

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

МЕХАНИКА И ТЕХНОЛОГИИ

*Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов
направления подготовки 27.03.05 «Инноватика»
дневной формы обучения*



Могилев 2018

УДК 621.8
ББК 32.816
М 38

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин» «20» июня 2018 г.,
протокол № 11

Составитель канд. техн. наук О. В. Пузанова

Рецензент канд. техн. наук, доц. Д. М. Свирепа

Изложены цель, задачи, содержание и порядок выполнения практических
занятий.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА И ТЕХНОЛОГИИ

Ответственный за выпуск

А. П. Прудников

Технический редактор

С. Н. Красовская

Компьютерная верстка

Е. С. Лустенкова

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:

Государственное учреждение высшего профессионального образования

«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 24.01.2014.

Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2018



Содержание

Введение.....	4
Практическая работа № 1. Структурный анализ механизмов. Определение степени подвижности.....	5
Практические занятия № 2–4. Кинематический анализ рычажных механизмов геометрическим методом. Построение планов скоростей рычажных механизмов. Построение планов ускорений рычажных механизмов.....	13
Практическое занятие № 5. Кинематический анализ и синтез зубчатых рядов и планетарных механизмов.....	24
Практическое занятие № 6. Силовой анализ механизмов методом планов сил и проверка методом рычага Жуковского.....	31
Практическое занятие № 7. Построение динамической и математической моделей одноподвижных механизмов.....	39
Практическое занятие № 8. Уравновешивание механизмов.....	41
Практическое занятие № 9. Кинематический анализ кулачковых механизмов.....	46
Список литературы.....	48



Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по курсу «Механика и технологии» для студентов направления подготовки 27.03.05 «Инноватика» (профиль – Управление инновациями по отраслям и сферам экономики).

Целью учебной дисциплины является формирование специалистов, умеющих обоснованно и результативно применять существующие технические решения и технические средства и технологии для их реализации, предлагать более перспективные и эффективные технические решения, а также воспринимать и осваивать новые научно-техническую информацию и опыт решения задач машиностроения.

Студент, изучивший дисциплину:

– **знает:**

- а) основные виды механизмов и их принцип работы;
- б) кинематические и динамические характеристики механизмов;
- в) основные методы анализа и синтеза механизмов;

– **умеет:**

- а) определять оптимальные параметры механизмов по заданным кинематическим и динамическим характеристикам;
- б) производить анализ и синтез механизмов с использованием ЭВМ;

– **владеет:**

- а) методами функционального проектирования механизмов;
- б) методами выбора рационального механизма для требуемого преобразования движения;
- в) аналитическими и графическими методами оценки кинематики и динамики предлагаемой схемы механизма.

Практические работы должны быть выполнены на отдельном листе, либо в тетради. Рисунки и таблицы выполняют карандашом, а текст – ручкой.

Целью методических рекомендаций является помощь студентам при выполнении и практических работ по дисциплине «Механика и технологии».

Практическая работа № 1. Структурный анализ механизмов. Определение степени подвижности

Теоретические основы практического занятия

Механизмом называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел. Механизмы являются составными частями машин.

Механизм состоит из звеньев. **Звеном** называется одна деталь механизма или несколько деталей, жестко связанных между собой. Звено, относительно которого изучается движение остальных звеньев, называется **стойкой**. Звено, которому сообщается движение, называется **входным**. Звено, совершающее движение, для реализации которого создан механизм, называется **выходным**.

Кинематическая пара – соединение звеньев, допускающее их относительное движение. Кинематические пары бывают высшие и низшие. В **низших** парах звенья соприкасаются по поверхностям, а в **высших** – по линиям или в точках. По числу допускаемых относительных движений соединяемых звеньев кинематические пары бывают **одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные**. По числу связей, накладываемых на относительное движение соединяемых звеньев, кинематические пары бывают **первого, второго, третьего, четвертого и пятого классов S** (таблица 1). **Кинематическая цепь** – это система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Механизм – это кинематическая цепь, в которой указаны стойка, входные и выходные звенья. Если кинематическая цепь содержит n подвижных звеньев, то число ее степеней свободы определится по **формуле Сомова-Малышева**

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (1)$$

где n – число подвижных звеньев;

$p_1, p_2 \dots$ – число одноподвижных, двухподвижных... пар.

Если все звенья механизма движутся в плоскости, то (1) преобразуется в формулу Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \quad (2)$$

Число степеней свободы W равно числу обобщенных координат, т. е. числу независимых между собой параметров, однозначно определяющих положение всех звеньев механизма. Чаще всего применяют механизмы с $W = 1$. Звенья, за которыми закреплены обобщенные координаты, называют **начальными**.

Существуют различные виды механизмов: рычажные, зубчатые, кулачковые, фрикционные и др. Механизмы, звенья которых образуют только низшие пары, называется **рычажными**. На рисунке 1 приведены основные виды простейших рычажных механизмов. Их звенья обозначают цифрами. Звенья имеют специальные названия. **Кривошип 1** на рисунке 1 – звено, совершающее пол-



ный оборот вокруг неподвижной оси. **Коромысло 3** на рисунке 1, *a* – звено, совершающее неполный оборот вокруг неподвижной оси. **Шатун 2** на рисунке 1, *a* и *б* – звено рычажного механизма, не образующее кинематической пары со стойкой (совершает сложное движение). **Кулиса 3** на рисунке 1, *в* – звено рычажного механизма, совершающее вращательное движение и образующее с другим звеном (**кулисным камнем 2** на рисунке 1, *в*) поступательную кинематическую пару. Кинематические пары обозначают прописными латинскими буквами. Неподвижное звено (стойка) отмечается штриховкой, не обозначается, но подразумевается, что оно имеет обозначение «ноль». Основные виды рычажных механизмов приведены на рисунке 1.

Таблица 1 – Классификация кинематических пар

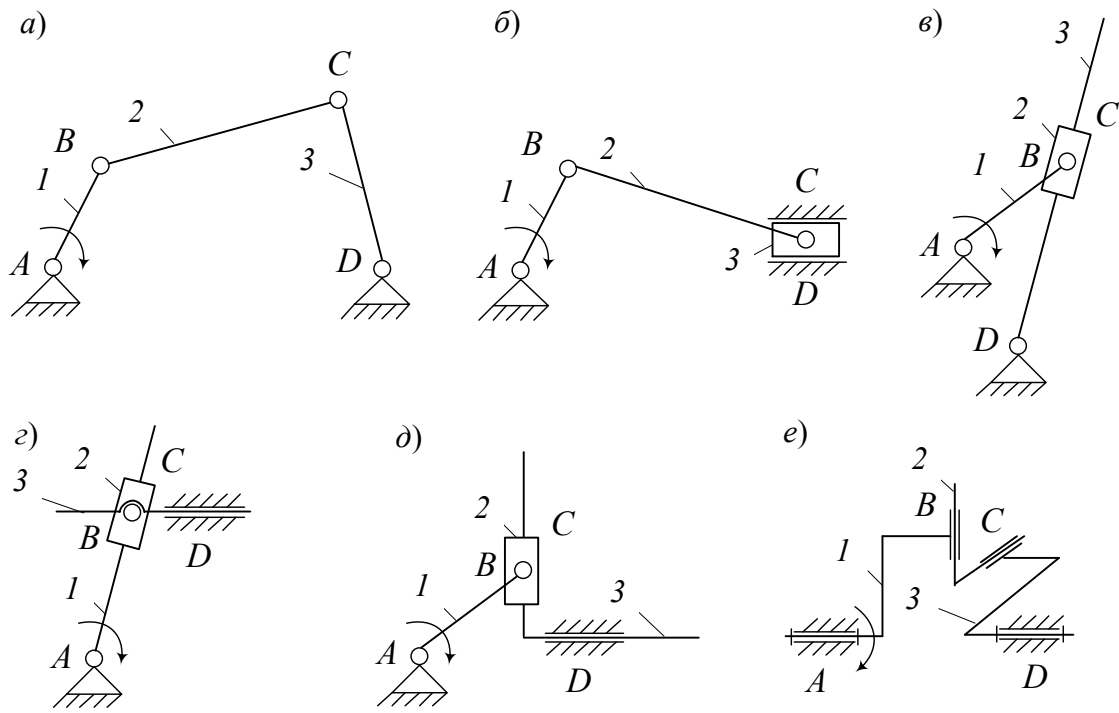
Подвижность W	Класс S	Название	Схема	Условное обозначение
3	3	Сферическая		
2	4	Сферическая с пальцем		
2	4	Цилиндрическая		
1	5	Вращательная		
1	5	Поступательная		
1	5	Винтовая		

Распространена структурная классификация рычажных механизмов, предложенная Л. В. Ассуром и И. И. Артоболовским, согласно которой каждый механизм с одной степенью свободы $W = 1$ можно считать состоящим из механизма первого класса и присоединенных к нему структурных групп.

Механизм первого класса представляет собой ведущее звено, соединенное со стойкой посредством кинематической пары. Обозначается на схеме стрелкой, указывающей направление его движения (рисунок 2).

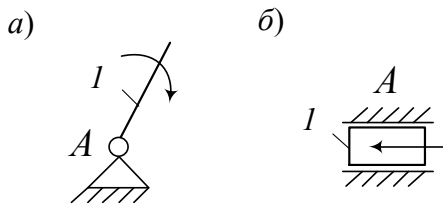
Структурной группой (группой Ассура) называется такая кинематическая цепь, которая после присоединения к стойке имеет нулевую степень свободы $W = 0$. После присоединения этой группы к звеньям механизма его степень подвижности не изменяется. Формула (2) для структурной группы:

$$0 = 3n - 2p_1, \quad p_1 = 1,5n. \quad (3)$$



a – шарнирный четырехзвеночник; *б* – кривошипно-ползунный; *в* – кулисный; *г* – тангенсный; *д* – синусный; *е* – крестовая муфта (механизм Ольдгейма)

Рисунок 1 – Основные виды рычажных механизмов



a – кривошип со стойкой; *б* – ползун со стойкой

В таблице 2 представлены основные структурные группы. Структурная группа, у которой $p_1 = 3, n = 2$, называется **диадой**.

Рисунок 2 – Механизмы I класса

Таблица 2 – Основные структурные группы

n	p_1	Схемы структурных групп				
2	3					
4	6					



Задания для самостоятельного выполнения

По варианту, заданному преподавателем, определить степень подвижности пространственного рычажного механизма (таблица 3) и выполнить структурный анализ плоского рычажного механизма (таблица 4).

Таблица 3 – Схемы пространственных рычажных механизмов

Вариант	Схема	Вариант	Схема	Вариант	Схема
1		8		15	
2		9		16	
3		10		17	
4		11		18	
5		12		19	
6		13		20	
7		14		21	

Таблица 4 – Схемы плоских рычажных механизмов

Вариант	Схема	Вариант	Схема	Вариант	Схема
1		8		15	
2		9		16	
3		10		17	
4		11		18	

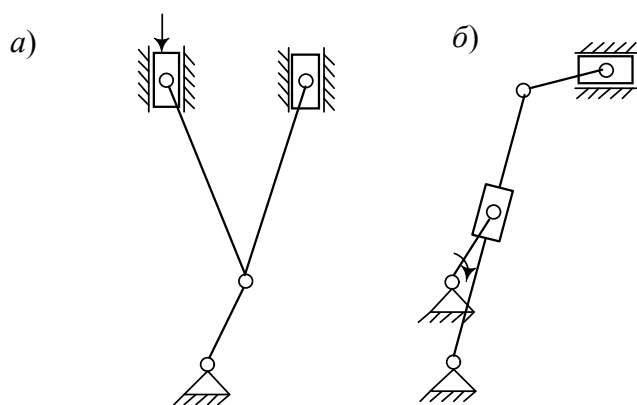
Окончание таблицы 4

Вариант	Схема	Вариант	Схема	Вариант	Схема
5		12		19	
6		13		20	
7		14		21	
<p>Примечание – Масштабный коэффициент построения схем $\mu_s = 50$ мм/м. Значение силы полезного сопротивления Q равно удвоенной силе инерции выходного звена. Масса погонного метра звена – 2 кг, масса выходного звена – 3 кг. Момент инерции i-го стержневого звена относительно его центра масс S_i, определяется как $J_{S_i} = m_i l_i^2 / 12$ (кг·м²)</p>					

Пример выполнения задания

Выполним структурный анализ плоских рычажных механизмов, приведенных на рисунке 3. Обозначим звенья механизмов цифрами (рисунок 4), начиная с ведущего звена. Укажем названия звеньев и движение, которое они совершают (таблица 5). Обозначим кинематические пары буквами. Укажем их названия и подвижность W (см. таблицу 1), номера звеньев, образующие пару (табли-

ца б). Определим степень подвижности: $W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 1$.



а – механизм V-образного двигателя внутреннего сгорания; б – механизм поперечно-строгального станка

Рисунок 3 – Плоские рычажные механизмы

Для структурного анализа из заданных механизмов выделим механизмы первого класса. Для механизма двигателя – это ползун 1, образующий поступательную кинематическую пару А со стойкой 0. Для механизма станка – это кривошип 1, образующий со стойкой вращательную пару А.

Оставшиеся кинематические цепи механизмов разбиваем на простейшие структурные группы – диады, включающие два соединенных звена и три кинематические пары. Завер-

шаем структурный анализ составлением структурной формулы механизмов: $I(0, 1) \leftarrow Д(2, 3) II, 2 + Д(4, 5) II, 2 \rightarrow II, 2$. Формула расшифровывается следующим образом. Для получения представленных механизмов необходимо к механизму I класса, включающему звенья (0,1), присоединить последовательно диаду Д (2, 3), а затем диаду Д (4, 5). Диады второго класса, порядка, следовательно, и механизм тоже второго класса и порядка. Структурный анализ зависит от заданного ведущего звена (рисунок 5).

