ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электропривод и автоматизация промышленных установок»

УПРАВЛЕНИЕ В БИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» дневной формы обучения

Могилев 2018

УДК 681.5.017
ББК 32.965
У 67

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Электропривод и АПУ» «07» февраля 2018 г., протокол № 7

Составитель канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. Обидина

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации к практическим занятиям разработаны в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Управление в биотехнических системах» для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии».

Учебно-методическое издание

УПРАВЛЕНИЕ В БИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ответственный за выпуск Г. С. Леневский

Технический редактор А. Т. Червинская

Компьютерная верстка Е. С. Лустенкова

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 46 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Практические занятия № 1 и 2. Преобразование Лапласа. Получение передаточных функций. Определение закона изменения выходной координаты при различной форме входного воздействия

1.1 Основные теоретические положения

Характеристики звеньев автоматических систем.

Части структурной схемы называют **звеньями**, каждое из которых отображает алгоритм преобразования сигнала – математическую или логическую операцию.

На структурных схемах звенья изображают прямоугольниками, внутри которых записывают соответствующие операторы преобразования сигналов. Прямоугольники соединяют линиями, отображающими информационные сигналы взаимодействия звеньев, с указанием направлений этих сигналов, как показано на рисунке 1.

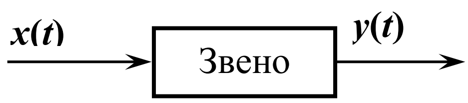


Рисунок 1 – Звено системы автоматического регулирования

Звено системы может являться техническим устройством любой физической природы, конструкции и назначения. Входная $x(t)$ и выходная $y(t)$ величины соответствуют физическим величинам, выражающим воздействие предыдущего звена на данное звено и воздействие данного звена на последующее. Например, в электродвигателе на рисунке 2 роль величины $x(t)$ будет играть напряжение в цепи питания якоря $u_Я(t)$, а $y(t)$ — угловая скорость вращения вала $\omega_Д(t)$.

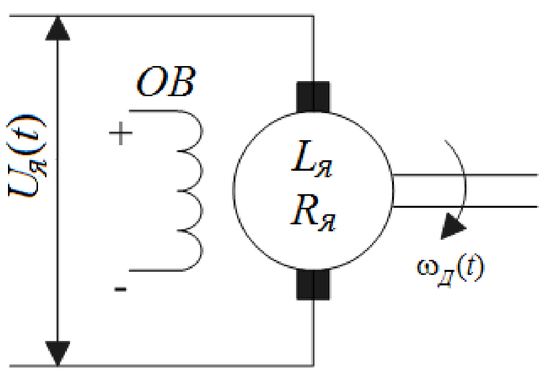


Рисунок 2 – Электродвигатель как звено системы автоматического регулирования

В зависимости от физических свойств различают **статические и динамические элементарные звенья**.

У **статического звена** мгновенное значение выходного сигнала зависит только от мгновенного значения входного сигнала в данный момент и не зависит от характера изменения входного сигнала во времени. Связь между входным и выходным сигналами статического звена обычно описывается алгебраической функцией.

Динамическое звено преобразует входной сигнал в соответствии с операциями интегрирования и дифференцирования во времени. Значение выходного сигнала динамического звена зависит не только от текущего значения входного сигнала, но и от его предыдущих значений, т. е. характера изменения входного сигнала. Динамические звенья описываются дифференциальными уравнениями.

Уравнения динамических звеньев.

Составление уравнения динамики каждого звена системы является предметом соответствующей конкретной области технических наук: электротехники, теплотехники, динамики полета и т. п., к которым и следует каждый раз обращаться.

Допустим, что в результате составления уравнения динамики какого-нибудь конкретного звена получилось следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$a_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^{(m)} x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \ldots + b_1 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_0 x(t).$$

Решение дифференциальных уравнений значительно упрощается при использовании операционного преобразования Лапласа. При этом каждой временной функции $x(t)$ или $y(t)$ соответствует функция $X(p)$ или $Y(p)$ (комплексной переменной $p = c + j\omega$, где p – оператор преобразования Лапласа).

Преобразование Лапласа выполняется в соответствии с формулой

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

где $f(t)$ – оригинал функции;

$F(p)$ – изображение функции по Лапласу.

Переход от оригинала к изображению называется прямым преобразованием Лапласа и имеет символическую запись

$$F(p) = L\{f(t)\}.$$

Переход от изображения к оригиналу называется обратным преобразованием Лапласа и имеет символическую запись

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

На практике прямое и обратное преобразования осуществляются по таблицам изображений типовых функций.

Передаточная функция звена.

Применив преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению звена

$$a_n \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^{(m)}x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{(m-1)}x(t)}{dt^{(m-1)}} + \ldots + b_1\frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_0 x(t),$$

получим

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1}p^{n-1}Y(p) + \ldots + a_1 pY(p) + a_0 Y(p) =$$
$$= b_m p^m X(p) + b_{m-1}p^{m-1}X(p) + \ldots + b_1 pX(p) + b_0 X(p).$$

Если вынести общие множители $Y(p)$ и $X(p)$**,** имеем

$$Y(p)(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) =$$
$$= X(p)(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0).$$

Передаточной функцией звена $W(p)$ называется отношение изображений Лапласа выходной и входной величин звена при нулевых начальных условиях, т. е.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

или

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}.$$

Между дифференциальными уравнениями и передаточными функциями существует однозначная связь. Сравнивая последнее выражение с дифференциальным уравнением звена, видим, что формально передаточную функцию звена можно составлять как отношение операторных многочленов правой и левой частей уравнения звена. И наоборот, зная передаточную функцию звена, легко написать его уравнение, имея в виду, что числитель передаточной функции соответствует правой части уравнения, а знаменатель – левой.

В теории автоматического регулирования принято приводить уравнение звена к стандартному виду, когда свободный член равен единице:

$$W(p)=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{B_m p^m+B_{m-1}p^{m-1}+\ldots+B_1 p+1}{A_n p^n+A_{n-1}p^{n-1}+\ldots+A_1 p+1}=k\cdot\frac{B_m(p)}{A_n(p)},$$

где через $A_n(p)$ и $B_m(p)$ обозначены многочлены относительно p с коэффициентами 1 в младших членах, причем степень $B_m(p)$, как правило, ниже степени $A_n(p)$, т. е. $m < n$;

$k=\dfrac{a_0}{b_0}$ – коэффициент усиления звена.

Пример 1 – Пусть звено описывается дифференциальным уравнением

$$T_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T_1\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t).$$

В операторной форме уравнение имеет следующий вид:

$$Y(p)(T_2p^2+T_1p+1)=kX(p).$$

Откуда передаточная функция звена

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{T_2p^2+T_1p+1}.$$

Пример 2 – Решим обратную задачу – найдем по передаточной функции дифференциальное уравнение.

