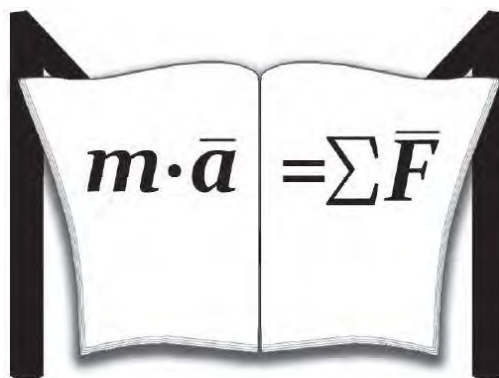


ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям для  
студентов направления подготовки 15.03.06 «Мехатроника  
и робототехника» дневной формы обучения*



Могилев 2018

УДК 539.3/6  
ББК 30.121  
С 64

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «7» марта 2018 г., протокол № 7

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;  
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов направления подготовки 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» дневной формы обучения, содержат материалы к практическим занятиям.

Учебно-методическое издание

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Е. С. Лустенкова

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 24.01.2014.  
Пр. Мира 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский  
университет», 2018



## Содержание

Введение.....	4
1 Сложное сопротивление бруса.....	5
1.1 Косой изгиб.....	5
1.2 Совместное действие изгиба и кручения.....	7
1.3 Внецентренное растяжение (сжатие).....	12
2 Энергетические методы определения перемещений.....	16
3 Расчет статически неопределимых стержневых систем.....	22
4 Устойчивость сжатых стержней.....	26
5 Принципы расчета конструкций при динамическом воздействии.....	33
Список литературы.....	37
Приложение А.....	38
Приложение Б.....	39
Приложение В.....	41
Приложение Г.....	42
Приложение Д.....	43



## Введение

Цель преподавания курса «Сопротивление материалов» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

Методические рекомендации содержат примеры решения задач по основным темам курса. Представлены задачи для самостоятельного решения с целью подготовки к занятиям, контрольным работам и экзамену. Также приведены контрольные вопросы по теории курса.



# 1 Сложное сопротивление бруса

## 1.1 Косой изгиб

**Пример 1** – Проверить прочность стальной балки двутаврового поперечного сечения, изображенной на рисунке 1.1, если  $[\sigma] = 170$  МПа.

Исходные данные: двутавр № 27 ( $W_x = 371$  см<sup>3</sup>;  $W_y = 41,5$  см<sup>3</sup>).

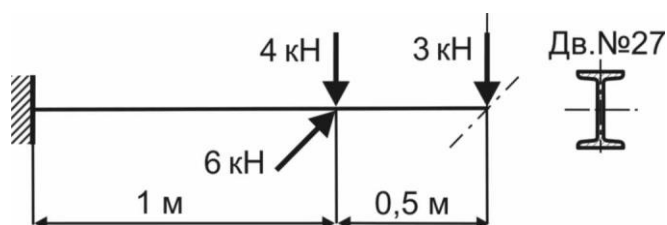


Рисунок 1.1

### Решение

На основании принципа независимости действия сил рассмотрим отдельно каждую плоскость нагружения [1, 2].

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости (рисунок 1.2, б). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.2, в).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,5$  м.

$$M_x = -3 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,5 \text{ м}; M_x = -1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 1$  м.

$$M_x = -3 \cdot (0,5 + z_2) - 4 \cdot z_2 = -1,5 - 7 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; M_x = -1,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 1 \text{ м}; M_x = -8,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

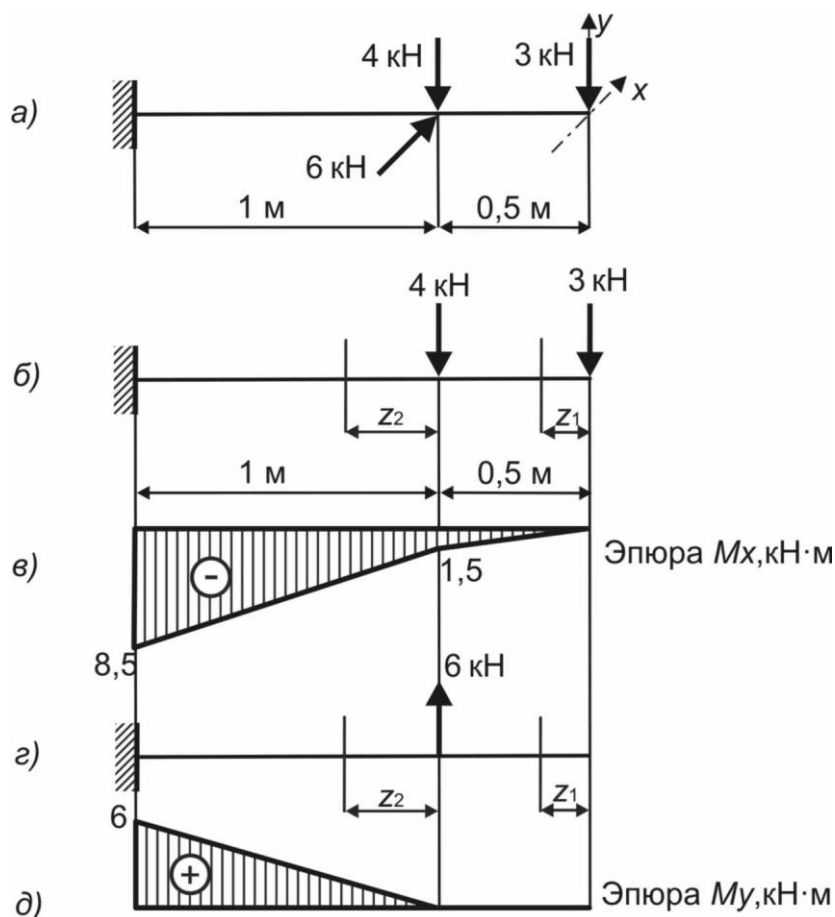


Рисунок 1.2

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости (рисунок 1.2, а). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.2, в).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,5$  м.

$$M_y = 0.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 1$  м.

$$M = -6 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; M_x = 0;$$

$$z_2 = 1 \text{ м}; M_x = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Условие прочности для опасного сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{8,5 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} + \frac{6 \cdot 10^3}{41,5 \cdot 10^{-6}} = 167,5 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 170 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

**Пример 2 (для самостоятельного решения)** – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 1.3.

Исходные данные:  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 2$  м,  $F_1 = 3$  кН,  $[\sigma] = 160$  МПа.

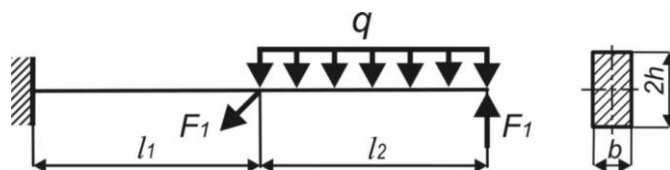


Рисунок 1.3

### Контрольные вопросы

- 1 Какой случай изгиба называется косым изгибом?
- 2 В чем состоит принцип независимости действия сил при расчете балки на косою изгиб?
- 3 Запишите формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе.
- 4 Сформулируйте условие прочности при косом изгибе.
- 5 Запишите выражение для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.
- 6 Нейтральная ось при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения?
- 7 Как определить опасные точки опасного сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 8 Возможен ли косою изгиб балки, если осевые моменты ее поперечного сечения равны?
- 9 Как определить прогиб балки при косом изгибе?

### 1.2 Совместное действие изгиба и кручения

**Пример 3** – Вал круглого сплошного поперечного сечения (рисунок 1.4, а) передает мощность 6 кВт, вращаясь с угловой скоростью 100 рад/с. На валу установлены шкив диаметром  $D_1 = 0,15$  м и шестерня, средний диаметр которой  $D_2 = 0,1$  м. Определить диаметр вала по четвертой теории прочности, если  $[\sigma] = 80$  МПа.

#### Решение

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (рисунок 1.4, б).