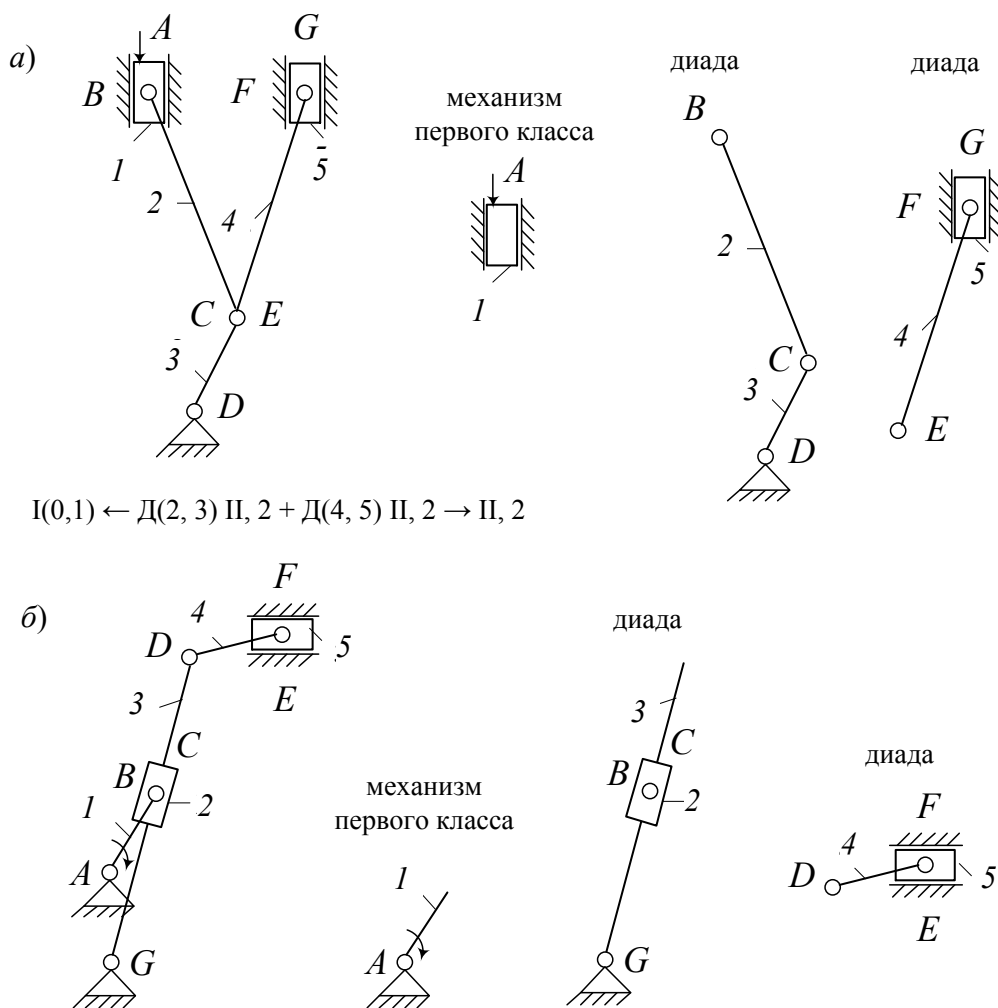
Таблица 5 – Звенья рычажных механизмов

Механизм V-образного двигателя		Механизм поперечно-строгального станка	
Название	Движение	Название	Движение
1 Ползун	Поступательное	1 Кривошип	Вращательное
2 Шатун	Сложное	2 Кулисный камень	Сложное
3 Кривошип	Вращательное	3 Кулиса	Вращательное
4 Шатун	Сложное	4 Шатун	Сложное
5 Ползун	Поступательное	5 Ползун	Поступательное

Таблица 6 – Кинематические пары механизмов

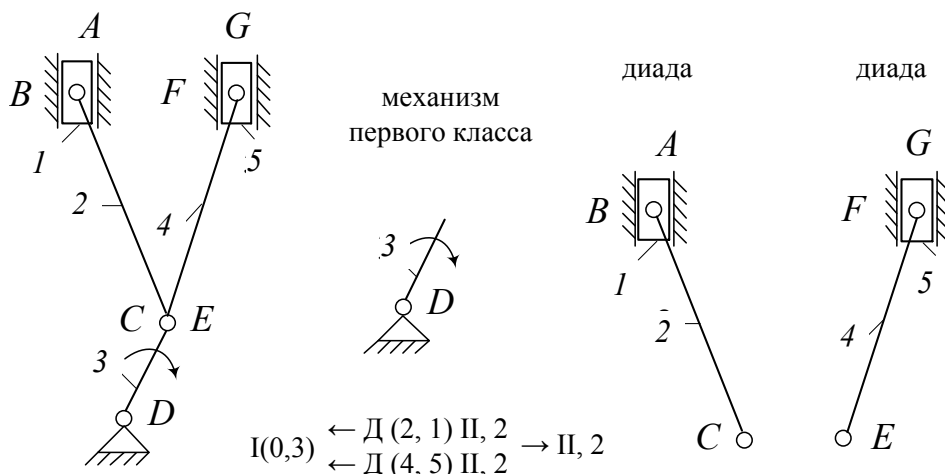
Механизм V-образного двигателя				Механизм поперечно-строгального станка			
Обозначение	Название	Звенья	W	Обозначение	Название	Звенья	W
A	Поступательная	0, 1	1	A	Вращательная	0, 1	1
B	Вращательная	1, 2	1	B	Вращательная	1, 2	1
C	Вращательная	2, 3	1	C	Поступательная	2, 3	1
D	Вращательная	3, 0	1	D	Вращательная	3, 4	1
E	Вращательная	3, 4	1	E	Вращательная	4, 5	1
F	Вращательная	4, 5	1	F	Поступательная	5, 0	1
G	Поступательная	5, 0	1	G	Вращательная	3, 0	1





$$I(0,1) \leftarrow D(2,3) II, 2 + D(4,5) II, 2 \rightarrow II, 2$$

Рисунок 4 – Примеры структурного анализа механизмов



$$I(0,3) \leftarrow D(2,1) II, 2 \rightarrow II, 2$$

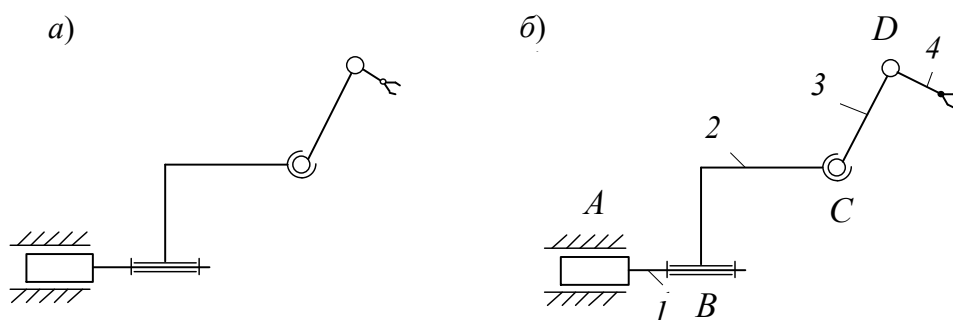
$$\leftarrow D(4,5) II, 2$$

Рисунок 5 – Пример структурного анализа при ведущем кривошипе

Рассмотрим механизм манипулятора, приведенный на рисунке 6, а. Обозначим звенья цифрами, а кинематические пары буквами (рисунок 6, б). Заполним таблицу 7. По формуле (1) определим степень подвижности манипулятора:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6.$$





a – исходные данные; *б* – обозначения

Рисунок 6 – Схема манипулятора

Таблица 7 – Кинематические пары манипулятора

Обозначение	Название	Звено	W
<i>A</i>	Поступательная	0, 1	1
<i>B</i>	Вращательная	1, 2	1
<i>C</i>	сферический шарнир	2, 3	3
<i>D</i>	Вращательная	3, 4	1

Практические занятия № 2–4. Кинематический анализ рычажных механизмов геометрическим методом. Построение планов скоростей рычажных механизмов. Построение планов ускорений рычажных механизмов

Теоретические основы практических занятий

Кинематика – раздел механики, изучающий движение с геометрической точки зрения, т. е. без учета причин, вызывающих его. Для характеристики движения используют следующие кинематические параметры: перемещение $s(t)$, м; скорость $v = \frac{ds}{dt}$, м/с; ускорение $a = \frac{dv}{dt}$, м/с². Можно применять их аналоги – функцию положения $s(\varphi_1)$, м; передаточную функцию скорости

$v_q = \frac{dS}{d\varphi_1}$, м/рад, или передаточную функцию ускорения $a_q = \frac{dv_q}{d\varphi_1}$, м/рад², где

φ_1 – обобщенная координата угла поворота входного звена l ; t – время. Связь между скоростями и ускорениями и их передаточными функциями:

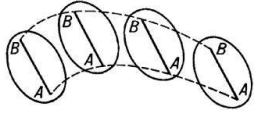
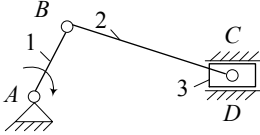

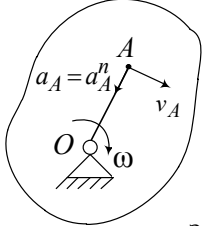
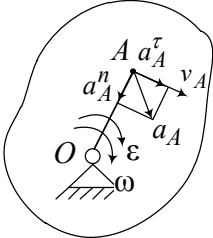
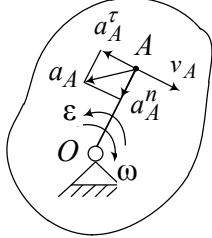
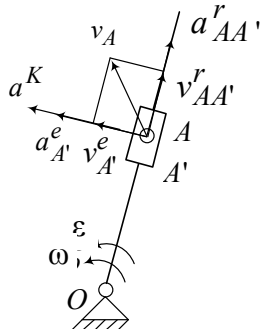
$$v = v_q \omega_1; \quad (4)$$

$$a = a_q \omega_1^2. \quad (5)$$

В таблице 8 рассмотрены основные виды движения и приведены их кинематические соотношения.



Таблица 8 – Основные виды движения

Вид движения	Пример движения	Скорость	Ускорение
<p>Поступательное движение – это движение, при котором траектории, скорости и ускорения всех точек этого тела одинаковы и тело движется без поворота.</p> <p>Прямолинейное движение – частный случай поступательного движения по прямой.</p> <p>Круговое поступательное – траектория окружности</p>	<p>Поступательное движение тела</p>  <p>Прямолинейное движение ползуна 3</p>  <p>Круговое поступательное движение груза</p> 	$v_A = v_B = \frac{ds}{dt},$ $v_3 = \frac{ds}{dt}$	$a_A = a_B = \frac{dv}{dt},$ $a_3 = \frac{dv}{dt}$
<p>Вращательное движение – движение, при котором одна точка тела неподвижна относительно выбранной системы отсчета</p>	<p>Равномерное вращение</p>  <p>Ускоренное</p>  <p>Замедленное</p> 	$v_A = \omega \cdot l_{OA}$ $v_A = \omega \cdot l_{OA}$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n,$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$ $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$ $\vec{a}_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2},$ $a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$ $a_A^\tau = \epsilon \cdot l_{OA}$
<p>Сложное движение – результат сложения двух разных видов движений: переносного (e) и относительного (r)</p>	<p>Переносное e – вращательное, относительное r – поступательное</p> 	$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_{AA'}^r,$	$\vec{a}_A = \vec{a}_A^e + \vec{a}_{AA'}^r + \vec{a}^K,$ $a^K = 2\omega \cdot v_{AA'}^r$
<p><i>Примечание</i> – \vec{a}_A^n – вектор нормального ускорения точки направляется к центру вращения; a^K – ускорение Кориолиса направляется поворотом на 90° вектора относительной скорости $\vec{v}_{AA'}^r$ по направлению переносного вращения ω</p>			

Для кинематического анализа строят кинематическую схему механизма (структурную схему с учетом геометрических размеров звеньев), планы положений звеньев (кинематические схемы при заданных положениях входного звена) (рисунок 7). Определить кинематические параметры можно методом планов, методом замкнутых векторных контуров, методом численного или графического дифференцирования (интегрирования).

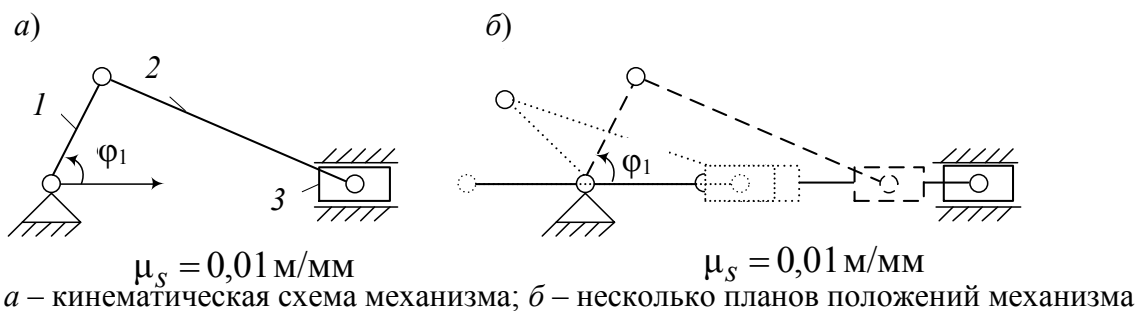


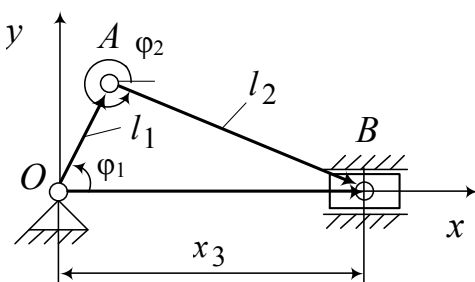
Рисунок 7 – Схемы для кинематического анализа механизма ($\mu_s = 0,01 \text{ м/мм}$)

Планом скоростей звена называется плоский пучок векторов, идущих из полюса, которые изображают в масштабе абсолютные скорости точек звена; отрезки, соединяющие концы векторов, изображают относительные скорости точек. Совокупность планов скоростей звеньев с общим полюсом называется **планом скоростей механизма**. Определение плана ускорений аналогично.

Геометрический метод замкнутых векторных контуров основан на векторных уравнениях, связывающих положения характерных точек механизма. Проецируя эти уравнения на оси координат, получают аналитические выражения для определения линейных x_i , y_i и угловых φ_k координат в зависимости от обобщенной координаты φ_1 . В качестве обобщенной координаты φ_1 принимают угол поворота входного звена (кривошипа). На рисунке 8 рассмотрено

применение этого метода для кривошипно-ползунного механизма.

Механизм можно представить в виде замкнутого векторного контура OAB :



$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}. \quad (6)$$

Рисунок 8 – Применение метода замкнутых векторных контуров

Векторное уравнение в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = x_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где x_3 – координата, определяющая положение ползуна;

φ_1 и φ_2 – углы положения кривошипа длиной l_1 и шатуна длиной l_2 .

Система (7) включает два уравнения и два неизвестных. Задаваясь значениями угла поворота кривошипа φ_1 , можно определить φ_2 и x_3 . Для определения передаточных функций скорости v_{q3} и ускорения a_{q3} можно продифференцировать систему (7) по φ_1 :

$$\begin{cases} -l_1 \sin \varphi_1 - U_{21} l_2 \sin \varphi_2 = v_{q3}; \\ l_1 \cos \varphi_1 + U_{21} l_2 \cos \varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где U_{21} – передаточная функция угловой скорости шатуна.

Методы численного дифференцирования (интегрирования) основаны на известных формулах численного дифференцирования (интегрирования) и хорошо формализуются. Например, зная значения перемещений x_3 ползуна 3 (см. рисунок 8) при заданных углах поворота φ_1 кривошипа 1 (рисунок 9, а), можно получить передаточные функции скорости v_{q3} (рисунок 9, б) и ускорения a_{q3} ползуна (рисунок 9, в), продифференцировав численно по формулам:

$$v_{q3i} = \frac{x_{3i} - x_{3i-1}}{\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1}}, \quad a_{q3i} = \frac{v_{q3i} - v_{q3i-1}}{\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1}}, \quad i = \overline{1..n} \quad (9)$$

где x_{3i} и x_{3i-1} – значения перемещений ползуна в i -той и предыдущей точках при положениях φ_{1i} и φ_{1i-1} кривошипа;

v_{q3i} и v_{q3i-1} – значения передаточных функций скорости ползуна в i -й и предыдущей точках при положениях φ_{1i} и φ_{1i-1} кривошипа;

i и n – номер положения и общее число рассмотренных положений.

Задания для самостоятельного выполнения

В таблице 4 приведены кинематические схемы механизмов для кинематического анализа методом планов и геометрическим. Вариант схемы задает преподаватель.

Пример выполнения задания

Рассмотрим применение метода планов скоростей и ускорений для механизма поперечно-строгального станка, приведенного на рисунке 10, а. Известны длины L между соответствующими точками: $L_{OA} = 0,15$ м; $L_{OB} = 0,3$ м; $L_{BC} = 0,57$ м; $L_{DC} = 0,19$ м. Кривошип 1 вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 10$ рад/м.

Необходимо вычертить кинематическую схему заданного механизма.