Пусть передаточная функция имеет вид:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{Tp+1},$$

откуда

$$Y(p)(Tp+1)=kX(p);$$
$$TpY(p)+Y(p)=kX(p).$$

Учитывая, что $p\equiv\dfrac{d}{dt}$ (формальное операционное соответствие), получим

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t).$$

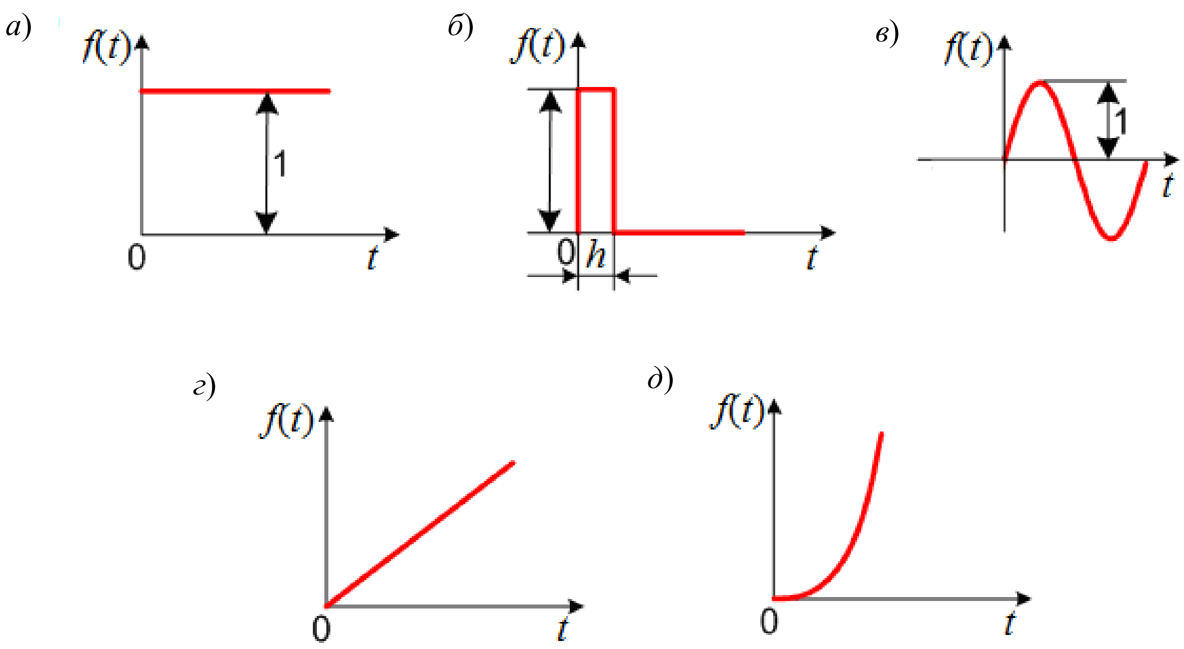
Виды типовых воздействий в САУ.

При анализе работы систем автоматического регулирования и их отдельных элементов в качестве типовых выбирают одно из следующих возмущений.

Ступенчатое возмущение – мгновенное изменение воздействия на постоянную величину, чаще всего равную единице (рисунок 3, *а*). Физическая система испытывает толчок. Аналитически ступенчатое возмущение записывается в следующем виде:

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{Bmatrix}.$$

Импульсное возмущение – возмущение, полученное как последовательность двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку ступенчатых возмущений, сдвинутых во времени на величину, обратную величине их интенсивности (рисунок 3, *б*). Особое значение имеет единичная импульсная функция или дельта-функция, обозначаемая $\delta(t)$.



а – ступенчатое возмущение; *б* – импульсное возмущение; *в* – гармоническое возмущение; *г* – скачок скорости; *д* – скачок ускорения

Рисунок 3 – Типовые возмущения систем

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$\delta(t) = \begin{Bmatrix} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{Bmatrix},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Первое свойство означает, что дельта-функция существует лишь в момент времени t = 0. Второе свойство означает, что, несмотря на пренебрежимо малую длительность функции, площадь, ограниченная ею, имеет конечное значение, равное единице. Единичная импульсная функция является производной от единичного скачка, т. е.

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Периодическое возмущение – возмущение, изменяющееся периодически во времени. Оно удобно для исследования автоматических систем, работающих в режиме незатухающих колебаний. Наиболее простым периодическим возмущением является гармоническое колебание единичной амплитуды (рисунок 3, *в*).

Скачок скорости или скачок ускорения – возмущения, являющиеся стандартными для следящих систем, которые работают в режиме постоянной скорости $x(t) = at$ (рисунок 3, *г*) или постоянного ускорения $x(t) = bt^2$ (рисунок 3, *д*).

Переходная функция звена.

Переходной функцией $h(t)$ называется реакция звена на единичное ступенчатое воздействие (рисунок 4), т. е. переходный процесс на выходе $y(t)$ при единичном скачке $1(t)$ на входе звена $x(t) = 1(t)$.

Переходная функция может быть определена экспериментально или вычислена теоретически.

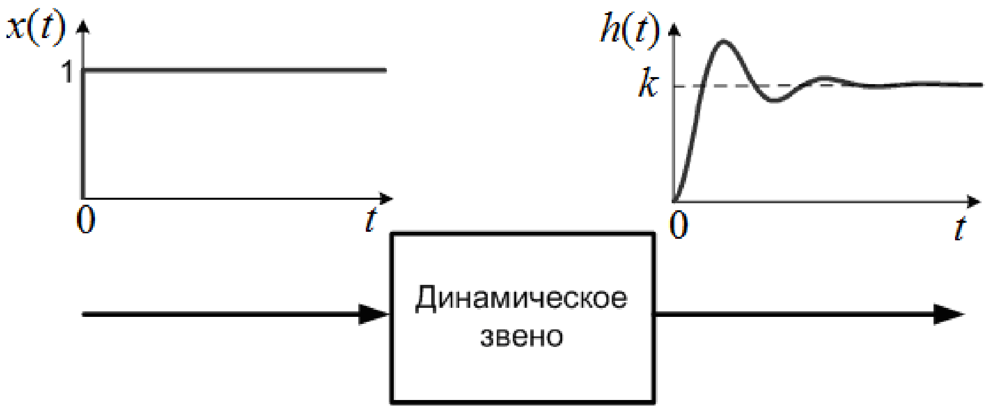


Рисунок 4 – Входное воздействие $x(t) = 1(t)$ и переходная функция звена $h(t)$

Если на вход подается единичный скачок $1(t)$, то его изображение по Лапласу $X(p) = L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$. Зная передаточную функцию звена, $W(p) = \frac{b_m(p)}{a_n(p)}$, находим изображение выходной величины как

$$Y(p)=W(p)\cdot\frac{1}{p}=\frac{b_m(p)}{a_n(p)}\cdot\frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналу, получим

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\cdot W(p)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\cdot\frac{b_m(p)}{a_n(p)}\right\}.$$

Переход от изображения к оригиналу может быть осуществлен по таблице операционных соответствий или по теореме разложения.

Контрольные вопросы

1 Дать определение типового динамического звена. По каким признакам разделяют элементы различной физической природы на типовые динамические звенья?

2 Что такое установившийся и переходный режимы?

3 Что такое коэффициент передачи звена?

4 Перечислить способы описания динамических свойств звеньев.

5 Что такое прямое и обратное преобразования Лапласа? Назвать их свойства.

6 Что такое передаточная функция?

7 Что такое переходная характеристика?

8 В чем заключается физический смысл постоянной времени? Как связаны время окончания переходного процесса и постоянная времени? Как графически определяется постоянная времени?

9 Перечислить основные типовые динамические звенья и привести их дифференциальные уравнения и передаточные функции.

10 Как влияет коэффициент затухания колебательного звена на вид его переходной характеристики?