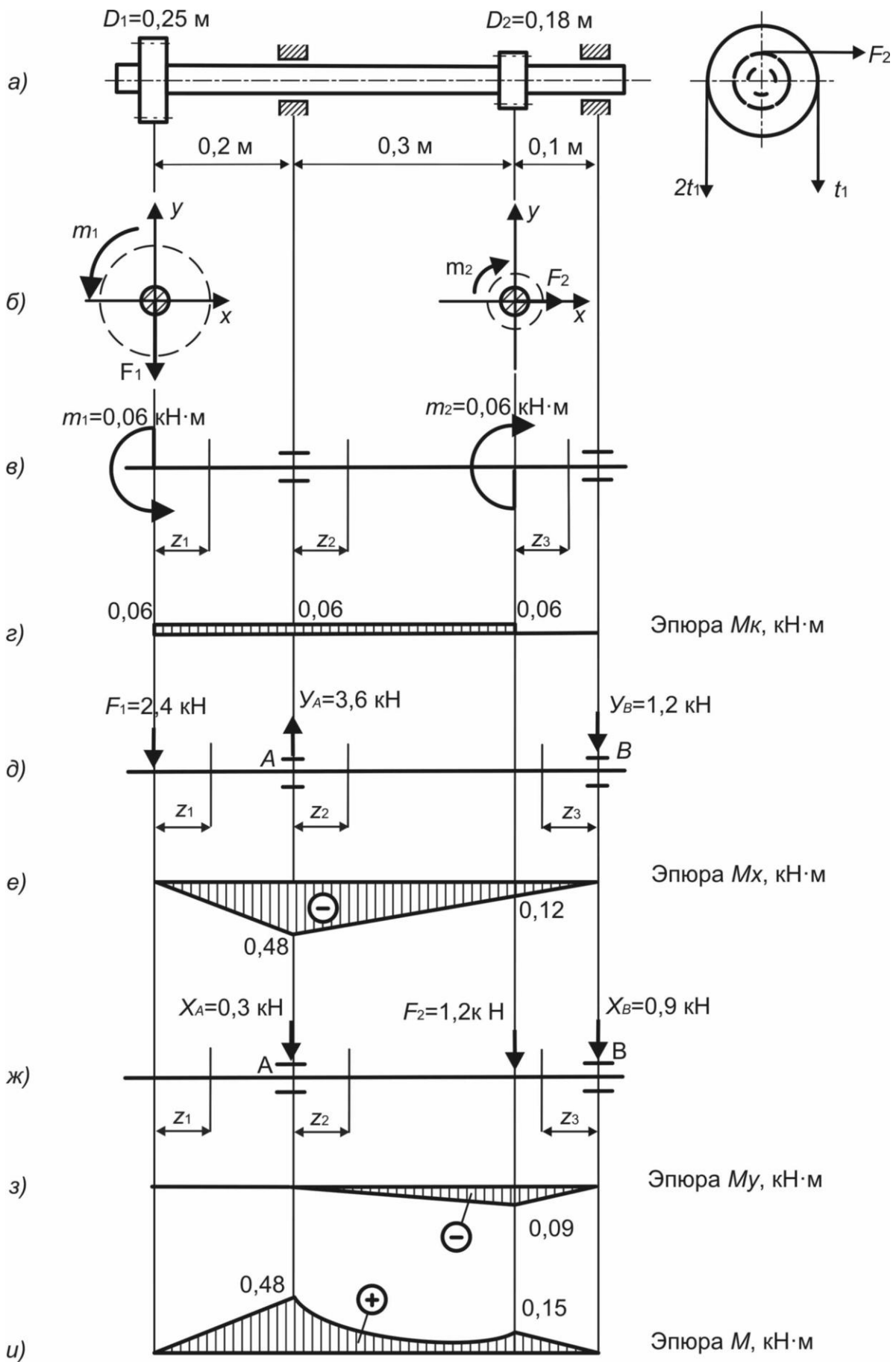


Рисунок 1.4



Определим внешние моменты на шкиве и шестерне [1–4]:

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{6}{100} = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал внешних моментов (рисунок 1.4, в).

Построение эпюры крутящих моментов (рисунок 1.4, з).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$ .  $M_K = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 0,3 \text{ м}$ .  $M_K = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 0,1 \text{ м}$ .  $M_K = 0,06 - 0,06 = 0$ .

Определим внешние силы, изгибающие вал со стороны шкива и шестерни:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,06}{0,15} = 2,4 \text{ кН};$$

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,06}{0,1} = 1,2 \text{ кН}.$$

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.4, д). Определим реакции опор:

$$\Sigma M_A = -Y_B \cdot 0,4 + 2,4 \cdot 0,2 = 0; \quad Y_B = 1,2 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = -Y_A \cdot 0,4 + 2,4 \cdot 0,6 = 0; \quad Y_A = 3,6 \text{ кН}.$$

Проверим расчет реакций:

$$\Sigma Y = -F_1 + Y_A - Y_B = -2,4 + 3,6 - 1,2 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 1.4, е).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$ .

$$M_X = -2,4 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_X = 0;$$

$$z_1 = 0,2 \text{ м}; \quad M_X = -0,48 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 0,3 \text{ м}$ .

$$M_X = -2,4 \cdot (0,2 + z_2) + 3,6 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_X = -0,48 \text{ кН}\cdot\text{м};$$



$$z_2 = 0,3 \text{ м}; M_X = -0,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 0,1 \text{ м}$ .

$$M_X = -1,2 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_X = 0;$$

$$z_3 = 0,1 \text{ м}; M_Y = -0,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал сил в горизонтальной плоскости (рисунок 1.4, д). Определим реакции опор:

$$\Sigma M_A = X_B \cdot 0,4 - 1,2 \cdot 0,3 = 0; X_B = 0,9 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = X_A \cdot 0,4 - 2,4 \cdot 0,1 = 0; X_A = 0,3 \text{ кН}.$$

Проверим расчет реакций:

$$\Sigma X = F_2 - X_A - X_B = 1,2 - 0,3 - 0,9 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости (рисунок 1.4, е).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$ .  $M_Y = 0$ .

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 0,3 \text{ м}$ .

$$M_Y = -3,6 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; M_Y = 0;$$

$$z_2 = 0,3 \text{ м}; M_Y = -0,09 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 0,1 \text{ м}$ .

$$M_Y = -0,9 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_Y = 0;$$

$$z_3 = 0,1 \text{ м}; M_Y = -0,09 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построение эпюры суммарных изгибающих моментов (рисунок 1.4, ж) в характерных сечениях вала, если  $M = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$ .



$$M = 0; M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M = \sqrt{0,09^2 + 0,12^2} = 0,15 \text{ кН}\cdot\text{м}. M = 0.$$

По эпюре суммарных изгибающих моментов  $M$  и эпюре крутящих моментов  $M_K$  определим опасное сечение. В этом сечении действуют наибольший изгибающий момент  $M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и наибольший крутящий момент  $M_K = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Эквивалентный момент по четвертой теории прочности в опасном сечении

$$M_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{0,48^2 + 0,75 \cdot 0,06^2} = 0,497 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{IV}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,497 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,039 \text{ м} = 39 \text{ мм}.$$

**Пример 4 (для самостоятельного решения)** – Проверить прочность вала, изображенного на рисунке 1.5, по третьей теории прочности.

Исходные данные:  $N = 20 \text{ кВт}$ ,  $n = 200 \text{ об/мин}$ ,  $D_1 = 0,4 \text{ м}$ ,  $D_2 = 0,24 \text{ м}$ ,  $l_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0,25 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $d = 55 \text{ мм}$ ,  $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ .

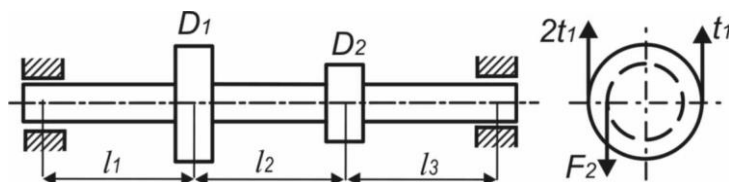


Рисунок 1.5

### Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение совместному действию изгиба и кручения.
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?
- 3 Как определяется внешний момент, если известна мощность, передаваемая колесом или шкивом?
- 4 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны колеса (шестерни)?
- 5 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны шкива?
- 6 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.
- 7 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?
- 8 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном

действию изгиба и кручения?

9 Какие точки поперечного сечения являются опасными при совместном действии изгиба и кручения?

10 Запишите выражения для определения эквивалентного момента по третьей и четвертой теориям прочности.

11 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

### 1.3 Внецентренное растяжение (сжатие)

**Пример 5** – Проверить прочность бруса (рисунок 1.6), изготовленного из материала, для которого  $[\sigma]_{сж} = 50$  МПа,  $[\sigma]_p = 20$  МПа.

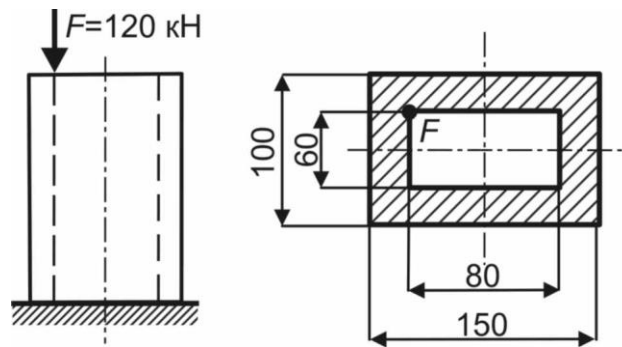


Рисунок 1.6

*Решение*

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения (рисунок 1.7).

