ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»



# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

***Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направления подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения***

Могилев 2018

УДК 004.4
ББК 32.973
И 88

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «25» мая 2018 г., протокол № 13

Составители: канд. техн. наук, доц. К. В. Захарченков;
канд. техн. наук, доц. Т. В. Мрочек

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Методические рекомендации содержат задания к выполнению лабораторных работ по курсу «Исследование операций» студентами направления 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения. Приведены основные понятия, расчетные зависимости и примеры решения наиболее распространенных задач по рассматриваемым темам.



Учебно-методическое издание

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

# Содержание

Введение ... 4
1 Решение оптимизационных задач. Технология решения задач с помощью надстройки «Поиск решения» в среде Excel ... 5
2 Общая задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования ... 11
3 Общая задача линейного программирования. Метод симплексных таблиц ... 12
4 Общая задача линейного программирования. Целочисленные задачи линейного программирования ... 16
5 Общая задача линейного программирования. Двойственность в задачах линейного программирования. Анализ решения задач линейного программирования ... 18
6 Решение транспортной задачи линейного программирования ... 20
7 Венгерский метод решения задач о назначениях ... 22
8 Решение задач динамического программирования ... 24
9 Анализ и оптимизация решений на основе моделей игрового программирования ... 27
10 Оптимизация комплекса операций. Расчет параметров сетевого графика ... 29
11 Анализ и оптимизация решений на основе моделей массового обслуживания ... 32
Список литературы ... 37

# Введение

Целью дисциплины «Исследование операций» является формирование профессиональных компетенций, необходимых в процессе применения моделей и методов оптимизации управления и принятия решений с использованием компьютерных технологий.

Дисциплина «Исследование операций» изучает количественные методы, которые применяются для принятия оптимальных управленческих решений.

Под операцией понимают совокупность действий, направленных на достижение определенной цели. Критерием эффективности операции называется показатель требуемого соответствия между результатом предпринимаемых оперирующей стороной действий и целью операций.

Любое операционное исследование при всем возможном многообразии задач организационного управления проходит некоторую общую последовательность этапов:

– постановка задачи;

– построение содержательной (вербальной) модели рассматриваемого объекта (процесса). Для этого формализуют цели управления объектом, выделяют возможные управляющие воздействия, влияющие на достижение цели, а также выполняют описание системы ограничений на управляющие воздействия;

– построение математической модели;

– нахождение (выбор или разработка) метода решения;

– нахождение решения задачи;

– проверка полученных результатов на их адекватность природе изучаемой системы (проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим при изменении значений внешних воздействий) и возможная корректировка первоначальной модели;

– реализация полученного решения на практике.

В методических рекомендациях изложены основные понятия, расчетные зависимости и примеры решения наиболее распространенных задач по изучаемым темам, задания к лабораторным работам, контрольные вопросы и список литературы [1–6].

# 1 Решение оптимизационных задач. Технология решения задач с помощью надстройки «Поиск решения» в среде Excel

**Цель**: изучить методику составления математических моделей задач линейного программирования и технологию решения задач линейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения» в среде MS Office Excel.

## *1.1 Теоретические положения*

В электронном табличном процессоре Microsoft Office Excel оптимизационные задачи решаются с помощью надстройки «Поиск решения».

Для загрузки этой надстройки при работе в Excel, начиная с версии 2007 и выше, следует выбрать команду «Файл» – «Параметры Excel» – «Надстройки» – «Управление: надстройки Excel» – «Перейти» и установить флажок для надстройки «Поиск решения». Команда «Поиск решения» (или «Solver») будет расположена на вкладке «Данные» в группе «Анализ».

**Задачей линейного программирования** (ЗЛП) называется задача условной максимизации (минимизации) линейной целевой функции при линейных ограничениях (равенствах и неравенствах) и неотрицательных неизвестных. Основным численным методом решения ЗЛП является симплекс-метод. С помощью надстройки «Поиск решения» симплекс-методом можно решать задачи при достаточно большом числе переменных (< 200) и ограничений (< 600).

Необходимо на одном листе Excel располагать только одну модель, т. е. **решать только одну задачу**. В противном случае для выполнения расчетов придется постоянно изменять настройки «Поиска решения».

Далее приведен пример решения ЗЛП [1, 3].

***Пример*** – Фабрика производит два вида продукции П1 и П2 из двух ингредиентов $A$ и $B$. Максимальные суточные запасы ингредиентов $A$ и $B$ составляют 7 и 9 т соответственно. При производстве 1 т продукта П1 расходуется 2 т ингредиента $A$ и 2 т – $B$, а при производстве 1 т П2 расходуется 1 т ингредиента $A$ и 3 т – $B$. Суточный спрос на П1 не превышает 2,5 т. Доход от реализации 1 т продукта П1 равен 5 тыс. д. е., а от 1 т П2 – 6 тыс. д. е. Определить оптимальный суточный план производства, позволяющий получить максимальный доход от реализации продукции.

Математическая модель ЗЛП имеет вид:

$$F = 5x_1 + 6x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 7; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9; \\ x_1 \le 2,5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 2}.$$

Далее необходимо ввести исходные данные задачи на лист Excel так, как показано в экранной форме на рисунке 1.1, где каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ВХОДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (изменяемые ячейки): | | | | | |
| 2 | Имя переменной | Продукт П1, т x1 | Продукт П2, т, x2 | | | |
| 3 | Значение | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ (ЦФ): | | | | | |
| 6 | | коэффициенты ЦФ | | Значение ЦФ | Направл. | |
| 7 | | 5 | 6 | =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B7:C7) | max | |
| 8 | ОГРАНИЧЕНИЯ: | | | | | |
| 9 | | коэф-ты левой части | | левая часть | знак | правая часть |
| 10 | Ингредиент $A$, т | 2 | 1 | =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B10:C10) | <= | 7 |
| 11 | Ингредиент $B$, т | 2 | 3 | =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B11:C11) | <= | 9 |
| 12 | Спрос на П1, т | 1 | 0 | =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B12:C12) | <= | 2,5 |

Рисунок 1.1 – Экранная форма для ввода условий задачи

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из вкладки «Данные» в группе «Анализ».

В поле «Оптимизировать целевую функцию» вводится адрес ячейки, хранящей выражение для целевой функции ($D$7).

В поле «До» указывается вид экстремума (максимум, минимум) или равенство конкретному значению.

В поле «Изменяя ячейки переменных» указываются адреса $B$3:$C$3 для хранения значений искомых переменных задачи $x_i$.

В поле «В соответствии с ограничениями» с помощью кнопки «Добавить» вводятся адреса ячеек, хранящих формулы для вычисления левых частей ограничений, знаки в ограничениях (=, ≤, ≥) и адреса ячеек, хранящих значения правых частей ограничений: $D$10:$D$12 <= $F$10:$F$12.

Кнопки «Добавить», «Изменить» и «Удалить» позволяют ввести дополнительное ограничение, изменить вид выделенного ограничения или удалить его.

Требование неотрицательности переменных задаётся путём установки флажка в строке «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» (т. к. искомые переменные физические величины – массы в тоннах).

Для задания метода решения задачи в раскрывающемся списке «Выберите метод решения» нужно выбрать «Поиск решения линейных задач симплекс-методом». После запуска на решение задачи появится окно «Результаты поиска решения», которое сообщает, что решение найдено. Сообщение «Поиску решения не удалось найти решения (Solver could not find a feasible solution)» появляется, когда «Поиск решения» не смог найти сочетаний значений переменных, которые удовлетворяют всем ограничениям.

Оптимальный суточный план производства фабрики: 2,5 т продукта П1, 1,333 т продукта П2. Максимальный доход при этом 20,5 тыс. д. е.

**Задание**

Необходимо составить математические модели пяти задач в соответствии с вариантом по таблице 1.1 и решить задачи с помощью надстройки Excel «Поиск решения».

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту и математические модели задач в инвариантной форме; результаты решения задач с помощью надстройки «Поиск решения».

Таблица 1.1 – Варианты задач

| Номер варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер задачи | 1, 4, 6, 9, 11 | 2, 5, 7, 10, 12 | 3, 4, 8, 9, 13 | 1, 5, 6, 10, 11 | 2, 4, 7, 10, 12 | 3, 5, 8, 9, 13 | 1, 4, 8, 10, 11 | 2, 5, 6, 9, 12 | 3, 5, 7, 10, 13 | 1, 4, 7, 9, 11 | 2, 5, 8, 10, 12 | 3, 4, 6, 9, 13 | 1, 4, 8, 10, 11 | 2, 5, 7, 9, 12 | 3, 5, 6, 10, 13 |

***Задача 1.*** На мебельной фабрике изготавливают столы, стулья и табуреты. На производство одного изделия требуется 1500, 1000 и 620 дм$^3$ древесины. При этом затраты рабочего времени при изготовлении стола составляют 5 маш.-ч, стула – 1,5 маш.-ч и табурета – 0,7 маш.-ч. Всего для производства мебели фабрика может использовать 1220 м$^3$ древесины. Оборудование может быть занято в течение 24 маш.-ч. Прибыль от реализации стола, стула и табуретки равна 200, 30 и 15 р. соответственно. Фабрика должна ежедневно производить не менее двух столов. Определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать фабрике, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

***Задача 2.*** На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. д. е. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72 м$^2$. Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа $A$ стоимостью 5 тыс. д. е., требующие производственной площади 6 м$^2$ (с учетом проходов) и дающие 8 тыс. ед. продукции за смену, и менее мощные машины типа $B$ стоимостью 2 тыс. д. е., занимающие площадь 12 м$^2$ и дающие за смену 6 тыс. ед. продукции. Машин типа $A$ можно заказать не более 3 ед. Найти вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности участка.

***Задача 3.*** Брокеру биржи клиент поручил разместить 100000 усл. д. е. на фондовом рынке, сформировать портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные годовые проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций-акций $A$, $B$, $C$, $D$, которые позволяют получить доход в размерах соответственно 6, 8, 10 и 9 % годовых от вложенной суммы. При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции $A$ и $B$. С целью обеспечения ликвидности не менее 25 % общей суммы капитала нужно поместить в акции $D$. Учитывая прогноз на изменение ситуации в будущем, в акции $C$ можно вложить не более 20 % капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции $A$ не менее 30 % капитала. Определить распределение инвестиций капитала, обеспечивающее максимальный годовой процентный доход.

***Задача 4.*** В состав рациона кормления животных входят сено, силос и концентраты. Содержание питательных веществ и минимально необходимые нормы их потребления приведены в таблице 1.2. Определить рацион, стоимость которого была бы минимальной, если предельные нормы суточной выдачи сена – не более 18 кг, силоса – не более 24 кг, концентратов – не более 16 кг.