1.2 Задания для практической работы

1 Определить передаточную функцию звена, описываемого уравнением

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t).$$

2 Записать дифференциальные уравнения системы управления с выходом $y(t)$ и входом $x(t)$, передаточная функция которой имеет следующий вид:

$$W(p)=\frac{5p+4}{p^2+2p+3}.$$

3 Определить переходную функцию для звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2}{p \cdot (0{,}5p + 1)}.$$

2 Практические занятия № 3 и 4. Построение частотных характеристик

2.1 Основные теоретические положения

Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме. Если на вход динамического звена поступает гармонический сигнал определенной частоты, то выходной сигнал имеет также гармонический характер и ту же частоту, но с другой амплитудой и фазой. В связи с этим различают амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики звена.

Если на вход звена подается единичный синусоидальный сигнал (рисунок 5)

$$x(t) = \sin\omega t,$$

то на выходе будет (в установившемся режиме)

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \psi),$$

где A – амплитуда (точнее, усиление амплитуды);
ψ – фаза (точнее, сдвиг по фазе).

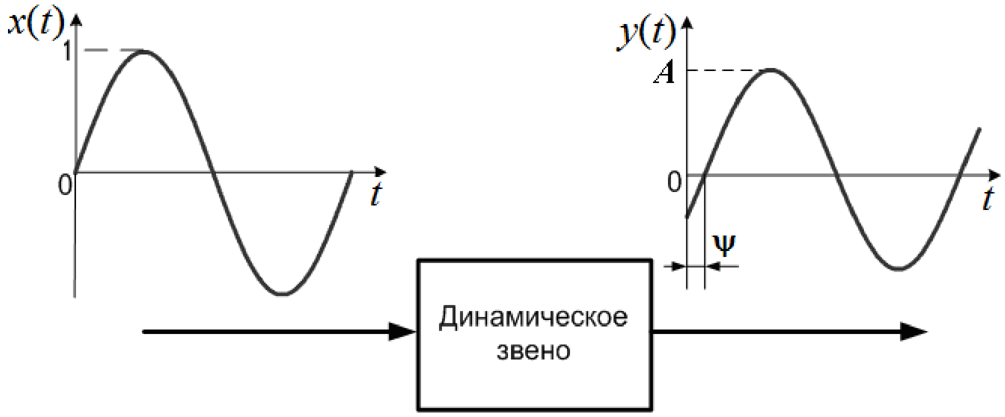


Рисунок 5 – Реакция устойчивого звена на синусоидальное воздействие

Амплитудно-частотная характеристика (**АЧХ**) $A(\omega)$ есть зависимость отношения амплитуды колебаний на выходе звена к амплитуде на входе от частоты входного сигнала:

$$A(\omega) = \frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}},$$

где $A_{вых}(\omega)$, $A_{вх}$ – амплитуды выходного и входного сигналов соответственно;
ω – частота входного сигнала.

АЧХ выражает отношение амплитуд колебаний на выходе звена и его входе в зависимости от частоты входного сигнала.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) $\Psi(\omega)$ есть зависимость разности фаз выходного и входного сигналов от частоты входного сигнала:

$$\Psi(\omega) = \Psi_2 - \Psi_1,$$

где Ψ_2, Ψ_1 – начальные фазы выходного и входного сигналов соответственно.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики, построенные по точкам, представлены на рисунке 6.

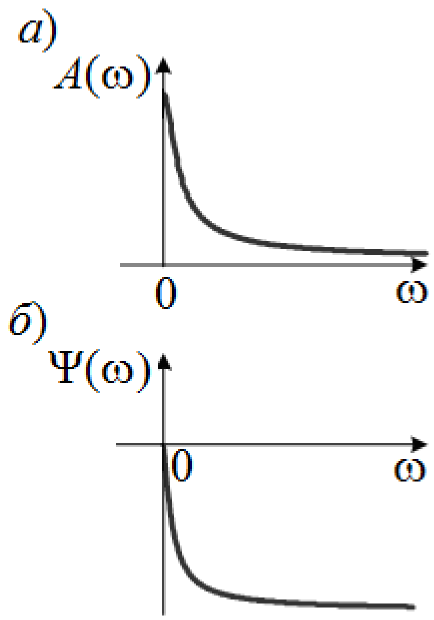


Рисунок 6 – Амплитудная (*а*) и фазовая (*б*) частотные характеристики звена

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) есть отношение выходного и входного гармонического сигналов, записанных в комплексной форме, при изменении частоты входного сигнала от нуля до бесконечности:

$$W(j\omega) = \frac{\overline{Y(\omega)}}{\overline{X(\omega)}}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (ее еще называют комплексной передаточной функцией) звена получается из передаточной функции $W(p)$ подстановкой $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = W(p)\big|_{p=j\omega} = k \cdot \frac{B_m(j\omega)}{A_n(j\omega)}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика представляет собой комплексное число и может иметь следующий вид:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\Psi(\omega)} = Re(\omega) + jIm(\omega),$$

где $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика;

Ψ (ω) – фазочастотная характеристика;

$Re(\omega)$ – вещественная частотная характеристика;

$Im(\omega)$ – мнимая частотная характеристика.

$$A(\omega) = \sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2}\ ;$$

$$\Psi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}.$$

Логарифмические частотные характеристики.

Чаще всего амплитудную и фазовую частотные характеристики изображают в логарифмическом масштабе частот и строят отдельно логарифмические амплитудно-частотную характеристику ЛАЧХ и фазочастотную характеристику ЛФЧХ. Такие логарифмические частотные характеристики очень удобны для инженерных расчетов. По горизонтальной оси откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе, т. е. находят отметки, соответствующие $\lg\omega$. Около отметок наносят действительные значения частот, единицы измерения которых – радианы в секунду. Равномерной единицей на оси абсцисс является декада – любой отрезок, на котором значение частоты увеличивается в десять раз.

Зависимость логарифма модуля $\ln A(\omega)$ АФЧХ от частоты, отложенной по оси абсцисс в логарифмическом масштабе, называется **логарифмической амплитудной характеристикой (ЛАХ)**. Обычно принято на графике по оси ординат откладывать не $\ln A(\omega)$, а пропорциональную ей величину – $L(\omega)$:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|,$$

единицей измерения для которой является децибел. По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе (рисунок 7). Точка пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс называется частотой среза ω_c. Начало координат обычно помещают в точке $\omega = 1$, т. к. $\lg 1 = 0$. Точка же $\omega = 0$ лежит в $-\infty$. Однако в зависимости от интересующего диапазона частот можно начало координат брать и в другой точке ($\omega = 0{,}1$; $\omega = 10$ или другой).