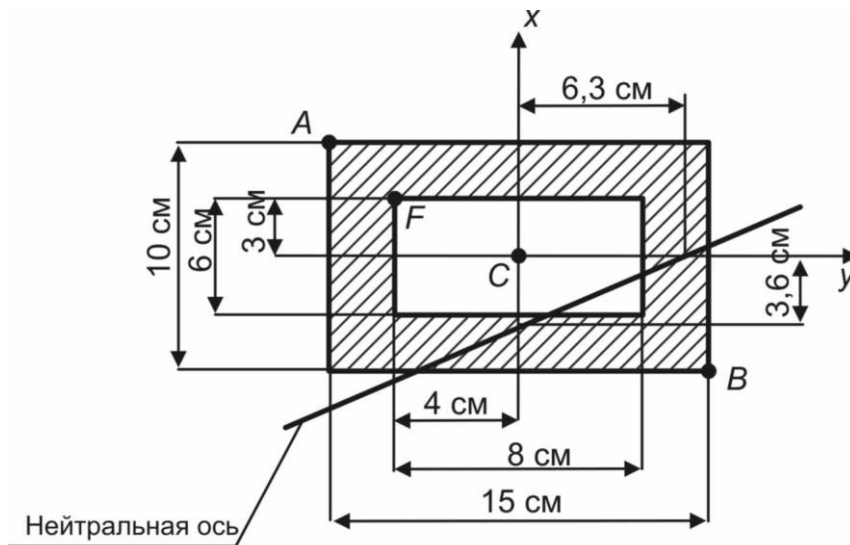


Рисунок 1.7

Площадь (таблица А.1):

$$A = 15 \cdot 10 - 8 \cdot 6 = 102 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции [2] (см. таблицу А.1)

$$I_x = \frac{15 \cdot 10^3}{12} - \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 1106 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{15^3 \cdot 10}{12} - \frac{8^3 \cdot 6}{12} = 2556,5 \text{ см}^4.$$

Осевые моменты сопротивления [2]

$$W_x = \frac{15 \cdot 10^3 - 8 \cdot 6^3}{6 \cdot 10} = 221,2 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{15^3 \cdot 10 - 8^3 \cdot 6}{6 \cdot 10} = 340,9 \text{ см}^3.$$

Квадраты радиусов инерции сечения [2]

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1106}{102} = 10,84 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{2556,5}{102} = 25,06 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы относительно центра тяжести

$$x_F = -4 \text{ см}; \quad y_F = 3 \text{ см}.$$

Внутренние силовые факторы

$$N = -120 \text{ кН};$$

$$M_x = \pm F \cdot y_F = \pm 120 \cdot 0,03 = \pm 3,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y = \pm F \cdot x_F = \pm 120 \cdot 0,04 = \pm 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Длины отрезков, которые нейтральная ось отсекает на главных центральных осях (см. рисунок 1.7):

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{25,06}{(-4)} = 6,3 \text{ см};$$



$$y_0 = -\frac{i_X^2}{y_F} = -\frac{10,84}{3} = -3,6 \text{ см.}$$

Нейтральная ось делит сечение на растянутую и сжатую области.

Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси: в сжатой области точка  $A$ , в растянутой области – точка  $B$  (см. рисунок 1.7).

Напряжения в опасных точках

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} - \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = -42,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} + \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = 18,6 \text{ МПа.}$$

Проверим выполнение условия прочности на растяжение:

$$\sigma_{\max}^P \leq [\sigma]_P; \quad \sigma_{\max}^P = 18,6 \text{ МПа} \leq [\sigma]_P = 20 \text{ МПа.}$$

Проверим выполнение условия прочности на сжатие:

$$\sigma_{\max}^{СЖ} \leq [\sigma]_{СЖ};$$

$$\sigma_{\max}^{СЖ} = 42,2 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{СЖ} = 50 \text{ МПа.}$$

Прочность бруса обеспечена.

**Пример 6 (для самостоятельного решения)** – Определить допускаемую нагрузку на бетонную колонну (рисунок 1.8).

Исходные данные  $b = 60 \text{ мм}$ ,  $h = 200 \text{ мм}$ ,  $r = 40 \text{ мм}$ , материал – бетон,  $[\sigma]_P = 4 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{СЖ} = 25 \text{ МПа}$ .

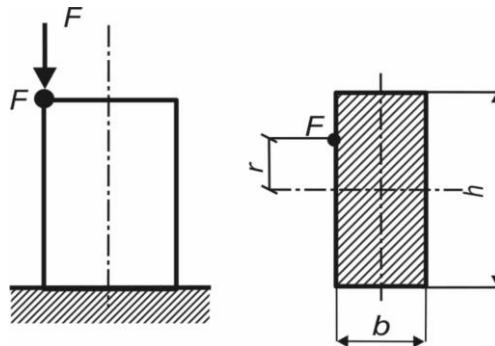


Рисунок 1.8

**Пример 7 (для самостоятельного решения)** – Построить ядро сечения для заданного бруса (рисунок 1.9).

Исходные данные:  $b = 800 \text{ мм}$ ,  $h = 120 \text{ мм}$ ,  $F = 8 \text{ кН}$ .

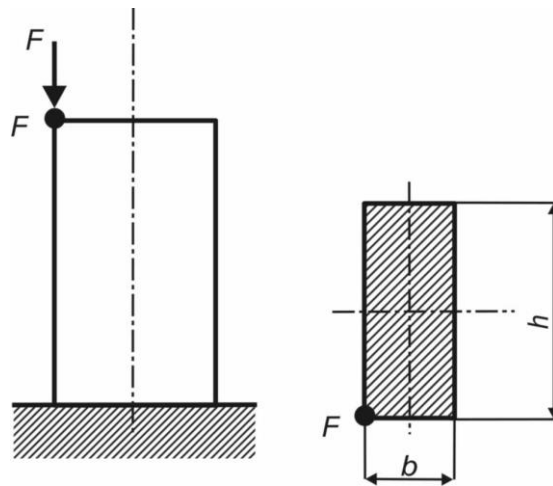


Рисунок 1.9

### **Контрольные вопросы**

- 1 Дайте определение внецентренному растяжению (сжатию).
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном растяжении (сжатии)?
- 3 Запишите выражение для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии).
- 4 Влияет ли на положение нейтральной оси величина и направление внецентренно приложенной нагрузки?
- 5 При внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная ось проходит через центр тяжести?
- 6 Как определить опасные точки сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 7 Какая точка сечения будет наиболее опасна, если брус изготовлен из хрупкого материала?
- 8 Что такое ядро сечения?
- 9 Запишите формулы для определения координат узловых точек ядра сечения.
- 10 Как пройдет нейтральная ось, если точка приложения силы будет находится на границе ядра сечения?

## 2 Энергетические методы определения перемещений

**Пример 1** – Для консольной балки постоянной жесткости (рисунок 2.1) определить прогиб в сечении  $C$  при помощи интеграла Мора. Проверить решение интеграла способом Верещагина.

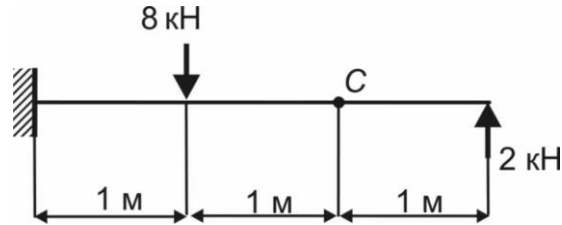


Рисунок 2.1

*Решение*

Определение прогиба в сечении  $C$  с помощью интеграла Мора.

Покажем грузовое (действительное) состояние балки, вызванное заданными нагрузками (рисунок 2.2, а).

Покажем единичное (фиктивное) состояние балки [1–4], вызванное действием единичной нагрузки (рисунок 2.2, б). В этом состоянии балка освобождается от заданных нагрузок, но в сечении  $C$  нагружена единичной силой  $\bar{F} = 1$ . Разбиваем балки на три участка.

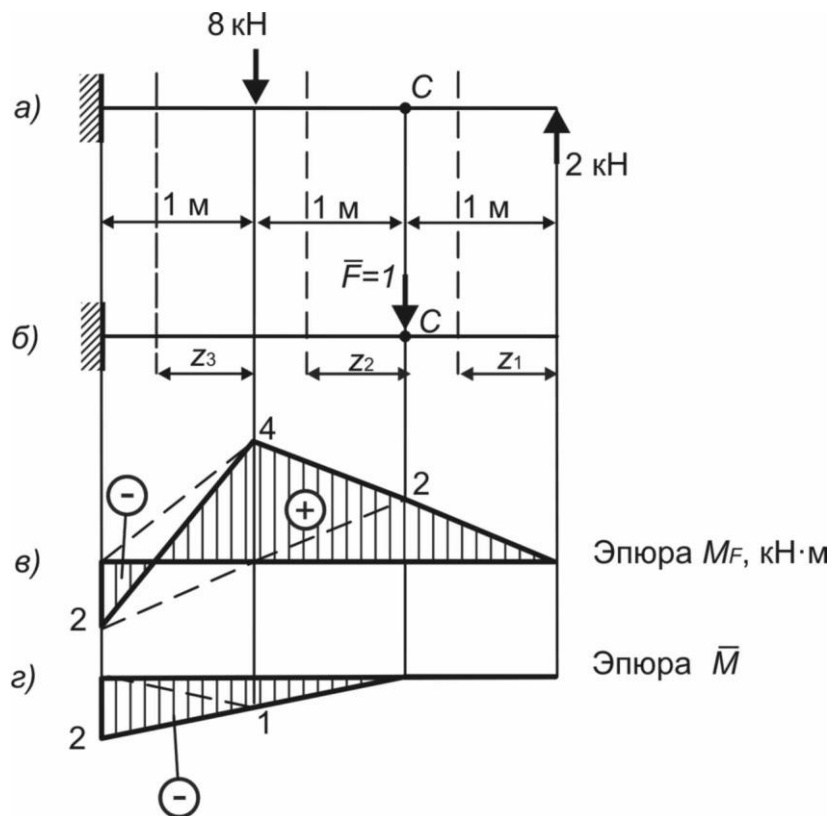


Рисунок 2.2



Составим уравнения для определения изгибающих моментов от заданных нагрузок.