***Задача 5.*** В дневном рационе животных должны содержаться следующие питательные вещества: кормовые единицы (не менее 1,6 кг), протеин (не менее 200 г), каротин (не менее 10 мг). При откорме животных используются ячмень, бобы и сенная мука (таблица 1.3), причем в рационе должно содержаться не более 1,5 кг ячменя. Составить рацион для откорма животных, имеющий минимальную стоимость, если корма закупаются по следующим ценам (за 1 кг): ячмень – 3 д. е., бобы – 4 д. е, сенная мука – 5 д. е.

Таблица 1.2 – Исходные данные к задаче 4

| Питательное вещество | Белок, г/кг | Кальций, г/кг | Витамины, у. е./кг | Цена, д. е./кг |
|---|---|---|---|---|
| Сено | 40 | 5 | 2 | 300 |
| Силос | 20 | 4 | 1 | 200 |
| Концентраты | 160 | 4 | 2 | 500 |
| Потребление | 2000 | 120 | 40 | |

Таблица 1.3 – Исходные данные к задаче 5

| Питательное вещество | Содержание питательных веществ в 1 кг корма | | |
|---|---|---|---|
| | Ячмень | Бобы | Сенная мука |
| Кормовые единицы, кг | 0,8 | 0,9 | 0,6 |
| Протеин, г | 80 | 280 | 240 |
| Каротин, мг | 5 | 5 | 100 |

***Задача 6.*** Предприятие работает с 6.00 до 22.00 ч. В период времени с 6.00 до 10.00 ч на предприятии должно находиться не менее 8 рабочих, с 10.00 до 14.00 ч – не менее 10, с 14.00 до 18.00 ч – не менее 7, с 18.00 до 22.00 ч – не менее 12. Рабочие могут приниматься на предприятие на условиях полного рабочего дня (8 ч) и неполного рабочего дня (4 ч). Оплата труда рабочего составляет 3 д. е./ч. За каждого рабочего, занятого на условиях неполного рабочего дня, предприятие платит налог, составляющий 2 д. е./день. Рабочие, занятые на условиях полного рабочего дня, могут выходить на работу в 6.00, 10.00 и 14.00, а занятые на условиях неполного рабочего дня – в 6.00, 10.00, 14.00 и 18.00.

Составить график выхода рабочих на работу, обеспечивающий минимальные затраты предприятия, связанные с оплатой труда рабочих (включая затраты на выплату налога).

***Задача 7.*** Предприятие может принять на работу опытных рабочих и учащихся, не имеющих опыта работы. Учащиеся должны проходить обучение, поэтому они могут выполнить меньший объем работ, чем опытные рабочие. За месяц каждый опытный рабочий может отработать 200 ч, учащийся – 150 ч.

В течение месяца предприятию требуется выполнить работы общей трудоемкостью 20 000 чел.-ч, из них 8000 чел.-ч относится к квалифицированным работам, остальные – к неквалифицированным. Квалифицированные работы могут выполняться только опытными рабочими, неквалифицированные – как опытными рабочими, так и учащимися. Кроме того, требуется, чтобы на каждых десять учащихся приходилось хотя бы по одному опытному рабочему. Оплата труда опытного рабочего при выполнении им квалифицированных работ составляет 10 д. е./чел.-ч, при выполнении неквалифицированных работ – 8 д. е./чел.-ч. Оплата труда учащегося составляет 5 д. е./чел-ч.

Найти, сколько работников различной квалификации требуется принять на работу и как распределить их по работам, чтобы затраты предприятия на оплату труда рабочих были минимальными.

***Задача 8.*** На некотором маршруте автобусные перевозки выполняются в течение десяти часов ежедневно. Для каждого часа известно минимально необходимое количество автобусов. Превышение необходимого количества автобусов на маршруте приводит к убыткам из-за недогрузки автобусов. Минимально необходимое количество автобусов, а также убытки от каждого лишнего автобуса приведены в таблице 1.4. Первая группа автобусов выходит на маршрут в начале первого часа. Через час к ним добавляется вторая группа, еще через час – третья. Каждый автобус работает на маршруте непрерывно 8 ч.

Таблица 1.4 – Исходные данные к задаче 8

| Номер часа | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Минимально необходимое количество автобусов | 10 | 20 | 22 | 23 | 25 | 22 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| Убытки от каждого лишнего автобуса, д. е. | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 8 | 10 | 15 | 15 | 20 |

Найти количество автобусов, которые требуется выпускать на маршрут в начале первого, второго и третьего часа, чтобы обеспечить перевозки пассажиров с минимальными убытками.

***Задача 9.*** Три типа самолетов следует распределить между двумя авиалиниями (таблица 1.5). В таблице заданы количество самолетов каждого типа, месячный объём перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы. Распределить самолёты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из них соответственно не менее 300 и 200 ед. груза.

***Задача 10.*** В цехе размещены 100 станков 1-го типа и 200 станков 2-го типа, на каждом из которых можно производить детали $A_1$ и $A_2$. Производительность станков в сутки, стоимость одной детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице 1.6.

Найти количество $x_{ij}$ станков $i$-го типа, $i$ = 1,2, которое необходимо выделить для производства деталей $A_j$, $j$ = 1,2, с таким расчетом, чтобы стоимость продукции, производимой в сутки, была максимальной.

Таблица 1.5 – Исходные данные к задаче 9

| Тип самолета | Число самолетов | Месячный объём перевозок одним самолетом по авиалиниям | | Эксплуатационные расходы на один самолёт по авиалиниям | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | I | II |
| 1 | 50 | 15 | 10 | 15 | 20 |
| 2 | 20 | 30 | 25 | 70 | 28 |
| 3 | 30 | 25 | 50 | 40 | 70 |

Таблица 1.6 – Исходные данные к задаче 10

| Деталь | Производительность, дет./сут | | Стоимость одной детали, р. | Минимальный суточный план |
|---|---|---|---|---|
| | Тип 1 | Тип 2 | | |
| $A_1$ | 20 | 15 | 6 | 1510 |
| $A_2$ | 35 | 30 | 4 | 4500 |

***Задача 11.*** Из стальных листов размером 6 × 13 м нужно выкроить 800 заготовок *А* размером 4 × 5 м и 400 заготовок *Б* размером 2 × 3 м. Раскрой можно производить четырьмя способами. В таблице 1.7 указано количество заготовок каждого типа, получаемых при раскрое одного листа различными способами. Составить такой план раскроя, чтобы расход материала был минимальным.

***Задача 12.*** Прутки длиной 300 см нужно разрезать на заготовки трех типов: *А*, *В* и С, длины которых равны 12, 9 и 17 см. По технологическим причинам возможно использование лишь трех способов раскроя прутков. Выход заготовок всех типов для этих способов раскроя указан в таблице 1.8. Из 20 прутков нужно изготовить 166 заготовок типа *А*, 194 – типа *В*, 128 – типа *С*. Составить план раскроя, при котором суммарная длина отходов минимальна.

***Задача 13.*** Продукция фабрики выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины – 2 м. По заявкам потребителей фабрика поставляет также рулоны других размеров, разрезая стандартные рулоны. Типичные заявки на рулоны нестандартных размеров приведены в таблице 1.9. Определить оптимальный вариант раскроя стандартных рулонов, при котором все поступающие специальные заявки будут выполнены при минимальных затратах бумаги.

Таблица 1.7 – Исходные данные к задаче 11

| Заготовка | Количество заготовок при данном способе раскроя | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| *А* | 3 | 2 | 1 | 0 |
| *Б* | 1 | 6 | 9 | 12 |

Таблица 1.8 – Исходные данные к задаче 12

| Способ раскроя прутков | Тип заготовки | | |
|---|---|---|---|
| | *А* | *В* | С |
| I | 13 | 8 | 4 |
| II | 5 | 7 | 10 |
| III | 8 | 15 | 4 |

Таблица 1.9 – Исходные данные к задаче 13

| Заявка | Нужная ширина рулона, м | Нужное количество рулонов |
|---|---|---|
| 1 | 0,8 | 150 |
| 2 | 1,0 | 200 |
| 3 | 1,2 | 300 |

***Контрольные вопросы***

1 Как определить, что решаемая задача относится к ЗЛП?

2 Какое решение задачи ЛП называется допустимым? Оптимальным?

3 Каков смысл параметров, задаваемых в окне «Параметры поиска решения» в Excel?

4 Каковы знаки в ограничениях, правой частью которых являются запасы ресурсов, – «=», «≤» или «≥»? А если правая часть ограничений – объем работ?

## 2 Общая задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

**Цель**: изучить математическую постановку общей ЗЛП и освоить приемы решения ЗЛП графическим способом в случае двух и более неизвестных.

### *2.1 Теоретические положения*

Алгоритм геометрического метода решения ЗЛП, рассмотренный на примере из лабораторной работы № 1, приведен на рисунке 2.1 [3, 4].

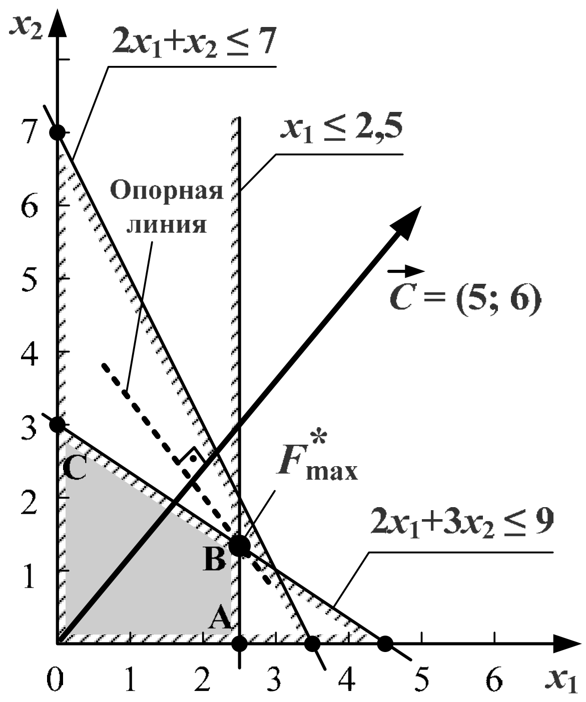


Рисунок 2.1 – Геометрический метод решения ЗЛП

1 Построить область допустимых решений (ОДР), т. е. многоугольник решений 0ABC.

2 Построить из начала координат вектор – градиент $\vec{C} = (c_1, c_2)$ целевой функции $F = c_1x_1 + c_2x_2$.

