массы  $J_{ВХ}$  вычислим исходя из условия сохранения суммарной кинетической энергии делителя согласно выражению

$$\frac{J_{ВХ}\omega_{ВХ}^2}{2} = \frac{J_h\omega_{ВХ}^2}{2} + \frac{J_a\omega_a^2}{2},$$

из которого получаем

$$J_{ВХ} = J_h + J_a(\omega_a / \omega_{ВХ})^2. \quad (5)$$

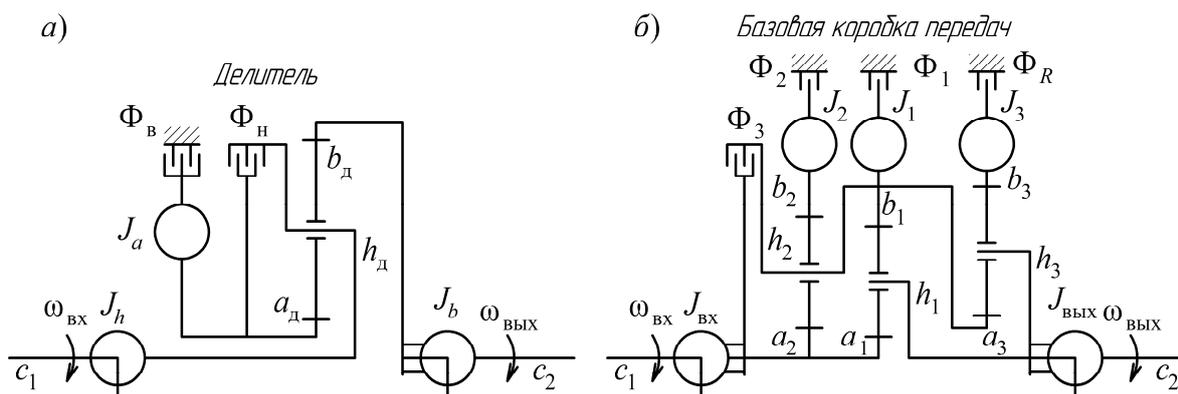


Рис. 4. Динамические модели компонентов планетарной коробки передач с тремя степенями свободы: а – модель двухступенчатого делителя; б – модель трёхступенчатой базовой коробки передач

Используя уравнение (2) и учитывая, что  $\omega_{ВХ} = \omega_h$ ,  $\omega_{ВЫХ} = \omega_b$ , получаем выражение для вычисления  $\omega_a$ :

$$\omega_a = (1 - K)\omega_{ВХ} + K\omega_{ВЫХ}. \quad (6)$$

Передаточное число низшей ступени делителя  $u_{дн} = 1$ , т. к. при замыкании фрикциона  $\Phi_H$  все звенья вращаются с одинаковой скоростью. При включении фрикциона  $\Phi_B$  звено  $a$  затормаживается, в результате  $\omega_a = 0$ . Тогда, согласно выражениям (1) и (6), передаточное число высшей ступени делителя

$$u_{дв} = -K/(1 - K). \quad (7)$$

Динамическая модель БКП более сложная. Она содержит 3 планетарных ряда и 9 звеньев, обозначения которых показаны на рис. 4, б. Однако нетрудно видеть, что ряд звеньев жёстко связаны между собой, в результате  $\omega_{a2} = \omega_{a1}$ ;  $\omega_{b2} = \omega_{a3} = \omega_{h1}$ ;  $\omega_{h3} = \omega_{h2}$ . Таким образом, независимых звеньев всего 5. Составив уравнения кинематики (2) всех трёх планетарных рядов и решив их совместно, получим выражения для определения угловых скоростей звеньев  $b_1, b_2, b_3$ , моменты инерции которых подлежат приведению к ведущему звену  $a_1$ :

$$\omega_{b1} = [-(1 - K_1 - K_2)\omega_{ВХ} + (1 - K_1)(1 - K_2)\omega_{ВЫХ}] / (K_1K_2); \quad (8)$$

$$\omega_{b2} = [\omega_{ВХ} - (1 - K_2)\omega_{ВЫХ}] / K_2; \quad (9)$$

$$\omega_{b3} = [\omega_{ВХ} - (1 - K_2K_3)\omega_{ВЫХ}] / (K_2K_3). \quad (10)$$



