

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

*Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов направлений подготовки
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
и 09.03.04 «Программная инженерия»
дневной формы обучения*



Могилев 2018

УДК 004.3:60
ББК 32.973.26-018.2:53.6
С 22

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления»
«25» мая 2018 г., протокол № 13

Составители: канд. техн. наук, доц. К. В. Захарченков;
канд. техн. наук, доц. Т. В. Мрочек

Рецензент Ю. С. Романович

Методические рекомендации содержат описание двенадцати лабораторных работ, выполнение которых закрепляет материал, изложенный в курсе «Системный анализ». Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск	А. И. Якимов
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2018



Содержание

Введение.....	4
1 Разработка методики системного анализа.....	5
2 Решение неструктурированных задач. Метод предпочтений	7
3 Решение неструктурированных задач. Метод ранга	9
4 Решение неструктурированных задач. Метод Саати	11
5 Решение слабо структурированных задач на основе метода анализа иерархий.....	144
6 Решение слабо структурированных задач. Кластерный анализ.....	177
7 Принятие решений в условиях многокритериальности. Методика экспресс-анализа альтернатив.....	20
8 Принятие решений в условиях многокритериальности. Модифицированный алгоритм Кемени-Снелла.....	21
9 Принятие решений в условиях многокритериальности. Методы ELECTRE.....	233
10 Принятие решений в условиях многокритериальности. Векторная оптимизация.....	26
11 Принятие решений в условиях риска при многих критериях. Метод дерева целей.....	299
12 Принятие решений в условиях риска при многих критериях. Метод функционально-стоимостного анализа (ФСА)	31
Список литературы	33



Введение

Целью дисциплины «Системный анализ» является формирование профессиональных компетенций в области использования научного инструментария (методы, модели, алгоритмы и программные средства) принятия решений в сложных системных задачах с различной степенью структуризации с использованием перспективных компьютерных технологий.

Системный анализ – междисциплинарный курс, обобщающий методологию исследования сложных технических, природных и социальных систем.

Системный анализ – методология обоснования решений в условиях существенной неопределенности, объединяющая общую схему системного подхода с аналитическим процессом принятия решений.

Целью применения системного анализа к конкретной проблеме является повышение степени обоснованности принимаемого решения, расширение множества вариантов, среди которых производится выбор, с одновременным указанием способов отбрасывания тех из них, которые заведомо уступают другим.

Согласно классификации, предложенной Г. Саймоном и А. Ньюэллом, все множество проблем системного анализа, в зависимости от глубины их познания, подразделяется на три следующих класса [2, 4].

Хорошо структурированные проблемы – многовариантные, по существу, и количественно сформулированные проблемы, в которых основные зависимости выяснены настолько хорошо, что они могут быть выражены в числах или символах, а в результате решения получаются количественные оценки. Для решения хорошо структурированных проблем применяется методология исследования операций. Исследование операций использует математический аппарат линейного, целочисленного, нелинейного и динамического программирования, теории оптимизации, сетевого планирования и управления, управления запасами, теории массового обслуживания.

Неструктурированные, или качественно выраженные, проблемы содержат только описание важнейших признаков и характеристик, при этом количественные зависимости между ними неизвестны. В неструктурированных проблемах применяются методы принятия решений в условиях неопределенности (теория игр), а также экспертные методы, эвристическое программирование.

Слабо структурированные проблемы содержат как количественные, так и качественные малоизвестные и неопределенные зависимости. Для решения таких проблем применяются статистические и вероятностные методы, векторная оптимизация, методы корреляционного, регрессионного и кластерного анализа, методы, использующие нечеткие множества, методы искусственного интеллекта (нейронные сети, генетические алгоритмы).

В методических рекомендациях изучаются наиболее известные методы принятия решений в неструктурированных и слабо структурированных задачах (в которых имеют место большая начальная неопределенность проблемной ситуации и многокритериальность), при решении которых применяется системный подход.

1 Разработка методики системного анализа

Цель: изучить различные методики системного анализа, основы классификации систем, основные этапы разработки методики системного анализа конкретной задачи.

1.1 Теоретические положения

Укрупненный системный анализ содержит следующие этапы: постановку задачи, структурирование системы, построение и исследование модели. Не все перечисленные этапы имеют формальный аппарат, поэтому на современном уровне системный анализ не является строгим научным методом, некоторые этапы и задачи выполняются на основе логики, инженерного опыта и интуиции.

Существует множество разновидностей методик системного анализа, однако в большинстве своем они имеют ряд сходных этапов. Методика системного анализа в общем случае включает семь основных этапов (рисунок 1.1) [1–3].

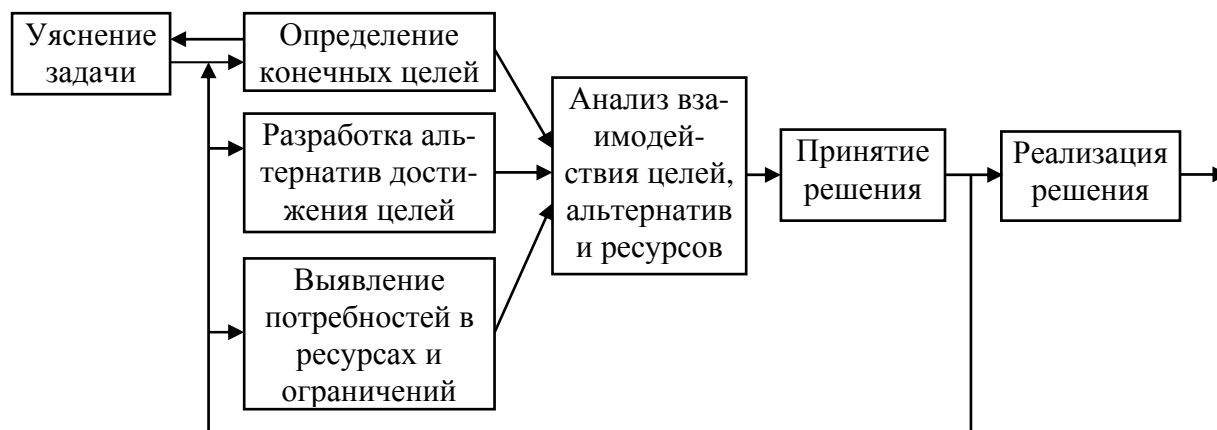


Рисунок 1.1 – Этапы методологии системного анализа

На этапе уяснения задачи исследуется все доступное окружение (физическое, техническое, экономическое и социальное) в поисках методов, аналогов и элементов для анализируемой или разрабатываемой системы, а также выявляются потребности. Цель этапа – получить описание начальной неопределенной ситуации в виде набора данных, позволяющих сформулировать цели, определяющие дальнейший процесс исследования. При этом осуществляются предварительный выбор и классификация элементов и параметров системы (входные, выходные, управляющие и т. д.), определяются основные связи между параметрами и компонентами системы, а также сценарии развития системы и прогнозные оценки будущих ситуаций. На данном этапе следует сформулировать объект и предмет исследования. **Объектом исследования** принято называть явление, процесс, которые порождают проблематику, затронутую в конкретной работе. **Предмет исследования** – это отдельное свойство объекта, вопрос или проблема, находящаяся в его рамках. При выделении предмета изучения следует ответить на вопрос: «Что конкретно изучается?». Таким образом, объект – это то,

что изучают, а предмет – свойство объекта, подлежащее изучению.

Двусторонняя связь между начальными этапами объясняется тем, что нельзя сформулировать цель, не имея каких-либо представлений об условиях, при которых будет осуществляться реализация цели. Обратная связь после этапа принятия решения к этапам «Определение конечных целей», «Разработка альтернатив достижения целей», «Выявление потребных ресурсов» отражает принцип цикличности процедур системного анализа.

В разрабатываемой системе все ее свойства и характеристики проектируются с учетом достижения конечной цели. **Цель** – это желаемый результат деятельности, достижимый в пределах некоторого интервала времени. Описание цели может начинаться со следующих слов: выявить, исследовать, установить, оценить, проанализировать, разработать, обосновать, изучить и т. д. Цель не должна дословно повторять тему работы или отличаться от нее лишь несколькими словами. Поскольку глобальную цель обычно не удастся связать со средствами ее достижения, то осуществляется разбиение (декомпозиция) генеральной цели на более мелкие локальные цели, позволяющие выявить средства их достижения. Здесь используется метод поэтапного расчленения генеральной цели на составные элементы (метод дерева целей).

Так как цели неотделимы от средств их достижения, то далее разрабатываются альтернативы (в том числе новые) достижения поставленных целей. На данном этапе осуществляются постановка задач исследования, корректировка параметрических и структурных моделей объекта и проводится синтез и анализ облика управляющей системы, которая позволяет реализовать сформулированные цели. **Задачи исследования** – это последовательные шаги, которые обеспечивают достижение поставленной цели и конкретизируют ее. Формулировка задачи должна начинаться с глагола в утвердительной форме: выявить, разработать, проанализировать, решить, провести, обобщить, исследовать сущность, систематизировать, уточнить и дополнить, обосновать и т. д.