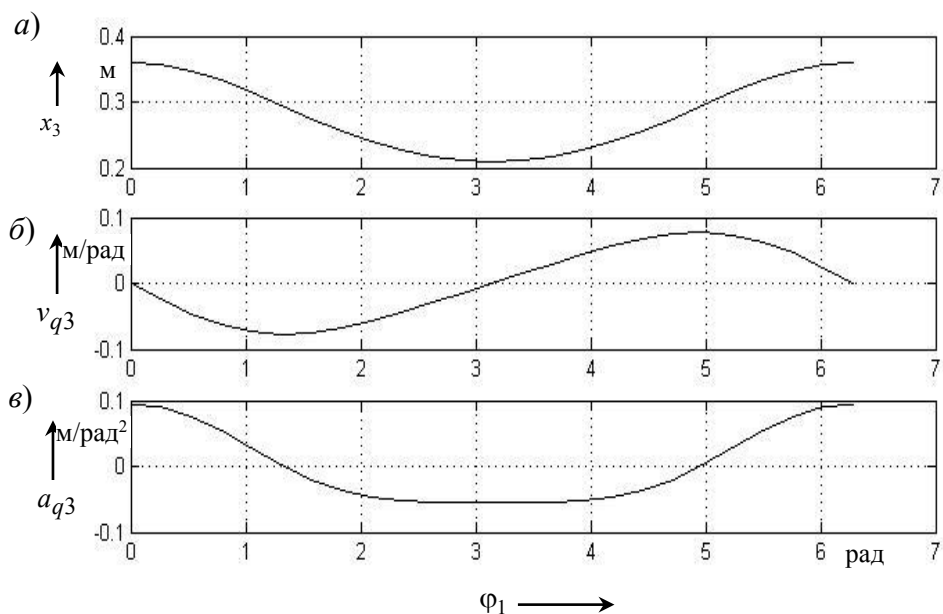
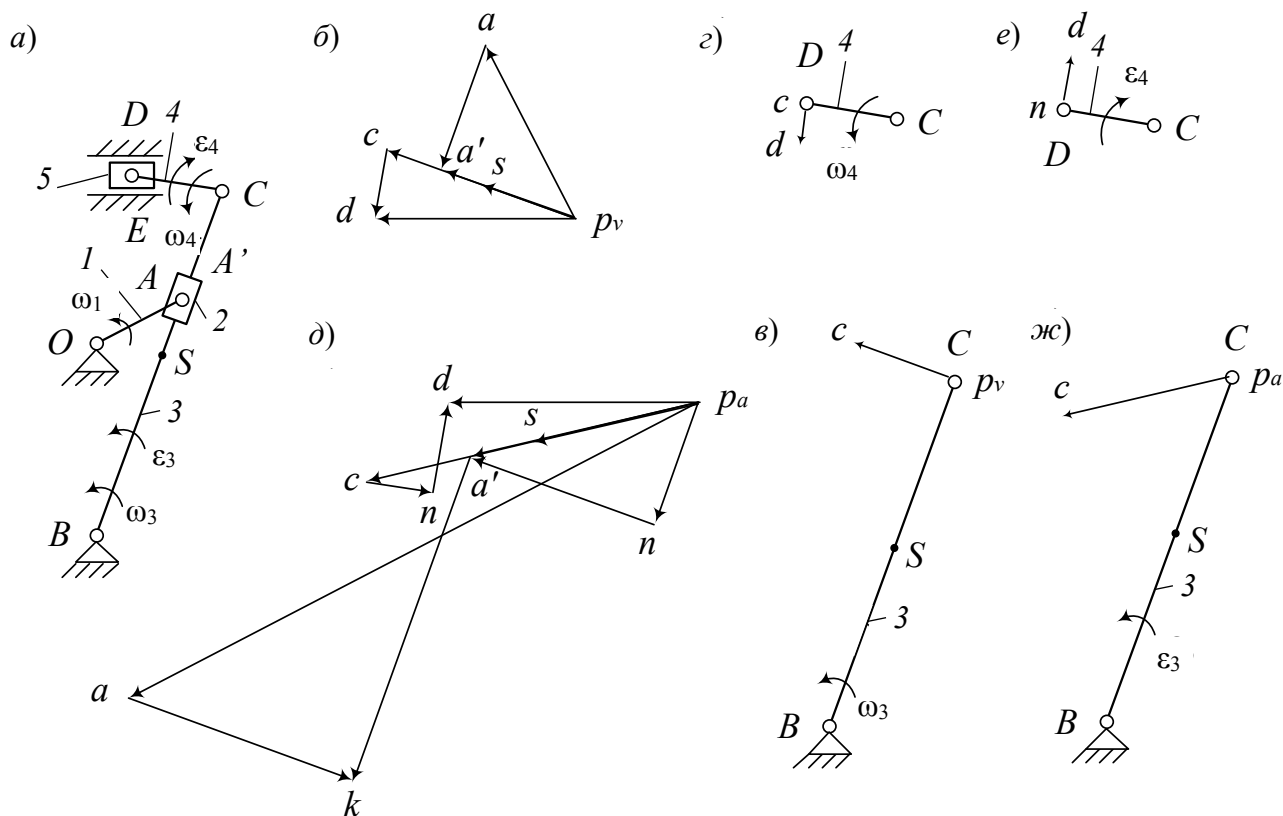


Рисунок 9 – Применение метода численного дифференцирования и интегрирования



a – план положений механизма с указанными направлениями угловой скорости и ускорения; *б* – план скоростей; *в* – схема определения угловой скорости кулисы 3; *г* – схема определения угловой скорости шатуна 4; *д* – план ускорений; *е* – схема определения углового ускорения кулисы 3; *ж* – схема определения углового ускорения шатуна 4

Рисунок 10 – Построение планов скоростей и ускорений механизма



Для удобства размещения механизма можно использовать масштабный коэффициент μ_s , который равен отношению реального значения длины L в метрах к выбранному отрезку l в миллиметрах на схеме $\mu_s = \frac{L}{l} \frac{\text{м}}{\text{мм}}$.

Произведем структурный анализ механизма. Выделим две диады, составленные звеньями 4–5 и 2–3, и механизм первого класса, включающий кривошип l со стойкой.

Ставим полюс построения плана скоростей – точку p_v , в которой на плане скорость равна нулю и относительно которой измеряются значения скоростей подвижных точек механизма (рисунк 10, б).

По заданной угловой скорости кривошипа ω_1 можно определить линейную скорость конца кривошипа точки A :

$$v_A = \omega_1 \cdot L_{OA} = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \text{ м/с}.$$

Направление скорости точки определяется касательной к траектории точки. Направляем вектор скорости \vec{v}_A перпендикулярно кривошипу в направлении его вращения, заданном на рисунке направлением ω_1 .

Выбираем произвольно длину отрезка $p_v a$, обозначающего скорость точки A . Определяем масштабный коэффициент построения плана скоростей $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a} \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$. Для рассматриваемого случая $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a} = \frac{1,5}{150} = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$.

Из системы определяем скорость $\vec{v}_{A'}$ внутренней точки A' диады 2–3, т. е. скорость кулисного камня 2, совпадающую со скоростью кулисы 3 в точке A' :

$$\begin{cases} \vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + \vec{v}_{A'A} \parallel BC; \\ \vec{v}_{A'} = \vec{v}_B + \vec{v}_{A'B} \perp BC, \end{cases} \quad (10)$$

где $\vec{v}_{A'A}$ – относительная скорость камня по кулисе, направлена параллельно кулисе 3;

$\vec{v}_{A'B}$ – скорость точки A' , лежащей на кулисе, относительно центра вращения кулисы B , направлена перпендикулярно кулисе 3;

\vec{v}_B – скорость точки B , находящейся на стойке, равна нулю.

При графическом решении первого уравнения системы (10) для получения вектора $\vec{v}_{A'}$ необходимо к вектору скорости \vec{v}_A прибавить вектор $\vec{v}_{A'A}$. Это значит на плане из конца вектора скорости \vec{v}_A , т. е. из точки a , надо построить линию параллельно кулисе 3. На этой линии лежит скорость $\vec{v}_{A'A}$.

При графическом решении второго уравнения системы (10) для получения вектора $\vec{v}_{A'}$ необходимо к вектору скорости $\vec{v}_B = 0$ прибавить вектор $\vec{v}_{A'B}$. Это значит на плане из полюса, т. е. из точки p_v , надо построить линию перпенди-



кулярно кулисе 3, на этой линии лежит скорость $\vec{v}_{A'B}$.

Там, где линии скоростей $\vec{v}_{A'A}$ и $\vec{v}_{A'B}$ пересекаются, находится точка a' .

Соединим полюс p_v с точкой a' и получим вектор скорости $\vec{v}_{A'}$. Измеряем расстояние $p_v a'$ и умножаем на масштабный коэффициент μ_v для определения скорости $\vec{v}_{A'A}$ в метрах в секунду. Аналогично определим и $\vec{v}_{A'B}$:

$$\vec{v}_{A'A} = aa' \cdot \mu_v = 101 \cdot 0,01 = 1,01 \text{ м/с};$$

$$\vec{v}_{A'B} = p_v a' \cdot \mu_v = 108,2 \cdot 0,01 = 1,082 \text{ м/с}.$$

Вернемся к схеме механизма и обратим внимание на кулису 3. Скорость ее точки B известна и равна нулю, поэтому лежит в полюсе p_v , а скорость ее точки $\vec{v}_{A'}$ тоже определена отрезком $p_v a'$. По свойству подобия на продолжении $p_v a'$ можно найти скорость ее точки C :

$$\frac{p_v a'}{p_v c} = \frac{BA'}{BC}; \quad p_v c = \frac{p_v a' \cdot BC}{BA'}; \quad (11)$$

$$p_v c = \frac{108,2 \cdot 0,57}{0,392} = 157,3 \text{ мм}.$$

Отложим от полюса p_v в направлении точки a' отрезок $p_v c$. Определим скорость точки C $\vec{v}_C = p_v c \cdot \mu_v = 157,3 \cdot 0,01 = 1,573 \text{ м/с}$.

Скорость центра масс кулисы, т. е. точки S можно определить из соотношения, аналогичного (11). Зная, что точка S делит кулису пополам, скорость точки C тоже можно поделить пополам: $\vec{v}_S = \vec{v}_C / 2 = 1,573 / 2 = 0,787 \text{ м/с}$. Отметим точку s на плане посередине отрезка $p_v c$.

Из системы определяем скорость \vec{v}_D внутренней точки D диады 4–5, т. е. скорость ползуна 5:

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC} \perp DC; \\ \vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_{DE} \parallel OX, \end{cases} \quad (12)$$

где \vec{v}_{DC} – относительная скорость точки D во вращательном движении вокруг точки C , направлена перпендикулярно шатуну 4;

\vec{v}_{DE} – скорость точки D , лежащей на ползуне 5, относительно точки E стойки, направлена параллельно направляющим ползуна, т. е. горизонтально;

\vec{v}_E – скорость точки E , находящейся на стойке, равна нулю.

При графическом решении первого уравнения системы (12) для получения вектора \vec{v}_D необходимо к вектору скорости \vec{v}_C прибавить вектор \vec{v}_{DC} . Это



значит на плане из конца вектора скорости \vec{v}_C , т. е. из точки c , надо построить линию перпендикулярно шатуну 4. На этой линии лежит вектор скорости \vec{v}_{DC} .

При графическом решении второго уравнения системы (12) для получения вектора \vec{v}_D необходимо к вектору скорости $\vec{v}_E = 0$ прибавить вектор \vec{v}_{DE} . Это значит на плане из полюса, т. е. из точки p_v надо построить линию параллельно направляющей ползуна 5, на этой линии лежит вектор скорости \vec{v}_{DE} .

Там, где линии скоростей \vec{v}_{DC} и \vec{v}_{DE} пересекаются, находится точка d .

Соединяем полюс p_v с точкой d и получим вектор скорости \vec{v}_D . Измеряем расстояние $p_v d$ в миллиметрах и умножаем на масштабный коэффициент μ_v для определения скорости \vec{v}_{DE} в метрах в секунду. Аналогично определим и \vec{v}_{DC} .

$$\vec{v}_{DC} = dc \cdot \mu_v = 54,7 \cdot 0,01 = 0,547 \text{ м/с}; \vec{v}_{DE} = p_v d \cdot \mu_v = 155,2 \cdot 0,01 = 1,552 \text{ м/с}.$$

Из второго уравнения системы (12), поскольку $\vec{v}_E = 0$, получим $\vec{v}_D = \vec{v}_{DE} = 1,552 \text{ м/с}$.

Определим угловую скорость звеньев, совершающих вращательное или сложное движение, в данном случае это скорость кулисы и шатуна:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{L_{BC}} = \frac{1,573}{0,57} = 2,76 \text{ рад/с}; \omega_4 = \frac{v_{DC}}{L_{DC}} = \frac{0,0547}{0,19} = 0,29 \text{ рад/с}.$$

На рисунке 10, в, г показана схема определения направления угловых скоростей кулисы 3 и шатуна 4.

Ставим полюс построения плана ускорений – точку p_a , в которой на плане ускорение равно нулю и относительно которой измеряются значения ускорений подвижных точек механизма (рисунок 10, д).

Построение плана ускорений начинается с определения ускорения точки A конца кривошипа. Рассмотрим случай равномерного вращения кривошипа с заданной постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$. Тогда касательное ускорение a_A^t точки A тоже будет равно нулю, а ускорение a_A будет равно нормальной составляющей a_A^n . $a_A = a_A^n = \omega_1^2 L_{OA} = 10^2 \cdot 0,15 = 15 \text{ рад/с}$.

Нормальное ускорение точки A направлено параллельно кривошипу к центру его вращения, т. е. к точке O (центростремительное).

Определяем масштабный коэффициент построения плана ускорений $\mu_a = \frac{a_A}{p_a a}$. Длину отрезка, обозначающего вектор ускорений \vec{a}_A , выбираем произвольно исходя из удобства размещения на листе.

$$\text{Для рассматриваемого случая } \mu_a = \frac{a_A}{p_a a} = \frac{15}{500} = 0,03 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$



Для определения ускорения $\vec{a}_{A'}$ внутренней точки A' диады 2–3 составим систему:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A'} = \vec{a}_A + \vec{a}_{A'A}^K + \vec{a}_{A'A}^\tau \parallel BC; \\ \vec{a}_{A'} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A'B}^n + \vec{a}_{A'B}^\tau \perp BC, \end{cases} \quad (13)$$

где $a_{A'A}^\tau$ – относительное ускорение камня по кулисе, направлено параллельно кулисе 3;

$\vec{a}_{A'A}^K$ – ускорение Кориолиса, модуль которого $\vec{a}_{A'A}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{A'A}$;

$\vec{a}_{A'B}^n$ – относительное нормальное ускорение точки A' во вращении ее относительно точки B , направлено к центру вращения кулисы к точке B ;

$\vec{a}_{A'B}^\tau$ – относительное касательное ускорение точки A' во вращении ее относительно точки B , направлено перпендикулярно нормальному, т. е. перпендикулярно кулисе 3;

\vec{a}_B – ускорение точки B , которая находится на стойке, поэтому $\vec{a}_B = 0$.

Определяем ускорение Кориолиса по формуле

$$\vec{a}_{A'A}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{A'A} = 2 \cdot 2,76 \cdot 1,01 = 5,575 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется поворотом вектора относительной скорости $\vec{v}_{A'A}$ (отрезок aa' на плане скоростей) на 90° в направлении вращения кулисы ω_3 . Схема для определения направления ускорения Кориолиса приведена на рисунке 10, з. Отрезок в миллиметрах, обозначающий ускорение Кориолиса, на плане ускорений определяется с учетом масштабного коэффициента: $ak = a^K / \mu_a = 5,575 / 0,03 = 185,8 \text{ мм}$.

$$\text{Определяем нормальное ускорение: } \vec{a}_{A'B}^n = \frac{v_{A'B}^2}{L_{A'B}} = \frac{1,082^2}{0,392} = 2,987 \text{ м/с}^2.$$

Отрезок в миллиметрах, обозначающий ускорение $\vec{a}_{A'B}^n$ на плане ускорений, определяется с учетом масштабного коэффициента:

$$p_a n_1 = a_{A'B}^n / \mu_a = 2,987 / 0,03 = 99,56 \text{ мм}.$$

При графическом решении первого уравнения системы (9) для получения вектора $\vec{a}_{A'}$ необходимо к вектору ускорения \vec{a}_A прибавить вектор $\vec{a}_{A'A}^K$ и вектор $a_{A'A}^\tau$. Это значит на плане из конца вектора ускорения \vec{a}_A , т. е. из точки a , надо построить отрезок ak ускорение Кориолиса и провести линию параллель-



но кулисе 3, на которой лежит вектор ускорения $a_{A'A}^{\tau}$.

При графическом решении второго уравнения системы (9) для получения вектора $\vec{a}_{A'}$ необходимо к вектору ускорения $\vec{a}_B = 0$ прибавить вектор $\vec{a}_{A'B}^n$. Это значит на плане из полюса, т. е. из точки p_a надо построить отрезок $p_a n_1$ параллельно кулисе 3 к центру вращения B . Из его конца n провести перпендикуляр к кулисе 3. На этой линии лежит вектор ускорения $\vec{a}_{A'B}^{\tau}$.

Там, где линии ускорений $a_{A'A}^{\tau}$ и $\vec{a}_{A'B}^{\tau}$ пересекаются, находится точка a' .