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 1$  м.

$$M_F = 2 \cdot z_1.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 1$  м.

$$M_F = 2 \cdot (1 + z_2) = 2 + 2 \cdot z_2.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 1$  м.

$$M_F = 2 \cdot (2 + z_3) - 8 \cdot z_3 = 4 - 6 \cdot z_3.$$

Составим уравнения для определения изгибающих моментов от единичной нагрузки.

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 1$  м.

$$\bar{M} = 0.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 1$  м.

$$\bar{M} = -1 \cdot z_2.$$

Участок 3:  $0 \leq z_3 \leq 1$  м.

$$\bar{M} = -1 \cdot (1 + z_3) = -1 - z_3.$$

Запишем интеграл Мора для определения прогиба в сечении C [1–4]:

$$\Delta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left( \int_0^1 (2 + 2 \cdot z_2) \cdot (-1 \cdot z_2) dz + \int_0^1 (4 - 6 \cdot z_3) \cdot (-1 - z_3) dz \right) = -\frac{8}{3EI}.$$

Проверим решение интеграла способом Верещагина. Используя полученные выражения для определения изгибающих моментов от заданных нагрузок, построим грузовую эпюру  $M_F$  (рисунок 2.2, в). С помощью полученных выражений для определения изгибающих моментов от единичной нагрузки построим грузовую эпюру  $\bar{M}$  (рисунок 2.2, з).

Определим прогиб в сечении C, перемножая единичную и грузовую эпюры [1–4]:



$$\Delta_C = \sum_1^n \int_0^{l_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i}{EI_X} dz = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[ \left( -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) \right] = -\frac{8}{3EI}.$$

**Пример 2** – Для заданной стальной балки (рисунок 2.3) определить прогиб в сечении  $C$  способом Верещагина. Сечение балки состоит из двух двутавров № 18.

Дано: двутавр № 18 ( $I_{X_{об}} = 1290 \text{ см}^4$ ); модуль продольной упругости стали в соответствии с таблицей Б.1  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

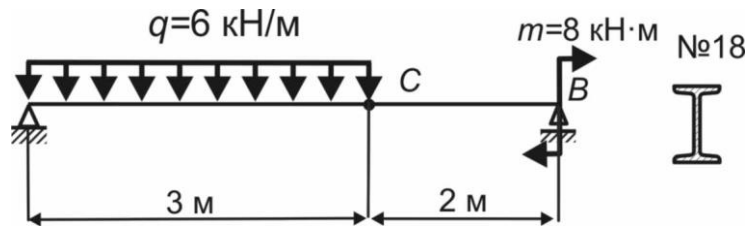


Рисунок 2.3

*Решение*

Рассмотрим грузовое состояние балки (рисунок 2.4, а). Определим реакции опор от заданной нагрузки (см. рисунок 2.4, а):

$$\sum M_A = R_B \cdot 5 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 - 8 = 0; \quad R_B = 7 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 5 + 6 \cdot 3 \cdot 3,5 - 8 = 0; \quad R_A = 11 \text{ кН}.$$

Проверим расчет реакций:

$$\sum Y = 11 - 6 \cdot 3 + 7 = 0$$

Построим грузовую эпюру  $M_F$  (рисунок 2.4, б).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$ .

$$M_F = 11 \cdot z_1 - 6 \frac{z_1^2}{2} = 11 \cdot z_1 - 3z_1^2;$$

$$z_1 = 0; \quad M_F = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; \quad M_F = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремум:  $Q = 11 - 6 \cdot z_1 = 0; \quad z_1 = \frac{11}{6} = 1,83 \text{ м}; \quad M_F = 10,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 3$  м.

$$M_F = -8 + 7 \cdot z_2.$$

$$z_1 = 0; M_F = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; M_F = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

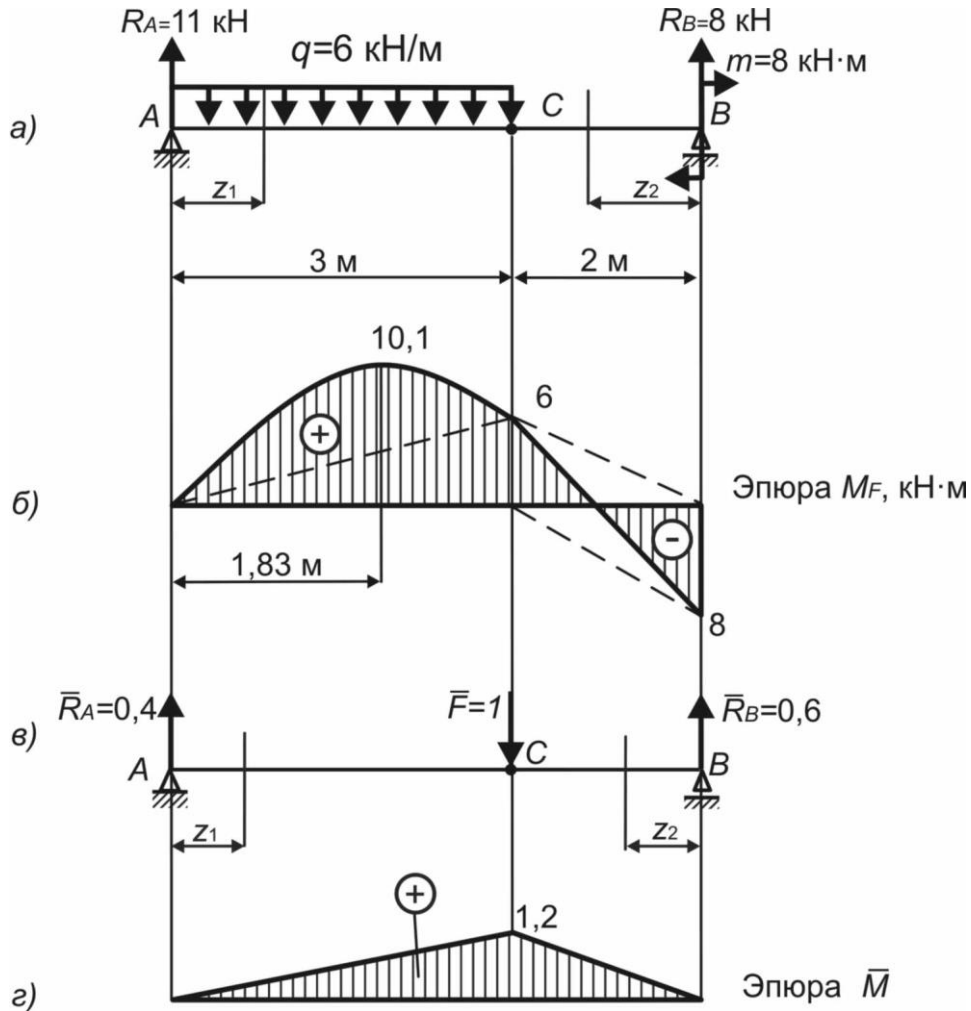


Рисунок 2.4

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 2.4, в). От силы  $\bar{F} = 1$ , приложенной в сечении C, найдем опорные реакции.

$$\Sigma M_A = \bar{R}_B \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 0; \bar{R}_B = 0,6.$$

$$\Sigma M_B = -\bar{R}_A \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 0; \bar{R}_A = 0,4.$$

Построим единичную эпюру  $\bar{M}$  (рисунок 2.4, г).

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 3$  м.

$$\bar{M} = \bar{R}_A \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_F = 0;$$

$$z_2 = 3 \text{ м}; \bar{M} = 1,2.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 2$  м.

$$\bar{M} = \bar{R}_B \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; M_F = 0;$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; \bar{M} = 1,2.$$

Определим прогиб сечения  $C$  перемножением единичной и грузовой эпюры:

$$\Delta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{6 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{84,5}{5EI_X}.$$

Осейвой момент инерции заданного сечения

$$I_X = 2 \cdot I_{X_{ос}} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4.$$

Окончательно с учетом данных таблицы Б.1.

$$\Delta_C = \frac{84,5}{5EI_X} = \frac{84,5 \cdot 10^3}{5 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2580 \cdot 10^{-8}} = 3,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$



**Пример 3 (для самостоятельного решения)** – Определить угол поворота сечения  $A$  для балки, изображенной на рисунке 2.5.