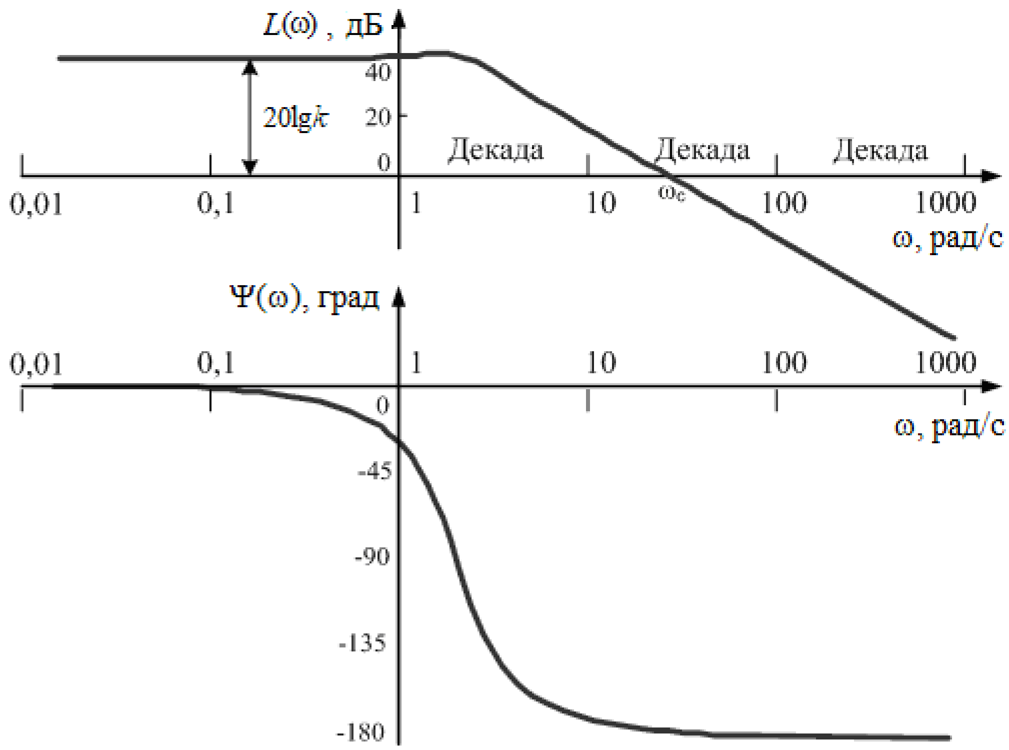


Рисунок 7 – Логарифмические частотные характеристики

При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) используется та же ось частот, т. е. по оси абсцисс частота ω откладывается по-прежнему в логарифмическом масштабе, а отсчет углов Ψ(ω) идет по оси ординат в обычном масштабе в угловых градусах.

Контрольные вопросы

1 Назвать виды частотных характеристик звеньев. Пояснить их физический смысл.

2 Какова методика получения частотных характеристик звеньев по передаточной функции?

3 Какова методика экспериментального получения переходных и частотных характеристик звеньев?

4 Как по АЧХ и ФЧХ звена можно определить его параметры?

2.2 Задания для практической работы

1 Определить частотные характеристики для пропорционального звена.

2 Определить частотные характеристики для форсирующего звена.

3 Практическое занятие № 5. Составление и преобразование структурных схем

3.1 Основные теоретические положения

Автоматические системы применяются для управления самыми различными физическими процессами во всех областях техники, поэтому в таких системах могут использоваться весьма разнообразные по конструкции механические, гидравлические, электрические и другие устройства. При изображении систем управления применяются два принципа – функциональный и структурный, и соответственно, схемы подразделяются на функциональные и структурные.

Функциональной схемой называется такая схема, в которой каждому функциональному элементу системы соответствует определенное звено. Назначение отдельных звеньев автоматической системы наиболее полно отображается ее функциональной схемой. Названия элементов и блоков указывают на выполняемые функции, например: чувствительный элемент, преобразующий элемент, датчик, управляющий блок, исполнительный блок, электродвигатель и т. д.

Для составления функциональной схемы следует произвести функциональный анализ проектируемой системы. Для этого вся система разбивается на отдельные функциональные блоки, для которых определяются входные и выходные переменные. Функциональные блоки представляют собой конструктивно обособленные части, элементы или устройства, которые участвуют в управлении, выполняют определенные функции и обладают направленностью действия. Направленность действия означает, что изменение входной переменной приводит к изменению выходной, а обратного влияния нет. Это позволяет связи между элементами изображать в виде направленных стрелок. Сами элементы на функциональных схемах изображаются в виде прямоугольников.

При расчетах систему автоматического управления целесообразно представить в виде структурной схемы, абстрагируясь от конструктивных особенностей ее составных элементов.

Структурной схемой называется такая схема, в которой каждой математической операции преобразования сигнала соответствует определенное звено. В зависимости от полноты математического описания и от математических операций, выполняемых различными звеньями, для объектов могут быть составлены различные структурные схемы.

Части структурной схемы называют **звеньями**, каждое из которых отображает алгоритм преобразования сигнала – математическую или логическую операцию.

На структурных схемах звенья изображают прямоугольниками, внутри которых записывают соответствующие операторы преобразования сигналов. Прямоугольники соединяют линиями, отображающими информационные сигналы взаимодействия звеньев, с указанием направлений этих сигналов.

Проектирование системы автоматического управления целесообразно начинать с составления функциональной схемы и затем уже переходить к структурной, а далее к выбору и расчету параметров отдельных элементов. При выборе элементов необходимо исходить из требований, предъявляемых к системе, учитывая при этом ее назначение, надежность, экономичность, вид источников питания, внешние условия работы. Выбранные элементы должны быть согласованы по входным и выходным характеристикам.

Для преобразования структурных схем рекомендуется использовать приложение Б.

В алгоритмических схемах автоматических систем встречаются три типа соединений динамических звеньев:

1) последовательное;
2) параллельное;
3) встречно-параллельное (соединение с обратной связью).

Группу динамических звеньев, составляющих то или иное соединение, можно представить одним эквивалентным динамическим звеном, обладающим такими же статическими и динамическими характеристиками, что и замещаемое им соединение. Это позволяет упрощать алгоритмические схемы и преобразовывать их.

Последовательным называется такое соединение двух или нескольких звеньев, при котором выходная величина предыдущего звена является входной величиной для последующего (рисунок 8).

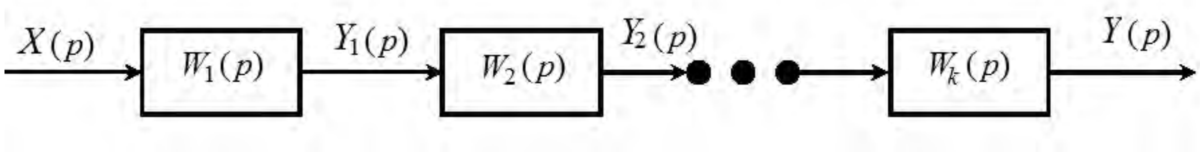


Рисунок 8 – Последовательное соединение звеньев

Эквивалентная передаточная функция определяется как

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \ldots \cdot W_k(p).$$

Таким образом, последовательное соединение звеньев эквивалентно одному звену, передаточная функция которого равна произведению передаточных функций последовательно соединенных звеньев.

Параллельным называется такое соединение двух или нескольких звеньев, при котором входная величина у всех звеньев одна и та же, а выходные величины складываются (рисунок 9).

Учитывая, что при параллельном соединении выходные величины элементов складываются, эквивалентная передаточная функция будет определяться как

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \ldots + W_k(p).$$

Таким образом, параллельное соединение звеньев эквивалентно одному звену, передаточная функция которого равна сумме передаточных функций параллельно соединенных звеньев.