Соединим полюс p_a с точкой a' и получим вектор ускорения $\vec{a}_{A'}$. Измеряем расстояние $p_a a'$ в миллиметрах и умножаем на масштабный коэффициент μ_a для определения ускорения $\vec{a}_{A'}$, м/с². Определим $a_{A'A}^{\tau}$ и $\vec{a}_{A'B}^{\tau}$.

$$a_{A'} = p_a a' \cdot \mu_a = 182,9 \cdot 0,03 = 5,49 \text{ м/с}^2; \quad a_{A'A}^{\tau} = k a' \cdot \mu_a = 270 \cdot 0,03 = 8,1 \text{ м/с}^2;$$

$$\vec{a}_{A'B}^{\tau} = n_1 a' \cdot \mu_a = 152 \cdot 0,03 = 4,56 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки C , также как и ее скорость, мы определим по свойству подобия. Ускорение точки B известно и равно нулю, поэтому лежит в полюсе p_a , а ускорение точки $\vec{a}_{A'}$ уже определено отрезком $p_a a'$. По свойству подобия на продолжении $p_a a'$ можно найти ускорение точки C :

$$\frac{p_a a'}{p_a c} = \frac{BA'}{BC}; \quad p_a c = \frac{p_a a' \cdot BC}{BA'}; \quad (14)$$

$$p_a c = \frac{182,9 \cdot 0,57}{0,392} = 266 \text{ мм.}$$

Отложим от полюса p_a в направлении точки a' отрезок $p_a c$. Определим ускорение точки C : $a_C = p_a c \cdot \mu_a = 266 \cdot 0,03 = 7,98 \text{ м/с}^2$.

Ускорение центра масс S кулисы можно определить из соотношения аналогичного (14). Зная, что точка S делит кулису пополам, ускорение точки C можно поделить пополам: $a_S = a_C / 2 = 7,98 / 2 = 3,99 \text{ м/с}$. Отметим точку s на плане посередине отрезка $p_a c$.

Для определения ускорения \vec{a}_D внутренней точки D диады 4–5 составим систему:

$$\begin{cases} \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^n + \vec{a}_{DC}^{\tau} \perp DC; \\ \vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE}^{\tau} \parallel OX, \end{cases} \quad (15)$$

где a_{DC}^{τ} – относительное касательное ускорение во вращательном движении



точки D по отношению к C , направлено перпендикулярно шатуну 4;

\vec{a}_{DC}^n – относительное нормальное ускорение точки D во вращении ее относительно C , направлено параллельно шатуну к точке C ;

\vec{a}_{DE}^τ – относительное касательное ускорение точки D при ее поступательном движении параллельно горизонтальным направляющим стойки;

\vec{a}_E – ускорение точки E , которая находится на стойке, поэтому $\vec{a}_E = 0$.

$$\text{Определяем нормальное ускорение: } \vec{a}_{DC}^n = \frac{v_{DC}^2}{L_{DC}} = \frac{0,547^2}{0,19} = 1,57 \text{ м/с}^2.$$

Отрезок, обозначающий ускорение \vec{a}_{DC}^n на плане ускорений, определяется с учетом масштабного коэффициента $p_{an2} = a_{DC}^n / \mu_a = 1,57 / 0,03 = 52,33 \text{ мм}$.

При графическом решении первого уравнения системы (15) для получения вектора \vec{a}_D необходимо к вектору ускорения \vec{a}_C прибавить вектор \vec{a}_{DC}^n и вектор \vec{a}_{DC}^τ . Это значит на плане из конца вектора ускорения \vec{a}_C , т. е. из точки c , надо построить отрезок cn_2 ускорения \vec{a}_{DC}^n и провести линию перпендикулярно шатуну 4, на которой лежит ускорение \vec{a}_{DC}^τ .

При графическом решении второго уравнения системы (15) для получения вектора \vec{a}_D необходимо к вектору ускорения $\vec{a}_E = 0$ прибавить вектор \vec{a}_{DE}^τ . Это значит на плане из полюса, т. е. из точки p_a , надо построить горизонтальную линию. На этой линии лежит ускорение \vec{a}_{DE}^τ .

Там, где линии ускорений \vec{a}_{DC}^τ и \vec{a}_{DE}^τ пересекаются, находится точка d .

Измеряем расстояние $p_a d$ в миллиметрах и умножаем на масштабный коэффициент μ_a для определения ускорения \vec{a}_D , м/с².

$$a_D = a_{DE}^\tau = p_a d \cdot \mu_a = 195,2 \cdot 0,03 = 5,86 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{DC}^\tau = n_2 c \cdot \mu_a = 70,9 \cdot 0,03 = 2,13 \text{ м/с}^2.$$

Определяем величины угловых ускорений кулисы 3 и шатуна 4 отношением касательных ускорений к длине звена.

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B}{L_{BC}} = \frac{7,98}{0,57} = 14 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{L_{DC}} = \frac{2,13}{0,19} = 11,21 \text{ рад/с}^2.$$

На рисунке 10, *е*, *ж* показано, как определять направление углового ускорения, мысленно устанавливая векторы соответствующих ускорений на схеме механизма. Если направление ускорения совпало с направлением угловой ско-



рости, то звено в своем вращательном движении ускоряется, а если ε и ω направлены в противоположные стороны, то замедляется.

Практическое занятие № 5. Кинематический анализ и синтез зубчатых рядов и планетарных механизмов

Теоретические основы практического занятия

Зубчатые механизмы служат для передачи вращения. В машиностроении чаще используются зубчатые механизмы, понижающие угловую скорость ω , с^{-1} и увеличивающие вращающий момент T , Н·м, т. е. усилие. Такие передачи называют **редукторами**. Их необходимость обусловлена тем, что выпускаемые промышленностью двигатели быстроходны. Рабочие же органы, как правило, тихоходны и требуют больших усилий для выполнения работы. Но бывают зубчатые механизмы, которые увеличивают угловую скорость – **мультипликаторы**. Они могут использоваться, например, для центрифуг.

Передаточное отношение i – отношение угловой скорости ω_1 (с^{-1}) ведущего зубчатого колеса к угловой скорости ведомого ω_2 с учетом направления вращения (это справедливо и для частот вращения n_1 и n_2 , об/мин), индексы в формуле указывают на номера колес:

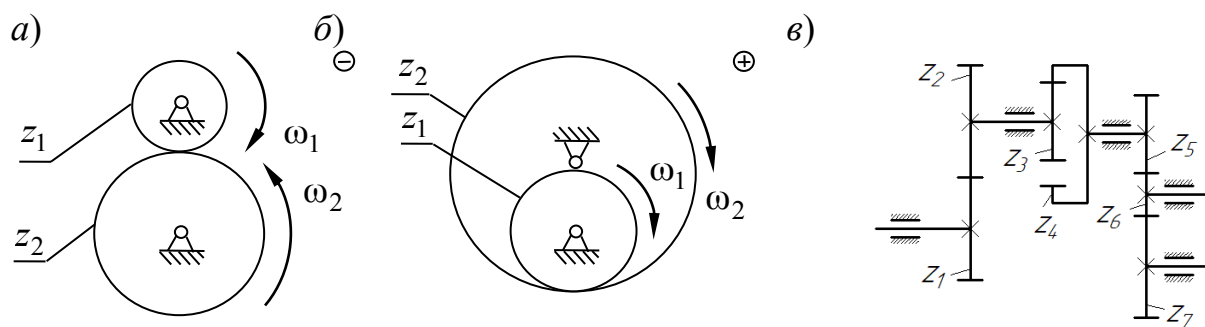
$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}.$$

Знак плюс используют при внутреннем зацеплении, а минус – при внешнем (рисунок 11, *а*, *б*). Передаточное отношение не следует путать с **передаточным числом** u , под которым понимают отношение числа зубьев большего колеса z_2 к меньшему z_1 :

$$u_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Передаточное отношение всегда больше единицы и знака не имеет. Часто передаточное отношение определяют через число зубьев.

Зубчатым рядом называют зубчатый механизм, образованный зубчатыми колесами с неподвижными осями. Зубчатый ряд может состоять из одной или нескольких передач (рисунок 11, *в*).



a – внешнее зацепление; *б* – внутреннее зацепление; *в* – схема зубчатого ряда

Рисунок 11 – Зубчатый ряд

Если зубчатый ряд имеет несколько зацеплений, то его передаточное отношение будет равно произведению передаточных отношений каждого зацепления. Например, (см. рисунок 11, *в*), для зубчатого ряда от колеса 1 к колесу 7

передаточное отношение $i_{17} = i_{12}i_{34}i_{56}i_{67} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = -\frac{z_2 z_4 z_7}{z_1 z_3 z_5}$.

Планетарным называется зубчатый механизм, содержащий колеса с подвижными осями. Звенья планетарного механизма имеют особенные названия. Зубчатые колеса с подвижной осью (z_{g1} и z_{g2} в таблице 9) называются **сателлитами**. Подвижное звено, в котором помещена ось сателлита, называется **водителем** h . В планетарной передаче есть два центральных колеса: **центральное** z_a с внешними зубьями называется **солнечным**, z_a с внутренними зубьями – **эпициклом** (коронной), неподвижное z_b – **опорным**.

При определении передаточного отношения планетарных передач используется **метод обращенного движения** (метод остановки водила) [2].

Рассмотрим данный метод, применительно к планетарной передаче типа В, показанной в таблице 9. Передаточное отношение для данной передачи при передаче движения от солнечного колеса a к водилу h при остановленном коронном колесе b определяется по выражению

$$i_{ah}^b = \frac{\omega_a}{\omega_h}.$$

По методу Виллиса сообщаем всему механизму угловую скорость, равную угловой скорости водила, но направленную в противоположном направлении. При этом получаем обращенный механизм, в котором движение передается от солнечного колеса a к коронному колесу b при остановленном водиле h . Передаточное отношение обращенного механизма определяется по выражению

$$i_{ab}^h = \frac{\omega_a - \omega_h}{\omega_b - \omega_h}.$$

Таблица 9 – Основные типы планетарных механизмов

Схема				
Название	Механизмы с двухвенцовыми сателлитами и одноименными зацеплениями (два внешних)	Механизмы с двухвенцовыми сателлитами и одноименными зацеплениями (два внутренних)	Механизм с двухвенцовыми сателлитами и разноименными зацеплениями	Механизм с одновенцовыми сателлитами и разноименными зацеплениями
Значение p	$\frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$	$\frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$	$-\frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$	$-\frac{z_b}{z_a}$
Диапазон p	1...2	1...2	-10...-1	-5...1,4
Условие соосности	$z_a + z_g = z_b + z_f$	$z_a - z_g = z_b - z_f$	$z_a + z_g = z_b - z_f$	$z_b = z_a + 2z_g$
Условие сборки	$(z_b z_g - z_a z_f) / k_c = n$		$(z_b z_g + z_a z_f) / k_c = n$	
<p><i>Примечание</i> – p – кинематический параметр, который равен передаточному отношению обращенного механизма при передаче вращения от центрального колеса в водилу; k_c – число сателлитов; n – любое целое число</p>				

В рассматриваемом механизме (рисунок 12, а) угловая скорость коронного колеса $\omega_b = 0$, следовательно $i_{ab}^h = \frac{\omega_a - \omega_h}{-\omega_h} = \frac{\omega_a}{-\omega_h} + \frac{-\omega_h}{-\omega_h} = 1 - \frac{\omega_a}{\omega_h} = 1 - i_{ah}^b$.

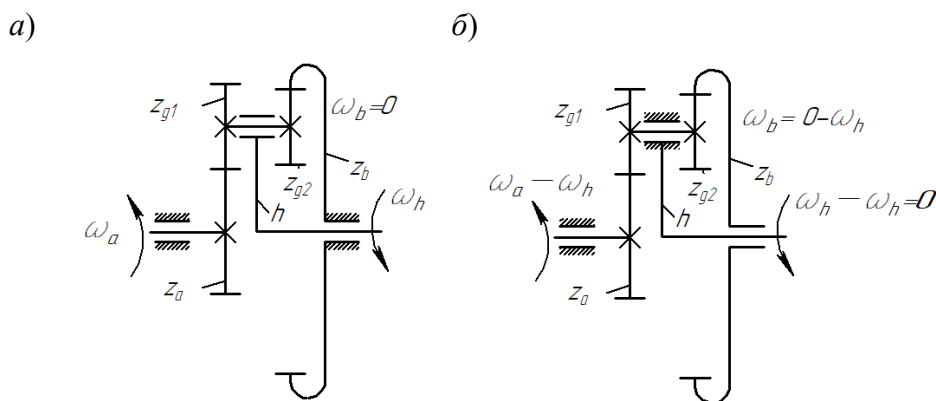
$$i_{ab}^h = 1 - i_{ah}^b \text{ или } i_{ah}^b = 1 - i_{ab}^h.$$

Обращённый механизм представляет собой зубчатый ряд, в которой движение передаётся от солнечного колеса z_a к колесу z_{g1} и через колесо z_{g2} колесу z_b . Пример такого механизма приведен на рисунке 12, б. Следовательно передаточное отношение обращённого механизма i_{ab}^h при известных числах зубьев всех звеньев планетарной передачи будет определяться выражением

$$i_{ab}^h = \left(-\frac{z_{g1}}{z_a} \right) \cdot \frac{z_b}{z_{g2}}.$$

Окончательно получим передаточное отношение: $i_{ah}^b = 1 - i_{ab}^h = 1 + \frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}$.

Передаточное отношение i_{ah}^b называется кинематическим параметром планетарного механизма и обозначается p (см. таблицу 9).



a – планетарный механизм; *б* – обращённый механизм

Рисунок 12 – Кинематический анализ планетарного механизма

Задача синтеза планетарного механизма заключается в назначении чисел зубьев зубчатых колес с учетом условий обеспечения требуемого передаточного отношения, соосности, сборки и соседства (см. таблицу 9), отсутствия подрезания и заклинивания.

Условие соосности обеспечивает совпадение осей вращения центральных зубчатых колес и водила, иначе механизм заклинит. **Условие соседства** сателлитов выражается в том, что соседние сателлиты не должны касаться друг друга окружностями вершин. **Условие сборки** заключается в том, что при сборке после установки первого сателлита может оказаться, что остальные сателлиты установить нельзя. Это происходит потому, что поставленный первым сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес. **Условие отсутствия подрезания** колес с внешними зубьями обеспечивается, если для всех колес с внешними зубьями выполняется неравенство $z_i \geq z_{\min} = 17$. **Условие отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении** для передачи, состоящей из колес без смещения, можно обеспечить при выполнении следующих неравенств: $z_{\text{внешн}} \geq 20$, $z_{\text{внутр}} \geq 85$, $z_{\text{внутр}} - z_{\text{внешн}} \geq 8$.