Исходные данные:  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 2$  м,  $l_3 = 1$  м,  $m = 8$  кН·м,  $F = 30$  кН·м.

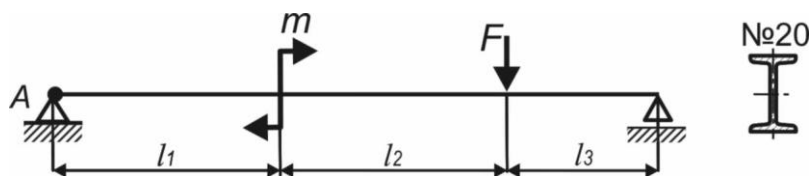


Рисунок 2.5

**Пример 4 (для самостоятельного решения)** – Определить прогиб сечения  $C$  для стальной балки, изображенной на рисунке 2.6.

Исходные данные:  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 3$  м,  $l_3 = 0,5$  м,  $m = 8$  кН·м,  $F = 20$  кН,  $q = 6$  кН/м,  $b = 95$  мм,  $h = 50$  мм.

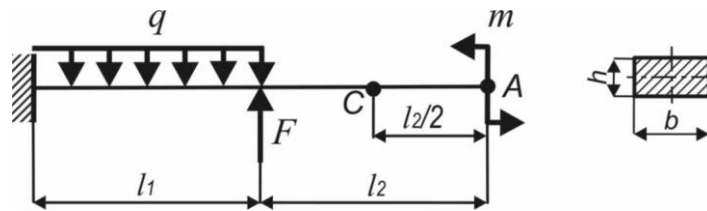


Рисунок 2.6

### Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения потенциальной энергии деформаций при изгибе.
- 2 Сформулируйте теоремы о взаимности работ и перемещений.
- 3 Что обозначают коэффициенты в обозначении линейных и угловых перемещений?
- 4 Запишите интеграл Мора для определения перемещений при изгибе.
- 5 Что такое грузовое (действительное) состояние системы?
- 6 Что такое единичное (фиктивное) состояние системы?
- 7 Запишите выражение для определения перемещений способом Верещагина.
- 8 Поясните, какие эпюры рассматриваются при определении перемещений способом Верещагина.
- 9 Какие нагрузки рассматриваются при построении грузовой эпюры?
- 10 Какие нагрузки рассматриваются при построении единичной эпюры?

### 3 Расчет статически неопределимых стержневых систем

**Пример 1** – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 3.1. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

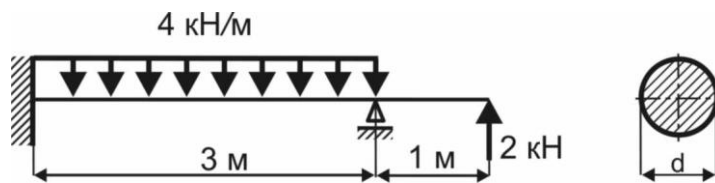


Рисунок 3.1

*Решение*

Степень статической неопределимости заданной балки (рисунок 3.2)

$$S = R - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Выберем основную систему (см. рисунок 3.2), освободив балку от заданной нагрузки и дополнительной связи.

Получим эквивалентную систему (см. рисунок 3.2), в которой приложим заданные нагрузки и реакцию дополнительной связи.

Составим каноническое уравнение метода сил [1–4]:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Приложим к основной системе заданные нагрузки и построим грузовую эпюру  $M_F$  (см. рисунок 3.2).

Приложим к основной системе единичную нагрузку  $\bar{X}_1 = 1$  и построим единичную эпюру  $\bar{M}_1$  (см. рисунок 3.2).

Определим коэффициенты канонического уравнения метода сил способом Верещагина [1–4]:

$$\delta_{11} = \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{40,5}{EI}.$$

Решим каноническое уравнение метода сил с учетом найденных коэффициентов:

$$X_1 \cdot \frac{9}{EI} - \frac{40,5}{EI} = 0; \quad X_1 = 1,5 \text{ кН.}$$

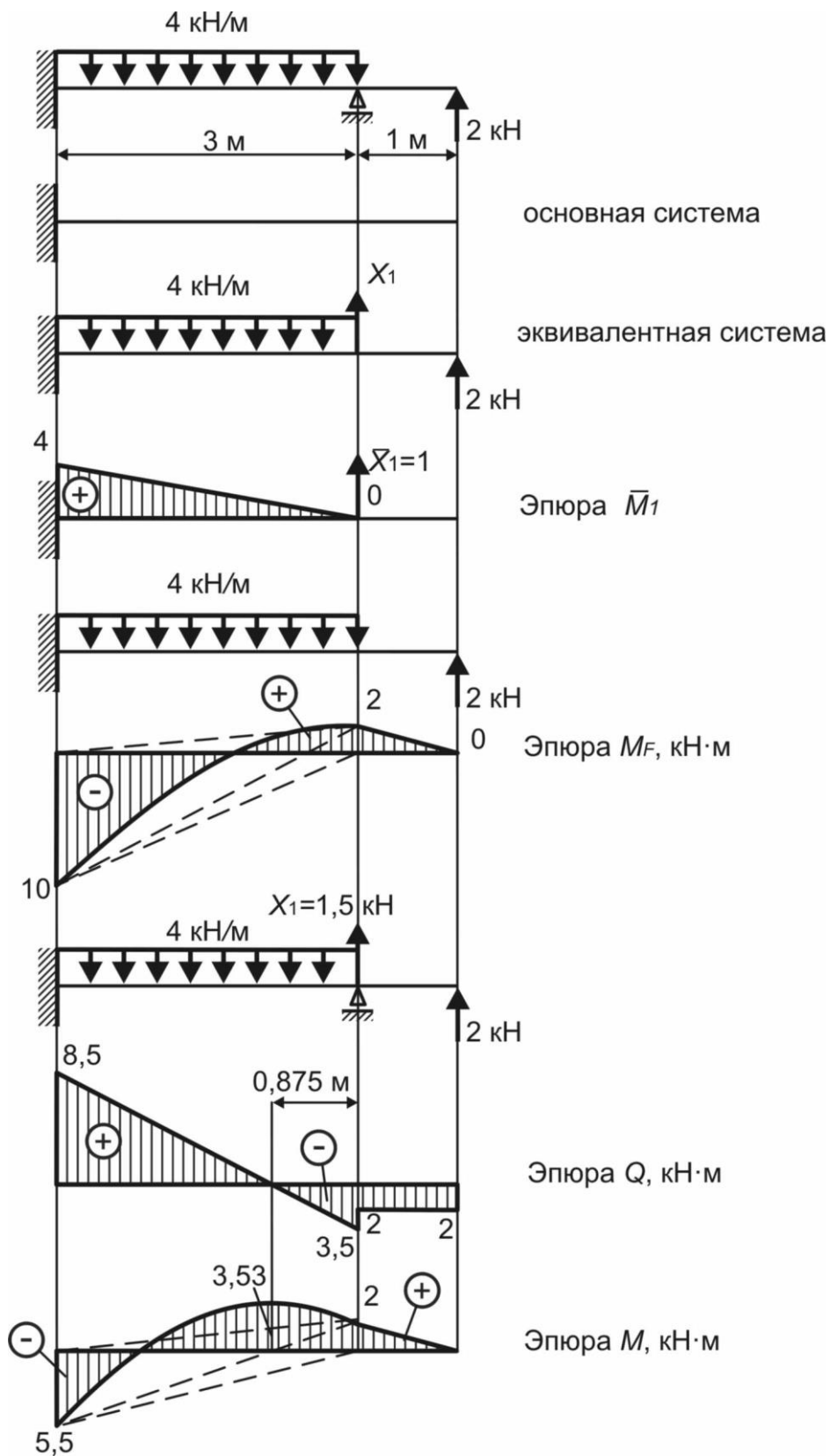


Рисунок 3.2

Построим окончательные эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  (см. рисунок 3.2).

Выполним деформационную проверку [1–4]:

$$\Delta_{1F} = \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} = 0;$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = 0.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определим диаметр балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 7,05 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 70,5 \text{ мм}.$$

**Пример 2 (для самостоятельного решения)** – Определить размеры поперечного сечения для балки, изображенной на рисунке 3.3.

Исходные данные:  $m = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $m_1 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $l_1 = 1,5 \text{ м}$ ,  $l_2 = 2 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $h = 2b$ .