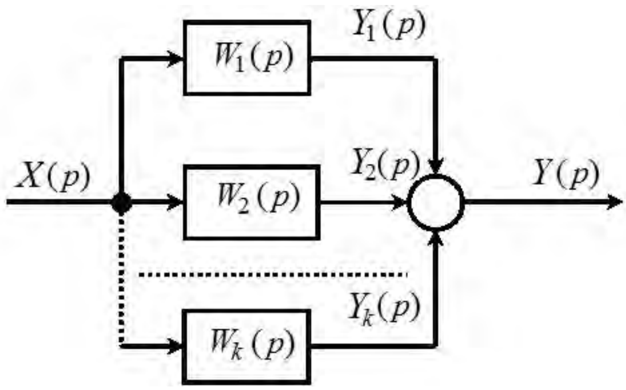


Рисунок 9 – Параллельное соединение звеньев

Встречно-параллельным называется такое соединение двух звеньев, при котором выходная величина одного звена подается обратно на его вход через другое звено (рисунок 10).

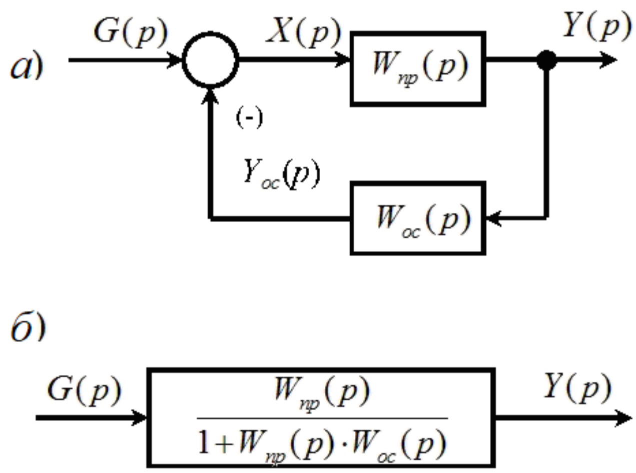


Рисунок 10 – Звено, охваченное обратной связью (*а*), и его эквивалентная структурная схема (*б*)

Встречно-параллельное соединение часто называется соединением с обратной связью. При этом звено, стоящее в прямой цепи (звено с передаточной функцией $W_{пр}(p)$), является звеном, охватываемым обратной связью, а звено, стоящее в цепи обратной связи (звено с передаточной функцией $W_{oc}(p)$), – звеном в цепи обратной связи. Изображение обратной связи $Y_{oc}(p)$ вычитается из изображения входной величины $G(p)$ встречно-параллельного соединения или складывается с ней. В первом случае имеет место отрицательная обратная связь, а во втором – положительная.

При отрицательной обратной связи эквивалентная передаточная функция будет определяться как

$$W(p) = \frac{W_{пр}(p)}{1+W_{пр}(p)\cdot W_{oc}(p)}.$$

Следовательно, звено с передаточной функцией $W_{пр}(p)$, охваченное отрицательной обратной связью через звено с передаточной функцией $W_{ос}(p)$, в смысле прохождения сигнала эквивалентно одному звену, передаточная функция которого равна передаточной функции звена, охватываемого обратной связью, деленной на единицу, плюс произведение передаточных функций звеньев, входящих в соединение.

Передаточные функции системы автоматического управления.

После того как получены передаточные функции входящих в САУ звеньев и составлена структурная схема, необходимо определить передаточные функции всей системы. Для этого структурная схема любой САУ может быть приведена к виду, показанному на рисунке 11.

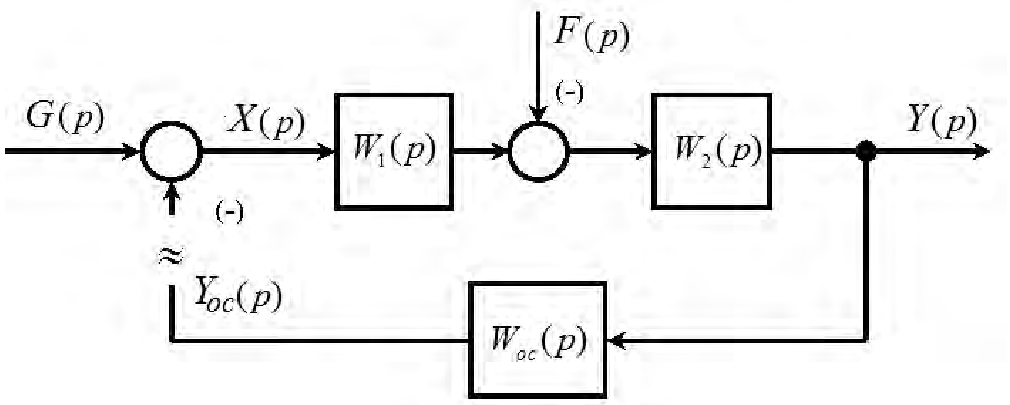


Рисунок 11 – Структурная схема одноконтурной САУ

На рисунке 11 для упрощения продемонстрировано лишь одно возмущающее воздействие $F(p)$, приложенное к объекту регулирования. В общем случае число возмущающих воздействий может быть любым.

Для расчетов обычно необходимы передаточные функции:

– разомкнутой САУ $W(p)$;
– замкнутой САУ относительно задающего воздействия $\Phi(p)$;
– замкнутой САУ относительно возмущения $\Phi_f(p)$;
– замкнутой САУ для ошибки воспроизведения задания $\Phi_x(p)$;
– замкнутой САУ для ошибки от возмущающего воздействия $\Phi_{xf}(p)$.

Определим, что представляют собой эти передаточные функции, и найдем их значения для одноконтурной САУ (см. рисунок 11).

Передаточная функция разомкнутой САУ

$$W(p) = \frac{Y_{oc}(p)}{G(p)}$$

есть отношение изображения $У_{ос}(p)$ сигнала обратной связи к изображению $G(p)$ задающего воздействия (все возмущающие воздействия при этом считаются равными нулю). Контур регулирования считают разомкнутым около элемента сравнения, как показано на рисунке 11 волнистыми линиями.

Передаточная функция замкнутой САУ относительно задающего воздействия есть отношение изображения $Y(p)$ регулируемой величины к изображению задающего воздействия $G(p)$ (при этом предполагается, что других внешних воздействий нет):

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}.$$

Для САУ со структурной схемой, изображенной на рисунке 11,

$$\Phi(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)}.$$

Передаточная функция $\Phi(p)$, которую еще называют главным оператором системы, характеризует передачу системой задающего воздействия, его воспроизведение регулируемой величиной. Воспроизведение тем лучше, чем ближе значение $\Phi(p)$ к идеальному:

$$\Phi(p) = \frac{1}{W_{oc}(p)}.$$

Передаточная функция замкнутой САУ относительно возмущения

$$\Phi_f(p) = \frac{Y(p)}{F(p)}$$

есть отношение изображения $Y(p)$ регулируемой величины к изображению $F(p)$ возмущения. При этом предполагают, что других внешних воздействий нет.

Для рассматриваемой системы

$$\Phi_f(p) = \frac{-W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)}.$$

Передаточная функция $\Phi_f(p)$ показывает влияние возмущения $f(t)$ на регулируемую величину $y(t)$. Возмущение стремится отклонить ее от заданного значения и уменьшает точность воспроизведения задающего воздействия. Это вредное влияние возмущения тем меньше, чем ближе значение $\Phi_f(p)$ к идеальному, т. е. к $\Phi_f(p) = 0$.

Передаточная функция замкнутой САУ для ошибки воспроизведения задания

$$\Phi_x(p) = \frac{X(p)}{G(p)}$$

есть отношение изображения $X(p)$ рассогласования $X(p) = G(p) - Y(p)$ к изображению задающего воздействия при отсутствии других внешних воздействий.