Цель этапа «Выявление потребностей в ресурсах и ограничений» заключается в выявлении для системы потребных ресурсов по процессам жизненного цикла, ограничений по отдельным видам ресурсов, возможности замещения ограниченных видов ресурсов.

На этапе «Анализ взаимодействия целей, альтернатив и ресурсов» разрабатываются модели ситуаций и операций, выполняемых системой; формируются критерии оценки эффективности системы; выбираются шкалы измерения критериев; проводится моделирование системы; выявляются неопределенности и анализируется их влияние на результаты расчетов; проводится анализ системы в целом с учетом результатов моделирования и неформализуемой информации.

На этапе принятия решения осуществляется выбор наиболее удачного варианта, передаваемого на реализацию, или происходит возврат к начальным этапам анализа для изменения конечных целей, поиска новых альтернатив и уточнения ограничений в их осуществлении.

Методика системного анализа разрабатывается и применяется для организации процесса принятия решений в сложных ситуациях, когда у лиц, принимающих решения (ЛПР), на начальном этапе нет достаточных сведений о про-



блемной ситуации, позволяющих выбрать метод ее формализованного представления, сформировать математическую модель или применить подход к моделированию, сочетающий качественную и количественную информацию [3].

В таких случаях используется представление объекта в виде системы, организация процесса коллективного принятия решений с привлечением специалистов различных областей знаний, с использованием разных методов формализованного моделирования и методов активизации интуиции ЛПР, со сменой методов по мере познания объекта (или ситуации).

При составлении методики системного анализа в ней отражается последовательность этапов, определяемая структурой методики; кратко характеризуются сущность этапа, методы и сроки его выполнения, исполнители и ЛПР; при необходимости изменения последовательности выполнения этапов в конце характеристики этапа оговариваются условия возврата к предшествующим этапам или переход к выбранному последующему.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя, классифицировать систему (в соответствии с [3]) и разработать методику системного анализа проблемы.

Содержание отчета: тема и цель работы; классификация анализируемой системы; методика системного анализа для решения проблемы.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое системный анализ и для решения каких задач он предназначен?
- 2 В каких случаях разрабатывается методика системного анализа?
- 3 Классификация систем.

2 Решение неструктурированных задач. Метод предпочтений

Цель: изучить основы применения метода предпочтений.

2.1 Теоретические положения

Алгоритм метода предпочтений содержит следующие этапы [4].

1 Составляется исходная матрица предпочтений (таблица 2.1). Для этого каждый из m экспертов выполняет ранжирование n альтернатив по предпочтению, используя числа натурального ряда. Наиболее важной цели присваивается оценка (ранг) 1, менее важной – 2 и т. д. Матрица имеет размер $m \times n$, и каждая экспертная оценка принимает значения $1 \leq a_{ij} \leq n$ ($i = 1, m; j = 1, n$).

2 Составляется модифицированная матрица предпочтений с оценками $B_{ij} = n - a_{ij}$ (таблица 2.2).



Таблица 2.1 – Исходная матрица предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)			
	A1	A2	A3	A4
Э1	4	1	3	2
Э2	3	1	2	3
Э3	4	2	1	3

Таблица 2.2 – Модифицированная матрица предпочтений

Эксперты	Альтернативы (факторы)			
	A1	A2	A3	A4
Э1	0	3	1	2
Э2	1	3	2	1
Э3	0	2	3	1

3 Находятся суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

$$C_j = \sum_{i=1}^m B_{ij}. \text{ В данном примере } C_1 = 0 + 1 + 0 = 1; C_2 = 3 + 3 + 2 = 8; C_3 = 6; C_4 = 4.$$

4 Находится сумма всех оценок: $C = \sum_{j=1}^n C_{ij}$. В рассматриваемом примере

$$C = 1 + 8 + 6 + 4 = 19.$$

5 Искомые веса альтернатив $\omega_j = C_j / C$. При этом $\sum \omega_j = 1$.

В рассматриваемом примере $\omega_1 = 1/19$; $\omega_2 = 8/19$; $\omega_3 = 6/19$; $\omega_4 = 4/19$.

Чем больше вес, тем более предпочтительной, по мнению экспертов, является альтернатива. Таким образом, получена следующая ранжировка альтернатив: A1, A3, A4, A2.

Проверка согласованности экспертных оценок проводится для определения отсутствия резких различий в суждениях экспертов. Если мнения экспертов резко различаются, то выявляют причины и уточняют некоторые оценки.

В случае определения согласованности между ранжировками большого (более двух) числа экспертов рассчитывается **коэффициент конкордации W (коэффициент Кендалла)** – общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из m экспертов:

$$W = \frac{12 S}{m^2 (n^3 - n)},$$

где S – квадрат отклонения, вычисляемый по формуле

$$S = \sum_{i=1}^n \left(S_j - \frac{m(n+1)}{2} \right)^2.$$

Здесь S_j – суммы оценок (рангов), указанных экспертами для каждой из

альтернатив: $S_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}$.

В рассматриваемом примере $S_1 = 4 + 3 + 4 = 11$; $S_2 = 4$; $S_3 = 6$; $S_4 = 8$. Отсюда $S = 27$ и $W = 0,6$.



Коэффициент W может принимать значения от 0 до 1. Его равенство единице означает, что все эксперты присвоили объектам одинаковые ранги. Чем ближе значение W к нулю, тем менее согласованными являются оценки экспертов. Если W больше 0,5, то согласованность считается достаточной.

Согласованность между ранжировками двух экспертов можно определить с помощью коэффициента ранговой корреляции ρ :

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{j=1}^n d_j^2}{n(n^2 - 1)},$$

где d_j – разность между оценками (рангами), присвоенными j -й альтернативе первым и вторым экспертами, $d_j = a_{1j} - a_{2j}$.

Величина ρ может изменяться в диапазоне от -1 до $+1$. При полном совпадении оценок коэффициент равен единице. Равенство коэффициента минус единице наблюдается при наибольшем расхождении в мнениях экспертов.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую метод предпочтений и проверку согласованности мнений экспертов.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; ранжировка альтернатив; проверка согласованности между ранжировками экспертов.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое ранг и ранжировка?
- 2 В чем суть метода предпочтений?
- 3 Когда используют коэффициенты конкордации и ранговой корреляции?

3 Решение неструктурированных задач. Метод ранга

Цель: изучить основы использования метода ранга.

3.1 Теоретические положения

Алгоритм метода ранга содержит следующие этапы.

1 Составляется исходная матрица балльных оценок альтернатив. Для этого каждый из m экспертов указывает оценки n альтернатив по 10-балльной шкале. Матрица имеет размер $m \times n$, и каждая экспертная оценка принимает значения $1 \leq a_{ij} \leq 10$ ($i = 1, m; j = 1, n$).

2 Находятся суммарные оценки всех экспертов по каждой из альтернатив:



$$C_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}. \text{ Находится сумма всех оценок: } C = \sum_{j=1}^n C_j.$$

3 Искомые веса альтернатив $\omega_j = C_j / C$. При этом $\sum \omega_j = 1$.

Чем больше вес, тем более предпочтительной, по мнению экспертов, является альтернатива.

Проверка согласованности экспертных оценок. Для этого рассчитываются дисперсии (оценки разброса) оценок для каждого эксперта и для каждой альтернативы в следующем порядке.

1 Находятся средние оценки каждой альтернативы: $\bar{a}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}$.

2 Находятся дисперсии оценок каждого эксперта:

$$D_{\partial i} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \bar{a}_j)^2.$$

Данная величина показывает отклонение оценок, указанных i -м экспертом для альтернатив, от средних оценок этих альтернатив. Чем больше величина, тем больше отличие мнения i -го эксперта от остальных экспертов.

3 Находятся дисперсии оценок каждой альтернативы:

$$D_{aj} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (a_{ij} - \bar{a}_j)^2.$$

Данная величина показывает различие оценок, указанных экспертами для j -й альтернативы. Чем больше величина, тем больше расхождение мнений экспертов в отношении данной альтернативы.

Если величина $D_{\partial i}$ оказывается большой (оценки i -го эксперта сильно отличаются от оценок, указанных другими экспертами), то i -му эксперту предлагается обосновать свои оценки. Если большой оказывается величина D_{aj} (оценки j -й альтернативы у экспертов сильно отличаются), то следует проанализировать причины таких расхождений.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую метод ранга и проверку согласованности мнений экспертов.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; ранжировка альтернатив; проверка согласованности экспертных оценок.



Контрольные вопросы

- 1 Какая шкала используется при получении балльных оценок альтернатив?
- 2 Перечислить этапы метода ранга.
- 3 Как выполняется проверка согласованности экспертных оценок?

4 Решение неструктурированных задач. Метод Саати

Цель: изучить основы использования метода Саати при сборе экспертных оценок, их проверке и обработке.