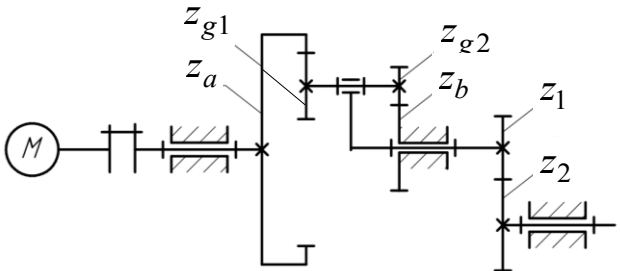
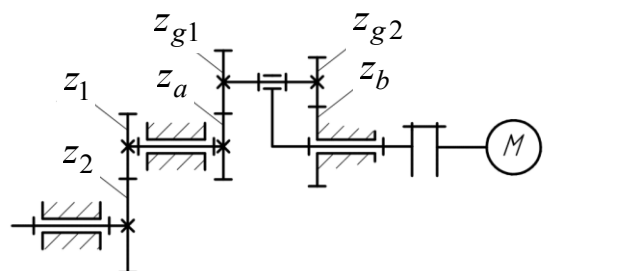
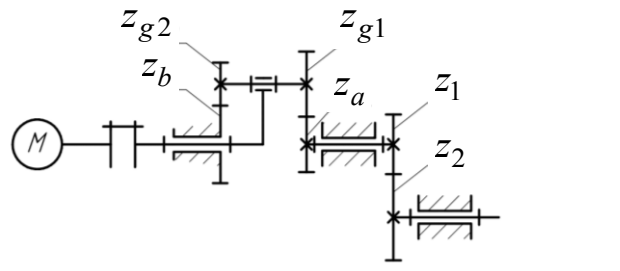
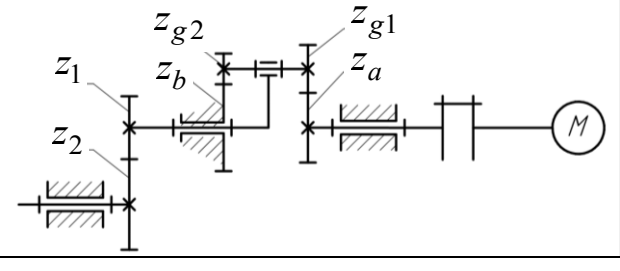
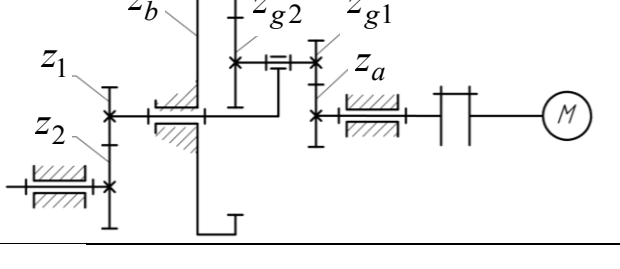
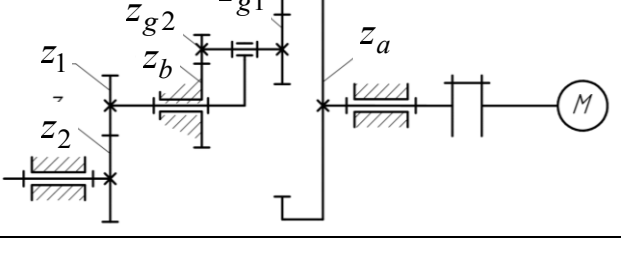
Задания для самостоятельного выполнения

По варианту, заданному преподавателем, произвести синтез планетарной части смешанного зубчатого механизма (таблица 10). Определить угловые скорости каждого зубчатого колеса и водила.

Таблица 10 – Схемы для синтеза планетарных механизмов

Схема	Исходные данные	
	Вариант 1.1	Вариант 1.2
	$i_{h2}^b = 5,5;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 45;$ $n_{об} = 750$ об/мин	$i_{h2}^b = 14;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 56;$ $n_{об} = 1000$ об/мин
	$i_{a2}^b = -7,2;$ $z_1 = 25;$ $z_2 = 45;$ $n_{об} = 750$ об/мин	$i_{a2}^b = -9;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 24;$ $n_{об} = 1000$ об/мин
	$i_{a2}^b = -3;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 64;$ $n_{об} = 750$ об/мин	$i_{a2}^b = 2,85;$ $z_1 = 19;$ $z_2 = 60;$ $n_{об} = 1000$ об/мин
	$i_{a2}^b = -7,65;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 34;$ $n_{об} = 1500$ об/мин	$i_{a2}^b = -4,6;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 34;$ $n_{об} = 1000$ об/мин

Окончание таблицы 10

Схема	Исходные данные	
	Вариант 5.1	Вариант 5.2
	$i_{a2}^b = -14,25;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 27;$ $n_{дв} = 1500 \text{ об/мин}$	$i_{a2}^b = -21,32;$ $z_1 = 15;$ $z_2 = 39;$ $n_{дв} = 2000 \text{ об/мин}$
	Вариант 6.1 $i_{h2}^b = 8,65;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 52;$ $n_{дв} = 2000 \text{ об/мин}$	Вариант 6.2 $i_{h2}^b = 3,33;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 51;$ $n_{дв} = 750 \text{ об/мин}$
	Вариант 7.1 $i_{h2}^b = 8,65;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 52;$ $n_{дв} = 2000 \text{ об/мин}$	Вариант 7.2 $i_{h2}^b = 4,42;$ $z_1 = 20;$ $z_2 = 62;$ $n_{дв} = 750 \text{ об/мин}$
	Вариант 8.1 $i_{a2}^b = 2,8;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 53;$ $n_{дв} = 1000 \text{ об/мин}$	Вариант 8.2 $i_{a2}^b = 3,32;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 63;$ $n_{дв} = 1500 \text{ об/мин}$
	Вариант 9.1 $i_{a2}^b = -13,1;$ $z_1 = 17;$ $z_2 = 34;$ $n_{дв} = 1000 \text{ об/мин}$	Вариант 9.2 $i_{a2}^b = -10,8;$ $z_1 = 19;$ $z_2 = 27;$ $n_{дв} = 750 \text{ об/мин}$
	Вариант 10.1 $i_{a2}^b = -13,87;$ $z_1 = 18;$ $z_2 = 27;$ $n_{дв} = 1500 \text{ об/мин}$	Вариант 10.2 $i_{a2}^b = -20,4;$ $z_1 = 19;$ $z_2 = 39;$ $n_{дв} = 2000 \text{ об/мин}$

Пример выполнения задачи синтеза

На рисунке 13 приведена схема исследуемого механизма. Исходные данные: $i_{h2}^b = 5,5$ – передаточное отношение от водила h к выходному колесу z_2 при остановленном колесе z_b ; $z_1 = 18$, $z_2 = 45$ – число зубьев колес зубчатого ряда; $n_{\text{дв}} = 750$ об/мин – частота вращения двигателя, обозначенного M на схеме.

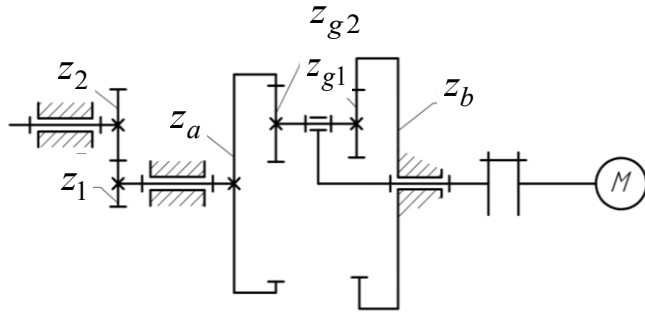


Рисунок 13 – Схема зубчатого механизма

Зубчатый механизм состоит из планетарного механизма передающего вращение от водила h к зубчатому колесу z_a и зубчатого ряда z_1 и z_2 . Передаточное отношение такого механизма равно произведению передаточных отношений планетарного механизма и зубчатого ряда: $i_{h2}^b = i_{ha}^b \cdot i_{12}$.

Известно передаточное отношение зубчатого ряда $i_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{45}{18} = -2,5$.

Определим передаточное число планетарного механизма $i_{ha}^b = \frac{i_{h2}^b}{i_{12}} = \frac{5,5}{-2,5} = -2,2$.

Для обеспечения условия требуемого передаточного отношения выразим передаточное число планетарного механизма через число зубьев. Для этого сначала определим передаточное отношение планетарного механизма от колеса z_a к водилу h при остановленном колесе z_b $i_{ah}^b = \frac{1}{i_{ha}^b} = \frac{1}{-2,2} = -0,45 \approx -0,45$.

Передаточное отношение обращенного механизма (при остановленном водиле h): $i_{ab}^h = 1 - i_{ah}^b = 1 - (-0,45) = 1 + 0,45 = 1,45$.

Передаточное отношение обращенного механизма выразим через число зубьев: $i_{ab}^h = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}$, т. е. $1,45 = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}$.

Теперь известно, какое должно быть соотношение числа зубьев. Представим десятичную дробь простой и сократим ее. Распределим с помощью сомножителей это соотношение, учитывая, что центральные зубчатые колеса с внутренними зубьями z_a и z_b всегда имеют большее число зубьев, чем сателлиты z_{g1} и z_{g2} :

$$1,45 = \frac{145}{100} = \frac{29}{20} = \frac{1 \cdot 29}{10 \cdot 2} = \frac{z_{g1}z_b}{z_a z_{g2}}$$

Из соотношения видно, что для обеспечения заданного передаточного отношения с высокой точностью колесо z_b должно быть в 29 раз больше сателлита z_g . Для уменьшения габаритов механизма, а значит снижения материалоем-

кости допускается 3...5-процентные погрешности при обеспечении заданного передаточного отношения. Поэтому округлим до десятых 1,45. Получим

$$1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{z_{g1} z_b}{z_a z_{g2}}.$$

Применим условие соосности:

$$\begin{aligned} (z_a - z_{g1}) &= (z_b - z_{g2}); \\ 2 \cdot (2 - 1) &= 1 \cdot (3 - 1); \\ (4 - 2) &= (3 - 1). \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства на 20 – минимальное число зубьев, которое можно нарезать для внешнего колеса при внутреннем зацеплении (условие отсутствия заклинивания во внутреннем зацеплении):

$$\begin{aligned} 20 \cdot (4 - 2) &= (3 - 1) \cdot 20; \\ (80 - 40) &= (60 - 20). \end{aligned}$$

Получилось, что число зубьев колес с внутренними зубьями меньше 85, значит необходимо умножить не на 20, а на 29:

$$\begin{aligned} 29 \cdot (4 - 2) &= (3 - 1) \cdot 29; \\ (116 - 58) &= (87 - 29). \end{aligned}$$

В результате синтезирован зубчатый планетарный механизм со следующим числом зубьев: $z_a = 116$, $z_b = 87$, $z_{g1} = 58$, $z_{g2} = 29$.

Зная частоту вращения двигателя и передаточное отношение механизма можно определить частоту вращения выходного вала зубчатого механизма:

$$n_2 = \frac{n_{дв}}{i_{h2}^b} = \frac{750}{5,5} = 136,36 \text{ об/мин.}$$

Практическое занятие № 6. Силовой анализ механизмов методом планов сил и проверка методом рычага Жуковского

Теоретические основы практического занятия

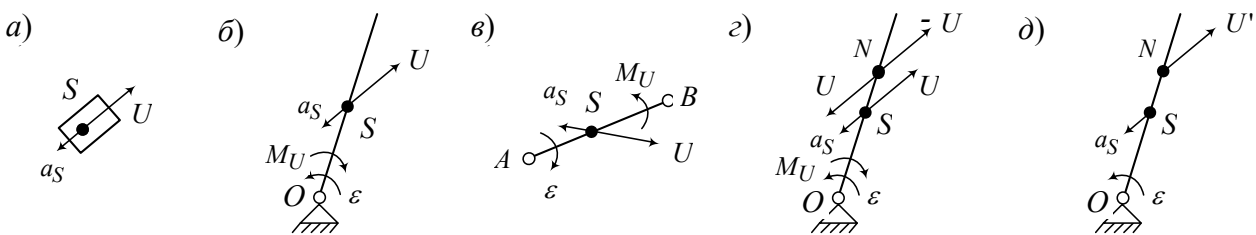
Предыдущие занятия были посвящены изучению **кинематики** звеньев механизма, т. е. изучению движения самого по себе, без учета воздействия сил. Однако на все окружающие нас тела действуют силы, различные по своей природе. **Динамика** изучает движение тел под действием сил. При этом учитыва-



ются инерционные свойства тела.

Принято выделять две основные задачи динамики: прямую и обратную. **Прямая задача динамики** состоит в том, чтобы по заданным силам найти закон движения звеньев. **Обратная задача динамики** – по заданному закону движения найти силы, вызвавшие это движение. К прямым задачам относятся рассматриваемые здесь задачи об истинном движении механизма, о регулировании хода машины, задача о маховике, к обратным задачам – силовое исследование механизма, уравнивание роторов и механизмов.

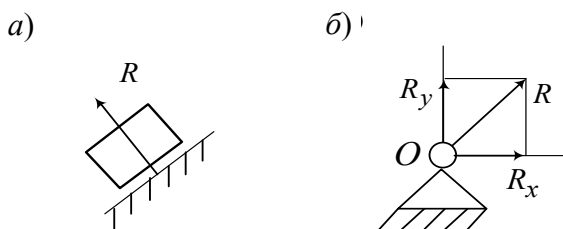
Сила – мера механического взаимодействия тел. Это векторная величина, имеющая точку приложения, направление и модуль. Принята следующая классификация сил. **Движущая сила** – это внешняя сила, приложенная к ведущему звену механизма со стороны двигателя и совершающая положительную работу. **Сила полезного сопротивления** – это внешняя сила, для преодоления которой предназначен механизм, она приложена к ведомому звену и совершает отрицательную работу. **Силы вредного сопротивления** – силы трения в кинематических парах, силы гидравлического и аэродинамического сопротивления, совершающие отрицательную работу. **Сила тяжести** $G = mg$ приложена к телу в центре масс, работа силы при опускании центра масс положительная, а при подъеме отрицательная, за полный цикл движения работа нулевая. **Силы реакции связей** – силы, возникающие в местах взаимодействия звеньев, т. е. в кинематических парах, и по третьему закону Ньютона равные по величине и противоположные по направлению. Для механизма работа сил реакции в кинематических парах равна нулю. **Сила инерции** $U = -ma$ – в инерциальных системах позволяет свести динамическую задачу к задаче статики. По **принципу Даламбера**, если к внешним силам добавить силы инерции, то систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии (**метод кинестатики**). Для поступательно движущегося тела (рисунок 14, а) сила инерции определяется произведением массы тела на ускорение центра масс $U = -ma_S$, прикладывается к центру масс противоположно направлению ускорения. Для вращающегося тела (рисунок 14, б), кроме силы, учитывают момент сил инерции $M_U = -J_S \varepsilon$, где J_S – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс S перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела. Для сложного движения (рисунок 14, в) тоже необходимо учесть и силу инерции, и момент сил инерции.



а – для поступательного движения; б – для вращательного движения; в – для сложного движения; г – прием замены силы и момента сил инерции одной силой; д – результат замены

Рисунок 14 – Силы и моменты инерции для различных видов движения

Удобно заменить U и M_U (рисунок 14, з) одной силой U' (рисунок 14, д). Для этого можно приложить в точке N силы U и $-U$. Это не изменит равновесия тела. Силы $-U$ (в точке N) и U (в центре масс S), образуют пару сил с моментом $M = U \cdot SN$. Если выбрать расстояние SN из условия $SN = \frac{M_U}{U}$, то M компенсирует M_U и можно учитывать в расчетах только силу $U' = -ma_S$, приложенную в точке N . Для коромысла $SN = \frac{L}{6}$, а $ON = \frac{2}{3}L$, где L – длина звена.



a – поступательная кинематическая пара; b – вращательная кинематическая пара

Рисунок 15 – Реакции в кинематических парах

На рисунке 15 изображены реакции поступательной и вращательной кинематических пар без учета сил трения.

Для динамического расчета будем использовать два метода: **метод планов сил** и **метод рычага Жуковского**. Метод планов сил позволяет определить силу, уравнивающую заданные внешние силы и силы инерции, а также позволяет определить реакции в кинематических парах. Метод основан на принципе освобожденности от связей

(отброшенные связи заменяются реакциями) и на принципе Даламбера. **Уравнивающая сила** прикладывается к концу кривошипа перпендикулярно ему и уравнивает все остальные силы, приложенные к звеньям механизма.

Метод рычага Жуковского основан на принципе возможных перемещений (принципе Даламбера-Лагранжа), который утверждает, что работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот метод позволяет оценить уравнивающую силу без определения реакций в кинематических парах.

Задания для самостоятельного выполнения

В таблице 4 приведены кинематические схемы механизмов для силового анализа методом планов сил. Вариант схемы задает преподаватель.

Пример выполнения задания

Пусть задан механизм и сила полезного сопротивления $Q = 250$ Н (рисунок 16, а), план его скоростей (рисунок 16, б) и ускорений (рисунок 16, в). Определим требуемую уравнивающую силу $F_{уп}$ и реакции в кинематических парах методом планов сил и методом рычага Жуковского. Пусть известны массы звеньев: масса кулисы $m_3 = 8$ кг; масса ползуна $m_5 = 25$ кг. Массы остальных звеньев малы по сравнению с заданными, ими пренебрегаем.