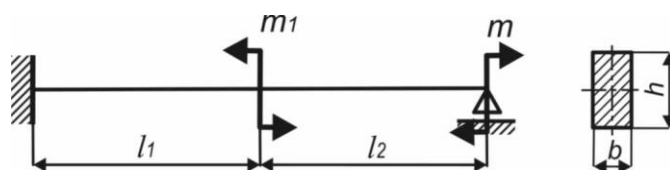


Рисунок 3.3

**Пример 3 (для самостоятельного решения)** – Проверить прочность балки, изображенной на рисунке 3.4.

Исходные данные:  $F = 18 \text{ кН}$ ,  $l_1 = 1 \text{ м}$ ,  $l_2 = 2 \text{ м}$ ,  $l_3 = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

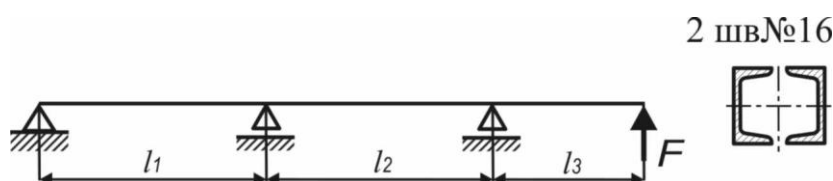


Рисунок 3.4

### Контрольные вопросы

- 1 Какие системы называют статически неопределимыми?
- 2 Что называют степенью статической неопределимости?
- 3 Какие системы являются геометрически неизменяемыми?
- 4 Что такое основная система?
- 5 Что такое эквивалентная система?



6 Запишите канонические уравнения метода сил. Объясните их физический смысл.

7 Что означают величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ?

8 Что означают величины  $\delta_{ii}, \delta_{ik}, \delta_{ki}, \delta_{kk}$ ?

9 Что означают величины  $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{iF}$ ?

10 Как строятся единичные эпюры? Как определить необходимое количество единичных эпюр?

11 Как строится грузовая эпюра?

12 Какие эпюры необходимо перемножить, чтобы определить коэффициенты  $\delta_{in}, \delta_{ni}$ ? Могут ли указанные коэффициенты быть отрицательными?

13 Какие эпюры необходимо перемножить, чтобы определить коэффициенты  $\delta_{in}, \delta_{ni}$ ? Будут ли указанные коэффициенты равны между собой?

14 Какие эпюры необходимо перемножить для определения грузовых коэффициентов?

15 Какими способами можно построить окончательные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?

16 Каким образом выполняется деформационная проверка?

17 Запишите условие прочности для статически неопределимой балки.



## 4 Устойчивость сжатых стержней

**Пример 1** – Для стального стержня (рисунок 4.1) определить допускаемое значение сжимающей нагрузки  $[F]$ , критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

Исходные данные: материал стержня – сталь 3, модуль продольной упругости стали в соответствии с таблицей Б.1  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа,  $\mu = 1$ ,  $[\sigma] = 160$  МПа.

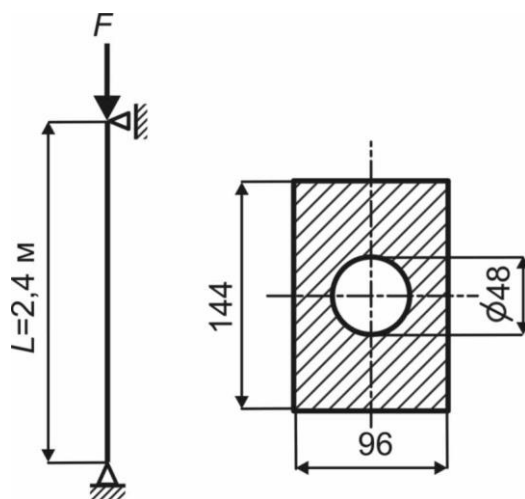


Рисунок 4.1

### Решение

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения, которое состоит из двух простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – круг (рисунок 4.2).

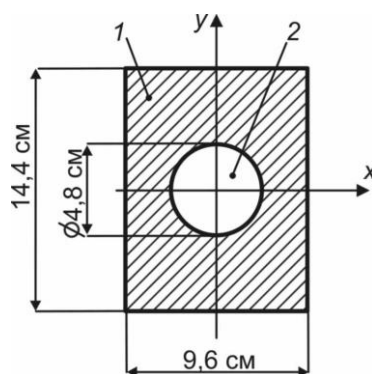


Рисунок 4.2

Площадь сечения (см. таблицу А.1)

$$A = A_1 - A_2 = 9,6 \cdot 14,4 - \frac{3,14 \cdot 4,8^2}{4} = 120,14 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции [1–4]

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2} = \frac{9,6 \cdot 14,4^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 2362,73 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_1} - I_{y_2} = \frac{14,4 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 1035,63 \text{ см}^4.$$

Минимальный момент инерции  $I_{\min} = 1035,63 \text{ см}^4$ .

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1035,63}{120,14}} = 2,93 \text{ см.}$$

Определим максимальную гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,4}{2,93 \cdot 10^{-2}} = 81,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба в соответствии с таблицей В.1:

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$  по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81,9 - 80) = 0,74.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,74 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 14224,6 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ( $\lambda_{пред} = 100$ ), критическую силу определим по формуле Ясинского [1–4]:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 81,9) \cdot 10^2 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} = 26026,4 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$



## Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{26026,4 \cdot 10^2}{14224,6 \cdot 10^2} = 1,83.$$

**Пример 2** – Определить размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 4.3). Для расчетов принять допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Материал стержня – сталь 3.

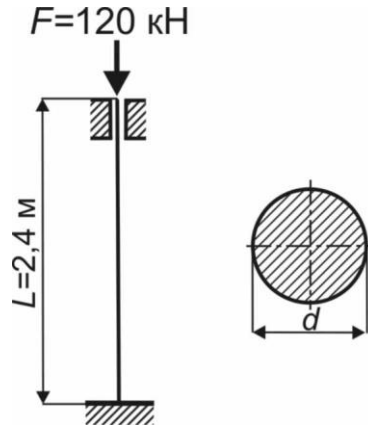


Рисунок 4.3

*Решение*

Для определения диаметра поперечного сечения стержня используем условие устойчивости [1–4]. Для данного случая оно имеет вид:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq \varphi \cdot [\sigma].$$

Откуда

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \varphi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot \varphi \cdot 160 \cdot 10^6}} = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi}}.$$

Минимальный момент инерции круглого сечения, если  $I_x = I_y$ :

$$I_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

Минимальный радиус инерции круглого сечения можно рассчитать по формуле

$$i_{\min} = 0,25 \cdot d.$$

Максимальная гибкость стержня (таблица Г.1)

$$\lambda = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1,5}{0,25 \cdot d} = \frac{3}{d}.$$

Определение размеров поперечного сечения производим методом последовательных приближений [1–4].

Примем в первом приближении коэффициент продольного изгиба  $\varphi_1 = 0,5$ . Тогда диаметр стержня

$$d_1 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_1}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,5}} = 0,043 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_1 = \frac{3}{d_1} = \frac{3}{0,043} = 69,77.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1:

$$\lambda = 60; \quad \varphi = 0,86;$$

$$\lambda = 70; \quad \varphi = 0,81.$$

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (69,77 - 60) = 0,811.$$

$$\varphi_1 \neq \varphi'_1.$$

Во втором приближении коэффициент продольного изгиба определим по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,811 + 0,5}{2} = 0,656.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_2 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_2}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,656}} = 0,038 \text{ м.}$$



Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_2 = \frac{3}{d_2} = \frac{3}{0,038} = 78,95.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1:

$$\lambda = 70; \quad \varphi = 0,81;$$

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75.$$

$$\varphi'_2 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{80 - 70} \cdot (78,95 - 70) = 0,756.$$

$$\varphi_2 \neq \varphi'_2.$$

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,756 + 0,656}{2} = 0,706.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_3 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_3}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,706}} = 0,037 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_3 = \frac{3}{d_3} = \frac{3}{0,037} = 81.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1:

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

$$\varphi'_3 = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81 - 80) = 0,744.$$

$$\varphi_3 \neq \varphi'_3.$$



В четвертом приближении

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2} = \frac{0,706 + 0,744}{2} = 0,725.$$

Тогда диаметр стержня

$$d_4 = \frac{0,0309}{\sqrt{\varphi_4}} = \frac{0,0309}{\sqrt{0,725}} = 0,036 \text{ м.}$$

Гибкость с учетом найденного диаметра

$$\lambda_3 = \frac{3}{d_3} = \frac{3}{0,036} = 83,3.$$

Уточним величину коэффициента продольного изгиба. В соответствии с таблицей В.1:

$$\lambda = 80; \quad \varphi = 0,75;$$

$$\lambda = 90; \quad \varphi = 0,69.$$

$$\varphi_4 \approx \varphi_4'.$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

$$\sigma_y = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,036^2} = 117,95 \text{ МПа} > 0,73 \cdot 160 = 116,8 \text{ МПа.}$$

Стержень работает с перенапряжением, которое составляет

$$\frac{117,95 - 116,8}{116,8} \cdot 100 \% = 1 \% < 5 \%.$$

Перенапряжение является допустимым. Диаметр стержня окончательно принимаем  $d = 0,036 \text{ м} = 36 \text{ мм}$ .