3 Построить линию уровня перпендикулярно градиенту. Так как она проходит через начало координат, то является опорной.

4 Передвигать опорную линию параллельно самой себе в направлении градиента (при отыскании максимума) либо в направлении антиградиента (при отыскании минимума) до точки, в которой целевая функция либо принимает максимальное (минимальное) значение, либо определяется ее неограниченность.

5 Определить экстремум функции $F^* = (x_1^*, x_2^*)$.

Графическим методом можно решать ЗЛП с $n > 2$ переменными, если в её канонической записи число неизвестных $n$ и число линейно независимых уравнений $m$ связаны соотношением $n - m \le 2$.

**Задание**

Необходимо по варианту из таблицы 2.1 найти графическим методом максимум и минимум в трех задачах: в двух задачах с двумя переменными и одной задаче с $n > 2$ переменными.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; результаты решения задач.

Таблица 2.1 – Задачи

| Номер задачи | Условие задачи | Номер задачи | Условие задачи |
|---|---|---|---|
| 1 | $F=-2x_1+x_2\to\text{extr};$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 1;\\2x_1+2x_2\le 10;\\4x_2\le 8;\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$ | 4 | $F=2x_1+3x_2\to\text{extr};$ $\begin{cases}x_1+4x_2\ge 8;\\x_1\le 4;\\2x_2\ge 5;\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$ |
| 2 | $F=2x_1+3x_2\to\text{extr};$ $\begin{cases}2x_1+4x_2\le 10;\\-4x_1-2x_2\le 4;\\2x_1+4x_2\ge 8;\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$ | 5 | $F=3x_1+5x_2\to\text{extr};$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 3;\\-3x_1+x_2\le 6;\\x_2\ge 4;\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$ |
| 3 | $F=8x_1+4x_2+2x_4-16\to\text{extr};$ $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=28;\\x_2+x_4=16;\\x_1+x_2-x_5=8;\\2x_1-3x_2+x_6=12;\end{cases}$ $x_j\ge 0\quad (j=\overline{1,6})$ | 6 | $F=x_1+x_2+3x_3+4x_4\to\text{extr};$ $\begin{cases}5x_1-6x_2+x_3-2x_4=2;\\11x_1-14x_2+2x_3-5x_4=2;\end{cases}$ $x_j\ge 0\quad (j=\overline{1,4})$ |

***Контрольные вопросы***

1 В чём заключается графический метод решения ЗЛП?
2 Как построить ОДР задачи и линии уровня целевой функции?
3 Как построить градиент и антиградиент? Что они показывают?
4 Когда не существует решения ЗЛП графическим способом?

## 3 Общая задача линейного программирования. Метод симплексных таблиц

**Цель**: изучить основы использования метода симплексных таблиц.

### *3.1 Теоретические положения*

Алгоритм метода симплексных таблиц включает следующие этапы [1–6].
1 Приведение ЗЛП к каноническому виду.
2 Составление опорного плана. Для этого заполняют симплексную таблицу

(таблица 3.1) коэффициентами системы ограничений и целевой функции. В симплексной таблице приняты следующие обозначения: Б. П. – базисные переменные; З.Б.П. – значения базисных переменных, С. Ч. – свободные члены; последняя строка $F$ таблицы – *индексная строка* (строка целевой функции).

Таблица 3.1 – Симплексная таблица с начальным опорным планом

| Б. П. | З. Б. П. (С. Ч.) | $-x_1$ | $-x_2$ | … | $-x_n$ | СО |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | |
| … | … | … | … | … | … | |
| $y_m$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | |
| $F$ | 0 | $-c_1$ | $-c_2$ | … | $-c_n$ | |

Просматривают элементы столбца С. Ч. Возможны следующие случаи:

1) если все элементы столбца С. Ч. положительны, то *опорное* решение (опорный план) найдено и начинается этап нахождения оптимального решения.

Если все С. Ч. > 0, то опорное решение задачи называется *невырожденным*;

2) если среди элементов столбца С. Ч. есть отрицательные, то выбирают любой из них и среди элементов строки с выбранным отрицательным С. Ч. берут за разрешающий любой столбец с отрицательным элементом в этой строке (часто рекомендуют брать столбец с наименьшим отрицательным элементом).

Если же в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то система ограничений несовместна и задача решения не имеет.

Разрешающую строку находят по наименьшему симплексному отношению. С выделенным разрешающим элементом, находящимся на пересечении разрешающих строки и столбца, рассчитывают новую симплексную таблицу.

Анализ новой таблицы начинаем с п. 1 алгоритма до тех пор, пока не найдется опорное решение или не убедимся, что его не существует;

3) если хотя бы одна базисная неизвестная в решении задачи равна нулю, то такое решение называется *вырожденным*.

Чтобы избежать вырожденности, искусственно приписывают нулевому элементу в столбце свободных членов знак «плюс», а разрешающим столбцом выбирают тот, в котором находятся два отрицательных элемента: один в строке с отрицательным, а другой в строке с нулевым свободным членом.

Тогда, согласно общему правилу нахождения неотрицательного наименьшего симплексного отношения, строка с нулевым свободным членом не может быть разрешающей. Разрешающей будет другая строка, и при расчете элементов новой таблицы вместо нулевого элемента в столбце свободных членов появится ненулевое число, т. е. решение будет невырожденным.

В случае вырожденной задачи при нахождении оптимального решения в качестве разрешающего столбца выбирают тот, в котором находится один отрицательный элемент в строке функции, а второй отрицательный элемент – в строке с нулевым свободным членом, которому приписывается знак «плюс».

Разрешающая строка находится по наименьшему симплексному отношению, не считая строки с нулевым свободным членом.

3 Проверка на оптимальность опорного плана. Для этого просматривают коэффициенты индексной строки. Если все они неотрицательны, то оптимальное решение получено. В этом решении все небазисные переменные равны 0, а базисные переменные равны значению столбца свободных членов.

Если среди коэффициентов индексной строки имеются отрицательные (за исключением свободного члена), переходят к этапу 4.

4 Составляют новую симплексную таблицу.

Среди отрицательных коэффициентов индексной строки выбирают *наименьший отрицательный элемент*, и столбец, в котором находится этот коэффициент, берут за *разрешающий*. Разрешающий столбец показывает, какая переменная на следующей итерации перейдёт из свободных в базисные.

Затем элементы столбца С. Ч. делят на элементы того же знака (+/+, –/–) разрешающего столбца. Результаты, которые будут всегда положительные, заносят в отдельный столбец *симплексных отношений* (СО) (см. таблицу 3.1). Если знаки разные или деление на 0 – в столбце СО ставят прочерк.

*Разрешающую* строку находят по наименьшему симплексному отношению.

Элемент таблицы, находящийся на пересечении разрешающих столбца и строки, называют *разрешающим* и выделяют.

Делают шаг симплексных преобразований. Рассчитывают новую таблицу по следующим правилам:

– разрешающий элемент заменяется обратной ему величиной;

– элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

– элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и записываются с противоположным знаком;

– базисная переменная строки и свободная переменная столбца меняются местами;

– все прочие элементы таблицы вычисляют по формуле прямоугольника (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Схема использования формулы прямоугольника

| Графическая схема вычисления | Формула прямоугольника |
|---|---|
| $\begin{matrix} a_{ik} & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ ?\leftarrow a_{lk} & \cdots & a_{lj} \end{matrix}$ | $a'_{lk} = \dfrac{a_{ij}\, a_{lk} - a_{ik}\, a_{lj}}{a_{ij}}$ |

Если в разрешающем столбце таблицы все элементы неположительны, то разрешающую строку выбрать невозможно. Задача в этом случае решения не имеет. Функция в области допустимых решений задачи не ограничена.

Если в строке функции в таблице с оптимальным решением имеется хотя бы один нулевой элемент, то задача имеет множество оптимальных решений.

После этого анализ новой таблицы начинаем с пункта 3 до тех пор, пока не найдется оптимальное решение или не убедимся, что его не существует.

Если необходимо решить ЗЛП на минимум, для решения задачи достаточно умножить на (–1) функцию $F$ и найти максимум функции $-F$ по вышеизложенному алгоритму. Значения неизвестных в оптимальном решении задачи с измененной целевой функцией совпадают со значениями неизвестных в оптимальном решении задачи с исходной целевой функцией.

Рассмотрим основы использования метода симплексных таблиц на примере из лабораторной работы № 1. Для построения первого опорного плана систему ограничений приведем к канонической форме путем введения балансовых переменных $y_1, y_2, y_3$ со знаком «плюс» (т. к. ограничения вида $\le$ ) и выразим из системы ограничений базисные неизвестные:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + y_1 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + y_2 = 9; \\ x_1 + y_3 = 2{,}5. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 7 - (2x_1 + x_2); \\ y_2 = 9 - (2x_1 + 3x_2); \\ y_3 = 2{,}5 - x_1. \end{cases}$$

Составим симплексную таблицу (таблица 3.2). Решение опорное, т. к. базисные переменные положительны. Начальный опорный план неоптимален, т. к. в индексной строке есть отрицательные коэффициенты. Переходим к поиску оптимального решения. В качестве разрешающего выбираем столбец, соответствующий переменной $x_2$, т. к. это наименьший отрицательный коэффициент, и выделяем его стрелкой. Вычисляем столбец СО. Разрешающая строка, выбираемая по наименьшему симплексному отношению, соответствует переменной $y_2$. Разрешающий элемент равен 3.

Рассчитаем элементы второй симплексной таблицы (таблица 3.3). Решение опорное, но неоптимальное, поэтому вычисления продолжаются.

Рассчитаем элементы третьей симплексной таблицы (таблица 3.4).

Таблица 3.2 – Первая симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-x_1$ | $-x_2$ ↑ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 7 | 2 | 1 | 7 |
| $y_2$ | 9 | 2 | 3 | 3 ← |
| $y_3$ | 2,5 | 1 | 0 | – |
| $F$ | 0 | –5 | –6 | |

Таблица 3.3 – Вторая симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-x_1$ ↑ | $-y_2$ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 4 | 4/3 | –1/3 | 3 |
| $x_2$ | 3 | 2/3 | 1/3 | 4,5 |
| $y_3$ | 2,5 | 1 | 0 | 2,5 ← |
| $F$ | 18 | –1 | 2 | |

Таблица 3.4 – Третья симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-y_3$ | $-y_2$ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 2/3 | | | |
| $x_2$ | 4/3 | | | |
| $x_1$ | 2,5 | | | |
| $F$ | 20,5 | 1 | 2 | |

Решение опорное и оптимальное. При этом ответ совпадает с полученным в лабораторной работе № 1: $x_1$ = 2,5 т продукта П1, $x_2$ = 4/3 = 1,333 т продукта П2. Максимальный доход при этом $F$ = 20,5 тыс. д. е.