4.1 Теоретические положения

Метод Саати основан на попарном сравнении альтернатив, выполняемом одним экспертом [3, 4]. Для каждой пары альтернатив эксперт указывает, насколько одна из них предпочтительнее другой. Рассмотрим пример применения метода.

Пример – Предприятие выбирает математический пакет на основе консультации с экспертом. Имеется возможность выбора из следующих альтернатив n : MATLAB (A1), Maple (A2), Mathcad (A3), Mathematica (A4). Решение на основе метода Саати принимается следующим образом.

1 Эксперт заполняет в матрице парных сравнений размера $n \times n$ элементы, лежащие выше главной диагонали, в соответствии со шкалой из таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – Шкала относительной важности

Уровень важности	Количественное значение
i -я и j -я альтернативы равноценны	1
i -я альтернатива немного предпочтительнее j -й	3
i -я альтернатива предпочтительнее j -й	5
i -я альтернатива значительно предпочтительнее j -й (значительное (большое) превосходство)	7
i -я альтернатива явно предпочтительнее j -й	9

Если i -я альтернатива менее предпочтительна, чем j -я, то указываются обратные оценки (1/3, 1/5, 1/7, 1/9). Могут использоваться промежуточные оценки (2, 4, 6, 8 и 1/2, 1/4, 1/6, 1/8). Например, если i -я альтернатива совсем немного лучше j -й, то можно использовать оценку $a_{ij} = 2$.

На главной диагонали ставятся единицы. Элементы, лежащие ниже главной диагонали, заполняются с использованием свойства обратной симметричности матрицы парных сравнений, т. е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$ для всех номеров $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть эксперт заполнил матрицу парных сравнений (таблица 4.2).



Таблица 4.2 – Матрица парных сравнений

	A1	A2	A3	A4
A1	1	5	7	9
A2	1/5	1	1/3	3
A3	1/7	3	1	5
A4	1/9	1/3	1/5	1

В данной матрице элемент $a_{13} = 7$ означает, что альтернатива A1 значительно предпочтительнее, чем A3. Элемент $a_{23} = 1/3$ означает, что A2 немного менее эффективна, чем A3.

2 Рассчитываются цены альтернатив (корень n -й степени извлекается из произведения элементов строки): $C_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}$. В данном примере $C_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = 4,21$; $C_2 = 0,67$; $C_3 = 1,21$; $C_4 = 0,29$.

3 Находится сумма цен альтернатив: $C = \sum_{i=1}^n C_i$.

Для рассматриваемого примера $C = 4,21 + 0,67 + 1,21 + 0,29 = 6,38$.

4 Искомые веса альтернатив $\omega_i = C_i/C$. При этом $\sum \omega_i = 1$. Чем больше вес, тем более предпочтительной, по мнению экспертов, является альтернатива.

В данном примере $\omega_1 = 4,21/6,38 = 0,66$; $\omega_2 = 0,11$; $\omega_3 = 0,19$; $\omega_4 = 0,04$.

Проверка экспертных оценок на непротиворечивость. Проверка позволяет выявить ошибки, которые мог допустить эксперт при заполнении матрицы парных сравнений [4]. Логические ошибки (противоречия) могут быть следующими: например, эксперт указывает, что альтернатива A1 хуже, чем A2, а альтернатива A2 хуже, чем A3, но при этом эксперт указывает также, что A1 лучше, чем A3. Пример матрицы парных сравнений, содержащей такую ошибку, приведен в таблице 4.3. Или эксперт указывает, что альтернатива A1 значительно хуже, чем A2, а альтернатива A2 значительно хуже, чем A3, но при этом эксперт указывает также, что A1 лишь немного хуже, чем A3. Пример матрицы парных сравнений с такой ошибкой отображен в таблице 4.4.

Таблица 4.3 – Первый пример ошибки в заполнении матрицы парных сравнений

	A1	A2	A3
A1	1	1/3	2
A2	3	1	1/5
A3	1/2	5	1

Таблица 4.4 – Второй пример ошибки в заполнении матрицы парных сравнений

	A1	A2	A3
A1	1	1/7	1/3
A2	7	1	1/6
A3	3	6	1

При математической проверке на непротиворечивость выполняются следующие этапы.



1 Находятся суммы столбцов матрицы парных сравнений: $Q_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$.

В данном примере $Q_1 = 1,45$; $Q_2 = 9,33$; $Q_3 = 8,53$; $Q_4 = 18$.

2 Рассчитывается вспомогательная величина λ путем суммирования произведений сумм столбцов матрицы и весов альтернатив: $\lambda = \sum_{j=1}^n Q_j \omega_j$.

$$\lambda = 1,45 \cdot 0,66 + 9,33 \cdot 0,11 + 8,53 \cdot 0,19 + 18 \cdot 0,04 = 4,32.$$

3 Находится индекс согласованности ИС: $ИС = (\lambda - n)/(n - 1)$.

В данном примере $ИС = (4,32 - 4)/(4 - 1) = 0,107$.

4 Находится величина случайной согласованности СлС в зависимости от размерности n матрицы парных сравнений в соответствии с таблицей 4.5.

Таблица 4.5 – Зависимость величины случайной согласованности СлС от размерности n матрицы парных сравнений

Размерность матрицы	3	4	5	6	7	8	9	10
СлС	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В данном примере (для $N = 4$) СлС = 0,90.

5 Находится отношение согласованности: $ОС = ИС / СлС$.

Если отношение согласованности превышает 0,2, то требуется уточнение матрицы парных сравнений.

В данном примере $ОС = 0,107/0,9 = 0,119$. Таким образом, уточнение экспертных оценок не требуется.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую метод Саати и проверку экспертных оценок на непротиворечивость.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; ранжировка альтернатив; результаты проверки экспертных оценок на непротиворечивость.

Контрольные вопросы

1 Как заполняется матрица парных сравнений в методе Саати?

2 Перечислить этапы метода Саати.

3 Как выполняется проверка экспертных оценок на непротиворечивость?



5 Решение слабо структурированных задач на основе метода анализа иерархий

Цель: изучить принципы решения слабо структурированных задач на основе выбора множества недоминируемых альтернатив и использования метода анализа иерархий.

5.1 Теоретические положения

Метод анализа иерархий (МАИ) (Analytic Hierarchy Process – АНП) состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений ЛПР по парным сравнениям. В результате может быть выражена численно относительная степень взаимодействия элементов в иерархии.

Постановка задачи, решаемой с помощью МАИ, обычно следующая. Дано: общая цель (или цели) решения задачи; альтернативы; критерии оценки альтернатив. Требуется выбрать наилучшую альтернативу. Например: предприятие выбирает программное обеспечение (ПО). Имеется пять альтернатив (A1...A5). При выборе учитываются три критерия, различные по важности: цена (K1); качество документации (K2); отказоустойчивость (K3) (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Характеристики альтернатив

Критерии оценки альтернатив	A1	A2	A3	A4	A5
Цена, д. е.	5000	5500	10000	6000	8000
Качество документации	Хорошее	Низкое	Отличное	Среднее	Среднее
Отказоустойчивость	Высокая	Высокая (немного лучше, чем для A1)	Очень высокая	Очень высокая	Высокая

Для начала нужно попытаться сократить число альтернатив, из которых будет отбираться наилучшая альтернатива, т. е. упростить принятие решения.

Множество Парето представляет собой множество альтернатив, обладающих следующим свойством: любая из альтернатив, входящих во множество Парето, хотя бы по одному критерию лучше любой другой альтернативы, входящей в это множество. Поэтому множество Парето называют также множеством недоминируемых альтернатив: в нем отсутствуют альтернативы, явно (по всем критериям) отстающие от какой-либо другой альтернативы [3, 4].

Выбор множества Парето. Все альтернативы попарно сравнивают друг с другом по всем критериям. Если при сравнении альтернативы A_i с A_j оказывается, что одна из них, например, A_j , не лучше другой ни по одному критерию, то ее можно исключить из рассмотрения как неперспективную.

Выберем множество Парето для данного примера (таблица 5.2). Сравним, например, альтернативы A1 и A2. По цене и качеству документации A1 лучше, чем A2, но по отказоустойчивости A2 лучше, чем A1. Ни одну из альтернатив



исключить нельзя, т. к. по одним критериям лучше А1, а по другим – А2.

Таблица 5.2 – Характеристики альтернатив

Сравниваемые альтернативы	Альтернатива, наилучшая по данному критерию			Альтернативы, вошедшие во множество Парето
	Цена, д. е.	Качество документации	Отказоустойчивость	
А1 и А2	А1	А1	А2	А1 и А2
А1 и А3	А1	А3	А3	А1 и А3
А1 и А4	А1	А1	А4	А1 и А4
А1 и А5	А1	А1	Одинаковы	А1 (А5 исключена)
А2 и А3	А2	А3	А3	А2 и А3
А2 и А4	А2	А4	А4	А2 и А4
А3 и А4	А4	А3	Одинаковы	А3 и А4

Таким образом, во множество Парето вошли альтернативы А1, А2, А3, А4. Именно из них будет выбираться наилучшая альтернатива.