В рассматриваемой системе

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)}.$$

Передаточная функция $\Phi_x(p)$, как и $\Phi(p)$, характеризует воспроизведение регулируемой величиной задающего воздействия (отработку задания). Воспроизведение тем лучше, чем ближе значение $\Phi_x(p)$ к идеальному, т. е. к $\Phi_x(p) = 0$.

Передаточная функция замкнутой САУ для ошибки от возмущающего воздействия

$$\Phi_{xf}(p) = \frac{X(p)}{F(p)}$$

есть отношение изображения $X(p)$ ошибки к изображению возмущающего воздействия при отсутствии других внешних воздействий. В рассматриваемой системе

$$\Phi_{xf}(p) = \frac{W_2(p) \cdot W_{oc}(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{oc}(p)}.$$

Передаточная функция $\Phi_{xf}(p)$ характеризует влияние возмущения на величину ошибки. В идеале $\Phi_{xf}(p) = 0$.

Контрольные вопросы

1 Дать определение передаточной функции.

2 Что характеризует передаточная функция САР по возмущению?

3 Что понимается под возмущающим воздействием?

4 Что такое передаточная функция разомкнутой системы управления?

5 Какое значение передаточной функции относительно задающего воздействия можно считать идеальным?

6 Как найти передаточную функцию системы по возмущающему воздействию?

7 Что такое главный оператор системы?

3.3 Задания для практической работы

1 По структурной схеме (рисунок 12) получить передаточные функции САУ

$$W_1(p)=\frac{1}{p+1};\; W_2(p)=\frac{1}{p};\; W_3(p)=\frac{1}{10p+1};\; W_4(p)=2;\; W_5(p)=0{,}1;$$

$$W_6(p)=6;\; K_{oc}=8.$$

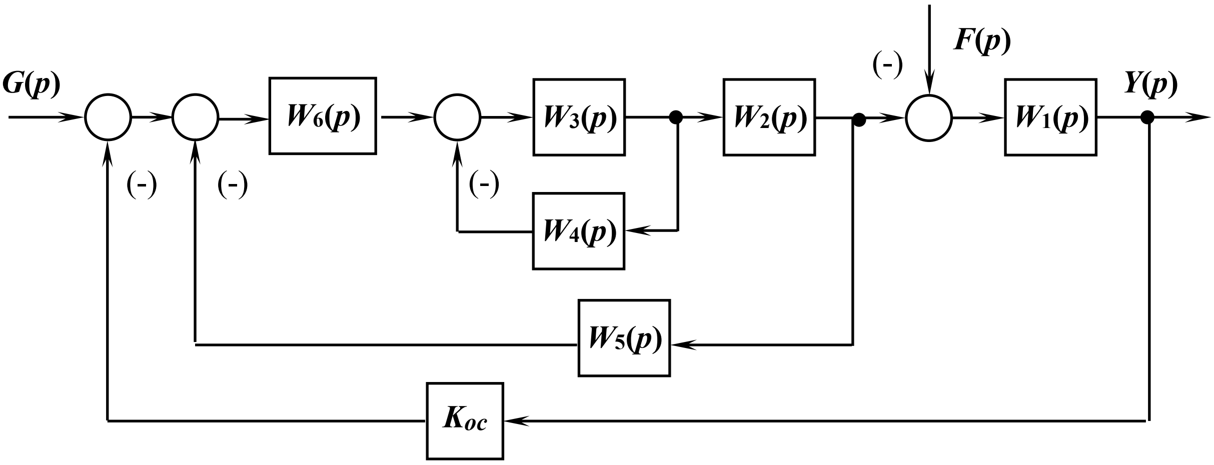


Рисунок 12 – Структурная схема САУ

4 Практическое занятие № 6. Расчет статических и динамических характеристик по структурным схемам

4.1 Основные теоретические положения

Как всякая динамическая система, САУ может находиться в одном из двух режимов – стационарном (установившемся) и переходном. Существуют два вида стационарных режимов САУ – статические и динамические.

Статический режим (статика) – это режим, при котором система находится в состоянии покоя вследствие того, что все внешние воздействия и параметры самой системы не меняются во времени.

Динамический стационарный режим возникает, когда приложенные к системе внешние воздействия изменяются по какому-либо установившемуся закону, в результате чего система приходит в режим установившегося вынужденного движения.

Важными вопросами статики является обеспечение заданной статической точности, а также изучение статических характеристик элементов и систем. По виду этих характеристик различают статическое и астатическое регулирование и управление.

В системах, которые обеспечивают в установившемся режиме равенство управляемой переменной заданному значению (статизм равен нулю), осуществляется астатическое управление. Статическая характеристика астатической системы является прямой линией, параллельной оси абсцисс.

Поведение астатического регулятора, содержащего интегрирующее звено, можно охарактеризовать, рассмотрев его работу при разомкнутой главной обратной связи. Если подать на вход разомкнутой астатической системы постоянный сигнал, то на ее выходе можно получить непрерывное изменение выходной переменной с постоянной скоростью. Отношение скорости изменения выходной переменной к сигналу на входе называется *коэффициентом усиления астатической системы*.

Для статического режима работы астатических систем не существует определенной зависимости между значением выходной переменной и положением регулирующего органа.

Контрольные вопросы

1 Понятия замкнутой и разомкнутой систем регулирования.

2 Определение статических ошибок системы регулирования.

3 Как определить коэффициент передачи САР по ее статической характеристике?

4 Как зависит статическая ошибка замкнутой системы от коэффициента обратной связи?

5 Что называется статизмом системы?

6 Как по структурной схеме САР определить статизм системы и получить уравнение статической характеристики?

7 От чего зависит статизм в статической системе регулирования?

5 Практическое занятие № 7. Определение устойчивости БТС по Ляпунову и Гурвицу

5.1 Основные теоретические положения

Основной динамической характеристикой автоматической системы является ее устойчивость. Под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться в прежнее состояние равновесия после вывода ее из этого состояния и прекращения влияния задающего или возмущающего воздействия.

В зависимости от характера переходного процесса линеаризованной системы различают три основных случая поведения системы после возмущающего воздействия:

1) система не может восстановить равновесного состояния, значение управляемой переменной все больше отклоняется от заданного; такой процесс называется *расходящимся,* а система – *неустойчивой*;

2) система возвращается к равновесному состоянию, значение управляемой переменной отличается от заданного на величину статической погрешности системы; такой переходный процесс будет *сходящимся*, а система – *устойчивой*;

3) система характеризуется установившимся периодическим движением; такой процесс называется *незатухающим колебательным*, а система будет *находиться на границе асимптотической устойчивости.*

Устойчивость линейных систем не зависит от величины возмущения; система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчивой и при больших возмущениях. Поэтому для суждения об устойчивости линейных систем достаточно исследовать и определить устойчивость «в малом», т. е. найти устойчивость по уравнениям в форме приращений. При этом судить об устойчивости можно по корням характеристического уравнения замкнутой системы.

Если динамика системы точно описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то устойчивость «в малом» обеспечивает неограниченную устойчивость системы. Нелинейные системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями, могут быть устойчивыми при малых возмущениях и неустойчивыми при больших.

Процессы, происходящие в большей части реальных систем, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые для упрощения исследования могут быть линеаризованы. Тогда исследование реальной (действительной) системы заменится исследованием линеаризованной системы.

Оценка устойчивости по критерию Ляпунова.