**Задание**

Необходимо решить симплекс-методом по заданному варианту из таблицы 3.1 три задачи. Значения $n$ для каждой задачи указаны в таблице 3.2.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; подробное описание хода решения задач; результаты.

Таблица 3.1 – Перечень задач

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 |
|---|---|---|
| $F=1{,}2x_1+4x_2+2{,}7x_3\to\max;$ $\begin{cases}2{,}4x_1+3x_2+4x_3\le 50+n;\\3x_1+2x_2+1{,}5x_3\le 15+n;\\1{,}3x_1+5{,}5x_2+2x_3\le 70+n;\end{cases}$ $x_j\ge 0\quad (j=\overline{1,3})$ | $F=4{,}5x_1+2x_2+3{,}5x_3\to\max;$ $\begin{cases}x_1+4x_2+5x_3\le 12{,}5+n;\\2x_1+3x_2+6x_3\ge -15+n;\\3x_1+3{,}5x_2+1{,}3x_3\le 20{,}4+n;\end{cases}$ $x_j\ge 0\quad (j=\overline{1,3})$ | $F=2x_1+2x_2+3x_3\to\min;$ $\begin{cases}x_1+3x_2+4x_3\le 1{,}5+n;\\2x_1+3x_2+5x_3\le -25+n;\\1{,}5x_1+4{,}6x_2+5x_3\ge 10{,}2+n;\end{cases}$ $x_j\ge 0\quad (j=\overline{1,3})$ |

Таблица 3.2 – Значения $n$

| Номер варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Задача 1 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
| Задача 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Задача 3 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

***Контрольные вопросы***

1 Что такое симплекс? Что такое базисные и свободные переменные?

2 Указать признаки опорности и оптимальности плана ЗЛП.

3 Как определить, когда ЗЛП имеет единственное решение, множество решений или не имеет решений?

4 Как учитывается в процессе решения симплекс-методом направление поиска экстремума (минимум или максимум)?

# 4 Общая задача линейного программирования. Целочисленные задачи линейного программирования

**Цель**: изучить основы использования метода Гомори и научиться решать задачи целочисленного программирования.

## *4.1 Теоретические положения*

Метод Гомори основан на применении симплекс-метода и метода отсечения. Алгоритм метода Гомори включает следующие этапы [3, 4].

1 ЗЛП решается симплекс-методом без учета целочисленности.

2 Если в результате получено целочисленное оптимальное решение, то задача решена. В противном случае выбирается переменная с нецелочисленным оптимальным значением (если дробных переменных несколько, то выбирается

та, у которой дробная часть больше).

3 Для выбранной переменной записывается условие отсечения её нецелочисленного значения (от ОДР) в виде линейного неравенства. Для построения условия отсечения используется следующее правило:

$$y_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} \{a_{kj}\} x_j - \{b_{k0}\},$$

где $y_{m+1}$ – базисная целочисленная переменная в новом ограничении;

$\sum_{j=1}^{n} \{a_{kj}\} x_j$ – сумма произведений дробных частей соответствующих коэффициентов в *j*-й строке и переменных в *j*-й строке;

$\{b_{k0}\}$ – дробная часть свободного члена в *j*-й строке.

Дополнительное ограничение добавляется в симплексную таблицу с оптимальным решением, и переходят к этапу 1.

Признак отсутствия целочисленного решения – отсутствие дробных значений коэффициентов в строке с дробным значением базисной переменной.

Рассмотрим пример использования метода Гомори. Дана ЗЛП

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 7; \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 2}.$$

Решим задачу как обычную ЗЛП без учета требования целочисленности (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Первая симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-x_1$ | $-x_2$ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 7 | 7 | 5 | 7/5 |
| $y_2$ | 6 | –2 | 3 | 2 |
| $F$ | 0 | –1 | –2 | |

Таблица 4.2 – Вторая симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-x_1$ | $-y_1$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | 7/5 | 7/5 | 1/5 |
| $y_2$ | 9/5 | –31/5 | –3/5 |
| $F$ | 14/5 | 9/5 | 2/5 |

Найдено оптимальное нецелочисленное решение: $x_1 = 0$; $x_2 = 7/5$. По строке таблицы 4.2 с переменной $x_2$ с нецелочисленным значением с наибольшей дробной частью записываем дополнительное ограничение:

$$y_3 = \left\{\frac{7}{5}\right\} x_1 + \left\{\frac{1}{5}\right\} y_1 - \left\{\frac{7}{5}\right\}; \qquad y_3 = \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} y_1 - \frac{2}{5}.$$

Вводим новое ограничение в таблицу 4.3 и решаем (таблицы 4.4 и 4.5).

Таблица 4.3 – Третья симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-x_1$ | $-y_1$ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 7/5 | 7/5 | 1/5 | 1 |
| $y_2$ | 9/5 | –31/5 | –3/5 | –9/31 |
| $y_3$ | –2/5 | **–2/5** | –1/5 | 1 |
| $F$ | 14/5 | 9/5 | 2/5 | |

Таблица 4.4 – Четвертая симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-y_3$ | $-y_1$ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 7/2 | –1/2 | 0 |
| $y_2$ | 8 | –31/2 | 5/2 | 16/5 |
| $x_1$ | 1 | –5/2 | **1/2** | 2 |
| $F$ | 1 | 9/2 | –1/2 | |

Таблица 4.5 – Пятая симплексная таблица

| Б.П. | З.Б.П. (С.Ч.) | $-y_3$ | $-x_1$ | СО |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 1 | 1 | |
| $y_2$ | 3 | –3 | –5 | |
| $-y_1$ | 2 | –5 | 2 | |
| $F$ | 2 | 2 | 1 | |

*Ответ*: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Максимум целевой функции $F = 2$.

**Задание**

Необходимо решить методом Гомори по заданному варианту из лабораторной работы № 3 три задачи.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; подробное описание хода решения задач; результаты.

***Контрольные вопросы***

1 В чем суть метода Гомори?
2 Как формируется условие отсечения нецелочисленного значения от ОДР?
3 Как найти дробную часть отрицательного числа?

# 5 Общая задача линейного программирования. Двойственность в задачах линейного программирования. Анализ решения задач линейного программирования

**Цель**: изучить правила построения двойственной ЗЛП и основы анализа оптимального решения прямой ЗЛП с использованием двойственных оценок.

## *5.1 Теоретические положения*

Если ЗЛП рассматривать как задачу об использовании ресурсов (сырья), то параметры задачи имеют следующий смысл. В прямой задаче $x_j$ – количество единиц $j$-го продукта; $c_j$ – стоимость единицы $j$-го продукта; $b_j$ – ресурс $j$-го продукта. В двойственной задаче теневая цена $y_i$ – стоимость единицы $i$-го сырья. Стоимость всех ресурсов $\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min$ [3, 4].

Задача, двойственная по отношению к прямой задаче, составляется согласно правилам, представленным в таблице 5.1 [1–5].

Таблица 5.1 – Соответствие двойственных ЗЛП

| Исходная (прямая) задача | Двойственная задача |
|---|---|
| Целевая функция $F(x) \to \max$ | Целевая функция $F'(x) \to \min$ |
| Константы в правых частях ограничений | Коэффициенты целевой функции |
| Коэффициенты целевой функции | Константы в правых частях ограничений |
| $j$-й столбец коэффициентов в ограничениях | $j$-я строка коэффициентов в ограничениях |
| $j$-я строка коэффициентов в ограничениях | $j$-й столбец коэффициентов в ограничениях |
| $j$-я неотрицательная переменная | $j$-е неравенство вида $\geq$ |
| $j$-я переменная без ограничений в знаке | $j$-е ограничение вида $=$ |
| $i$-е ограничение вида $\leq$ | $i$-я неотрицательная переменная |
| $i$-е ограничение вида $=$ | $i$-я переменная без ограничений в знаке |

*Теневая цена* (двойственная оценка или переменная двойственной задачи) показывает дефицитность ресурса и меру его дефицитности и рассчитывается только для *дефицитных* ресурсов.

*Теневая цена* также показывает, на сколько изменится значение целевой функции в оптимальном решении при увеличении запаса ресурса на единицу. Выгоднее в первую очередь увеличивать запас наиболее дефицитного ресурса.

**Задание**

Необходимо решить по заданному варианту три задачи. Во всех трех задачах нужно решить одну из пары двойственных задач и из отчетов к найденному решению записать решение второй задачи.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; подробное описание хода решения задач; результаты.

***Задача 1.***

$$F = 16x_1 - 19x_2 + 5x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 6 + n; \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 + n; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 20 + n; \end{cases}$$

$$x_1 - \text{любого знака}, x_1, x_2 \geq 0.$$

***Задача 2.***

$$F = 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 \leq 10 + n; \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 + n; \\ 4x_1 - 7x_2 + 9x_3 \geq 1 + n; \end{cases}$$

$$x_1 - \text{любого знака}, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

***Задача 3.*** Фирма, используя четыре типа ресурсов, производит продукцию трех видов (таблица 5.1). Нужно определить оптимальный план производства продукции для достижения максимальной прибыли и найти ответы на все девять вопросов в письменном виде [4]:

1) найти оптимальные решения прямой и двойственной задач;

2) выпуск какого вида продукции является нерентабельным и почему;

3) увеличение запаса какого из ресурсов наиболее выгодно;

4) на сколько можно увеличить запас дефицитных ресурсов для улучшения оптимального значения целевой функции;

5) определить изменение максимальной прибыли при увеличении запаса черники на 50 кг;

6) оценить целесообразность введения в план четвертого вида продукции – напитка «Роса», нормы затрат ресурсов на единицу которого равны соответственно 7, 7, 50 кг, 2 ч, а прибыль – 15 д. е.;

7) оценить целесообразность дополнительной закупки 100 ед. ресурса «яблоки» по цене $C$ = 2,5 д. е. за 1 ед. ресурса;

8) определить, как изменится оптимальный план производства, если появится возможность получать прибыль от реализации единицы напитка «Вкусный» в размере 20 д. е.;

9) компания рассматривает возможность приобретения новой машины для упаковки напитков в бутылки. Это может увеличить фонд времени работы участка упаковки с 50 до 70 ч. Повлияет ли это на оптимальный результат?