Выбор рационального решения на основе МАИ.

1 Выполняется структурирование задачи и построение иерархического представления задачи (древовидного или сетевого), включающего все элементы, учитываемые при решении задачи (рисунок 5.1). На первом уровне иерархии всегда находится одна вершина – цель проводимого исследования. На втором уровне указываются критерии, по которым делается выбор, на третьем – альтернативы, из которых делается выбор с учетом критериев.

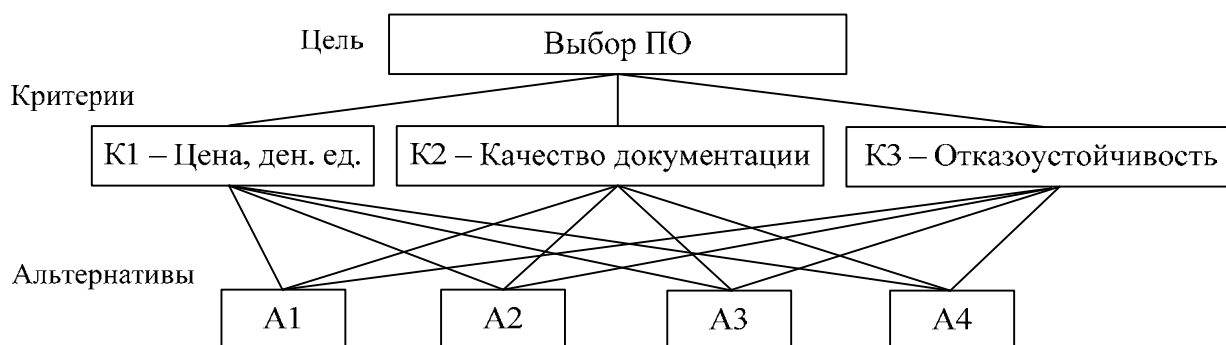


Рисунок 5.1 – Иерархическое представление многокритериальной задачи выбора альтернатив по методу анализа иерархий

2 Выполняется попарное сравнение всех элементов задачи с помощью матриц парных сравнений по правилам метода Саати. Сначала сравниваются критерии по их важности (таблица 5.3). Затем сравниваются альтернативы по каждому критерию (таблица 5.4). Размерность каждой матрицы равна числу сравниваемых элементов. Матрицы обрабатываются по правилам метода Саати.

3 На основе матриц парных сравнений вычисляются оценки важности критериев, локальные приоритеты – оценки предпочтительности альтернатив по каждому из критериев и глобальные приоритеты – обобщенные оценки предпо-

чительности альтернатив.

Чем больше глобальный приоритет, тем лучше альтернатива (с учетом всех критериев, а также с учетом их важности). В данном случае наилучшей является альтернатива А3, несколько хуже – А4, еще хуже – А1 и А2.

Таблица 5.3 – Матрица парных сравнений критериев выбора ПО

	К1	К2	К3	$C_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}$	Локальные приоритеты (оценки важности критериев) $L_{Ki} = C_i / C$ (где $C = \sum_{i=1}^n C_i$)
К1	1	5	1/9	0,82	0,16
К2	1/5	1	1/7	0,31	0,06
К3	9	7	1	3,98	0,78

Таблица 5.4 – Матрица сравнения альтернатив по отдельным критериям

По критерию К1 – цена, д. е.								
	А1	А2	А3	А3	$C_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}$	Локальный приоритет (оценка важности критериев) $L_{Ai}^{Ki} = C_i / C$ (где $C = \sum_{i=1}^n C_i$)	Глобальный приоритет альтернативы $G_{Ai} = \sum_{Ai} (L_{Ai}^{Ki} L_{Ki})$	
А1	1	3	9	5	3,41	0,56		Для А1: $G_{A1} = 0,56 \cdot 0,16 +$ $+ 0,26 \cdot 0,06 +$ $+ 0,07 \cdot 0,78 = 0,16$
А2	1/3	1	7	3	1,63	0,27		
А3	1/9	1/7	1	1/7	0,22	0,04		
А4	1/5	1/3	7	1	0,83	0,13		
По критерию К2 – качество документации								
А1	1	7	1/3	3	1,63	0,26	Для А2: $G_{A2} = 0,27 \cdot 0,16 +$ $+ 0,04 \cdot 0,06 +$ $+ 0,15 \cdot 0,78 = 0,16$	
А2	1/7	1	1/9	1/3	0,27	0,04		
А3	3	9	1	7	3,71	0,6		
А4	1/3	3	1/7	1	0,61	0,1		
По критерию К3 – отказоустойчивость								
А1	1	1/3	1/5	1/5	0,34	0,07	Для А3: $G_{A3} = 0,04 \cdot 0,16 +$ $+ 0,6 \cdot 0,06 +$ $+ 0,39 \cdot 0,78 = 0,35$	
А2	3	1	1/3	1/3	0,76	0,15		
А3	5	3	1	1	1,97	0,39		
А4	5	3	1	1	1,97	0,39		
							Для А4: $G_{A4} =$ $= 0,13 \cdot 0,16 + 0,1 \cdot 0,06 +$ $+ 0,39 \cdot 0,78 = 0,33$	

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую выбор множества Парето и метод анализа иерархий.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; множество Парето; результаты сравнения альтернатив по методу анализа иерархий.

Контрольные вопросы

- 1 Как производится выбор множества Парето?
- 2 Перечислить этапы метода анализа иерархий.
- 3 Что позволяют определить глобальные приоритеты альтернатив?

6 Решение слабо структурированных задач. Кластерный анализ

Цель: изучить основы использования метода максимина.

6.1 Теоретические положения

Кластерный анализ изучает методы упорядочивания объектов в сравнительно однородные группы. Если данные выборки представить как точки в пространстве признаков, то задача кластеризации сводится к определению «сгущений точек», т. е. поиску существующих структур (кластеров или классов).

Пример – Требуется выделить группы устройств (например, принтеров), имеющих сходные значения показателей (таблица 6.1). Оценки заданы экспертом по десятибалльной шкале: 1 – наилучшее устройство, 10 – наихудшее.

Таблица 6.1 – Информация об устройствах

Устройство	c1	c2	c3	c4	c5
Цена, д. е.	190	100	120	90	170
Экспертная оценка, балл	1	9	5	8	2

В данной задаче имеется 5 объектов ($M = 5$). Для их описания используются два признака ($N = 2$).

Поскольку анализируемые признаки должны быть безразмерными, а их значения должны находиться в некотором ограниченном диапазоне (например, от нуля до единицы), то выполняется нормирование признаков путем деления на максимальное значение или на основе стандартизации [4].

Выполним нормирование путем деления на максимальное значение. Для признака «Цена» максимальное значение равно 190, для признака «Экспертная оценка» – 9. Разделим каждое значение признака на соответствующее максимальное значение (таблица 6.2). Данный метод нормирования используется при небольшом количестве анализируемых объектов.

При нормировании на основе стандартизации необходимо сначала найти среднее значение и стандартное отклонение каждого признака.

Средние значения признаков \bar{A}_i ($i = \overline{1, M}$) определяются как
$$\bar{A}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{ij}.$$



Стандартное отклонение каждого признака $\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (X_{ij} - \bar{A}_i)^2}$.

Для рассматриваемого примера средние значения признаков $\bar{A}_1 = 134$ и $\bar{A}_2 = 5$; стандартное отклонение $\sigma_1 = 43,93$ и $\sigma_2 = 3,67$.

Нормированное значение признака $X_{ij}^{\text{станд}} = (X_{ij} - \bar{A}_i) / \sigma_i$.

Результатом являются безразмерные величины, большинство из которых принимают значения в диапазоне от -3 до 3 (таблица 6.3). Метод используется при большом количестве объектов.

Таблица 6.2 – Нормирование на основе деления на максимальное значение

Принтер	c1	c2	c3	c4	c5
Цена	1,00	0,53	0,63	0,47	0,89
Экспертная оценка	0,11	1	0,56	0,89	0,22

Таблица 6.3 – Нормирование на основе стандартизации

Принтер	c1	c2	c3	c4	c5
Цена	1,27	-0,77	-0,32	-1	0,82
Экспертная оценка	-1,09	1,09	0	0,82	-0,82

Рассмотрим решение задачи с помощью метода максимина [4].

1 Первый из объектов (см. таблицу 6.2) принимается в качестве прототипа первого кластера: $P_1 = X_1 = (1; 0,11)$. Принимается количество кластеров $K = 1$.

2 Определяются евклидовы расстояния от прототипа P_1 до всех остальных объектов (таблица 6.4). Евклидово расстояние между некоторыми объектами X_j

и X_k $D(X_j, X_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^M (X_{ij} - X_{ik})^2}$.

Например, расстояние между прототипом P_1 и объектом X_2 найдено следующим образом: $D(P_1, X_2) = \sqrt{(1 - 0,53)^2 + (0,11 - 1)^2} = 1,01$.