Правильность суждения об устойчивости реальной системы «в малом» по линеаризованным уравнениям доказана А. М. Ляпуновым.

При некоторых общих условиях справедливо следующее (первая теорема А. М. Ляпунова).

1 Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то действительная система устойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения переменных не могут изменить устойчивость системы.

2 Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то действительная система неустойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения переменных не могут придать системе устойчивость.

3 Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один нулевой корень или пару чисто мнимых сопряженных корней, то поведение действительной системы не может определяться ее линеаризованным уравнением. В этом случае отброшенные при линеаризации уравнения члены второй и высшей степеней отклонения переменных коренным образом изменяют описание динамического процесса реальной системы.

Критерий Гурвица. Пусть имеем характеристическое уравнение (знаменатель $\Phi(p)$)

$$C_0 \cdot p^n + C_1 \cdot p^{n-1} + \ldots + C_{n-1} \cdot p + C_n = 0.$$

Сначала строится главный определитель Гурвица по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от C_1 до C_n в порядке возрастания индекса.

Столбцы вверх от главной диагонали дополняются коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – с последовательно убывающими.

На место коэффициентов с индексами больше n (где n – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляются нули:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 & \ldots & 0 \\ C_0 & C_2 & C_4 & C_6 & \ldots & 0 \\ 0 & C_1 & C_3 & C_5 & \ldots & 0 \\ 0 & C_0 & C_2 & C_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n \end{vmatrix}.$$

Далее выделяются в главном определителе Гурвица диагональные миноры и получаются определители Гурвица низшего порядка. В итоге проверяется n определителей, которые являются главными диагональными минорами матрицы Гурвица.

Для характеристического уравнения, записанного в виде

$$C_0 \cdot p^3 + C_1 \cdot p^2 + C_2 \cdot p + C_3 = 0,$$

определитель Гурвица и диагональные миноры

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & 0 \\ C_0 & C_2 & 0 \\ 0 & C_1 & C_3 \end{vmatrix}; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ C_0 & C_2 \end{vmatrix}; \; \Delta_1 = |C_1|.$$

Определение критерия: чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы определитель Гурвица и его диагональные миноры были положительными, т. е.

$$\Delta_1 > 0; \; \Delta_2 > 0; \; \Delta_3 > 0 \text{ и т. д.}$$

Существенным недостатком критерия Гурвица является также то, что для уравнений высоких порядков в лучшем случае можно получить ответ о том, устойчива или неустойчива система автоматического регулирования. При этом в случае неустойчивой системы критерий не дает ответа на то, каким образом надо изменить параметры системы, чтобы сделать ее устойчивой. Данное обстоятельство привело к поискам других критериев, которые были бы более удобными в инженерной практике.

Контрольные вопросы

1 Что такое устойчивость?
2 Сформулировать теорему Ляпунова.
3 В каком случае система будет устойчива согласно критерию Гурвица?

5.2 Задания для практической работы

С помощью теоремы Ляпунова и критерия Гурвица исследовать на устойчивость систему, у которой характеристическое уравнение имеет вид:

1) $p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 7p + 1 = 0$;
2) $8p^4 + 2p^3 + p^2 + 3p + 1 = 0$.

6 Практическое занятие № 8. Определение устойчивости БТС по Михайлову и Найквисту

6.1 Основные теоретические положения

Критерий Михайлова. А. В. Михайлов предложил частотный критерий устойчивости, применение которого во многих случаях оказалось предпочтительнее. Этот критерий основан на расположении годографа (кривой) вектора $M\ (j \cdot \omega)$, определяемого характеристическим уравнением системы в плоскости комплексного переменного.

Условия устойчивости по Михайлову. САУ будет устойчивой, если годограф функции $M\ (j \cdot \omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности обходит последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов комплексной плоскости (где n – степень характеристического уравнения данной системы) и уходит в бесконечность.

Вектор $M\ (j \cdot \omega)$ можно найти, если в характеристическом уравнении заменить оператор Лапласа p на комплексную частоту $j \cdot \omega$.

Пусть система автоматического управления имеет следующее характеристическое уравнение:

$$C_0 \cdot p^n + C_1 \cdot p^{n-1} + \ldots + C_{n-1} \cdot p + C_n = 0.$$

Тогда p заменяется на $j \cdot \omega$:

$$M(j \cdot \omega) = C_0 \cdot (j \cdot \omega)^n + C_1 \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \ldots + C_{n-1} \cdot (j \cdot \omega) + C_n = 0.$$

Для каждого значения ω функция $M\ (j \cdot \omega)$ будет представлять собой вектор в комплексной плоскости. Если величине ω придавать последовательно значения от нуля до бесконечности, то получится семейство векторов. Кривая, являющаяся геометрическим местом точек концов вектора при изменении значений ω от нуля до бесконечности, называется годографом Михайлова (рисунок 13). По расположению годографа на комплексной плоскости можно определить, устойчива система или нет.

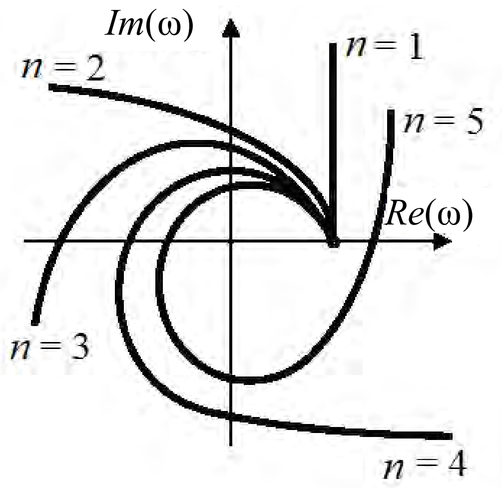
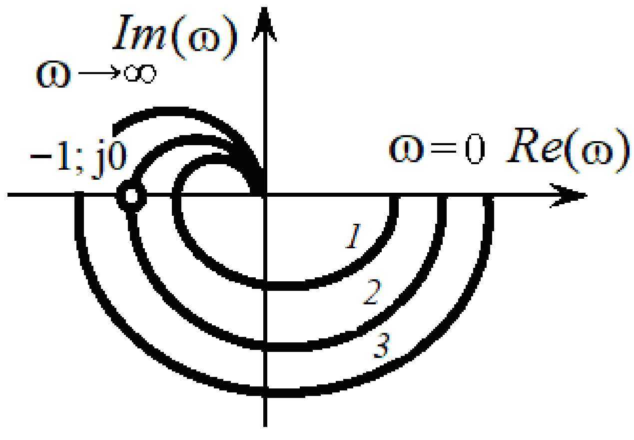


Рисунок 13 – Годографы Михайлова для устойчивых систем

Критерий Найквиста. Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) системы в разомкнутом состоянии. Различают формулировки критерия для случаев, когда система в разомкнутом состоянии устойчива и неустойчива.

Критерий устойчивости формулируется следующим образом: САУ, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если годограф Найквиста разомкнутой системы не охватывает точку на комплексной плоскости с координатами (–1, *j*0).

На рисунке 14 показаны амплитудно-фазовые частотные характеристики системы.