Таблица 5.1 – Исходные данные к прямой задаче

| Ресурс | Напиток «Фирменный» | Напиток «Вкусный» | Напиток «Яблочный» | Запас ресурса |
|---|---|---|---|---|
| Черника, кг | 10 | 15 | 1 | 120 |
| Малина, кг | 20 | 20 | 15 | 250 |
| Яблоки, кг | 40 | 60 | 100 | 500 |
| Время упаковки, ч | 2 | 1 | 3 | 50 |
| Прибыль, д. е. | 15 | 14 | 13 | |

***Контрольные вопросы***

1 Каковы правила составления задачи, двойственной к прямой?
2 Что такое теневая цена? Что показывает теневая цена ресурса?
3 Что такое связанные и несвязанные, дефицитные и недефицитные ресурсы?

## 6 Решение транспортной задачи линейного программирования

**Цель**: научиться составлять опорный план различными методами (северо-западного угла, минимального элемента, Фогеля) и получать оптимальное решение методом потенциалов.

### *6.1 Теоретические положения*

**Метод «северо-западного угла».** На каждом шаге построения первого опорного плана заполняется левая верхняя клетка (северо-западный угол) оставшейся части таблицы. Заполнение таблицы начинается с клетки $x_{11}$ и заканчивается в клетке $x_{mn}$ [4].

**Метод «минимального элемента».** Первой в распределительной таблице максимальной величиной поставки загружается клетка с наименьшим тарифом. Далее загружается клетка со следующим по величине тарифом и т. д.

**Метод Фогеля.** В распределительной таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и по вышерассмотренным правилам.

**Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов** [1–6]**.**

1 Находится первый опорный план по одному из рассмотренных методов.

2 Найденный опорный план проверяется на оптимальность, для чего:

а) вычисляются потенциалы поставщиков $u_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ и потребителей $\nu_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ по формуле $u_i + \nu_j = c_{ij}$ для всех базисных клеток $x_{ij} > 0$.

Так как в опорном плане заполнено $m + n - 1$ клеток распределительной таблицы, то для нахождения потенциалов по данному плану можно составить систему из $m + n - 1$ линейно независимых уравнений с $m + n$ неизвестными. Такая система является неопределенной, и поэтому одной неизвестной (обычно $u_1$) придают нулевое значение, а остальные находятся однозначно по формуле $u_i + \nu_j = c_{ij}$ для всех $x_{ij} > 0$;

б) проверяется, выполнено ли для всех свободных клеток $x_{ij} = 0$ условие оптимальности $u_i + \nu_j \le c_{ij}$. Находится оценка каждой свободной клетки $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + \nu_j)$. Если условие оптимальности выполнено и $s_{ij} \ge 0$, то опорный план транспортной задачи является оптимальным (решение получено).

Если все $s_{ij} > 0$, то полученный план оптимальный и единственный.

Если хотя бы одна оценка $s_{ij} = 0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением целевой функции.

Если для некоторых свободных клеток таблицы $s_{ij} \le 0$, то клетка с наименьшим значением $s_{ij}$ является перспективной, и переходят к следующему шагу;

в) к перспективной клетке строится цикл с вершинами в заполненных клетках. Вершинам цикла приписывают знаки: перспективной клетке – «плюс», следующей (по часовой или против часовой стрелки) заполненной клетке – «минус» и т. д. В клетках цикла с отрицательными вершинами выбирается наименьшее количество груза $Q$, которое прибавляется к поставкам в положительных вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах. Клетка, соответствующая выбранному $Q$, остается свободной. Остальные клетки не изменяются. Снова переходят к п. 2а и так до получения оптимального решения.

**Задание**

Решить задачу, представленную распределительной таблицей 6.1 ($n$ – номер варианта). Опорное решение составить методами «минимального элемента», Фогеля, «северо-западного угла», а оптимальное решение получить методом потенциалов из опорного на основе метода «северо-западного угла».

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условие задач и математическая модель в инвариантной форме; описание хода решения задачи; результаты решения, подтвержденные с помощью надстройки Excel «Поиск решения».

***Задача.*** Имеются четыре поставщика и пять потребителей. Их запасы, потребности, стоимости перевозки единицы груза от каждого поставщика каждому потребителю приведены в таблице 6.1. При поиске оптимального решения нужно учесть дополнительные условия: от поставщика $A_1$ к потребителю $B_1$ необходимо перевезти не менее $20 + n$ ед. груза; от поставщика $A_3$ к потребителю $B_3$ – не более $2n$ ед. груза; от поставщика $A_3$ к потребителю $B_4$ – $5n$ ед. груза; от поставщика $A_4$ к потребителю $B_5$ поставка невозможна.

Таблица 6.1 – Транспортная (распределительная) таблица транспортной задачи

| Поставщик | Потребитель | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Запас |
| $A_1$ | $= 2 + n$ | $= 3 + n$ | $= 7 + n$ | $= 10 + n$ | $= 6 + n$ | $= 80 + 10*n$ |
| $A_2$ | $= 6 + n$ | $= 6 + n$ | $= 4 + n$ | $= 5 + n$ | $= 2 + n$ | $= 100 + 10*n$ |
| $A_3$ | $= 5 + n$ | $= 8 + n$ | $= 3 + n$ | $= 2 + n$ | $= 11 + n$ | $= 280 – 10*n$ |
| $A_4$ | $= 2 + n$ | $= 11 + n$ | $= 5 + n$ | $= 6 + n$ | $= 5 + n$ | $= 205 + 10*n$ |
| Спрос | $= 60 + 10*n$ | $= 270 – 10*n$ | $= 260 – 10*n$ | $= 120 + 10*n$ | $= 125 + 10*n$ | |

***Контрольные вопросы***

1 Что такое открытая и закрытая модели транспортной задачи?

2 Как записываются математическая модель закрытой и открытой транспортных задач?

3 Каковы наиболее часто встречающиеся дополнительные ограничения и условия, используемые при решении задач транспортного типа?

# 7 Венгерский метод решения задач о назначениях

**Цель**: научиться решать задачи о назначениях на максимум и на минимум венгерским методом.

## *7.1 Теоретические положения*

Задача о назначении имеет следующую постановку: распределить $n$ претендентов по $n$ должностям так, чтобы суммарный эффект от назначений был оптимальным. Дробление должностей не допускается и каждый претендент должен быть назначен только на одну должность [3].

Алгоритм состоит из предварительного этапа и конечного числа итераций, на каждой из которых число независимых нулей увеличивается на единицу [3].

1 Предварительный этап состоит из двух шагов.

***Шаг 1.1.*** Приведение матрицы:

а) для задачи определения назначения максимальной стоимости в каждом столбце матрицы из максимального элемента вычитают все его элементы, в результате получают матрицу $A'$ с элементами $a_{ij}' = \max a_{ij} - a_{ij}$ . Для задачи определения назначения минимальной стоимости в каждом столбце выбирается минимальный элемент, который вычитается из всех элементов столбца;

б) в каждой строке матрицы $A'$ вычитают минимальный элемент строки из всех ее элементов. Получают матрицу $A''$ с элементами $a_{ij}'' = a_{ij}' - \min a_{ij}'$.

***Шаг 1.2.*** Отмечают произвольный нуль первого столбца $A''$ звездочкой (*). Просматривают второй столбец и, если в нем имеется неотмеченный нуль в строке, где нет нуля со звездочкой, отмечают его звездочкой. Эта процедура осуществляется для всех столбцов матрицы, в результате чего получают исходную совокупность независимых нулей. Независимые нули матрицы – такая совокупность нулей, из которых никакие два нуля не стоят ни в одной строке, ни в одном столбце матрицы.

2 Приведем описание произвольной итерации алгоритма.

2.1 В матрице $A''$ отмечают знаком «плюс» (+) столбцы, содержащие нули со звездочкой. Элементы этих столбцов считаются выделенными. Если число таких столбцов равно $n$, задача решена. Оптимальный вариант назначений определяется позициями независимых нулей. Если таких столбцов меньше $n$, переходят к шагу 2.2.

2.2 Проверяют, нет ли в матрице невыделенных нулей. Если такие нули есть, отмечают любой из них значком «штрих» (′) и переходят к шагу 2.3. Если таких нулей нет, переходят к шагу 2.6.

2.3 Проверяют число нулей, отмеченных звездочкой в строке, где находится нуль, отмеченный штрихом на предыдущем шаге. Если число этих нулей меньше 1, переходят к шагу 2.5, иначе – к шагу 2.4.

2.4 Строку, в которой стоит нуль, отмеченный штрихом, отмечают знаком (+). Снимают выделение над теми столбцами, в которых содержатся нули со звездочкой, стоящие в отмеченной строке. Переходят к шагу 2.2.

2.5 Строят в полученной матрице цепочку элементов: передвижением от 0′ к 0* по столбцу, от 0* к 0′ по строке и т. д. Цепочка обязательно закончится 0′, после которого в том же столбце нельзя найти 0*. В полученной последовательности нулей убирают звездочки, штрихи заменяют на звездочки, в результате чего число независимых нулей увеличивается на ед.у. Убирают все штрихи над элементами матрицы, а также плюсы, которыми отмечены ее строки и столбцы. Переходят к шагу 2.1 (начало следующей итерации).

2.6 Среди невыделенных элементов матрицы находят минимальный по величине. Вычитают его из элементов невыделенных строк и прибавляют к элементам выделенных столбцов. Получают новую матрицу, в которой есть невыделенные нули, и переходят к шагу 2.2.

**Задание**

Необходимо решить две задачи распределения назначений, заданных матрицами, венгерским методом на максимум и на минимум.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; подробное описание хода решения задач; результаты.

***Задача 1.***

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 7 & 8 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

***Задача 2.***

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 9 & 10 & 8 & 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

***Контрольные вопросы***

1 Дать математическую постановку задачи о назначениях.
2 Что такое независимые нули матрицы? Что такое приведение матрицы?
3 Охарактеризовать суть венгерского метода.

# 8 Решение задач динамического программирования

**Цель**: ознакомиться с теорией динамического программирования на примере задачи нахождения оптимальной стратегии замены оборудования.

## *8.1 Теоретические положения*

Решение задач на основе метода динамического программирования производится на основе принципа оптимальности Р. Э. Беллмана: каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге плюс оптимальный доход на всех последующих шагах был максимальный [4, 6].

В задаче нахождения оптимальной стратегии замены оборудования в качестве системы $S$ рассматривается оборудование. Состояние оборудования характеризуется одним параметром – возрастом. В качестве возможных управлений рассматриваются два решения – о сохранении (С) имеющегося оборудования и о замене (З) его на новое.