Из таблицы 6.4 видно, что наиболее удаленным от прототипа P_1 является объект X_2 . Он становится прототипом второго кластера: $P_2 = X_2 = (0,53; 1)$. Количество кластеров становится равным двум: $K = 2$.

Таблица 6.4 – Евклидовы расстояния от прототипа P_1 до всех остальных объектов

Объект	c1	c2	c3	c4	c5
$P_1 = X_1$	0	1,01	0,58	0,94	0,15

Таблица 6.5 – Результаты разбиения объектов на кластеры методом максимина

Объект	c1	c2	c3	c4	c5
$P_1 = X_1$	0	1,01	0,58	0,94	0,15
$P_2 = X_4$	1,01	0	0,46	0,12	0,86
Кластер	1	2	2	2	1

3 Определяется пороговое расстояние $T = D(P_1, P_2)/2$. Для данного примера $T = \sqrt{(1 - 0,53)^2 + (0,11 - 1)^2} / 2 = 1,01/2 \approx 0,5$.

4 Находятся евклидовы расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из имеющихся объектов-прототипов. По найденным расстояниям

выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представленному ближайшим прототипом, т. е. выбираются наименьшее расстояние в каждом столбце и соответствующий этому расстоянию кластер. Расстояния, а также результаты разбиения объектов на кластеры приведены в таблице 6.5.

5 В каждом кластере определяется объект Y_k , $k = \overline{1, K}$ (здесь k – номер кластера; K – количество кластеров), наиболее удаленный от прототипа своего кластера. Из таблицы 6.5 видно, что в первом кластере таким объектом является X_5 , во втором – X_3 . Таким образом, $Y_1 = X_5$, $Y_2 = X_3$.

6 Расстояния между наиболее удаленными объектами (найденными на шаге 5) и объектами-прототипами сравниваются с пороговым расстоянием. В данном примере наиболее удаленным объектом первого кластера оказался объект X_5 . Расстояние между этим объектом и прототипом P_1 равно 0,15; оно не превышает пороговое расстояние (0,5). Во втором кластере наиболее удаленным объектом является X_1 . Расстояние между этим объектом и прототипом P_2 равно 0,46; оно не превышает пороговое расстояние. Поскольку условие $D(P_k, Y_k) < T$ выполняется для всех кластеров, то алгоритм завершается. Окончательное количество кластеров $K = 2$. Если для некоторого объекта Y_k указанное условие не выполняется, то он становится прототипом нового кластера и количество кластеров увеличивается на единицу ($K = K+1$).

7 Находится новое пороговое расстояние $T = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K D(P_i, P_j)}{(K \cdot (K-1))}$.

8 Выполняется возврат к шагу 4.

Результаты распределения устройств по кластерам оказались следующими. К первому кластеру относятся принтеры с1, с5, ко второму – принтеры с2, с3, с4. Можно предложить следующую трактовку полученного разбиения. Первый кластер включает принтеры с высокими ценой и экспертными оценками, второй кластер – принтеры с низкими ценой и экспертными оценками.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую метод максимина.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; перечень групп объектов, имеющих сходные значения показателей.

Контрольные вопросы

- 1 Для чего используется нормирование признаков?
- 2 Что такое объект-прототип? Что такое пороговое расстояние?
- 3 Перечислить основные этапы метода максимина.



7 Принятие решений в условиях многокритериальности. Методика экспресс-анализа альтернатив

Цель: изучить основы использования методики экспресс-анализа альтернатив для многокритериального выбора управленческих решений.

7.1 Теоретические положения

Методика предназначена для отбора перспективных альтернатив, т. е. альтернатив, не имеющих существенных недостатков ни по одному из критериев. Методика рассчитана на применение в задачах, в которых большинство критериев являются числовыми [4]. Если в задаче есть качественные (выраженные в словесной форме) критерии, то для перехода к числовым оценкам можно использовать следующие процедуры.

1 Оценки по качественным критериям выражаются с помощью лингвистических оценок (таблица 7.1). Затем выполняется переход к числовым оценкам с использованием шкалы Харрингтона.

2 Для оценок, имеющих вид «да» – «нет» (т. е. выражающих наличие или отсутствие какого-либо показателя), обычно используются следующие числовые оценки: «да» – 0,67, «нет» – 0,33 (предполагается, что оценка «да» более желательна, чем «нет»).

Таблица 7.1 – Шкалы для формализации эвристической информации

Лингвистические оценки	Балльные оценки	Шкала Е. Харрингтона
Отлично	5	0,8...1
Хорошо	4	0,63...0,8
Удовлетворительно	3	0,37...0,63
Плохо	2	0,2...0,37
Очень плохо	1	0...0,2

Вначале в результате попарного сравнения альтернатив по всем критериям выбирается множество Парето.

Выбор множества перспективных альтернатив на основе методики экспресс-анализа реализуется в следующем порядке.

1 На основе оценок a_{ij} альтернатив по критериям получают безразмерные оценки p_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, где m – число критериев; n – число альтернатив):

– для максимизируемого критерия все оценки альтернатив по критерию делятся на максимальную из оценок по данному критерию: $p_{ij} = a_{ij} / \max_j a_{ij}$;

– для минимизируемого критерия минимальная из оценок по данному критерию делится на оценки альтернатив по данному критерию: $p_{ij} = \min_j a_{ij} / a_{ij}$;

– для качественных (словесных) критериев выполняется переход к число-

вым оценкам по шкале Харрингтона.

2 Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т. е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям: $p_j = \min_i p_{ij}$.

3 Экспертом из субъективных соображений назначается пороговое значение минимальной оценки p_0 , например, $p_0 = 0,5$.

4 Для дальнейшего анализа выбирается множество альтернатив, для которых $p_j > p_0$.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую методику экспресс-анализа альтернатив.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; диаграмма классов; множество перспективных альтернатив.

Контрольные вопросы

- 1 Как пользоваться шкалой Харрингтона?
- 2 Как выполняется переход от качественных к числовым оценкам?
- 3 Перечислить этапы методики экспресс-анализа альтернатив.

8 Принятие решений в условиях многокритериальности. Модифицированный алгоритм Кемени-Снелла

Цель: изучить основы использования модифицированного алгоритма Кемени-Снелла для многокритериального выбора управленческих решений.

8.1 Теоретические положения

Модифицированный алгоритм Кемени-Снелла предназначен для ранжирования альтернатив, оцениваемых по критериям различных видов – числовым, качественным, «да» – «нет», с учетом суждений эксперта о важности критериев.

Вначале в результате попарного сравнения альтернатив по всем критериям выбирается множество Парето.

Выбор альтернативы на основе модифицированного алгоритма Кемени-Снелла реализуется в следующем порядке [2, 4].

1 С помощью какого-либо метода экспертных оценок (например, метода Саати) находятся веса критериев, т. е. числовые оценки их важности.

2 Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из критериев. При этом лучшая альтернатива по данному критерию получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2 и т. д. Если альтернативы по данному критерию одинаковы, то они получают одинаковые оценки. Результаты ранжирования сво-



дятся в матрицу.

3 Составляется матрица парных сравнений по правилам, приведенным в таблице 8.1. Всего составляется m таких матриц, где m – число критериев.

Таблица 8.1 – Правила заполнения матриц парных сравнений в модифицированном алгоритме Кемени-Снелла

R_{jk}^i	Значение
1	По i -му критерию j -я альтернатива лучше k -й
-1	По i -му критерию j -я альтернатива хуже k -й
0	По i -му критерию j -я и k -я альтернативы одинаковы

4 Составляется матрица потерь размерности $n \times n$, где n – число альтернатив. Элементы матрицы потерь $R_{jk} = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot |R_{jk}^i - 1|$. Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент R_{jk} , тем больше отставание j -й альтернативы от k -й (тем хуже j -я альтернатива по сравнению с k -й).

5 Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находят суммы строк матрицы потерь. Смысл этих сумм следующий: сумма j -й строки представляет собой оценку отставания j -й альтернативы от всех остальных альтернатив. Альтернатива, которой соответствует минимальная сумма, предварительно считается лучшей. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы потерь. Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

6 Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются j -я и k -я альтернативы (при этом j -я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше k -й) и выполняется условие $R_{jk} \leq R_{kj}$ (где R_{jk} и R_{kj} – элементы матрицы потерь), то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах (j -я альтернатива лучше k -й). Если $R_{jk} > R_{kj}$, то альтернативы меняются местами (j -я альтернатива хуже k -й).

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую модифицированный алгоритм Кемени-Снелла.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; диаграмма классов [5]; ранжировка альтернатив.

Контрольные вопросы

- 1 Как заполняется матрица парных сравнений в изучаемом алгоритме?
- 2 Как составляется матрица потерь размерности?
- 3 Перечислить этапы модифицированного алгоритма Кемени-Снелла.

9 Принятие решений в условиях многокритериальности. Методы ELECTRE

Цель: изучить основы использования метода ELECTRE I для многокритериального выбора управленческих решений.