Приведенный момент инерции на входе БКП

$$J_{\text{ВХ}} = J_{a1} + J_{b1}(\omega_{b1} / \omega_{\text{ВХ}})^2 + J_{b2}(\omega_{b2} / \omega_{\text{ВХ}})^2 + J_{b3}(\omega_{b3} / \omega_{\text{ВХ}})^2. (11)$$

Передаточные числа БКП:

$$u_1 = 1 - K_2;$$

$$u_2 = (1 - K_1)(1 - K_2) / (1 - K_1 - K_2);$$

$$u_3 = 1; \quad u_R = 1 - K_2 K_3.$$

В результате выполненных преобразований получаем эквивалентную динамическую модель, соответствующую рис. 1, в.

Для отображения всех элементов динамической модели планетарной передачи с двумя степенями свободы представим её модель в виде, изображённом на рис. 5.

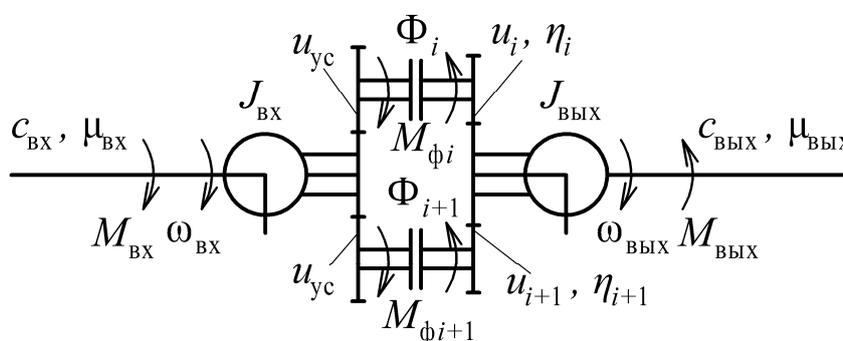


Рис. 5. Расчётная динамическая модель планетарной коробки передач с двумя степенями свободы

Такой вид модели позволяет организовать и иллюстрировать процесс моделирования переключения с  $i$ -й на  $(i+1)$ -ю передачу и обратное переключение. В модели, кроме моментов инерции  $J_{\text{ВХ}}$ ,  $J_{\text{ВЫХ}}$  и фрикционных  $\Phi_i$ ,  $\Phi_{i+1}$  включения  $i$ -й и  $(i+1)$ -й передач, отображены моменты трения фрикционных  $M_{\phi i}$ ,  $M_{\phi i+1}$ , передаточные числа  $u_i$ ,  $u_{i+1}$  и КПД  $\eta_i$ ,  $\eta_{i+1}$  трансформаторных элементов планетарной передачи, моменты суммарных воздействий упругих и диссипативных элементов  $M_{\text{ВХ}}$ ,  $M_{\text{ВЫХ}}$ , посредством которых планетарная передача связана с другими механизмами трансмиссии автомобиля ( $c_{\text{ВХ}}$ ,

$c_{\text{ВЫХ}}$ ,  $\mu_{\text{ВХ}}$ ,  $\mu_{\text{ВЫХ}}$  – параметры упругих и диссипативных элементов). Кроме того, в модель введены условные трансформаторные элементы с передаточными числами  $u_{yc} = 1$  и КПД  $\eta_{yc} = 1$  с целью удобного графического изображения связей элементов планетарной передачи. Эти условные элементы никакого влияния на процесс передачи энергии через планетарную передачу не оказывают и в математической модели системы не отображаются.