Функциональные уравнения Беллмана, основанные на принципе оптимальности, имеют вид [4, 6]:

$$f_{N+1}(t)=\max\begin{cases} r(t)-u(t)+f_N(t+1) & \to (\text{С});\\ s(t)-P+r(0)-u(0)+f_N(1) & \to (\text{З}); \end{cases} \qquad (8.1)$$

$$f_1(t)=\max\begin{cases} r(t)-u(t) & \to (\text{С});\\ s(t)-P+r(0)-u(0) & \to (\text{З}), \end{cases} \qquad (8.2)$$

где $f_N(t)$ – максимальный доход, получаемый от оборудования возраста $t$ лет за последние $N$ лет планового периода использования оборудования при условии, что в начале этого периода из $N$ лет имеется оборудование возраста $t$;

$r(t)$ – стоимость продукции, производимой за один год на оборудовании возраста $t$ лет;

$u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста $t$ лет;

$s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста $t$ лет;

$P$ – покупная цена оборудования (считаем, что $P$ не зависит от времени).

***Пример*** – Пусть функции $r(t)$ и $u(t)$ заданы таблицей 8.1. Цена новой машины со временем не меняется и равна 10 у. е.; остаточная стоимость оборудования равна 0; длина планового периода $N$ = 10 годам.

Таблица 8.1 – Исходные данные

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(t)$ | 20 | 20 | 20 | 19 | 19 | 18 | 18 | 17 | 17 | 16 | 15 |
| $u(t)$ | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 |

*Решение*

С учетом условия задачи уравнения Беллмана примут вид:

$$f_{N+1}(t)=\max\begin{cases} r(t)-u(t)+f_N(t+1) & \to (\text{С});\\ f_N(1) \to (\text{З}); \end{cases} \qquad (8.3)$$

$$f_1(t)=r(t)-u(t)\to(\text{С}). \qquad (8.4)$$

Вычислим значения функций Беллмана при различных $N$ и $t$ (таблица 8.2). Приведем пример вычислений на втором шаге:

$$f_2(0)=\max\begin{cases} r(0)-u(0)+f_1(1)\to(\text{С})\\ f_1(1)\to(\text{З}); \end{cases}=\max\begin{cases}20-10+9\\ 9\end{cases}=19\to(\text{С});$$

$$f_2(1)=\max\begin{cases} r(1)-u(1)+f_1(2)\to(\text{С})\\ f_1(1)\to(\text{З}); \end{cases}=\max\begin{cases}20-11+8\\ 9\end{cases}=17\to(\text{С});$$

$$f_2(5)=\max\begin{cases} r(5)-u(5)+f_1(6)\to(\text{С}) \\ f_1(1)\to(\text{З}); \end{cases}=\max\begin{cases}18-13+4\\9\end{cases}=9\to(\text{С/З}).$$

Таблица 8.2 – Решение задачи

| $f_N(t)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(t)$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $f_2(t)$ | 19 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| $f_3(t)$ | 27 | 24 | 21 | 18 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| $f_4(t)$ | 34 | 30 | 26 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 |
| $f_5(t)$ | 40 | 35 | 32 | 31 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| $f_6(t)$ | 45 | 41 | 39 | 37 | 36 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 |
| $f_7(t)$ | 51 | 48 | 45 | 43 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 |
| $f_8(t)$ | 58 | 54 | 51 | 48 | 48 | 48 | 48 | 48 | 48 | 48 | 48 |
| $f_9(t)$ | 64 | 60 | 56 | 55 | 54 | 54 | 54 | 54 | 54 | 54 | 54 |
| $f_{10}(t)$ | 70 | 65 | 63 | 61 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |

Здесь оба вида управления – сохранения и замены – обеспечивают одинаковую прибыль – 9 д. е. Выбираем в этом случае сохранение. Далее

$$f_1(6)=\max\begin{cases} r(6)-u(6)+f_1(7)\to(\text{С}) \\ f_1(1)\to(\text{З}); \end{cases}=\max\begin{cases}18-14+3\\9\end{cases}=9\to(\text{З}).$$

В таблице 8.2 жирная линия отделяет политику сохранения от замены.

Допустим, вначале имеется оборудование возраста 7 лет. Оптимальная политика действий для получения максимальной прибыли за 10 лет планового периода может быть представлена следующей схемой:

$$f_{10}(7)\xrightarrow[\text{З}]{} f_9(1)\xrightarrow[\text{С}]{} f_8(2)\xrightarrow[\text{С}]{} f_7(3)\xrightarrow[\text{С}]{} f_6(4)\xrightarrow[\text{С}]{} f_5(5)\xrightarrow[\text{З}]{} f_4(1)\xrightarrow[\text{С}]{} f_3(2)\xrightarrow[\text{С}]{} f_2(3)\xrightarrow[\text{С}]{} f_1(4).$$

**Задание**

Необходимо решить задачу (исходные данные приведены в таблице 8.3 ($n$ – номер варианта)) нахождения оптимальной стратегии замены оборудования для оборудования возраста 9 лет. Необходимо учесть, что цена новой машины со временем не меняется и равна 11 у. е.; остаточная стоимость оборудования равна 0; длина планового периода $N$ = 12 годам.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; подробное описание хода решения задач; результаты.

Таблица 8.3 – Варианты исходных данных

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(t)$ | $=17+n$ | $=17+n$ | $=16+n$ | $=15+n$ | $=14+n$ | $=14+n$ | $=13+n$ | $=12+n$ | $=11+n$ | $=11+n$ | $=10+n$ | $=9+n$ | $=8+n$ |
| $u(t)$ | $=7+n$ | $=8+n$ | $=9+n$ | $=10+n$ | $=11+n$ | $=12+n$ | $=13+n$ | $=14+n$ | $=15+n$ | $=16+n$ | $=17+n$ | $=17+n$ | $=18+n$ |

***Контрольные вопросы***

1 Что лежит в основе метода ДП? Что такое рекуррентное соотношение?

2 Как формулируется задача оптимального распределения инвестиций?

3 Записать функциональные уравнения Беллмана, используемые на каждом шаге управления в задаче замены оборудования.

# 9 Анализ и оптимизация решений на основе моделей игрового программирования

**Цель:** изучить способы решения матричных игр с нулевой суммой, а также применение критериев принятия решений в условиях неопределённости.

## *9.1 Теоретические положения*

**Седловая точка** есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник может на это ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат.

***Пример*** – Найти решение и цену игры, платежная матрица которой представлена нижеследующей таблицей.

Таблица 9.1 – Платежная матрица

| $A_i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\min \alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 15 | 1 | 9 | 1 |
| $A_2$ | 9 | 4 | 3 | 3 |
| $\max \beta_j$ | 15 | 4 | 9 | |

*Решение*

Проверим наличие седловой точки.

Для игрока $A$ максимин $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \max(1, 3) = 3$.

Для игрока $B$ минимакс $\beta = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = \min(15, 4, 9) = 4$.

Так как значения $\alpha$ и $\beta$ не совпадают, седловой точки нет, а цена игры $\nu$ находится в промежутке [3; 4].

Решим задачу в смешанных стратегиях. Для этого составим пару двойственных задач [3, 4, 6].

Для игрока $A$:

$$F = x_1 + x_2 \to \min;$$
$$15x_1 + 9x_2 \ge 1;$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 1;$$
$$9x_1 + 3x_2 \ge 1;$$
$$x_i \ge 0\ (i = \overline{1,2}).$$

Для игрока $B$:

$$F'' = y_1 + y_2 + y_3 \to \max;$$
$$15y_1 + y_2 + 9y_3 \le 1;$$
$$9y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 1;$$
$$y_j \ge 0\ (j = \overline{1,3}).$$

Находим экстремум целевой функции для обеих задач. Он будет равен:

– для игрока $A$: $F$ = 0,27; $x_1$ = 0,03, $x_2$ = 0,24. Теневые цены: 0; 0,18; 0,09;

– для игрока $B$: $F$ = 0,27; $y_1$ = 0, $y_2$ = 0,18, $y_2$ = 0,09. Теневые цены: 0,03; 0,24.

Отсюда находим цену игры $\nu = 1/F = 1/0{,}27 = 3{,}67$. Полученная цена игры $\nu$ находится в промежутке [3; 4].

Находим компоненты вектора вероятностей применения игроком $A$ стратегий: $\overline{p}^* = (p_1^*, p_2^* \ldots, p_m^*) = (x_1 \cdot \nu,\quad x_2 \cdot \nu)$ = (0,03·3,67; 0,24·3,67) = (0,11; 0,89).

Проверим: $\sum_{i=1}^{2} p_i = 0{,}11 + 0{,}89 = 1$.

Находим компоненты вектора вероятностей применения игроком $B$ своих стратегий: $\overline{q}^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*) = (y_1 \cdot \nu,\quad y_2 \cdot \nu,\quad y_3 \cdot \nu)$ = (0·3,67; 0,18·3,67; 0,09·3,67) = = (0; 0,67; 0,33). Проверим: $\sum_{i=1}^{3} q_i = 0 + 0{,}67 + 0{,}33 = 1$.

Понимать это решение следует так: если разыгрывается 100 партий игры, то в соответствии с вероятностями применения стратегий игрок $A$, случайным образом чередуя применение стратегий, должен применить 1-ю стратегию 11 раз, 2-ю – 89 раз. Второй игрок также должен случайным образом чередовать применение своих стратегий и применить 1-ю стратегию 0 раз, 2-ю – 67 раз, 3-ю – 33 раза. В этом случае игрок $A$ за 100 партий игры выиграет 367 ед., а игрок $B$ эту величину проиграет.

**Задание**

Необходимо решить по указанию преподавателя четыре задачи. Задачи с номерами 1–3 решаются сведением матричной игры к ЗЛП. В задачах с номерами 4–6 нужно найти решение игр с природой по различным критериям.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условия задач по варианту; подробное описание хода решения задач; результаты.

***Задача 1.***

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 8 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

***Задача 2.***

$$\begin{pmatrix} 24 & 56 & 74 & 6 & 81 & 82 \\ 35 & 59 & 79 & 5 & 82 & 94 \\ 21 & 24 & 88 & 8 & 92 & 33 \\ 57 & 78 & 64 & 2 & 27 & 33 \end{pmatrix}$$

***Задача 3.***

$$\begin{pmatrix} -21 & -55 & -45 \\ -41 & -35 & -54 \\ -51 & -28 & -58 \end{pmatrix}$$

***Задача 4.*** Планируется строительство кинотеатра. Имеются проекты на 400, 500, 600 и 750 мест. Затраты на содержание кинотеатра составляют 40 р. в день и 12 р. за каждые сто мест (свыше 500). В день можно дать 5 сеансов, стоимость билета в среднем 50 к. Количество посетителей варьируется от 100 до 400 чел. Какой из проектов выбрать?