9.1 Теоретические положения

Методы ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalite – исключение и выбор, отражающие реальность) предназначены для решения задач, в которых из имеющегося множества альтернатив требуется выбрать заданное количество лучших альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям, а также важности этих критериев [4].

Рассмотрим суть одного из вариантов метода ELECTRE I на примере задачи, представленной таблицей 5.1. Имеются также суждения двух специалистов в отношении важности критериев. По мнению первого специалиста, наиболее важный критерий – цена, следующие по важности – качество документации и отказоустойчивость. По мнению второго специалиста, наиболее важный критерий – отказоустойчивость, менее важный – цена и еще менее важный – качество документации.

Во множество Парето вошли альтернативы A1, A2, A3, A4.

Найдем веса критериев. В данной задаче важность критериев оценивается двумя экспертами суждениями в виде матрицы балльных оценок (таблица 9.1). Поэтому для определения весов необходимо применить один из коллективных методов экспертных оценок, например, метод ранга.

Таблица 9.1 – Экспертные оценки важности критериев

	K1	K2	K3
1-й эксперт	9	7	7
2-й эксперт	7	5	9

Таблица 9.2 – Безразмерные оценки альтернатив

	A1	A2	A3	A4
K1	1,00	0,91	0,50	0,83
K2	0,7	0,3	1	0,5
K3	0,7	0,8	1	0,9

Выполнив обработку экспертных оценок по методу ранга, получим веса критериев $\omega_1 = 0,36$; $\omega_2 = 0,29$; $\omega_3 = 0,36$.

Выбор лучших альтернатив по методу ELECTRE I реализуется



в следующем порядке.

1 Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду. Эта операция может выполняться разными способами, например, так же, как в методике экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки приведены в таблице 9.2.

2 Определяются индексы согласия C_{jk} , $j = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}$ (где n – количество альтернатив) (таблица 9.3). В рассматриваемой реализации метода ELECTRE I индекс согласия находится как сумма весов критериев из подмножества K^+ , в котором j -я альтернатива не хуже k -й: $C_{jk} = \sum_{i \in K^+} \omega_i$. Чем больше индекс согла-

сия, тем более выражена степень согласия с предположением о превосходстве j -й альтернативы над k -й.

Таблица 9.3 – Матрица индексов согласия

	A1	A2	A3	A4
A1	–	0,65	0,36	0,65
A2	0,36	–	0,36	0,36
A3	0,65	0,65	–	0,65
A4	0,36	0,65	0,36	–

Таблица 9.4 – Матрица индексов несогласия

	A1	A2	A3	A4
A1	–	0,1	0,3	0,3
A2	0,4	–	0,7	0,2
A3	0,5	0,41	–	0,33
A4	0,2	0,08	0,5	–

Найдем, например, индекс согласия C_{12} (оценку согласия с предположением о превосходстве альтернативы A1 над A2). Альтернатива A1 не хуже альтернативы A2 по критериям K1 (цена) и K2, отсюда $C_{12} = \omega_1 + \omega_2 = 0,65$. Аналогично найдем индекс согласия C_{21} . Альтернатива A2 не хуже, чем A1, по критерию K3, поэтому $C_{21} = 0,29 + 0,17 + 0,24 = 0,70$.

3 Определяются индексы несогласия D_{jk} , $j = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}$ по формуле

$$D_{jk} = \max_{i \in K^-} (p_{ik} - p_{ij}),$$

где p_{ik}, p_{ij} – безразмерные оценки альтернатив (см. таблицу 9.2);

K^- – подмножество критериев, по которым j -я альтернатива не превосходит k -ю.

Таким образом, индекс несогласия D_{jk} находится как максимальная из разностей оценок по критериям, по которым j -я альтернатива не лучше k -й (таблица 9.4). Чем больше индекс несогласия, тем больше степень несогласия с предположением о том, что j -я альтернатива лучше k -й.

Найдем, например, индекс несогласия D_{12} (оценку несогласия с предположением о превосходстве альтернативы A1 над A2). Альтернатива A1 не имеет превосходства над A2 по критерию K3. Разность безразмерных оценок по этому критерию $0,8 - 0,7 = 0,1$. Таким образом, $D_{12} = 0,1$.

Аналогично найдем индекс несогласия D_{21} . Альтернатива A2 не имеет



превосходства над А1 по критериям К1, К2. Разность оценок по этим критериям $1 - 0,91 = 0,09$; $0,7 - 0,3 = 0,4$. Таким образом, $D_{21} = 0,4$.

4 Для каждой j -й альтернативы находится предельное значение индекса согласия как минимальный элемент j -й строки матрицы индексов согласия: $C_j = \min_k C_{jk}$. Эта величина отражает степень согласия с предположением о том, что j -я альтернатива имеет превосходство над всеми другими альтернативами.

Для данного примера $C_1 = 0,36$; $C_2 = 0,36$; $C_3 = 0,65$; $C_4 = 0,36$.

5 Для каждой j -й альтернативы находится предельное значение индекса несогласия как максимальный элемент j -й строки матрицы индексов несогласия: $D_j = \max_k D_{jk}$. Эта величина отражает степень несогласия с предположением о превосходстве j -й альтернативы над другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера $D_1 = 0,3$; $D_2 = 0,7$; $D_3 = 0,5$; $D_4 = 0,5$.

6 Выделяются лучшие альтернативы («ядро» альтернатив), удовлетворяющие условиям $C_j > C^*$; $D_j < D^*$, где C^* , D^* – пороговые значения индексов согласия и несогласия. Эти величины назначаются в зависимости от того, какое количество альтернатив нужно выбрать. Сначала обычно принимаются пороговые значения $C^* = 0,5$, $D^* = 0,5$; затем они изменяются (снижаются) в соответствии с количеством отбираемых альтернатив. Выбираются альтернативы, удовлетворяющие **обоим** условиям.

Пусть в рассматриваемом примере требуется выбрать один тип устройств.

Назначим пороговые значения $C^* = 0,5$, $D^* = 0,5$. Условию $C_j > C^*$ удовлетворяет альтернатива А3, условию $D_j < D^*$ – альтернатива А1. «Ядро» альтернатив не сформировано. Назначим пороговые значения $C^* = 0,5$, $D^* = 0,49$. Условию $C_j > C^*$ удовлетворяет альтернатива А3, условию $D_j < D^*$ – альтернативы А1, А3, А4. Таким образом, выбирается альтернатива А3.

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и написать программу, реализующую метод ELECTRE I.

Содержание отчета: тема и цель работы; текст программы; диаграмма классов; «ядро» альтернатив.

Контрольные вопросы

- 1 Охарактеризовать суть метода ELECTRE I.
- 2 Что показывают индекс согласия и индекс несогласия?
- 3 Как выделить «ядро» альтернатив?



10 Принятие решений в условиях многокритериальности. Векторная оптимизация

Цель: изучить различные методы решения задач векторной оптимизации.

10.1 Теоретические положения

Векторная оптимизация (многокритериальная оптимизация) – это нахождение оптимальных значений по нескольким критериям оптимальности (показателям эффективности или целевым функциям) [1, 2]. Далее на примере рассмотрены некоторые из методов решения задач векторной оптимизации, относящиеся к группе методов последовательного применения критериев.

Пример – Решить задачу методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10 % от его оптимального значения:

$$F(X) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ f_2 = 40x_1 + 10x_2 \rightarrow \max; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90; \\ x_1 + x_2 \leq 60; \\ x_2 \leq 50; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решить также данную задачу методом равных и наименьших относительных отклонений.

Метод последовательных уступок. В этом методе вместо многокритериальной задачи последовательно решается несколько однокритериальных задач (по числу критериев) и для каждого последующего критерия вводится дополнительное ограничение на величину предыдущего критерия (таблица 10.1).