1 – годограф для устойчивой САУ; *2* – годограф для САР, находящейся на границе устойчивости; *3* – годограф для неустойчивой САУ

Рисунок 14 – Годографы Найквиста

Годограф *1* не охватывает критическую точку, поэтому система, имеющая эту характеристику, устойчива. Амплитудно-фазовая частотная характеристика *3* охватывает точку (–1, *j*0), поэтому система *3* неустойчива. Амплитудно-фазовая частотная характеристика *2* проходит через критическую точку – соответствующая система находится на границе устойчивости.

Контрольные вопросы

1 Что такое устойчивость?
2 Сформулировать критерий Михайлова.
3 Сформулировать критерий Найквиста.

6.2 Задания для практической работы

1 По критерию Михайлова исследовать устойчивость системы, у которой характеристическое уравнение имеет вид:

$$2p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 7p + 1 = 0.$$

2 По критерию Найквиста исследовать устойчивость замкнутой системы, у которой передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{p+1}{p^3 + 2p^2 + p + 1}.$$

Список литературы

1 **Кузьмин, А. В.** Теория систем автоматического управления: учебник / А. В. Кузьмин, А. Г. Схиртладзе. – Старый Оскол : ТНТ, 2016. – 224 с.

2 **Сазонов, Г. Г.** Основы автоматического управления: учебное пособие / Г. Г. Сазонов. – Старый Оскол : ТНТ, 2016. – 236 с.

3 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Линейные системы : учебник и практикум для академ. бакалавриата / Д. П. Ким. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2017. – 311 с.

4 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Линейные системы. Задачник : учебное пособие для академ. бакалавриата / Д. П. Ким, Н. Д. Дмитриева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2017. –169 с.

5 **Бесекерский, В. А.** Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Профессия, 2003. – 752 с.

6 **Анхимюк, В. Л.** Теория автоматического управления / В. Л. Анхимюк. – Минск : Вышэйшая школа, 2002. – 352 с. : ил.

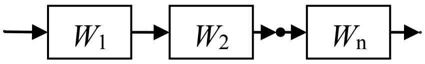
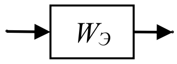
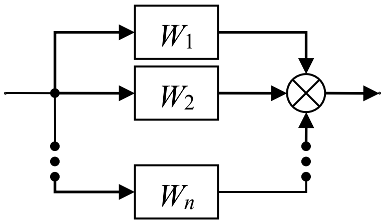
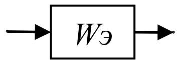
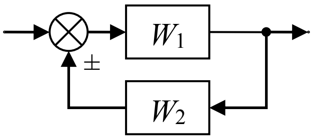
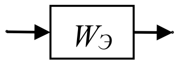
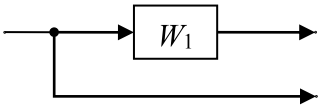
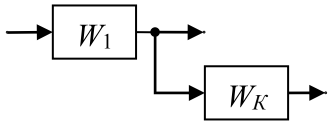
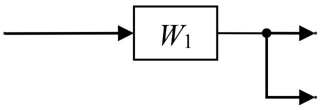
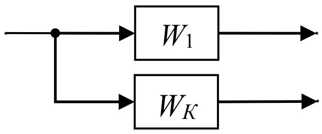
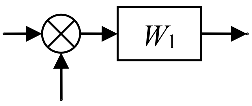
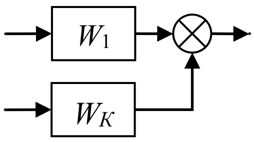
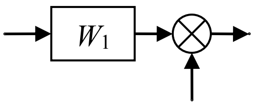
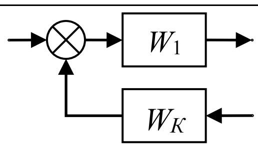
Приложение А
(справочное)

Таблица А.1 – Таблица основных преобразований Лапласа

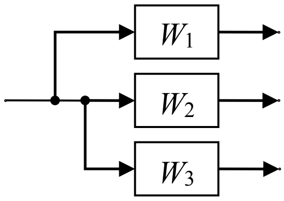
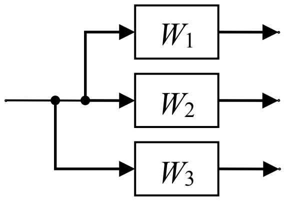
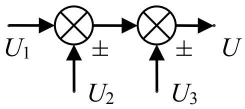
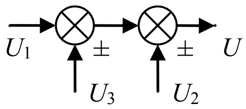
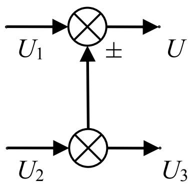
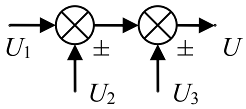
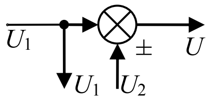
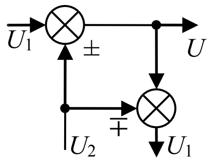
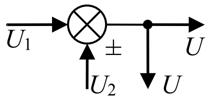
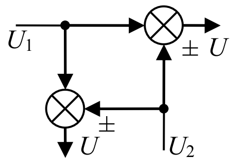
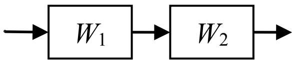
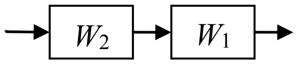
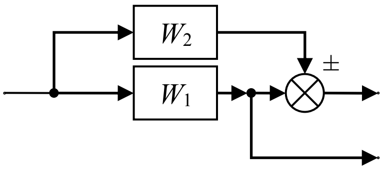
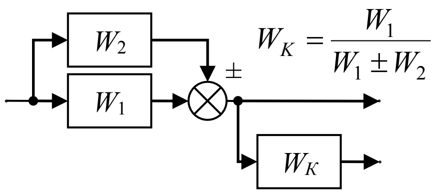
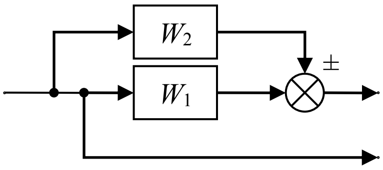
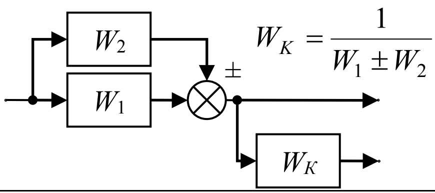
Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
$t^n,\ n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$
$t^n e^{\lambda t},\ n \in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Приложение Б
(справочное)

Таблица Б.1 – Способы преобразования структурных схем САУ

Преобразова-ние	Структурная схема	
	исходная	эквивалентная
1 Свертывание последователь-ного соединения		 $W_Э = W_1 W_2 \ldots W_n$
2 Свертывание параллельного соединения		 $W_Э = W_1 + W_2 + \ldots W_n$
3 Свертывание встречно-параллельного соединения		 $W_Э = \dfrac{W_1}{1 \mp W_1 W_2}$
4 Перенос точки разветвления через звено		 $W_K = \dfrac{1}{W_1}$
		 $W_K = W_1$
5 Перенос сум-матора через звено		 $W_K = W_1$
		 $W_K = \dfrac{1}{W_1}$

Окончание таблицы Б.1

Преобразование	Структурная схема: исходная	Структурная схема: эквивалентная
6 Перестановка точек разветвления		
7 Перестановка сумматоров		
		
8 Перенос точки разветвления через сумматор		
		
9 Перенос звена через звено		
10 Вынос точки разветвления из параллельного соединения		 $W_K = \frac{W_1}{W_1 \pm W_2}$
		 $W_K = \frac{1}{W_1 \pm W_2}$