Составим дифференциальные уравнения движения сосредоточенных масс  $J_{\text{ВХ}}$  и  $J_{\text{ВЫХ}}$  при включении  $i$ -й передачи с учётом буксования и последующего замыкания фрикциона  $\Phi_i$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_{\text{ВХ}}}{dt} &= \frac{M_{\text{ВХ}} - M_{\phi i} \text{sign}(\omega_{\phi i})(1 - L_{\phi i}) - M_{\text{ВЫХ}} L_{\phi i} P_{\phi i} / (u_i \eta_i)}{J_{\text{ВХ}} + J_{\text{ВЫХ}} L_{\phi i} / u_i^2}, \\ \frac{d\omega_{\text{ВЫХ}}}{dt} &= \frac{[M_{\text{ВХ}} L_{\phi i} P_{\phi i} + M_{\phi i} \text{sign}(\omega_{\phi i})(1 - L_{\phi i})] u_i \eta_i - M_{\text{ВЫХ}}}{J_{\text{ВХ}} L_{\phi i} u_i^2 + J_{\text{ВЫХ}}}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $\omega_{\phi i}$  – относительная угловая скорость скольжения фрикционных дисков;  $L_{\phi i}$  – дискретная функция замыкания фрикциона (при  $L_{\phi i} = 0$  фрикцион буксует; при  $L_{\phi i} = 1$  – замкнут);  $P_{\phi i}$  – дискретная функция размыкания фрикциона (при  $P_{\phi i} = 1$  фрикцион находится в замкнутом состоянии; при  $L_{\phi i} = 0$

наступает условие его размыкания).

Значение  $\omega_{\phi i}$  вычисляется по формуле

$$\omega_{\phi i} = \omega_{\text{ВХ}} - \omega_{\text{ВЫХ}} u_i. \quad (13)$$

Функции  $L_{\phi i}$  и  $P_{\phi i}$  определяются по формулам:

$$L_{\phi i} = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_{\phi i} \leq \Delta\omega; \\ 0 & \text{при } \omega_{\phi i} > \Delta\omega; \end{cases} \quad (14)$$

$$P_{\phi i} = 0,5 \left\{ 1 + \text{sign} [M_{\phi i} - |M_{\text{ВЫХ}} + J_{\text{ВЫХ}} \dot{\omega}_{\text{ВЫХ}}| / (u_i \eta_i)] \right\}, \quad (15)$$

где  $\Delta\omega$  – допустимое значение  $\omega_{\phi i}$ , определяющее условие блокирования фрикциона;  $\dot{\omega}_{\text{ВЫХ}}$  – угловое ускорение массы  $J_{\text{ВЫХ}}$ .

### Результаты исследования

Рассмотрим применение предлагаемой методики для моделирования динамической системы двигатель – гидротрансформатор – планетарная коробка передач – автомобиль – дорога на примере карьерного самосвала. Компоненты планетарной коробки передачи – БКП и делитель, согласно схеме на рис. 4, представляют собой планетарные передачи с двумя степенями свободы. Встроим их в моделируемую систему, используя схему на рис. 5. Полученная динамическая модель приведена на рис. 6.

Сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_{\text{ДВ}}, J_{\text{Н}}, J_{\text{Т}}, J_{\text{Д.ВХ}}, J_{\text{Д.ВЫХ}}$ ,

$J_{\text{КП.ВХ}}, J_{\text{КП.ВЫХ}}, J_{\text{ГП}}, J_{\text{ВК}}, J_{\text{Ш}}, J_{\text{МА}}$  отображают инерционные свойства соответственно двигателя, насосного и турбинного колёс гидротрансформатора, делителя, ПКП, главной и колёсной передач, шин ведущих колёс и поступательно движущейся массы автомобиля с учётом моментов инерции ведомых колёс. Упругие элементы с коэффициентами жёсткости  $c_1, c_2, \dots, c_6$  отображают упругие свойства соединения двигателя с гидромеханической передачей, вала турбины ГДТ, торсионного вала соединения делителя с БКП, карданной передачи к ведущему мосту, полуосей и окружной жёсткости шин ведущих колёс. Коэффициенты демпфирования  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$  учитывают диссипацию энергии элементами соединений механизмов трансмиссии и шин.

Внешние воздействия на систему: вращающий момент двигателя  $M_{\text{ДВ}}$ ; момент сопротивления качению веду-



щих колёс автомобиля  $M_{f_{вк}}$ ; суммарный момент сопротивления движению автомобиля  $M_c$ , учитывающий сопротивление, обусловленное продольным уклоном дороги, сопротивление воздуха и сопротивление качению ведомых колёс  $M_{f_{нк}}$ . В модели отображены также моменты насосного  $M_n$  и турбин-

ного  $M_T$  колёс ГДТ, моменты трения фрикционов: блокировки ГДТ  $M_{ф.бл}$ , делителя  $M_{ф.н}$ ,  $M_{ф.в}$ , БКП  $M_{ф.кпi}$ ,  $M_{ф.кпi+1}$  и момент сцепления ведущих колёс с дорогой  $M_\phi$ .