Таблица 10.1 – Метод последовательных уступок

Номер этапа	Этап метода последовательных уступок	Пример вычислений
1	Устанавливается предпочтительность всех критериев, т. е. на первое место ставится самый важный критерий	В задаче указано, по какому критерию назначена уступка 10 %, поэтому первый критерий считают самым важным
2	Находится оптимальное решение f_1^* по самому важному критерию $f_1(X)$ с учетом системы ограничений (при этом остальные критерии будут рассматриваться на последующих этапах решения задачи). Это решение f_1^* обращает в экстремум самый важный критерий $f_1(X)$	Далее следует решить в <i>Excel</i> с помощью надстройки «Поиск решения» однокритериальную задачу ЛП по критерию f_1



Окончание таблицы 10.1

Номер этапа	Этап метода последовательных уступок	Пример вычислений
		$F(X) = \{f_1 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90; \\ x_1 + x_2 \leq 60; \\ x_2 \leq 50; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ Полученное оптимальное решение составит $f_1^* = 160$
3	ЛПР устанавливает величину уступки Δ_1 . Уступка назначается исходя из практических соображений с учетом малой точности, с которой известны входные данные, т. е. ЛПР согласно сделать эту уступку, чтобы максимизировать второй критерий	В соответствии с условием задачи величина уступки $\Delta_1 = 0,1 \cdot 160 = 16$
4	Решается задача по следующему критерию $f_2(X)$ с дополнительным ограничением. Если на этапе 2 решалась задача на поиск максимума критерия f_1 , то дополнительное ограничение $f_1(X) \geq f_1^* - \Delta_1$. Уступка здесь в меньшую сторону, т. к. максимум функции уже найден. В случае, если на этапе 2 решалась задача на поиск минимума критерия f_1 , то дополнительное ограничение имеет вид $f_1(X) \leq f_1^* + \Delta_1$. Уступка здесь в большую сторону, т. к. найден минимум функции	Дополнительное ограничение будет иметь вид $f_1(X) \geq f_1^* - \Delta_1$, т. е. $x_1 + 3x_2 \geq 160 - 16$. При решении в <i>Excel</i> задачи $F(X) = \{f_2 = 40x_1 + 10x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90; \\ x_1 + x_2 \leq 60; \\ x_2 \leq 50; \\ x_1 + 3x_2 \geq 144; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ получено оптимальное решение задачи $X^* = (18, 42)$
5	После нахождения оптимального решения f_2^* по критерию $f_2(X)$ назначается по нему уступка и решается задача по третьему критерию с двумя дополнительными ограничениями по первым двум критериям	По обоим ограничениям задачи решения получены
6	Решение задачи продолжается до тех пор, пока не будет найдено значение наименее важного критерия при уступках по остальным критериям	При подстановке вектора X^* в выражения для целевых функций получены значения экстремумов целевых функций $f_1(X^*) = 144$, $f_2(X^*) = 1140$

Метод равных и наименьших относительных отклонений. Вместо многокритериальной задачи решается несколько однокритериальных задач по каждому из критериев в отдельности следующим образом (таблица 10.2).



Таблица 10.2 – Метод равных и наименьших относительных отклонений

Номер этапа	Этап метода равных и наименьших относительных отклонений	Пример вычислений
1	Находится оптимальное решение f_k^* по каждому из критериев по отдельности. Система ограничений для каждого из критериев одна и та же. При решении только по первому критерию задачи вида $F(X) = \{f_1 = x_1 + 3x_2\} \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90; \\ x_1 + x_2 \leq 60; \\ x_2 \leq 50; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ получено $f_1^* = 160$	При решении только по второму критерию задачи вида $F(X) = \{f_2 = 40x_1 + 10x_2\} \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ получено $f_2^* = 1800$
2	Находится относительное отклонение ρ_k для каждого из f_k : $\rho_k = \left \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*} \right , \quad k = \overline{1, K},$ где f_k^* – экстремум по k -му критерию; $f_k(X)$ – k -й критерий (целевая функция); K – количество критериев	Относительные отклонения для каждого критерия $\rho_1 = \left \frac{160 - x_1 - 3x_2}{160} \right ;$ $\rho_2 = \left \frac{1800 - 40x_1 - 10x_2}{1800} \right $
3	На основе условия равенства относительных отклонений $\rho_1 = \rho_k$ к системе ограничений задачи добавляется равенство следующего вида (в количестве $K - 1$): $\left \frac{f_1^* - f_1(X)}{f_1^*} \right = \left \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*} \right .$ Перед ρ_k для минимизируемого критерия нужно ставить знак «минус»	Приравнивая величины отклонений $\rho_1 = \rho_2$, можно получить дополнительное ограничение вида $\frac{f_1(X)}{f_1^*} - \frac{f_2(X)}{f_2^*} = 0$: $23x_1 = 19x_2;$ $23x_1 - 19x_2 = 0$
4	Поскольку относительные отклонения должны быть наименьшими, итоговая целевая функция будет иметь следующий вид: $\rho = \rho_k \rightarrow \min,$ т. е. целевая функция представляет собой минимум относительного отклонения для какого-то одного критерия (любого, обычно последнего)	Окончательно задача примет вид: $\rho = 1 - \frac{40x_1 + 10x_2}{1800} \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90; \\ x_1 + x_2 \leq 60; \\ x_2 \leq 50; \\ 23x_1 - 19x_2 = 0; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ Решение: $X^* = (27,1; 32,9); f_1(X^*) = 125,7;$ $f_2(X^*) = 1414$

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и найти компромиссное решение задач обоими изучаемыми методами.



Содержание отчета: тема и цель работы; условия задач и математические модели задач по варианту; результаты решения с помощью надстройки *Excel* «Поиск решения» или в *Mathcad*.

Контрольные вопросы

- 1 Какие задачи рассматриваются в векторной оптимизации?
- 2 Что такое план решения задачи, оптимальный по Парето?
- 3 В чем сущность метода последовательных уступок и метода равных и наименьших относительных отклонений?

11 Принятие решений в условиях риска при многих критериях. Метод дерева целей

Цель: изучить основы применения метода дерева целей.

11.1 Теоретические положения

Дерево решений – это графическое изображение последовательности решений и состояний среды с указанием соответствующих вероятностей и выигрышей для любых комбинаций альтернатив и состояний среды [1, 3].

Процесс принятия решений с помощью дерева решений в общем случае предполагает выполнение следующих пяти этапов.

Этап 1. Формулирование задачи путем выделения существенных и несущественных факторов.

Этап 2. Построение дерева решений. При этом используются следующие условные обозначения: \square – решение (решение принимает игрок); \square^* – случай (решение «принимает» случай); // – отвергнутое решение. Иногда используются иные обозначения: \square – решающая вершина; \circ – «случайная» вершина.

Этап 3. Оценки вероятностей состояний среды (определяемых на основании имеющейся статистики либо экспертным путем), т. е. сопоставление шансов возникновения каждого конкретного события.

Этап 4. Установление выигрышей для каждой возможной комбинации альтернатив (действий) и состояний среды.

Этап 5. Принятие решения. Процедура принятия решения заключается в вычислении для каждой вершины дерева (при движении справа налево) ожидаемых денежных оценок (ОДО), отбрасывании неперспективных ветвей и выборе ветвей, которым соответствует максимальное значение ОДО. Ожидаемая денежная оценка рассчитывается как сумма произведений размеров выигрышей на вероятности этих выигрышей (пример расчета показан на рисунке 11.1).

Пример – Руководство компании решает, в какой проект вложить деньги – в проект А, Б или В. Размер выигрыша, который можно получить, зависит от



благоприятного или неблагоприятного состояния рынка (таблица 11.1). Вероятности состояний рынка неизвестны, поэтому принята гипотеза «50 на 50».

Таблица 11.1 – Размеры выигрышей

Действия компании	Выигрыш, тыс. д. е., при состоянии экономической среды	
	благоприятном	неблагоприятном
Проект А	320	–300
Проект Б	150	–40
Проект В	20	20

Таблица 11.2 – Прогноз фирмы

Прогноз фирмы	Фактически	
	Благоприятный	Неблагоприятный
Благоприятный	0,74	0,26
Неблагоприятный	0,29	0,71

Пусть перед тем, как принять решение о выборе проекта, руководство компании должно определить, заказывать ли дополнительное исследование состояния рынка фирме Ф или нет, причем данная услуга обойдется в 7 тыс. д. е. Дополнительное исследование по-прежнему не способно дать точной информации, но оно поможет уточнить ожидаемые оценки конъюнктуры рынка, изменив тем самым значения вероятностей. Предположим, что фирма Ф сделала следующий прогноз: ситуация будет благоприятной с вероятностью 0,48; ситуация будет неблагоприятной с вероятностью 0,52.

Относительно фирмы Ф известно, что она способна уточнить значения вероятностей благоприятного или неблагоприятного исхода. Возможности фирмы в виде условных вероятностей благоприятности и неблагоприятности рынка сбыта представлены в таблице 11.2. Например, когда фирма утверждает, что рынок благоприятный, то с вероятностью 0,74 этот прогноз оправдывается (с вероятностью 0,26 могут возникнуть неблагоприятные условия), прогноз о неблагоприятности рынка оправдывается с вероятностью 0,71.

На основе данных сведений можно построить дерево решений, где развитие событий происходит от вершины дерева к исходам, а расчет прибыли выполняется от конечных состояний к начальным (см. рисунок 11.1).

В результате анализа дерева решений можно сделать следующие выводы:

- рекомендуется проводить дополнительное исследование конъюнктуры рынка, поскольку это позволяет уточнить принимаемое решение;
- если фирма Ф прогнозирует благоприятную ситуацию на рынке, то целесообразно выбрать проект А (ожидаемая максимальная прибыль 158,8 тыс. д. е.), если прогноз неблагоприятный – проект В (ожидаемая максимальная прибыль 20 тыс. д. е.).

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и построить дерево целей.

Содержание отчета: тема и цель работы; условие задачи; дерево целей.