***Задача 5.*** В транспортном цехе ежедневно выходит из строя от 4 до 8 агрегатов, каждый из которых мог бы дать продукции на 350 р. Слесарь-ремонтник, получающий 2500 р. в месяц, не может в день обслужить более двух станков. Сколько слесарей должен привлечь на работу начальник цеха?

***Задача 6.*** Организуются пригородные автобусные рейсы. Число пассажиров колеблется от 300 до 450 чел., из которых 10 % имеют право бесплатного проезда. Цена билета 6 р. Вместимость автобуса – 30 чел. Эксплуатационные затраты на один рейс – 50 р. Оплата шофера за одну поездку – 60 р. Сколько же организовать рейсов?

***Контрольные вопросы***

1 Что такое конфликтная ситуация, игра, парная игра, природа, оптимальная стратегия, чистая стратегия, смешанная стратегия, матричная игра с нулевой суммой, платежная матрица, цена игры, нижняя цена игры, верхняя цена игры, минимаксная и максиминная стратегии, игра с седловой точкой?

2 Какие оптимистические критерии применяются в играх с природой?

3 Как записывается критерий Вальда? Сэвиджа? Гурвица?

## 10 Оптимизация комплекса операций. Расчет параметров сетевого графика

**Цель**: научиться оптимизировать проекты по времени выполнения с привлечением дополнительных средств.

### *10.1 Теоретические положения*

Оптимизация проекта по времени сводится к сокращению продолжительности критического пути $t_{кр}$ за счет привлечения дополнительных средств (количество рабочих, сверхурочное время). Эта задача возникает, когда критическое время выполнения комплекса операций $t_{кр}$ превышает заданный срок $t_0$ [6]. Критический путь – максимальный по продолжительности полный путь. Работой называется любой процесс, происходящий во времени. Событие – это результат выполнения работ, в него входящих; оно не имеет протяженности во времени и не потребляет ресурсов.

Рассмотрим данную задачу в следующей постановке: задан сетевой график $G=(E,\vec{e})$ выполнения проекта, где $E$ – множество событий, а $\vec{e}$ – множество работ. Продолжительность каждой работы равна $t_{ij}$. Известно, что вложение дополнительных средств $x_{ij}$ в работу $(i, j)$ сокращает время ее выполнения от $t_{ij}$ до $t'_{ij}$, причем эта зависимость выражается как $t'_{ij} = f_{ij}(x_{ij}) \le t_{ij}$ ($f_{ij}$ – известные функции). Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения $d_{ij}$, поэтому сокращение продолжительности работы не беспредельно. Требуется определить количество дополнительных вложений средств $x_{ij}$ в отдельные работы проекта, а также время начала $t^{н}_{ij}$ и окончания $t^{о}_{ij}$ выполнения работ, чтобы проект был выполнен в заданный срок $t_0$, время выполнения каждой работы было не меньше минимально возможного времени $d_{ij}$ и сумма вложенных средств была минимальной.

Если предположить, что продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $f_{ij}(x_{ij})=t'_{ij}=t_{ij}-k_{ij}x_{ij}$, где $k_{ij}$ – технологические коэффициенты использования дополнительных средств, то будем иметь ЗЛП.

Если в последнее событие сети $n$ входят сразу несколько работ, то на сетевой график необходимо добавить фиктивную работу $(n, n+1)$, время выполнения которой равно нулю. К ограничениям-равенствам, показывающим зависимость продолжительности каждой работы от вложенных в нее средств, добавится ограничение $t^{о}_{n,n+1}-t^{н}_{n,n+1}=0$. Целевая функция $t_{кр}=t^{о}_{n,n+1}\to\min$.

***Пример*** – Для сокращения срока реализации проекта, представленного сетевым графиком (рисунок 10.1), заказчик выделил дополнительные средства. Продолжительность выполнения работ выражается соотношением $f_{ij}(x_{ij})=t'_{ij}=t_{ij}-k_{ij}x_{ij}$. Известно, что $k_{12}=0,1$; $k_{13}=0,2$; $k_{23}=0,5$; $k_{24}=0,3$; $k_{35}=0,6$; $k_{45}=0,1$. Над каждой работой проставлена ее продолжительность $t_{ij}$ и минимально возможное время выполнения $d_{ij}$.

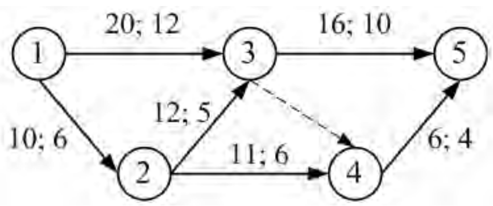


Рисунок 10.1 – Сетевой график

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, т. е. найти такие $t_{ij}^{н}$, $t_{ij}^{o}$, $x_{ij}$, чтобы время выполнения всего проекта не превышало 20 ед.; продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины $d_{ij}$; суммарный расход дополнительных средств был минимальным.

Решение данной задачи приведено на рисунке 10.2.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Работа | Продолжительность $t_{ij}$ | Минимальная длительность $d_{ij}$ | Технологический коэффициент $k_{ij}$ | Величина вложенных средств $x_{ij}$ | Сокращенное время $t'=t_{ij}-k_{ij} \cdot x_{ij}$ | Время начала $t^{н}_{ij}$ | Время окончания $t^{о}_{ij}=t'+t^{н}_{ij}$ |
| 2 | 12 | 10 | 6 | 0,1 | | =B2-D2*E2 | 0 | =G2+F2 |
| 3 | 13 | 20 | 12 | 0,2 | | =B3-D3*E3 | 0 | =G3+F3 |
| 4 | 23 | 12 | 5 | 0,5 | | =B4-D4*E4 | =H2 | =G4+F4 |
| 5 | 24 | 11 | 6 | 0,3 | | =B5-D5*E5 | =H2 | =G5+F5 |
| 6 | 35 | 16 | 10 | 0,6 | | =B6-D6*E6 | =МАКС(H3;H4) | =G6+F6 |
| 7 | 45 | 6 | 4 | 0,1 | | =B7-D7*E7 | =МАКС(H5;H3;H4 | =G7+F7 |
| 8 | 56 | | | | Целевая функция | | | =МАКС(H6:H7) |
| 9 | | | | | min $t_{56}$ | | | <= |
| 10 | | | | | =СУММ(E2:E7) | | | 24 |

Рисунок 10.2 – Экранная форма решения задачи

При вызове окна «Поиск решения» в поле «Оптимизировать целевую функцию» вводится адрес ячейки $E$10; указывается вид экстремума – максимум; указываются адреса $E$2:$E$7 для хранения значений искомых переменных задачи; далее записываются ограничения задачи: $F$2:$F$7 <= $B$2:$B$7; $F$2:$F$7 >= $C$2:$C$7; $H$8 <= $H$10. Результаты расчетов показаны на рисунке 10.3.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Работа | Продолжительность $t_{ij}$ | Минимальная длительность $d_{ij}$ | Технологический коэффициент $k_{ij}$ | Величина вложенных средств $x_{ij}$ | Сокращенное время $t'=t_{ij}-k_{ij} \cdot x_{ij}$ | Время начала $t^{н}_{ij}$ | Время окончания $t^{о}_{ij}=t'+t^{н}_{ij}$ |
| 2 | 12 | 10 | 6 | 0,1 | 30,00004298 | 6,999995702 | 0 | 6,999995702 |
| 3 | 13 | 20 | 12 | 0,2 | 33,12505451 | 13,3749891 | 0 | 13,3749891 |
| 4 | 23 | 12 | 5 | 0,5 | 9,999990241 | 7,000004879 | 6,9999957 | 14,00000058 |
| 5 | 24 | 11 | 6 | 0,3 | 0 | 11 | 6,9999957 | 17,9999957 |
| 6 | 35 | 16 | 10 | 0,6 | 10,00000167 | 9,999999 | 14,000001 | 23,99999958 |
| 7 | 45 | 6 | 4 | 0,1 | 0 | 6 | 17,999996 | 23,9999957 |
| 8 | 56 | | | | Целевая функция | | | 23,99999958 |
| 9 | | | | | min $t_{56}$ | | | <= |
| 10 | | | | | 83,1250894 | | | 24 |

Рисунок 10.3 – Результаты решения задачи

**Задание**

Необходимо решить задачу по оптимизации сетевого графика, представленную рисунком 10.4 и таблицей 10.1. Условие задачи аналогично рассмотренному в примере.

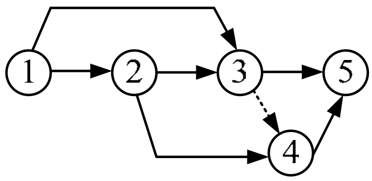


Рисунок 10.4 – Условие задачи

Таблица 10.1 – Исходные данные

| Показатель | Операция | | | | | | | Количество вложенных средств $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1, 2) | (1, 3) | (2, 3) | (2, 4) | (3, 4) | (3, 5) | (4, 5) | |
| $t_{ij}$ | 10 | 20 | 12 | 14 | 0 | 16 | 6 | 10 |
| $d_{ij}$ | 6 | 12 | 5 | 6 | 0 | 10 | 4 | |
| $k_{ij}$ | 0,05 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | – | 0,01 | 0,04 | |

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условие задачи; подробное описание хода решения задач; результаты.

***Контрольные вопросы***

1 Что такое путь? Перечислить виды путей.

2 Перечислить основные временные параметры событий и параметры работ. Как они определяются?

3 Сформулировать сущность задачи оптимизации проекта по стоимости.

# 11 Анализ и оптимизация решений на основе моделей массового обслуживания

**Цель**: изучить классификацию моделей систем массового обслуживания (СМО) и методики определения основных характеристик различных СМО.

## *11.1 Теоретические положения*

***Пример 1*** – На вход многоканальной СМО с отказами [3] поступает поток заявок, интенсивность которого составляет 7 заявок в час. Среднее время обслуживания одной заявки 0,25 ч. Каждая заявка приносит доход 150 д. е., а содержание одного канала обходится в 120 д. е. в час. Найти оптимальное число каналов СМО.

*Решение*

Основные параметры системы: число каналов $n$ – нужно найти; число мест в очереди $m$ = 1; среднее время обслуживания $t_{обс}$ = 0,25 ч.; интенсивность потока заявок $\lambda$ = 7 заявок в час; интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{обс} = 1/0,25 = 4$ ч$^{-1}$; относительная нагрузка на систему $\rho = \lambda/\mu = 7/4 = 1{,}75$ заявок. Из условия задачи также вытекает, что в случае, если СМО имеет $n$ каналов, то она приносит доход $D$, который можно определить по формуле $D = 150 \cdot A - 120 \cdot n$, где $A$ – абсолютная пропускная способность СМО. Дальнейшие расчеты сведены в таблицу 11.1.