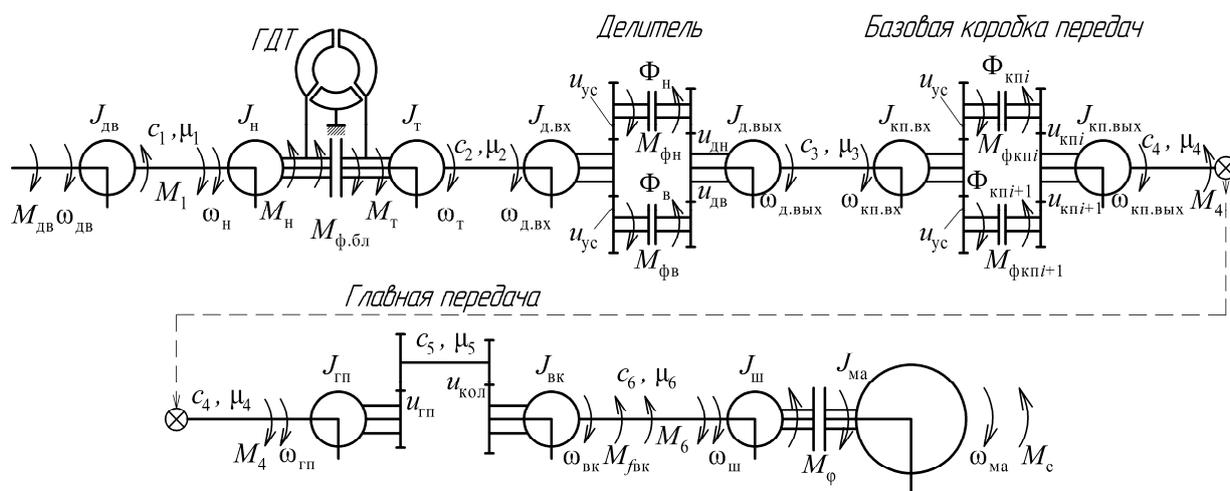


Рис. 6. Динамическая модель системы двигатель – гидротрансформатор – планетарная коробка передач – автомобиль – дорога

Передаточные числа делителя обозначены  $u_{дн}$ ,  $u_{дв}$ , коробки передач –  $u_{кпi}$ ,  $u_{кпi+1}$ , главной передачи –  $u_{гп}$ , колёсной передачи –  $u_{кол}$ .

Моменты инерции масс на выходе делителя  $J_{д.вых}$  и на выходе БКП  $J_{кп.вых}$  остаются постоянными в моделируемом процессе функционирования системы, а моменты инерции  $J_{д.вх}$  и  $J_{кп.вх}$  на их входах переменные, поскольку они отображают инерционные свойства нескольких кинематически

взаимосвязанных звеньев планетарных передач (см. рис. 4, а, б). Скорости вращения этих звеньев в процессе переключения передач и при разгоне автомобиля изменяются, что приводит к изменению соотношений их кинетических энергий. Значения  $J_{д.вх}$  и  $J_{кп.вх}$  вычисляются по формулам (5) и (11) соответственно.

Составим дифференциальные уравнения движения сосредоточенных масс динамической системы (топологические уравнения):