**Пример 3 (для самостоятельного решения)** – Определить критическую силу для двух случаев закрепления стержня (рисунок 4.4).

Исходные данные: материал – сталь 3,  $b = 60 \text{ мм}$ ,  $h = 40 \text{ мм}$ ,  $L = 2 \text{ м}$ .



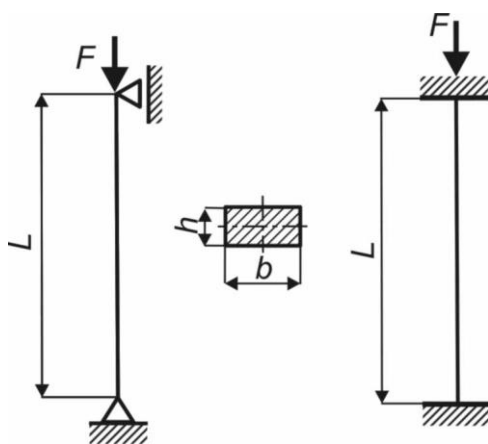


Рисунок 4.4

**Пример 4 (для самостоятельного решения)** – Определить коэффициент запаса устойчивости стержня, изображенного на рисунке 4.5.

Исходные данные: материал – сталь 5,  $d = 60$  мм,  $L = 3$  м,  $[\sigma] = 180$  МПа.

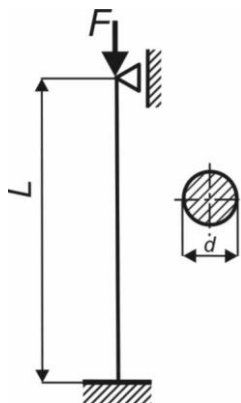


Рисунок 4.5

### Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение устойчивости.
- 2 Назовите формы равновесия.
- 3 Что является признаком потери устойчивости?
- 4 Дайте определение критической силы.
- 5 Запишите выражение для определения гибкости стержня.
- 6 Как определить коэффициент приведения длины стержня?
- 7 Запишите формулу Эйлера. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 8 Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 9 Запишите условие устойчивости.
- 10 Как определяется коэффициент продольного изгиба?
- 11 Запишите выражение для определения коэффициента запаса устойчивости.





## 5 Принципы расчета конструкций при динамическом воздействии

**Пример 1** – На двутавровую стальную балку с высоты  $h$  падает груз  $G$  (рисунок 5.1). Найти максимальное нормальное напряжение в балке.

Исходные данные : двутавр № 20 ( $W_x = 184 \text{ см}^3$ ,  $I_x = 1840 \text{ см}^4$ ),  $G = 1400 \text{ Н}$ ,  $L = 2,4 \text{ м}$ ,  $h = 14 \text{ мм}$ , модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .



Рисунок 5.1

### Решение

Прикладываем к балке груз  $G$  статически (рисунок 5.2). Определяем реакции опор от статической нагрузки:

$$\sum M_A = 0; -1400 \cdot 0,72 + R_B \cdot 3,84 = 0;$$

$$R_B = \frac{1400 \cdot 0,72}{3,84} = 262,5 \text{ Н.}$$

$$\sum M_B = 0; 1400 \cdot 3,12 - R_A \cdot 3,84 = 0;$$

$$R_A = \frac{1400 \cdot 3,12}{3,84} = 1137,5 \text{ Н.}$$

Проверка расчета реакций:

$$\sum Y = 1137,5 - 1400 + 262,5 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_F$  (см. рисунок 5.2) от статической нагрузки.

Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,72 \text{ м}$ .

$$M_F = 1137,5 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_F = 0;$$

$$z_1 = 0,72 \text{ м}; M_F = 819 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$



Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 3,12$  м.

$$M_F = 262,5 \cdot z_2;$$

$$z_1 = 0; M_F = 0;$$

$$z_1 = 3,12 \text{ м}; M_F = 819 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

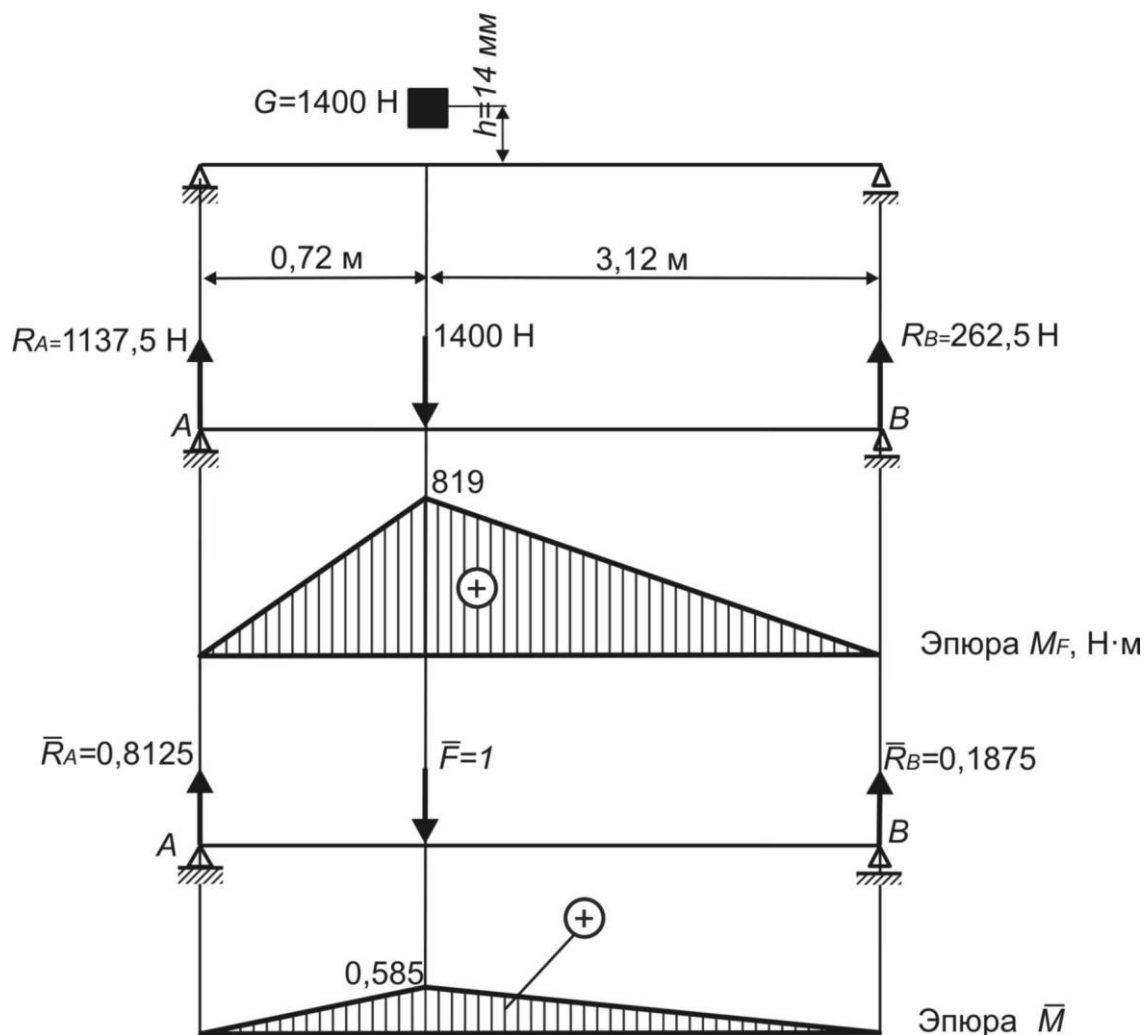


Рисунок 5.2

Максимальный момент  $M_{\max} = 819 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Максимальные статические напряжения

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{819}{184 \cdot 10^{-6}} = 4,45 \text{ МПа}.$$

Прикладываем к балке единичную силу  $\bar{F} = 1$ . Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; -1 \cdot 0,72 + \bar{R}_B \cdot 3,84 = 0;$$

$$\bar{R}_B = \frac{1 \cdot 0,72}{3,84} = 0,1875.$$

$$\sum M_B = 0; 1 \cdot 3,12 - \bar{R}_A \cdot 3,84 = 0;$$

$$\bar{R}_A = \frac{1400 \cdot 3,12}{3,84} = 0,8125.$$

Строим единичную эпюру  $\bar{M}$  (см. рисунок 5.2).  
Участок 1:  $0 \leq z_1 \leq 0,72$  м.

$$\bar{M} = 0,8125 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \bar{M}_1 = 0;$$

$$z_1 = 0,72 \text{ м}; \bar{M}_1 = 0,585.$$

Участок 2:  $0 \leq z_2 \leq 3,12$  м.

$$\bar{M} = 0,1875 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \bar{M} = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м}; \bar{M} = 0,585.$$

По методу Верещагина определяем перемещение в точке удара:

$$\begin{aligned} \Delta_{ст} &= \frac{M_F \cdot \bar{M}}{EI_X} = \left( \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 0,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 + \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 3,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 \right) = \\ &= \frac{613,27}{EI_X} = \frac{613,27}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,000166 \text{ м}. \end{aligned}$$

Динамический коэффициент [1-4]

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 14 \cdot 10^{-3}}{0,000166}} = 14.$$

Максимальные динамические напряжения

$$\sigma_D = k_D \cdot \sigma_{max}^{ст} = 14 \cdot 4,45 = 62,32 \text{ МПа}.$$

**Пример 2 (для самостоятельного решения)** – Проверить прочность и определить возникающие перемещения для заданной балки (рисунок 5.3).