Определим веса звеньев: $G_3 = m_3 \cdot g = 8 \cdot 9,81 = 78,48$ Н; $G_5 = m_5 \cdot g =$

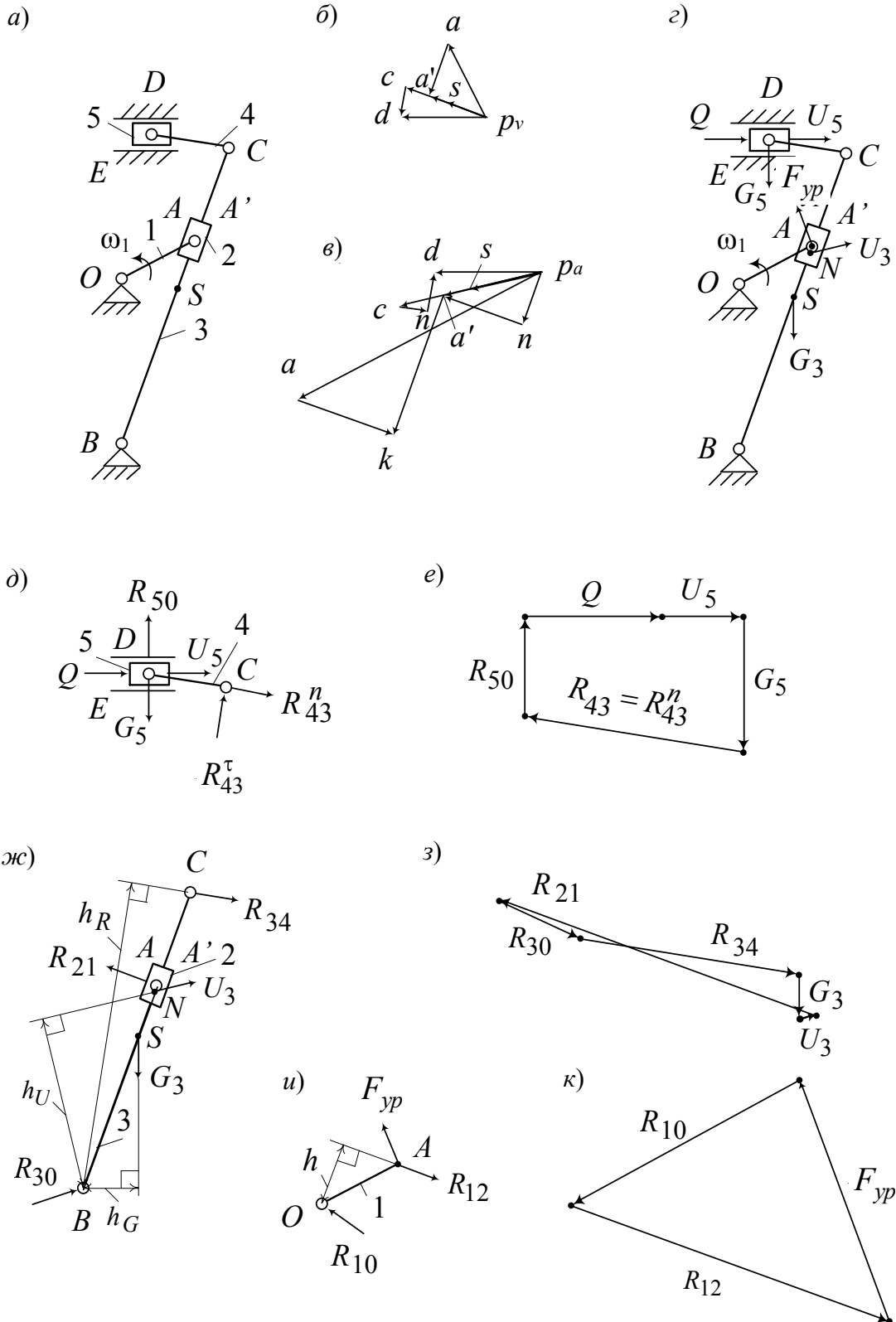
$= 25 \cdot 9,81 = 245,25 \text{ Н}$. Определим силы инерции этих звеньев: $U_3 = -m_3 \cdot a_s = 8 \cdot (-3,99) = -31,92 \text{ Н}$, $U_5 = -m_5 \cdot a_D = 25 \cdot (-5,86) = -146,5 \text{ Н}$. Знаки «минус» показывают, что направление сил инерции противоположно соответствующим ускорениям, указанным на плане ускорений векторами $\vec{a}_s = p_a s$, $\vec{a}_D = p_a d$ (рисунок 16, в). Уравновешивающую силу F_{yp} прикладываем к концу кривошипа, перпендикулярно ему в направлении его вращения (рисунок 16, з).

Выделяем диаду 4–5 (рисунок 16, д). В местах отрыва (кинематических парах E и C) отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями. Для поступательной пары E реакция R_{50} (перпендикулярна направляющим пары), а во вращательной паре реакция неизвестного направления, которую можно разложить на две составляющие: нормальную – R_{43}^n (параллельно звену) и касательную – R_{43}^τ (перпендикулярно звену). Нижний индекс состоит из двух чисел. Первое число указывает, на какое звено действует реакция, а второе – со стороны какого звена. Записываем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\vec{Q} + \vec{U}_5 + \vec{G}_5 + \vec{R}_{50} + \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^\tau = 0.$$

Геометрически это значит, что многоугольник, стороны которого являются векторами суммы, должен быть замкнут. Такой многоугольник можно построить, имея не более двух неизвестных. Для определения их числа удобно применять подчеркивание. Два подчеркивания – вектор известен и по направлению, и по величине. Одно подчеркивание – вектор известен лишь по направлению. В данном случае имеем три неизвестных. Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил звена 4 относительно точки D . Линия действия силы \vec{R}_{43}^n проходит через точку D , поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно точки D равен нулю. Момент создает сила \vec{R}_{43}^τ на плече L_{CD} , поскольку L_{CD} является перпендикуляром, опущенным из точки D на линию действия силы. Причем момент положительный потому, что сила стремится повернуть звено 4 относительно точки D против часовой стрелки, тогда уравнения равновесия моментов: $\sum M_D(4) = 0$, $R_{43}^\tau \cdot L_{CD} = 0$, $R_{43}^\tau = 0$. Теперь в уравнении равновесия две неизвестных. Можно приступить к его графическому решению. Строить векторный многоугольник можно в любой последовательности, начиная с известных по направлению и модулю векторов. Отложим $Q = 250 \text{ Н}$, по ее направлению вектор длиной $|Q| = 50 \text{ мм}$ и определим масштабный коэффициент построения: $\mu_F = \frac{Q}{|Q|} = \frac{250}{50} = 5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$.





a – заданный механизм; b – план скоростей механизма; $в$ – план ускорений механизма; $г$ – схема приложенных к механизму сил; $д$ – схема сил диады 4–5; $е$ – план сил диады 4–5; $ж$ – схема сил диады 2–3; $з$ – план сил диады 2–3; $и$ – схема сил механизма первого класса; $к$ – план сил механизма первого класса

Рисунок 16 – Применение метода планов сил

Определим $|U_5| = U_5/\mu_F = 146,5/5 = 29,3 \approx 29$ мм, и $|G_5| = G_5/\mu_F = 245,25/5 = 49,05 \approx 49$ мм. Пристроим их последовательно к вектору \vec{Q} (рисунок 16, е). Далее к концу вектора G_5 пристроим линию действия реакции R_{43}^n , а из точки начала построения вектора Q – линию действия R_{50} до точки пересечения с линией реакции R_{43}^n . Поставим направление векторов R_{43}^n и R_{50} так, чтобы получился замкнутый векторный контур. Вектор R_{43}^n на схеме сил (рисунок 16, д) имеет противоположное направление тому, что получилось из построения.

Следует понимать, что истинное направление векторов получается при графическом решении векторных уравнений на планах сил. Но менять направление на схемах сил не стоит, иначе расчеты моментов окажутся неверными. Замеряем полученные вектора на плане $|R_{43}^n| = 80,5$ мм, $|R_{50}| = 36$ мм. Определяем значения реакций: $R_{43}^n = |R_{43}^n| \cdot \mu_F = 80,5 \cdot 5 = 402,5$ Н, $R_{50} = |R_{50}| \cdot \mu_F = 36 \cdot 5 = 180$ Н. Поскольку $R_{43}^r = 0$, то реакция $\vec{R}_{43} = \vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^r = \vec{R}_{43}^n = 402,5$ Н.

Реакция \vec{R}_{45} во внутренней вращательной кинематической паре D определяется из условий равновесия звена 4: $\sum F(4) = 0$, $\vec{R}_{45} + \vec{R}_{43} = 0$, $\vec{R}_{45} = -\vec{R}_{43}$.

Рассмотрим диаду 2–3 (рисунок 16, ж). Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями: в точке C реакция $\vec{R}_{34} = -\vec{R}_{43} = -402,5$ Н (направлена противоположно \vec{R}_{43}); в точке B реакция \vec{R}_{30} (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно); в точке A реакция \vec{R}_{21} (перпендикулярно кулисе 3). Записываем уравнение равновесия диады в виде суммы всех сил, на нее действующих:

$$\vec{R}_{34} + \vec{G}_3 + \vec{U}_3 + \vec{R}_{21} + \vec{R}_{30} = 0.$$

Снова имеем три неизвестных: модуль и направление реакции \vec{R}_{30} и модуль реакции \vec{R}_{21} . Необходимо одну из них определить. Для этого составим уравнение равновесия моментов сил диады относительно точки B :

$$\sum M_B = 0, \quad R_{34} \cdot h_R + U_3 \cdot h_U + G_3 \cdot h_G - R_{21} \cdot L_{AB} = 0,$$

$$R_{21} = \frac{R_{34} \cdot h_R + U_3 \cdot h_U + G_3 \cdot h_G}{L_{AB}} = \frac{402,5 \cdot 55,2 + 31,92 \cdot 311 + 78,48 \cdot 100}{392} = 611,99 \text{ Н},$$

где h_R , h_U , h_G – плечи (перпендикуляры, опущенные из точки B на линии действия сил) сил R_{34} , U_3 , G_3 соответственно, значения подставляются в миллиметрах, измеряются на схеме сил. Поскольку реакция получилась положительной, на схеме выбрано верное направление вектора \vec{R}_{21} .



Теперь в уравнении равновесия две неизвестные. Можно приступить к его графическому решению. Начнем построение с известных сил. Реакция \vec{R}_{34} уже определена при рассмотрении диады 4–5 (см. рисунок 16, е) и по третьему закону Ньютона равна \vec{R}_{43} , но противоположно направлена. Далее определим в выбранном масштабе длины в миллиметрах остальных известных векторов и пристроим их последовательно к вектору \vec{R}_{34} (рисунок 16, з): $|G_3| = G_3/\mu_F = 78,48/5 = 15,696 \approx 16$ мм, $|U_3| = U_3/\mu_F = 31,92/5 = 6,384 \approx 6$ мм.

К вектору U_3 пристроим определенную выше реакцию R_{21} . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором R_{30} . Замеряем его длину $|R_{30}| = 32,6$ мм. Определяем реакцию $R_{30} = |R_{30}| \cdot \mu_F = 32,6 \cdot 5 = 163$ Н.

Реакция \vec{R}_{23} во внутренней кинематической паре A' определяется из условий равновесия звена 2: $\sum F(2) = 0$, $\vec{R}_{21} + \vec{R}_{23} = 0$, $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{21}$.

Силовой расчет механизма первого класса (рисунок 16, и) заключается в определении уравновешивающей силы F_{yp} и реакции в кинематической паре O . Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями: в точке A – реакция $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21} = -618,39$ Н (направлена противоположно \vec{R}_{21}); в точке O – реакция \vec{R}_{10} (неизвестного направления, поэтому на схеме направим произвольно). Записываем уравнение равновесия кривошипа:

$$\vec{R}_{12} + \vec{F}_{yp} + \vec{R}_{10} = 0.$$

Снова имеем три неизвестных: модуль и направление реакции \vec{R}_{10} и модуль реакции \vec{F}_{yp} . Составим уравнение равновесия моментов сил кривошипа относительно точки O :

$$\sum M_O = 0, \quad R_{12} \cdot h - F_{yp} \cdot L_{OA} = 0, \quad F_{yp} = \frac{R_{12} \cdot h}{L_{OA}} = \frac{611,99 \cdot 11,3}{15} = 461,03 \text{ Н.}$$

Теперь в уравнении равновесия кривошипа две неизвестных. Можно приступить к его графическому решению (рисунок 16, к). Реакция \vec{R}_{12} уже определена при рассмотрении диады 2–3 (см. рисунок 16, з) и по третьему закону Ньютона равна \vec{R}_{21} , но противоположно направлена. К вектору R_{12} пристроим определенную выше силу F_{yp} . Замыкающий вектор многоугольника сил является искомым вектором R_{10} . Замеряем его длину $|R_{10}| = 94,6$ мм. Определяем реакцию $R_{30} = |R_{30}| \cdot \mu_F = 94,6 \cdot 5 = 473$ Н.

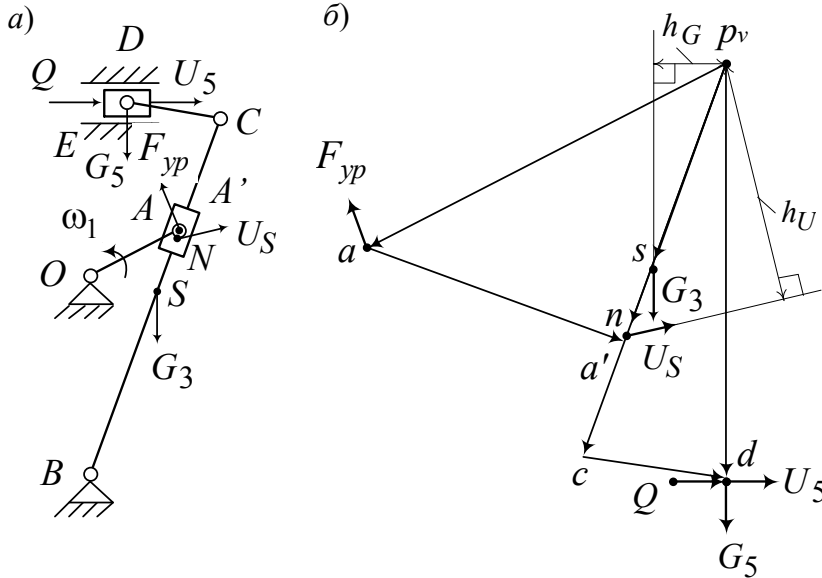
Определим теперь уравновешивающую силу с помощью рычага Жуковского (рисунок 17). Для этого построим повернутый в любом направлении на 90°



план скоростей (рисунок 17, б) и перенесем на него со схемы сил механизма (рисунок 17, а) все силы в соответствующие точки.

Считая, что план скоростей – это жесткий рычаг с опорой в полюсе, запишем уравнение моментов всех сил относительно полюса. Плечи будем подставлять в миллиметрах, измеряя их непосредственно на рисунке 17, б.

$$a) \quad \sum M_{p_v} = 0, \quad б) \quad F_{yp} \cdot p_v a - G_3 \cdot h_G - U_3 \cdot h_U - (Q + U_5) \cdot p_v d = 0.$$



а – схема приложенных к механизму сил; б – рычаг Жуковского

Рисунок 17 – Применение метода рычага Жуковского

Линия действия силы G_5 проходит через полюс, поэтому она не имеет плеча и ее момент относительно полюса равен нулю. Определим уравновешивающую силу:

$$F_{yp} = \frac{G_3 \cdot h_G + U_3 \cdot h_U + (Q + U_5) \cdot p_v d}{p_v a},$$

$$F_{yp} = \frac{78,48 \cdot 28 + 31,92 \cdot 92 + (250 + 146,5) \cdot 155,2}{150} = 444,47 \text{ Н.}$$

Определяем расхождение результатов, полученных разными методами:

$$\Delta = 100 - \frac{444,47 \cdot 100}{461,03} = 3,59 \%$$

Практическое занятие № 7. Построение динамической и математической моделей одноподвижных механизмов.