$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_{дв}}{dt} &= (M_{дв} - M_1)/J_{дв}; \\ \frac{d\omega_{н}}{dt} &= [M_1 - M_{н} - M_{ф.бл} \text{sign}(\omega_{ф.бл})(1 - L_{ф.бл}) - M_2 L_{ф.бл} P_{ф.бл}] / (J_{н} + J_{т} L_{ф.бл}); \\ \frac{d\omega_{т}}{dt} &= [M_1 L_{ф.бл} P_{ф.бл} + M_{т} + M_{ф.бл} \text{sign}(\omega_{ф.бл})(1 - L_{ф.бл}) - M_2] / (J_{н} L_{ф.бл} + J_{т}); \\ \frac{d\omega_{д.вх}}{dt} &= [M_2 - M_{ф.д} \text{sign}(\omega_{ф.д})(1 - L_{ф.д}) - M_3 L_{ф.д} P_{ф.д} / (u_{д} \eta_{д})] / (J_{д.вх} + J_{д.вых} L_{ф.д} / u_{д}^2); \\ \frac{d\omega_{д.вых}}{dt} &= [(M_2 L_{ф.д} P_{ф.д} + M_{ф.д} \text{sign}(\omega_{ф.д})(1 - L_{ф.д})) u_{д} \eta_{д} - M_3] / (J_{д.вх} L_{ф.д} u_{д}^2 + J_{д.вых}); \\ \frac{d\omega_{кп.вх}}{dt} &= [M_3 - M_{ф.кп} \text{sign}(\omega_{ф.кп})(1 - L_{ф.кп}) - M_4 L_{ф.кп} P_{ф.кп} / (u_{кп} \eta_{кп})] / (J_{кп.вх} + J_{кп.вых} L_{ф.кп} / u_{кп}^2); \\ \frac{d\omega_{кп.вых}}{dt} &= [(M_3 L_{ф.кп} P_{ф.кп} + M_{ф.кп} \text{sign}(\omega_{ф.кп})(1 - L_{ф.кп})) u_{кп} \eta_{кп} - M_4] / (J_{кп.вх} L_{ф.кп} u_{кп}^2 + J_{кп.вых}); \\ \frac{d\omega_{гп}}{dt} &= [M_4 - M_5 / (u_{гп} \eta_{гп})] / J_{гп}; \\ \frac{d\omega_{вк}}{dt} &= (M_5 u_{кол} \eta_{кол} - M_6 - M_{f_{вк}}) / J_{вк}; \\ \frac{d\omega_{ш}}{dt} &= [M_6 - M_{\varphi}(1 - L_{\varphi}) - M_c L_{\varphi} P_{\varphi}] / (J_{ш} + J_{ма} L_{\varphi}); \\ \frac{d\omega_{ма}}{dt} &= [M_6 L_{\varphi} P_{\varphi} + M_{\varphi}(1 - L_{\varphi}) - M_c] / (J_{ш} L_{\varphi} + J_{ма}). \end{aligned} \right\}$$

Моменты  $M_1, M_2, \dots, M_6$  отображают суммарные воздействия упругих и диссипативных элементов, соединяющих между собой соответствующие сосредоточенные массы системы (см. рис. 6). Вычисление их осуществляется по формуле

$$M_i = c_i \Delta \varphi_i + \mu_i \Delta \omega_i, \quad (16)$$

где  $\Delta \varphi_i$  – угловая деформация  $i$ -го соединительного элемента;  $\Delta \omega_i$  – относительная угловая скорость поворота соединяемых сосредоточенных масс.

На рис. 7, а–з приведены результаты моделирования процесса трогания автомобиля с места и интенсивного разгона на первой передаче.

Графики на рис. 7, а отображают изменения вращающих моментов двигателя  $M_{дв}$ , насосного  $M_{н}$  и турбинного  $M_{т}$  колёс ГДТ, а графики на рис. 7, б – моментов в упругих элементах соединения двигателя и ГДТ  $M_{y1}$ ,

на валу турбины  $M_{y2}$  и на торсионе  $M_{y3}$ , соединяющем делитель с БПК.

Изменения безразмерных характеристик ГДТ представлено на рис. 7, в. Передаточное отношение ГДТ  $i_{т.н}$  после замыкания фрикциона первой передачи, которое происходит в момент времени  $t = 0,58$  с (см. рис. 7, д), снижается до значения  $i_{т.н} = 0,36$  и затем начинает постепенно возрастать. Значение КПД ГДТ  $\eta_{т.н}$  падает до 0,65, а коэффициент трансформации  $K_{т.н}$  возрастает до 1,79. Таким образом, очевидно, что ГДТ позволяет успешно преодолеть возрастающую нагрузку, обусловленную замыканием фрикциона, и обеспечить последующий эффективный разгон автомобиля. Графики изменения скорости  $v_a$  и ускорения  $a$  автомобиля показаны на рис. 7, г.