Исходные данные:  $G = 8$  кН,  $l_1 = 2,5$  м,  $l_2 = 0,8$  м,  $v = 1,2$  м/с,  $b = 85$  мм,  $[\sigma] = 160$  МПа.



Рисунок 5.3

**Пример 3 (для самостоятельного решения)** – Определить максимальные напряжения и перемещения, возникающие в поперечных сечениях бруса, изображенного на рисунке 5.4.

Исходные данные:  $G = 9$  кН,  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 2$  м,  $l_3 = 1,5$  м,  $h = 14$  мм,  $A_1 = 1$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 2$  см<sup>2</sup>,  $A_3 = 1,5$  см<sup>2</sup>, материал – сталь.

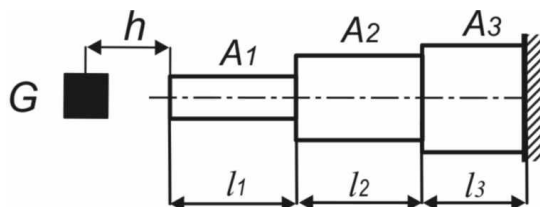


Рисунок 5.4

### Контрольные вопросы

- 1 Какая нагрузка называется динамической?
- 2 Что такое динамический коэффициент?
- 3 Запишите формулу для определения напряжений при динамическом действии нагрузок.
- 4 Запишите выражение для определения динамического коэффициента в случае, когда груз поднимается (опускается) с постоянным ускорением.
- 5 Что такое удар?
- 6 Какие допущения приняты при расчете на ударное нагружение?
- 7 Запишите формулу для определения динамического коэффициента при ударе.
- 8 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает изгиб бруса.
- 9 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает растяжение (сжатие) бруса.

## Список литературы

1 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С.И. Евтушенко. – 5-е изд. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. – 543 с.

2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва : ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.

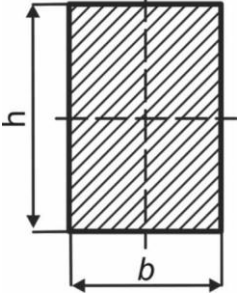
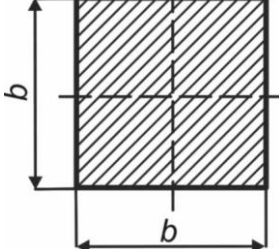
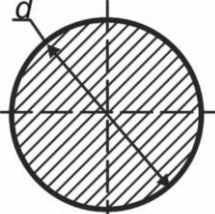
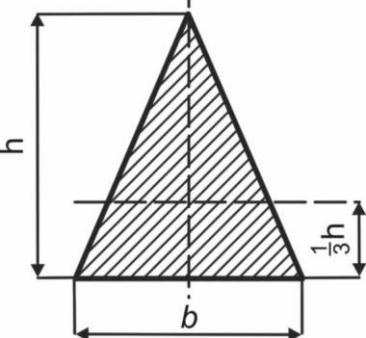
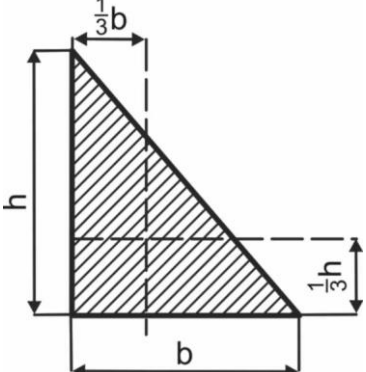
3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва : Юрайт, 2016. – 413 с.

4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.



## Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции $I_x, I_y$	Момент сопротивления $W_x, W_y$
	$b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	$b^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_{yII} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{yA} = \frac{b \cdot h^2}{12}$

## Приложение Б (справочное)

Таблица Б.1 – Физико-механические свойства материалов

Материал	Модуль упругости, $10^5$ МПа		Коэффициент Пуассона $\mu$	Удельный вес $\gamma$ , $\text{кН}/\text{м}^3$
	E	G		
1	2	3	4	5
Сталь углеродистая	1,96...2,06	0,785...0,794	0,24...0,28	78,6
Сталь легированная	2,06...2,16	0,785...0,794	0,25...0,30	78,5
Стальное литье	1,75	–	0,25...0,33	78,5
Чугун серый, белый	1,13...1,57	0,44	0,23...0,27	72
Чугун ковкий	1,52	–	–	72
Латунь холоднотянутая	0,9...1,0	0,35...0,37	0,32...0,42	85
Алюминий	0,59...0,69	0,26...0,37	0,32...0,36	27
Сплавы алюминиевые	0,70...0,72	0,27	0,32	–
Дюралюминий	0,71	0,27...0,37		28
Медь:				
прокатанная	1,1	0,4	0,31...0,34	
холоднотянутая	1,3	0,49	–	
литая	0,84	–	–	
Бронза:				
катаная	1,15	0,42	0,32...0,35	
литая	1,05	0,42	–	
Гранит	0,49			25...28
Мрамор	0,56			25...28
Кирпичная кладка	0,027...0,03			
Бетон:				
тяжёлый	0,17...0,40		0,16...0,18	20
на пористых заполнителях	0,03...0,23		0,16...0,18	
ячеистый при пределе прочности, МПа:	0,01...0,10		0,16...0,18	
10	0,146...0,196		0,16...0,18	
15	0,164...0,214		0,16...0,18	
20	0,182...0,232		0,16...0,18	
Древесина (сосна, ель):				
вдоль волокон	0,01...0,12	0,055		5,5
поперёк волокон	0,005...0,01			5,5
Стекло	0,56	0,22	0,25	



## Окончание таблицы Б.1

1	2	3	4	5
Каучук	0,00008	–	0,47	9,1
Текстолит	0,06...0,1	–	–	13,5
Оргстекло	0,03...0,04	–	0,35...0,38	11,8
Капрон	0,014...0,02	–	–	11,4
Фторопласт-4	0,0047...0,0085	–	–	21...23
Стеклопласты	0,18...0,35	–	–	14...19





## Приложение В (справочное)

Таблица В.1 – Значения коэффициента продольного изгиба  $\varphi$

Гибкость $\lambda$	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5	14Г2 15ГС 10Г2С 10Г2СД 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,8	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21				0,12
170	0,26	0,21	0,19				0,11
180	0,23	0,19	0,17				0,10
190	0,21	0,17	0,15				0,09
200	0,19	0,15	0,13				0,08
210	0,17	0,14	0,12				
220	0,16	0,13	0,11				



## Приложение Г (справочное)

Таблица Г.1 – Значения коэффициента продольного изгиба

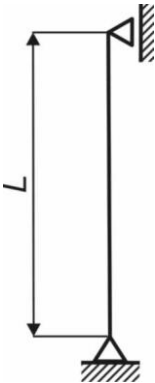
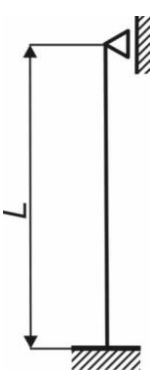



Схема закрепления					
Коэффициент приведения длины	1	0,7	2	0,5	

Таблица Г.2 – Значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\lambda_o$ ,  $\lambda_{np}$

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$c$ , МПа	$\lambda_o$	$\lambda_{np}$
Ст2	264	0,7	0	62	105
Ст3	310	1,14	0	40...60	100
Ст4, сталь 20	328	1,11	0	60	96
Ст5, сталь 25	350	1,15	0	57	92
Сталь 45	449	1,67	0	52	85
Сталь 14Г2	469	2,62	0	52	85
Сталь 30ХМА	1000	5,40	0	50	83
Дюралюминий Д16Т	406	2,83	0	30	53
Чугун	761	11,77	0,052	–	80
Дерево	29	0,19	0	–	70

*Примечание –  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – параметры формулы Ясинского;  $\lambda_o$  – гибкость, при которой потеря устойчивости равноопасна потере прочности;  $\lambda_{np}$  – предельная гибкость*



## Приложение Д (рекомендуемое)

Таблица Д.1 – Обозначения и числовые значения кратных и дольных величин

Числовое значение	Приставка	Обозначение приставки	Пример кратных и дольных единиц	
			Наименование	Сокращенное обозначение
мега	$10^6$	М	меганьютон	МН
кило	$10^3$	к	киловатт	кВт
санти	$10^{-2}$	с	сантиметр	см
милли	$10^{-3}$	м	миллиметр	мм
микро	$10^{-6}$	мк	микрометр	мкм