Теоретические основы практического занятия

Для динамического анализа механизма при решении **прямой задачи динамики** (определения закона движения при заданном силовом воздействии) необходимо построить **динамическую модель** (образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя свойства) механизма и **математическую модель**, т. е. уравнения, позволяющие составить описание функционирования технического объекта в окружающей среде. Для того, чтобы выполнить силовое исследование, необходимо знать закон движения начального звена. В этой задаче активные силы считаются известными, составляется уравнение, связывающее силы и ускорения, а затем путем их интегрирования находится скорость и перемещение как функции времени. Основные трудности здесь чисто математического характера. Они вызваны сложностью интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. С целью упрощения записи дифференциального уравнения рассматривается **одномассовая динамическая модель** (рисунок 18, а) механизма. Вместо движения всего механизма изучается движение одного звена, так называемого звена приведения. Обычно за звено приведения выбирается начальное звено механизма (кривошип). Для того, чтобы такая замена была возможна, необходимо, чтобы звено приведения было динамически эквивалентно всему механизму. Соблюдается **два условия динамической эквивалентности модели и механизма**:

1) кинетическая энергия модели должна равняться кинетической энергии механизма $E_{\Sigma} = E_{MEX}$;

2) работа силы, приложенной к звену приведения, на возможном перемещении должна равняться сумме работ всех сил, приложенных к механизму, на их возможных перемещениях $A_{\Sigma} = \sum A_{MEX}$. Из первого условия определяется массоинерционный параметр модели – суммарный приведенный момент инерции J_{Σ}^{np} , а из второго условия определяется силовой параметр модели – суммарный приведенный момент M_{Σ}^{np} .

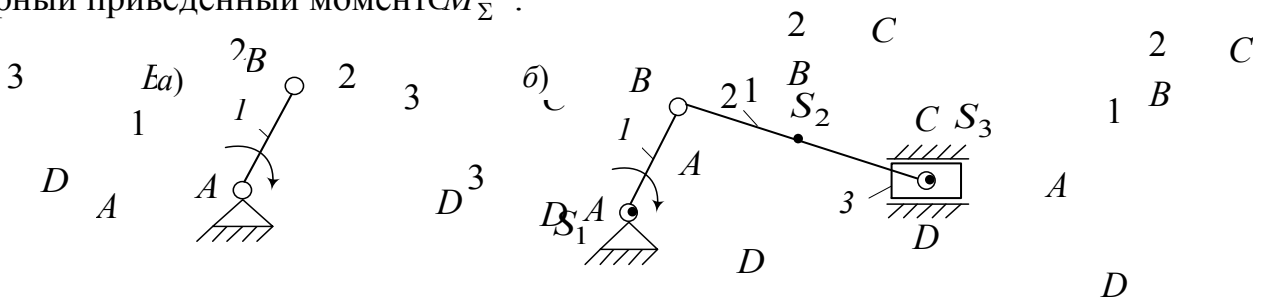


Рисунок 18 – Динамическая модель и схема механизма

Математическая модель одномассовой динамической модели:

$$J_{\Sigma}^{np} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{2\varphi_1^2}{B2} \frac{d\varphi_{\Sigma}^{np}}{d\varphi_1} = M_{\Sigma}^{np},$$

где ω_1 и φ_1 – угловая скорость и угол поворота звена приведения – кривошипа.

Для их определения необходимо аналитически или численно проинтегрировать уравнение.

Задания для самостоятельного выполнения

Для механизмов, приведенных в таблице 4, построить одномассовую динамическую модель и определить значения суммарного приведенного момента инерции J_{Σ}^{np} и суммарного приведенного момента M_{Σ}^{np} .

Пример выполнения задания

Построим одномассовую динамическую модель (см. рисунок 18, а) для кривошипно-ползунного механизма (рисунок 18, б). Определим суммарный приведенный момент инерции J_{Σ}^{np} из условия равенства кинетических энергий модели и механизма $E_{\Sigma} = E_{MEH}$. Механизм имеет три звена (кривошип вращается, шатун совершает сложное движение, а ползун движется поступательно) и три основных слагаемых его кинетической энергии:

$$E_{MEH} = E_1 + E_2 + E_3 = \left(\frac{J_1 \omega_1^2}{2} \right) + \left(\frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) + \left(\frac{m_3 v_3^2}{2} \right),$$

где J_1, J_2 – моменты инерции звеньев относительно оси, проходящей через центры масс S_i перпендикулярно плоскости движения;

ω_1, ω_2 – угловые скорости звеньев относительно той же оси;

m_2, m_3 – массы звеньев;

v_2, v_3 – скорости центров масс звеньев.

Кинетическая энергия модели $E_{\Sigma} = \frac{J_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2}$. Приравняем и выразим приведенный момент инерции J_{Σ}^{np} :

$$\frac{J_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2} = \left(\frac{J_1 \omega_1^2}{2} \right) + \left(\frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) + \left(\frac{m_3 v_3^2}{2} \right).$$

$$J_{\Sigma}^{np} = J_1 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_3}{\omega_1} \right)^2 = J_1 + J_2 (\omega_{q2})^2 + m_2 (v_{q2})^2 + m_3 (v_{q3})^2,$$

где ω_{q2} – передаточная функция угловой скорости шатуна $\omega_{q2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$;

v_{q2} – передаточная функция скорости шатуна;

v_{q3} – передаточная функция скорости ползуна.



Из анализа формулы следует, что J_{Σ}^{np} не зависит от скорости звена приведения, но зависит от обобщенной координаты φ_1 , находящейся в составе передаточных функций.

Определим суммарный приведенный момент M_{Σ}^{np} из условия равенства работ модели и механизма $A_{\Sigma} = \sum A_{MEX}$. Элементарная работа M_{Σ}^{np} модели $A_{\Sigma} = M_{\Sigma}^{np} d\varphi_1$. Сумма элементарных работ сил и моментов, действующих на механизм:

$$\sum A_{MEX} = A_{\partial\delta} + A_Q + A_{G1} + A_{G2} + A_{G3},$$

где $A_{\partial\delta} = M_{\partial\delta} d\varphi_1$ – работа момента двигателя;

$A_Q = Q ds_3 \cos(Q; s_3) = \pm Q dx_3$ – работа силы полезного сопротивления Q ;

$A_{G2} = G_2 ds_2 \cos(G_2; s_2) = \pm G_2 dy_2$ и $A_{G3} = G_3 ds_3 \cos(G_3; s_3) = 0$ – работы сил тяжести звеньев (для звена 3 равна нулю, т.к. вектор силы тяжести G_3 и перемещение s_3 перпендикулярны);

y_2 и x_3 – проекции перемещений звеньев на соответствующие оси координат.

Приравняем работы и выразим M_{Σ}^{np} :

$$M_{\Sigma}^{np} d\varphi_1 = M_{\partial\delta} d\varphi_1 \pm M_Q dx_3 \pm G_2 dy_2.$$

$$M_{\Sigma}^{np} = M_{\partial\delta} \pm M_Q \frac{dx_3}{d\varphi_1} \pm G_2 \frac{dy_2}{d\varphi_1} = M_{\partial\delta} \pm M_Q v_{qx3} \pm G_2 v_{qy2},$$

где v_{qx3} – проекция передаточной функции скорости ползуна 3 на ось x ;

v_{qy2} – проекция передаточной функции скорости точки S_2 шатуна 2 на ось y .

Практическое занятие № 8. Уравновешивание механизмов

Теоретические основы практического занятия

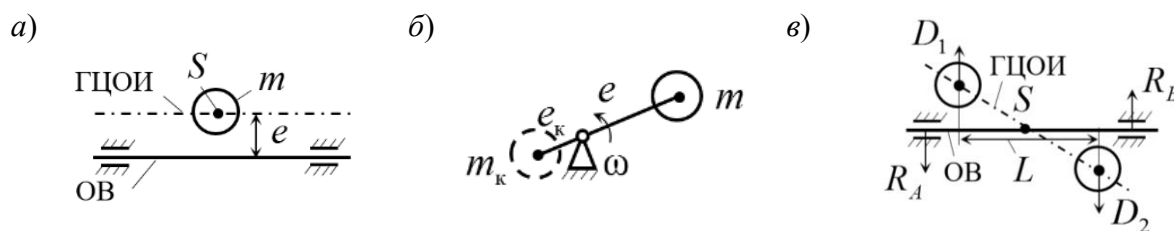
При работе механизмов возникают динамические реакции, которые могут значительно превышать статические реакции. От статических реакций избавиться нельзя, динамических можно избежать, если произвести уравновешивание механизма. **Полное уравновешивание механизма будет тогда, когда ускорение центра тяжести всего механизма равно нулю и момент сил инерции тоже равен нулю.** Избежать воздействия момента сил инерции не удастся, но добиться, чтобы ускорение центра масс было равно нулю, можно – нужно сделать так, чтобы он был неподвижен. Для этого используют **метод замещающих масс** или выбирают **симметричную схему механизма**.

Чаще всего возникает задача уравновешивания звена механизма, выпол-



ненного в виде тела вращения и установленного в опорах на стойке – **ротора**.

Статической называется неуравновешенность, возникающая от того, что главная центральная ось инерции (ГЦОИ) ротора проходит параллельно оси вращения (ОВ) на расстоянии e (рисунок 19, а).



а – статическая неуравновешенность; б – ликвидация статической неуравновешенности; в – моментная неуравновешенность ротора

Рисунок 19 – Схема неуравновешенного ротора

Сила инерции, развиваемая неуравновешенной массой m , при вращении с угловой скоростью ω определяется произведением массы на ускорение a :

$$\vec{U} = m\vec{a}, U = me\omega^2.$$

Силу инерции при $\omega = 1\text{с}^{-1}$ называют дисбалансом: $\vec{D} = m\vec{e}$. **Дисбаланс** – произведение массы m на эксцентриситет e .

Задача уравнивания – изменить распределение масс, чтобы перевести центр масс на ось вращения. Тогда главная центральная ось инерции и ось вращения совпадут. Этого можно добиться, если использовать корректирующую массу m_k , расположить ее на расстоянии e_k противоположно массе m так, чтобы она развивала силу инерции $\vec{U}_k = -\vec{U}$ или $\vec{D}_k = -\vec{D}$. Отсюда следует, что для статической уравновешенности необходимо, чтобы геометрическая сумма дисбалансов равнялась нулю $\vec{D}_k + \vec{D} = 0$.

Схема ротора с моментной неуравновешенностью представлена на рисунке 19, в. В том случае, если $\vec{D}_1 = -\vec{D}_2$, ротор статически уравновешен, однако дисбалансы, располагаясь на плече L , создадут момент $\vec{M} = \vec{D}L$, который будет воздействовать на опоры, вызывая в них реакции \vec{R}_A и \vec{R}_B .

Моментной называется неуравновешенность, возникающая оттого, что главная центральная ось инерции пересекает ось вращения в центре масс. Для моментного уравнивания необходимо добавить две корректирующие масс, такие, чтобы они создали момент дисбаланса $\vec{M}_k = -\vec{M}$. Геометрическая сумма моментов всех дисбалансов должна быть равна нулю.

Моментное уравнивание производится для деталей большой протяженности вдоль оси. Для деталей типа зубчатых колес, шкивов, маховиков, автомобильных колес достаточно ограничиться статическим уравниванием.

Возникает **динамическая** неуравновешенность, при которой ОВ ротора и его ГЦОИ пересекаются не в центре масс или перекрещиваются. **Динами-**

ческая неуравновешенность обусловлена статической и моментной неуравновешенностями. Полное уравнивание будет иметь место в том случае, когда главный вектор и главный момент дисбалансов будут равны нулю: $\vec{D} = 0$, $\vec{M} = \vec{D}L = 0$. Это достигается подбором корректирующих масс $m_{км}$ и $m_{кс}$, устраняющих сначала моментную, а затем статическую неуравновешенности соответственно.

Задания для самостоятельного выполнения

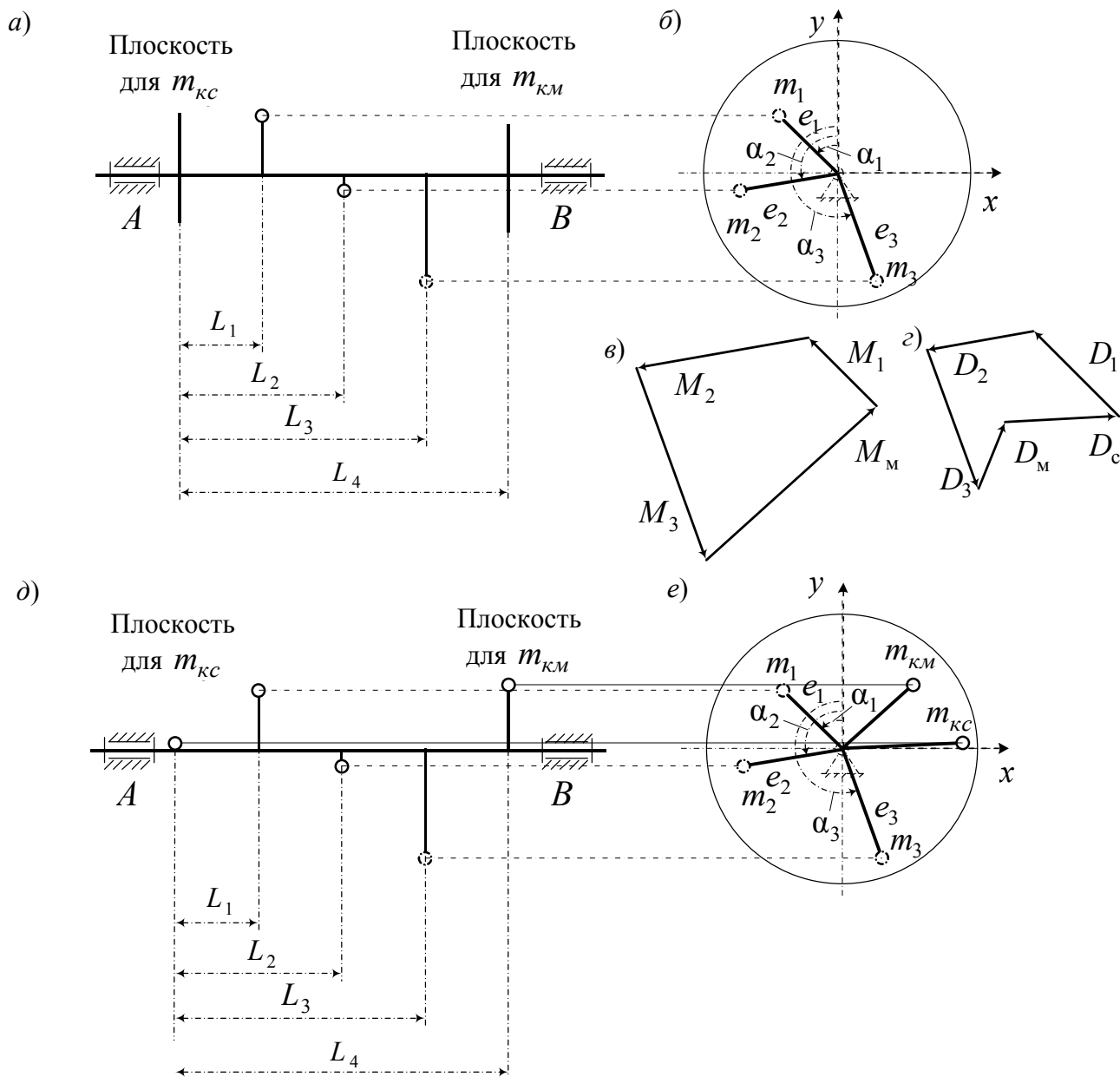
Графическим методом выполнить полное уравнивание ротора, приведенного на рисунке 20, определив значения двух масс $m_{км}$, $m_{кс}$, корректирующих моментную и статическую неуравновешенности, установленных в указанных на рисунке 20 плоскостях коррекции, на расстояниях $e_{км}$ и $e_{кс}$, под углами коррекции $\alpha_{км}$, $\alpha_{кс}$ относительно вертикальной оси, отложенными против часовой стрелки. Ротор имеет динамическую неуравновешенность, заданную тремя неуравновешенными массами m_1 , m_2 , m_3 , расположенными на расстояниях e_1 , e_2 , e_3 от оси вращения ротора под углами α_1 , α_2 , α_3 к вертикальной оси, отложенными против часовой стрелки. Исходные данные приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Значения неуравновешенных масс и их координаты

Вариант	Неуравновешенная масса, г			Эксцентриситет, см			Угол отклонения, градус		
	m_1	m_2	m_3	e_1	e_2	e_3	α_1	α_2	α_3
1	40	50	70	4,5	6	7	30	110	200
2	60	40	50	5	7	9	45	130	210
3	50	60	70	6	9	8	60	140	330
4	70	50	60	8	6	4,5	75	165	205
5	40	70	50	9	5	8	40	120	220
6	40	50	60	8	7	6	50	150	250
7	40	40	70	5	8	5	70	160	240
8	50	40	60	7	9	8	25	110	180
9	60	40	70	6	8	4,5	20	105	190
10	40	60	70	7	9	6	15	100	170
11	50	40	60	4,5	5	6	55	135	215
12	40	50	60	4,5	8	9	65	145	225
13	40	60	70	5	6	7	35	115	165
14	40	50	60	5	7	8	15	155	235
15	40	50	60	6	8	9	80	165	250
16	60	70	40	9	5	8	65	145	225
17	70	40	50	8	7	6	60	145	350
18	50	70	60	6	8	6	75	165	205
19	60	50	40	5	8	5	60	140	330
20	70	40	60	7	9	8	50	150	250
21	40	60	50	5	6	7	45	100	200

Пример выполнения задания

Выполним в масштабе кинематическую схему ротора с изображением неуравновешенных масс в двух проекциях (рисунок 20, а, б), согласно данных варианта 21 (см. таблицу 11).