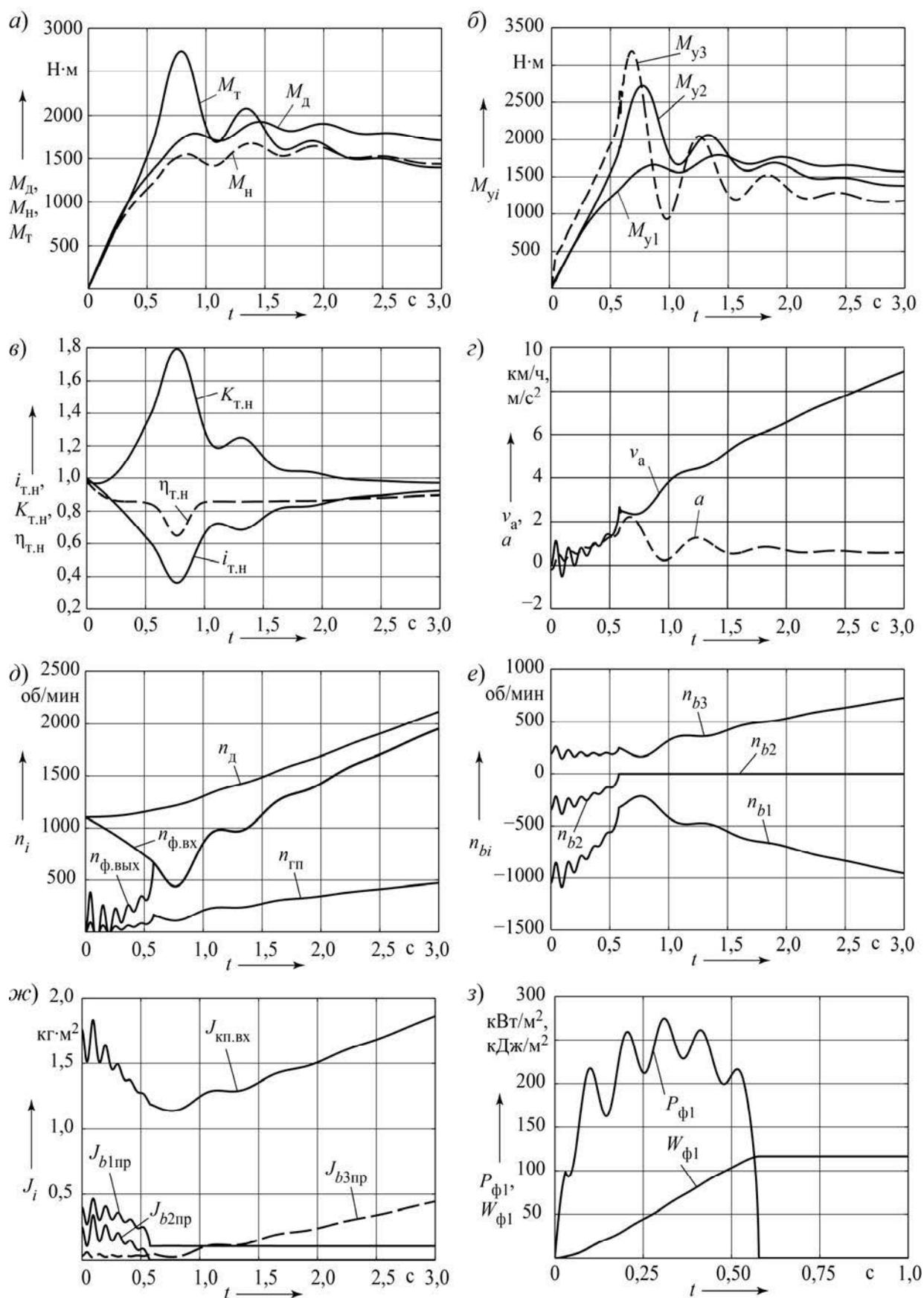


Рис. 7. Результаты моделирования динамической системы двигатель – гидротрансформатор – планетарная коробка передач – автомобиль – дорога



Изменение скорости вращения вала двигателя  $n_{ДВ}$ , турбины ГДТ  $n_T$ , главной передачи  $n_{ГП}$ , а также ведущих  $n_{ф.вх}$  и ведомых  $n_{ф.вых}$  дисков фрикциона первой передачи ПКП представлены на рис. 7, *д*, из которого видно, что в момент времени  $t = 0,58$  с фрикцион замыкается, т. к.  $n_{ф.вых} = n_{ф.вх}$ , после чего турбина ГДТ быстро разгоняется и  $n_T$  увеличивается.