Таблица 11.1 – Определение оптимального количества каналов

| Число каналов | Вероятность свободного состояния системы $P_0$ | Вероятность отказа $P_{отк}=\frac{\rho^n}{n!}P_0$ | Абсолютная пропускная способность, заявок $A=\lambda(1-P_{отк})$ | Доход, д. е. $D=150\cdot A-$ $-120\cdot n$ |
|---|---|---|---|---|
| $n=1$ | $P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}\right]^{-1}=0{,}364$ | 0,636 | 2,545 | 262 |
| $n=2$ | $P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}\right]^{-1}=0{,}234$ | 0,204 | 5,569 | 595 |
| $n=3$ | $P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}\right]^{-1}=0{,}193$ | 0,056 | 6,61 | 631 |
| $n=4$ | $P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}\right]^{-1}=0{,}18$ | 0,013 | 6,91 | 556 |

Сравнивая доходы, поступающие от СМО, можно отметить, что при увеличении каналов от одного до трех доход растет и становится наибольшим при $n=3$. Это значение и является оптимальным количеством каналов.

***Пример 2*** – На склад в среднем прибывают 5 машин в час. Разгрузку осуществляют три бригады грузчиков. Среднее время разгрузки машины – 1 ч. В очереди в ожидании разгрузки могут находиться не более трех машин. Найти основные характеристики СМО с ожиданием и оценить эффективность её работы.

*Решение*

Основные параметры системы: число каналов $n$ = 3 бригады; число мест в очереди $m$ = 3 машины; среднее время обслуживания $t_{обс}$ = 1 ч; интенсивность потока заявок $\lambda=5$ машин в час; интенсивность обслуживания $\mu=1/t_{обс}=1/1=1$ ч$^{-1}$; относительная нагрузка на систему $\rho=\lambda/\mu=5/1=5$ машин. Вероятность свободного состояния системы

$$P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}\right]^{-1}=$$

$$=\left[1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^3}{3!}\cdot\frac{\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^{3+1}}{1-\frac{5}{3}}\right]^{-1}=0{,}00438,$$

т. е. грузчики работают практически без отдыха.

$P_k$ – финальные вероятности состояния системы (вероятности того, что обслуживанием заявок заняты $k$ каналов) при $(1 \le k \le n)$:

$$P_1 = \frac{\rho^1}{1!} P_0 = \frac{5}{1!} 0{,}00438 = 0{,}022; \qquad P_2 = \frac{\rho 2}{2!} P_0 = \frac{5^2}{2!} 0{,}00438 = 0{,}055;$$

$$P_3 = \frac{\rho 3}{3!} P_0 = \frac{5^3}{3!} 0{,}00438 = 0{,}091.$$

$P_{n+r}$ – вероятности того, что $r$ заявок находится в очереди при занятом количестве каналов $n$: $P_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} P_0$ $(1 \le r \le m)$.

$$P_{3+1} = \frac{5^{3+1}}{3^1 \cdot 3!} 0{,}00438 = 0{,}152; \quad P_{3+2} = \frac{5^{3+2}}{3^2 \cdot 3!} 0{,}00438 = 0{,}253;$$

$$P_{3+3} = \frac{5^{3+2}}{3^3 \cdot 3!} 0{,}00438 = 0{,}422.$$

Проверяем: 0,00438 + 0,022 + 0,055 + 0,091 + 0,152 + 0,253 + 0,422 $\approx$ 1.

Вероятность отказа в обслуживании прибывшей на склад машины

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 = 0{,}422.$$

То есть вероятность отказа составляет 42 %.

Относительная пропускная способность $q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0{,}422 = 0{,}578$. То есть вероятность того, что поступившая на склад машина будет разгружена, составляет 57,8 %.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda q = 5 \cdot 0{,}578 = 2{,}89$ маш./ч.

Среднее число машин в очереди находим по формуле

$$\bar{r} = P_0 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = 0{,}00438 \frac{5^{3+1}}{3!3} \frac{1 - \left(\frac{5}{3}\right)^3 \left(3 + 1 - 3\frac{5}{3}\right)}{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2} = 1{,}926 \text{ машин.}$$

Среднее время пребывания машины в очереди $\bar{t}_{\text{ож}} = \dfrac{\bar{r}}{\lambda} = \dfrac{1{,}926}{5} = 0{,}385$ ч.

Среднее время пребывания машины на складе $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{ож}} + \frac{1}{\mu} q =$ $= \bar{t}_{\text{ож}} + q \cdot \bar{t}_{\text{об}} = 0{,}385 + 0{,}578 \cdot 1 = 0{,}963$ ч, что сравнимо со средним временем разгрузки машины.

Можно сделать вывод, что разгрузка машин на складе организована не очень эффективно, поскольку вероятность отказа в обслуживании составляет 42 %, и вероятность того, что три заявки находятся в очереди при занятом количестве каналов $n$ = 3, самая большая, т. е. нужно увеличить число грузчиков.

**Задание**

Необходимо решить три задачи по указанию преподавателя.

**Содержание отчета**: тема и цель работы; условие задачи по варианту; подробное описание хода решения задачи; результаты.

***Задача 1.*** Секретарю директора предприятия поступает в среднем 1,2 телефонных вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора 3 мин. Найти характеристики СМО и оценить эффективность её работы.

***Задача 2.*** Автосервис с одним каналом обслуживания (одной бригадой проведения осмотра) работает круглосуточно. На осмотр и выявление поступает в среднем 25 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить основные характеристики функционирования СМО и оценить эффективность её работы.

***Задача 3.*** На станции метро пять кассовых аппаратов. Из наблюдений установлено, что к этим пяти аппаратам подходят в среднем 60 чел./мин. Время обслуживания считается распределенным по показательному закону, со средним временем обслуживания 10 с. Определить основные характеристики функционирования СМО и оценить эффективность её работы.

***Задача 4.*** В справочном бюро справки о наличии лекарств в аптеках даются по двум телефонам. В среднем за 1 мин поступают четыре запроса, время обслуживания каждого требования в среднем составляет 50 с. Определить основные характеристики СМО, считая все потоки простейшими.

***Задача 5.*** В таксопарке три диспетчера принимают заказы на вызов машин и обеспечивают своевременное обслуживание клиентов. В среднем за каждый час поступает 120 заявок, длительность регистрации заявки равна в среднем 1 мин. Определить основные характеристики СМО, считая все потоки простейшими, и оценить эффективность работы СМО.

***Задача 6.*** В билетной кассе работают три кассира, каждый из которых может обслужить трех пассажиров за 10 мин. Поток пассажиров простейший с интенсивностью 15 чел./ч. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения. Определить основные характеристики функционирования СМО и оценить эффективность её работы.

***Задача 7.*** Входной поток клиентов в парикмахерскую подчиняется закону Пуассона, его интенсивность – 12 чел./ч. Обслуживают посетителей три мастера, в среднем за один час мастер обслуживает двух человек, максимальная очередь – пять человек. Рассчитать основные характеристики функционирования СМО и оценить эффективность её работы.

***Задача 8.*** В билетной кассе работает один кассир, обслуживающий в среднем двух покупателей за 1 мин. Каждый час в среднем приходят покупать билеты 70 посетителей. Определить основные характеристики функционирования СМО и оценить эффективность её работы.

***Задача 9.*** В справочное многоканальное бюро аэропорта поступает в среднем 8 звонков за 1 мин. Средняя длительность разговора – 0,5 мин. Каждый звонок приносит доход 6 д. е., а содержание одного канала обходится в 4 д. е. в час. Найти оптимальное число телефонисток (каналов) и установить все основные характеристики СМО при оптимальном числе телефонисток.

***Задача 10.*** Сервис-центр занимается посреднической деятельностью по продаже железнодорожных билетов и осуществляет часть своей деятельности по нескольким телефонным линиям. В среднем в сервис-центр поступает 95 звонков в час. Среднее время обслуживания каждого звонка составляет 2,5 мин. Каждый звонок приносит доход 3 д. е., а содержание одного канала обходится в 2 д. е. в час. Найти оптимальное число телефонных линий (каналов) и определить основные характеристики функционирования СМО.

***Задача 11.*** В магазине самообслуживания необходимо установить кассовые аппараты. Известно, что в течение часа магазин посещают 96 человек, наибольшая очередь к кассе – восемь человек, среднее время обслуживания клиента – 2,5 мин. Каждый покупатель приносит доход 1,5 д. е., а содержание одного кассового аппарата (канала) обходится в 0,5 д. е./ч. Считая поток покупателей простейшим, определить оптимальное количество кассовых аппаратов (каналов обслуживания) и основные характеристики СМО.

***Задача 12.*** Решается вопрос об установке в студенческом компьютерном магазине определенного количества принтеров. Скорость печати принтера в среднем составляет 18 страниц в минуту. Каждый файл в среднем содержит по 5 страниц. Печать начинается сразу после поступления файла на порт принтера. Среднее время между поступлениями файлов на принтер составляет 2 мин. Если в момент поступления файла на печать принтер занят, то задания выстраиваются в неограниченную очередь. Каждый заказ приносит доход 8 д. е., а содержание одного принтера обходится в 4 д. е./ч. Определить оптимальное количество принтеров и основные характеристики СМО.

***Контрольные вопросы***

1 Что такое поток событий? Какой поток событий называется простейшим? Что такое интенсивность потока событий?

2 Что такое абсолютная и относительная пропускная способность СМО?

3 Каковы основные показатели эффективности многоканальной СМО с отказами? Многоканальной СМО с ограниченной очередью? Многоканальной СМО с неограниченной очередью?

## Список литературы

1 **Белько, И. В.** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учебное пособие / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. – Минск ; Москва : Новое знание ; ИНФРА-М, 2016. – 299 с. : ил.

2 **Дорогов, В. Г.** Введение в методы и алгоритмы принятия решений : учебное пособие / В. Г. Дорогов, Я. О. Теплова ; под ред. Л. Г. Гагариной. – Москва : ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2016. – 240 с.

3 **Есипов, Б. А.** Методы исследования операций : учебное пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2013. – 304 с. : ил.

4 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов. В. А. Сакович. И. И. Холод : под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2013. – 352 с.

5 **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 4-е изд., испр. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2015. – 512 с. : ил.

6 **Невежин, Ю. В.** Исследование операций и принятие решений в экономике : сборник задач и упражнений : учебное пособие для вузов / В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин. – Москва : Форум ; ИНФРА-М, 2015. – 400 с.