а – схема расположения неуравновешенных масс ротора (вид спереди); б – схема расположения неуравновешенных масс ротора (вид слева); в – план моментов дисбалансов; г – план дисбалансов; д – схема установки корректирующих масс (вид спереди); е – схема установки корректирующих масс (вид слева)

Рисунок 20 – Полное уравнивание ротора

Сначала устраняем моментную неуравновешенность. Для этого определим значения дисбалансов неуравновешенных масс: $\vec{D} = m\vec{e}$.

$$\begin{aligned} D_1 &= m_1 e_1 = 40 \cdot 5 = 400 \text{ г} \cdot \text{см}; \\ D_2 &= m_2 e_2 = 60 \cdot 6 = 360 \text{ г} \cdot \text{см}; \\ D_3 &= m_3 e_3 = 40 \cdot 7 = 280 \text{ г} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Определяем значения моментов дисбалансов неуравновешенных масс: $\vec{M} = \vec{D}L$, где L – плечо дисбаланса относительно плоскости коррекции моментной неуравновешенности (см. рисунок 20, а).

$$\begin{aligned} M_1 &= D_1 L_1 = 400 \cdot 8 = 3200 \text{ г} \cdot \text{см}^2; \\ M_2 &= D_2 L_2 = 360 \cdot 16 = 5760 \text{ г} \cdot \text{см}^2; \\ M_3 &= D_3 L_3 = 280 \cdot 24 = 6720 \text{ г} \cdot \text{см}^2. \end{aligned}$$

Для обеспечения моментной уравновешенности главный момент дисбалансов должен быть равен нулю $\vec{M} = \vec{D}L = 0$. В нашем случае уравнение равновесия моментов дисбаланса: $\sum \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_k = 0$. Это значит необходимо построить замкнутый многоугольник из четырех векторов. Значения первых трех определены по модулю и направлению, а четвертый – замыкающий. Масштабный коэффициент построения определяется отношением реального значения момента дисбаланса к произвольно выбранному отрезку в миллиметрах

$K_m = \frac{M_1}{[M_1]} = \frac{3200}{32} = 100 \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{мм}}$. В выбранном масштабе выполняем графическое построение многоугольника моментов дисбалансов (рисунок 20, в). Измеряем в миллиметрах замыкающий вектор $[M_k]$, который является моментом дисбаланса \vec{M}_m корректирующей массы $m_{км}$ для устранения моментной неуравновешенности. Определяем его значение $M_k = [M_k] K_m = 75,5 \cdot 100 = 7550 \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Известно, что $M_m = D_m L_4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, где $L_4 = 32 \text{ см}$ – плечо корректирующей массы относительно левой плоскости коррекции. Значение дисбаланса, устраняющего моментную неуравновешенность $M_m = D_m L_4$. Определим дисбаланс этой массы: $D_m = M_m / L_4 = 7550 / 32 = 236 \text{ г} \cdot \text{см}$. Выбрав значение корректирующей массы произвольно, находим величину эксцентриситета $e_{км} = D_m / m_{км} = 236 / 40 = 5,9 \text{ см}$.

Для обеспечения статической уравновешенности главный вектор дисбалансов должен быть равен нулю $\vec{D} = 0$. В нашем случае уравнение равновесия дисбалансов: $\sum \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 + \vec{D}_m + \vec{D}_c = 0$. Это значит, что необходимо построить замкнутый многоугольник из пяти векторов. Значение первых четырех векторов определены по модулю и направлению, а пятый \vec{D}_c – замыкающий. Масштабный коэффициент построения определяется отношением реального значения дисбаланса к произвольно выбранному отрезку в миллиметрах

$K_c = \frac{D_1}{[D_1]} = \frac{400}{40} = 10 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{мм}}$.

Для обеспечения статической уравновешенности главный вектор дисба-

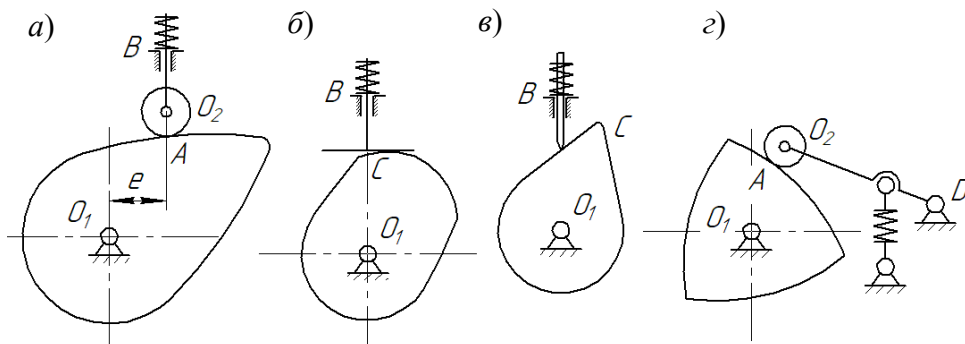
лансов должен быть равен нулю $\vec{D} = 0$. В нашем случае уравнение равновесия дисбалансов: $\sum \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 + \vec{D}_m + \vec{D}_c = 0$. Это значит, что необходимо построить замкнутый многоугольник из пяти векторов. Значение первых четырех векторов определены по модулю и направлению, а пятый \vec{D}_c – замыкающий. Масштабный коэффициент построения определяется отношением реального значения дисбаланса к произвольно выбранному отрезку в миллиметрах $K_c = \frac{D_1}{[D_1]} = \frac{400}{40} = 10 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{мм}}$. В выбранном масштабе выполняем графическое построение многоугольника дисбалансов (рисунок 20, з). Измеряем в миллиметрах замыкающий вектор $[D_c]$, который является дисбалансом \vec{D}_c корректирующей массы m_{kc} для устранения статической неуравновешенности. Определяем его значение $D_c = [D_c]K_c = 37 \cdot 10 = 370$ г·см. Выбрав значение корректирующей массы произвольно, находим эксцентриситет $e_{kc} = D_c / m_{kc} = 370 / 50 = 5,4$ см.

Углы коррекции $\alpha_{км}$, $\alpha_{кc}$ определяются непосредственным измерением положения векторов \vec{M}_m , \vec{D}_c в векторных многоугольниках относительно вертикальной оси против часовой стрелки $\alpha_{км} = 312^\circ$, $\alpha_{кc} = 273^\circ$. На схему ротора в двух плоскостях коррекции наносят найденные корректирующие массы с учетом их положения в масштабе (рисунок 20, д, е).

Практическое занятие № 9. Кинематический анализ кулачковых механизмов.

Теоретические основы практического занятия

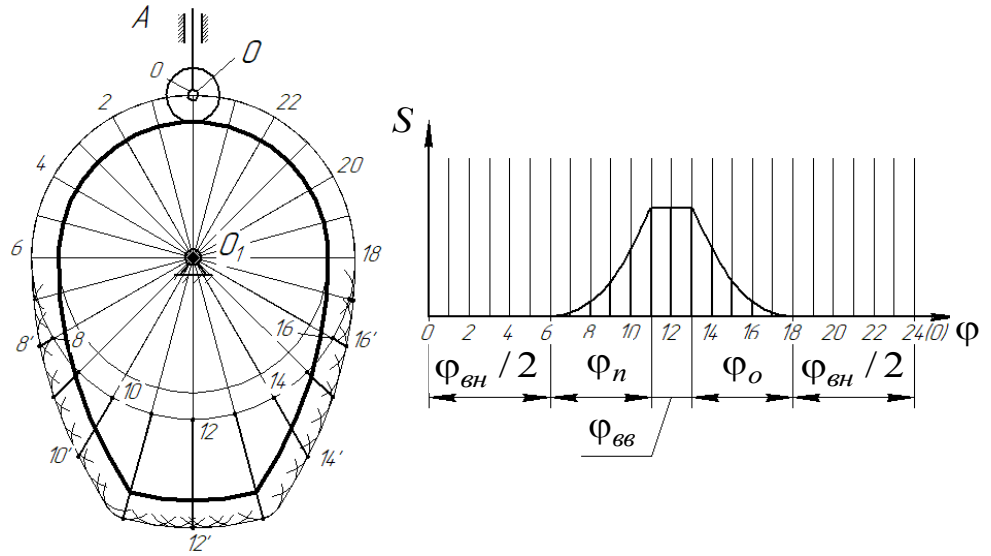
Кулачковым механизмом называется механизм, в состав которого входит кулачок. **Кулачком** называется звено, имеющее элемент высшей пары, выполненное в виде поверхности переменной кривизны (рисунки 21, 22).



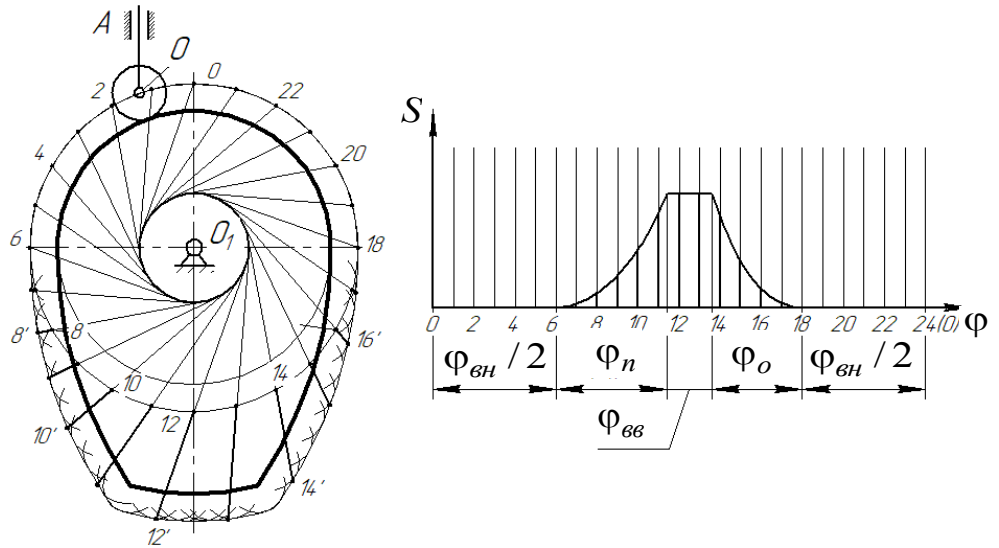
а – дезаксиальный кулачковый механизм с роликовым толкателем; б – центральный кулачковый механизм с плоским толкателем; в – центральный кулачковый механизм с игольчатым толкателем; г – кулачковый механизм с роликовым колебательем

Рисунок 21 – Кинематические схемы кулачковых механизмов

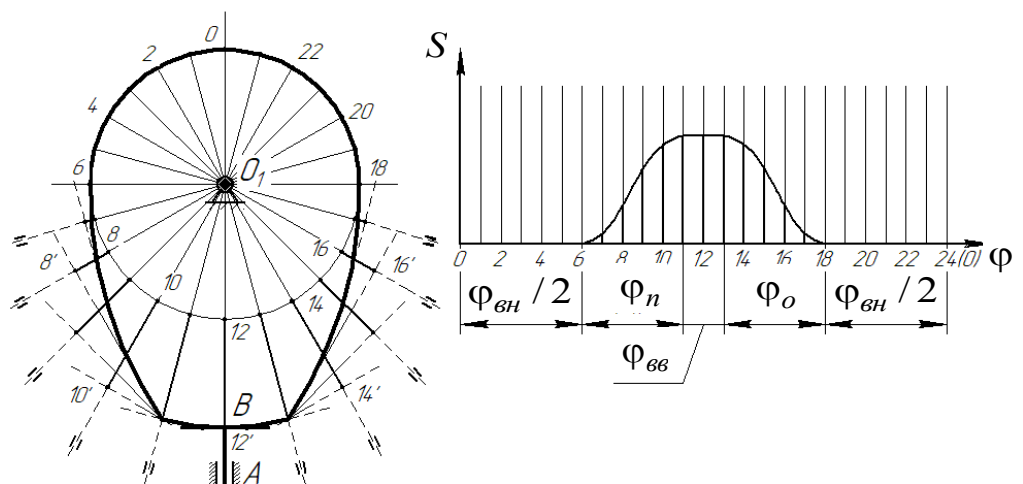
а)



б)



в)



а – дезаксиальный кулачковый механизм с роликовым толкателем; б – центральный кулачковый механизм с роликовым толкателем; в – центральный кулачковый механизм с плоским толкателем

Рисунок 22 – Кинематический анализ кулачковых механизмов

Кулачковый механизм может состоять из: входного звена – кулачка, совершающего вращательное движение; выходного звена – толкателя или колебателя (которые могут включать в свой состав **ролик**) и **стойки** (см. рисунок 21). Выходное звено в кулачковом механизме называется **толкателем** при поступательном его движении или **коромыслом** при вращательном движении. Кулачковый механизм называется **центральный**, если ось толкателя проходит через центр вращения кулачка ($e = 0$) (см. рисунок 21, б, в) и **дезаксиальным**, если ось толкателя смещена относительно центра вращения кулачка на **дезаксиал** e (рисунок 21, а). Профиль кулачка, которого касается ролик, называется **действительным**. Траектория центра ролика при движении его относительно кулачка называется **центровым профилем**. Центральной и действительный профили кулачка являются эквидистантными кривыми.

Задачей кинематического анализа кулачковых механизмов является **определение закона движения выходного звена**. Для упрощения анализа используют **метод обращенного движения**, который заключается в том, что мысленно всему механизму сообщают вращение вокруг центра вращения кулачка с угловой скоростью равной, но противоположно направленной угловой скорости кулачка. Кулачок становится неподвижным, а перемещение выходного звена будет таким, как в истинном движении при неподвижной стойке.

Примеры выполнения задания для различных кулачковых механизмов приведены на рисунке 22.

Задания для самостоятельного выполнения

Построить график перемещения выходного звена кулачкового механизма. Исходные данные приведены в таблице 12.

Таблица 12 – Исходные данные

Вариант	Номер кулачка	Дезаксиал, мм	Диаметр ролика, мм	Вариант	Номер кулачка	Дезаксиал, мм	Диаметр ролика, мм
1	1	0	20	8	3	15	20
2	1	15	20	9	3	Плоский толкатель	
3	1	Плоский толкатель		10	4	0	20
4	2	0	20	11	4	15	20
5	2	15	20	12	4	Плоский толкатель	
6	2	Плоский толкатель		13	5	0	20
7	3	0	20	14	5	15	20

Список литературы

1 **Волков, В. В.** Теория механизмов и машин : учебник / В. В. Волков. – Старый Оскол : ТНТ, 2017. – 328 с.

2 **Молотников, В. Я.** Техническая механика : учебное пособие / В. Я. Молотников. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2017. – 476 с. : ил.