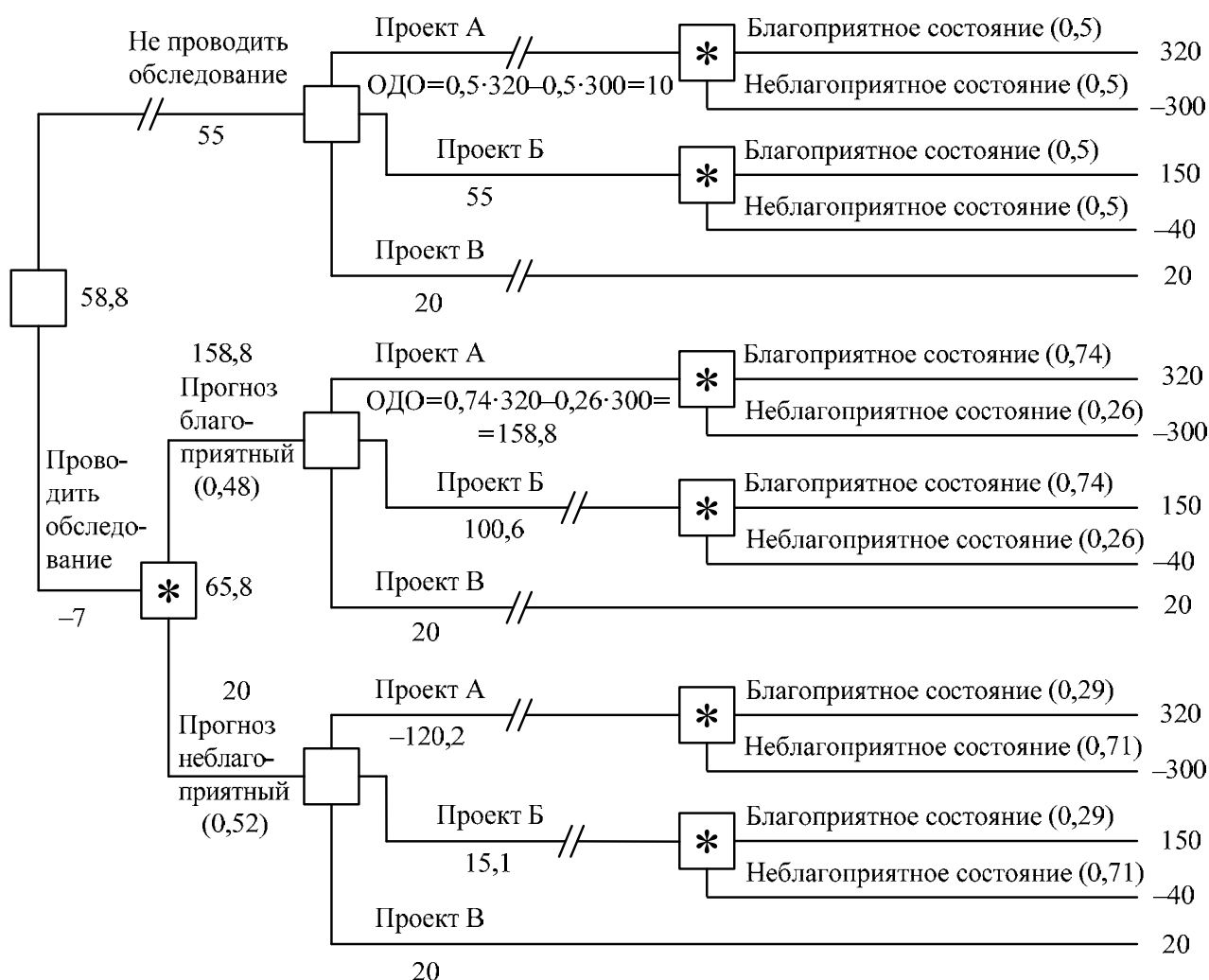


Рисунок 11.1 – Дерево целей

Контрольные вопросы

- 1 Когда применяется метод дерева целей?
- 2 Перечислить этапы метода дерева решений.
- 3 Что такое ожидаемая денежная оценка?

12 Принятие решений в условиях риска при многих критериях. Метод функционально-стоимостного анализа (ФСА)

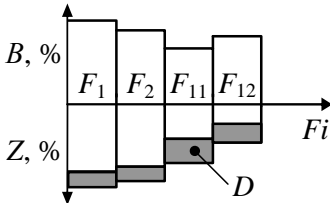
Цель: изучить теоретические аспекты проведения основных этапов ФСА.

12.1 Теоретические положения

ФСА – это метод системного исследования функций объектов, направленный на обеспечение необходимых потребительских свойств и минимальных затрат на их создание. Выполнение работ по ФСА предприятия в целом рекомендуется проводить в следующей последовательности (таблица 12.1) [1–3].



Таблица 12.1 – Этапы проведения ФСА предприятия

Этап	Наименование этапа	Выполняемые действия
1	2	3
1	Выделение анализируемой производственной системы (ПС)	Анализируемая ПС определяется как система со своими границами, входом и выходом. Цели и функции каждой подсистемы ПС (отдела, службы) подчинены целям и функциям предприятия в целом
2	Функциональный анализ	Анализ функций объекта с целью выделения главной и определения бесполезных (нейтральных и вредных) функций
2.1	Анализ основных функций системы	Исходя из требований, предъявляемых к анализируемому объекту, формулируются выполняемые им функции и строятся функциональные модели всех подсистем ПС
2.2	Анализ вспомогательных функций системы	По итогам анализа видов деятельности структурных подразделений (например, на основе оценки методом моментной фотографии рабочего дня) составляется список зависимых функций
2.3	Установление коэффициентов значимости функций	Определяется порядок (очередность) функций исходя из их значения. Коэффициент значимости устанавливается одним из методов экспертной оценки
2.4	Оценка степени исполнения функций	Оценивается в баллах (при этом принимаются во внимание качество, номенклатура, своевременность и т. д. той информации или действий тех служб, которые связаны с данной функцией и влияют на уровень ее выполнения)
2.5	Определение качества выполнения функций	Экспертным путем устанавливаются показатели нормативного уровня выполнения функций в баллах – за эталон принимают, например, идеальное качество исполнения (10 баллов)
2.6	Определение затрат на обеспечение функций	Затраты на каждую функцию складываются из затрат на заработную плату и материальных затрат
2.7	Построение функционально-стоимостной диаграммы (ФСД)	<p>Цель ФСД – выявление несоответствия между затратами на функцию и ее значимостью. Исходные данные для ФСД:</p> <ul style="list-style-type: none"> – номер функции F_1; – значимости функций (по методу расстановки приоритетов); – относительная важность функции B, %. Относительная важность функций первого уровня совпадает с их значимостью. Относительная важность остальных функций определяется путем произведения значимостей по ветке функций. Например, если значимости функций $F_1 = 0,634$, $F_{11} = 0,5$, $F_{111} = 0,366$, то для F_{111} относительная важность $B = 0,634 \cdot 0,5 \cdot 0,366 = 0,116$; – доля затрат на функцию Z, %; – дисбаланс $D = B - Z$. <p>Строится ФСД вида</p> 
2.8	Уточнение объекта дальнейшего анализа	Та из основных функций, которая была определена как бесполезная, становится уточненным объектом анализа на дальнейших этапах

Окончание таблицы 12.1

1	2	3
3	Анализ качества входов ПС	Качество входных параметров анализируется с точки зрения качества, количества, своевременности, формы. Выявляются нежелательные последствия, возникающие из-за некачественных или отсутствующих входов. Составляются конкретные предложения по устранению плохого качества входов
4	ФСА подчиненных структурных функций объекта	Этот этап проводится в том же порядке, что и этап 2. После получения соответствующих данных функционального анализа выполняется стоимостный анализ этих функций, затем проводятся разработка и оценка предложений, отбор оптимального варианта, обсуждение, одобрение и внедрение проекта

Задание

Необходимо получить задание у преподавателя и определить способы снижения затрат отдела предприятия методом дерева целей.

Содержание отчета: тема и цель работы; условие задачи; дерево целей; рекомендации по снижению затрат.

Контрольные вопросы

- 1 Каковы основные этапы ФСА предприятия? Каковы основные этапы ФСА конструкции предмета труда (устройства, узла, детали)?
- 2 Что отображается на функционально-стоимостной диаграмме?
- 3 Какие методы управления стоимостью лежат в основе ФСА?

Список литературы

- 1 **Андрейчиков, А. В.** Системный анализ и синтез стратегических решений в инноватике. Математические, эвристические и интеллектуальные методы системного анализа и синтеза инноваций : учебное пособие / А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. – 3-е изд. – Москва : ЛЕНАНД, 2015. – 306 с.
- 2 **Антонов, А. В.** Системный анализ : учебник / А. В. Антонов. – Москва : ИНФРА-М, 2017. – 366 с.
- 3 **Волкова, В. Н.** Теория систем и системный анализ : учебник для вузов / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – Москва : Юрайт, 2013. – 679 с.
- 4 **Сморodinский, С. С.** Системный анализ и исследование операций: лабораторный практикум для студентов специальности «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и дистанционной форм обучения / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2009. – 64 с.
- 5 **Рихтер, Д.** CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.5 на языке C# : пер. с англ. / Д. Рихтер. – 4-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2016. – 896 с. : ил.