На рис. 7, *е* приведены графики изменения скоростей вращения  $n_{b1}$ ,  $n_{b2}$ ,  $n_{b3}$  звеньев ПКП  $b_1, b_2, b_3$ , а на рис. 7, *ж* – изменения их приведенных моментов  $J_{b1пр}$ ,  $J_{b2пр}$ ,  $J_{b3пр}$  при приведении их к ведущему звену  $a_1$  (см. рис. 4, *б*). Масса с моментом инерции  $J_{b2}$  затормаживается включаемым фрикционом первой передачи  $\Phi_1$ , после чего её приведенный момент  $J_{b2пр}$  становится равным нулю. Масса  $J_{b1пр}$  на первой передаче вращается в противоположном направлении по сравнению со скоростью входной массы  $n_{кп.вх}$ . Однако соотношение их скоростей по абсолютной величине после замыкания фрикциона  $\Phi_1$  остаётся постоянным. Это нетрудно видеть из схемы на рис. 4, *б*. Вследствие этого приведенный момент  $J_{b1пр}$  остаётся постоянным (см. рис. 7, *ж*).

Масса  $J_{b3}$  после замыкания фрикциона начинает разгоняться быстрее, чем масса  $J_{кп.вх}$ , поэтому её приведенный момент  $J_{b3пр}$  возрастает в соответствии с увеличивающейся кинетической энергией (см. формулу (11)). Суммарный приведенный момент инерции массы на входе планетарной коробки передач  $J_{кп.вх}$  при буксовании фрикциона падает, а затем начинает возрастать соответственно увеличению скорости автомобиля.

Таким образом, приведенные на рис. 7, *е, ж* графики подтверждают необходимость учёта изменения приведенного момента инерции масс ПКП в переходных процессах и при изменении скоростных режимов движения.

На рис. 7, *з* изображены графики изменения удельной мощности  $P_{\Phi 1}$  и удельной работы буксования  $W_{\Phi 1}$  фрикциона первой передачи в процессе трогания автомобиля с места.

### Выводы

1. Планетарные коробки передач (ПКП) характеризуются высокой жёсткостью их звеньев. При их моделировании упругие свойства звеньев обычно не учитываются. В этом случае динамическая модель ПКП получается с топологическими вырождениями, что существенно усложняет построение её математической модели.

2. В статье предложена методика моделирования планетарной коробки передач с жёсткими звеньями её планетарных рядов, позволяющая построить математическую модель, адекватно отображающую её физические свойства.

3. Построение математической модели на основе предлагаемой методики возможно при любой сложности структуры ПКП, определяемой числом степеней свободы её кинематической схемы.

4. При числе степеней свободы более двух исходная динамическая модель ПКП подвергается декомпозиции с целью выделения компонентов модели с двумя степенями свободы. Взаимодействие выделенных компонентов должно осуществляться посредством связей, обладающих упругими свойствами. Это ограничение не создаёт препятствий для построения математической модели, т. к. компоненты ПКП обычно конструктивно связаны друг с другом посредством торсионных валов.

5. Приведенный в статье пример моделирования динамической системы



двигатель – гидротрансформатор – планетарная коробка передач – автомобиль – дорога подтверждает эффективность

предлагаемой методики моделирования объектов с планетарными коробками передач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2017. – 592 с.
2. **Альгин, В. Б.** Динамика, надёжность и ресурсное проектирование трансмиссий мобильных машин / В. Б. Альгин. – Минск : Наука и техника, 1995. – 256 с.

*Статья сдана в редакцию 22 мая 2018 года*

**Владимир Петрович Тарасик**, д-р техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет.  
E-mail: avtobru@gmail.com.

**Vladimir Petrovich Tarasik**, DSc (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University.  
E-mail: avtobru@gmail.com.

