

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов направлений подготовки  
13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»  
и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника»  
дневной формы обучения*

Часть 2



Могилев 2018

УДК 621.38  
ББК 32.841  
Т 33

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «29» марта 2018 г.,  
протокол № 9

Составители: канд. техн. наук, доц. А. Г. Старовойтов;  
канд. физ.-мат. наук, доц. Ф. М. Трухачёв

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов  
направлений подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» и  
15.03.06 «Мехатроника и робототехника» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

### Часть 2

Ответственный за выпуск	С. С. Сергеев
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Государственное учреждение высшего профессионального образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 24.01.2014.

Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский  
университет», 2018



## Содержание

10 Расчёт переходных процессов в электрических цепях постоянного тока с одним накопителем энергии классическим методом.....	4
11 Расчёт переходных процессов классическим методом в разветвленной цепи постоянного тока с несколькими источниками.....	11
12 Расчёт переходных процессов классическим методом в цепях $R,L$ и $R,C$ при действии синусоидальной ЭДС.....	17
13 Расчёт переходных процессов операторным методом.....	20
14 Расчет переходных процессов операторным методом в электрических цепях с взаимной индуктивностью.....	25
15 Расчет характеристических параметров схем замещения и частотных характеристик четырехполюсников.....	27
16 Расчет нелинейных электрических цепей при постоянных и синусоидальных воздействиях.....	37
17 Расчёт нелинейных цепей при синусоидальных воздействиях. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях.....	43
Список литературы.....	48



## Часть 2

### 10 Расчёт переходных процессов в электрических цепях постоянного тока с одним накопителем энергии классическим методом

#### 10.1 Основные теоретические положения

##### 10.1.1 Основные положения классического метода.

Расчёт переходного процесса в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами сводится к решению линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, полученного на основании законов Кирхгофа. Порядок дифференциального уравнения  $n$  определяется количеством реактивных элементов в схеме и способом их соединения. Для всех вариантов схем настоящей расчетно-графической работы  $n = 2$ .

Классический метод расчёта предполагает нахождение решения в виде суммы свободной и принуждённой составляющих:

$$X(t) = X_{np}(t) + X_{св}(t), \quad (10.1)$$

где  $X_{np}(t)$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (принуждённая составляющая);

$X_{св}(t)$  – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (свободная составляющая).

В электротехнической практике в качестве частного решения обычно используют значение  $X_{np}(t)$ , получаемое из расчёта рассматриваемой схемы в установившемся режиме.

Общее решение  $X_{св}(t)$  определяется видом корней характеристического уравнения  $p$ :

– если характеристическое уравнение имеет два действительных и разных корня  $p_1 \neq p_2$ :

$$X_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}, \quad (10.2)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования;

– корни действительные и равные  $p_1 = p_2 = p$ :

$$X_{св}(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{p t}; \quad (10.3)$$

– корни комплексно-сопряжённые  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega'$ :

$$X_{св}(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega' \cdot t + \nu). \quad (10.4)$$



Для получения характеристического уравнения достаточно составить выражение для входного сопротивления схемы после коммутации в комплексной форме  $Z_{ex}(j\omega)$ , заменить  $j\omega$  на  $p$  и приравнять это выражение к нулю либо приравнять к нулю матрицу контурных сопротивлений или матрицу узловых проводимостей схемы. При определении  $Z_{ex}$  все источники ЭДС в схеме закорачиваются, а источники тока отбрасываются с сохранением в схеме их внутренних сопротивлений.

Для определения  $A_1$  и  $A_2$  либо  $A$  и  $v$  (при комплексных корнях) необходимо вычислить значение искомой величины  $X(0_+)$  и её производной  $\left. \frac{dX}{dt} \right|_{t=0_+}$  в момент времени непосредственно после коммутации ( $t = 0_+$ ), используя законы Кирхгофа для послекоммутационной схемы и законы коммутации.

При этом не изменяющиеся мгновенно токи в индуктивностях и напряжения на ёмкостях определяются из расчёта схемы до коммутации.

Основным недостатком классического метода является необходимость определения постоянных интегрирования  $A$ . Этого недостатка лишён операторный метод расчёта переходных процессов.

## 10.2 Примеры решения задач

10.2.1 Включение цепи с последовательным соединением  $R$  и  $L$  на постоянное напряжение.

**Задача 1.** Дано:  $U, R, L$ . Определить:  $i(t)$  и  $u_L(t)$  при переходном процессе (рисунок 10.1).

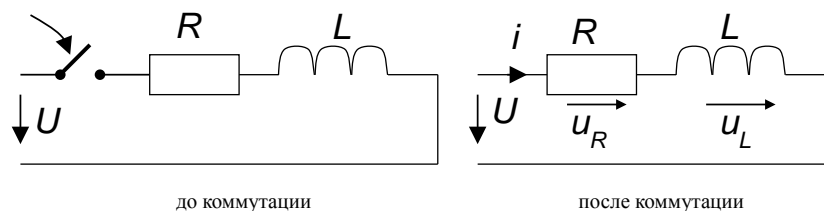


Рисунок 10.1 – Цепь с последовательным соединением  $R$  и  $L$  на постоянное напряжение

### Решение

Производим коммутацию и запускаем переходный процесс. Уравнение 2-го закона Кирхгофа  $U = u_R + u_L$ .

### Аналитическое решение

1 Составляем дифференциальное уравнение по 2-му закону Кирхгофа для цепи, образовавшейся после коммутации:

$$u_R + u_L = U; L \frac{di}{dt} + Ri = U.$$

Его общий интеграл (искомый ток  $i$ ) имеет две составляющие:

1) **принужденная составляющая тока.** Математически – это частное решение дифференциального уравнения, имеющее вид свободного члена. В данном случае свободный член ( $u = \text{const}$ ) – постоянное число. Следовательно,  $i_{np} = \text{const}$ ;

2)  $i_{св}$  – **свободная составляющая искомого тока.**

2 Подставляя  $i_{np} = \text{const}$  в исходное дифференциальное уравнение, получаем  $U = i_{np}R + 0$ . Отсюда  $i_{np} = \frac{U}{R}$ . Физически – это ток установившегося режима после завершения переходного процесса.

Математически – это общее решение однородного уравнения, которое имеет вид экспоненты.

$$i_{св} = Ae^{pt},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;

$p$  – корень характеристического уравнения. Это уравнение получают, подставив имеющееся решение в однородное уравнение  $0 = Ae^{pt}R + LpAe^{pt}$ . Сокращая на  $Ae^{pt} \neq 0$  – уменьшается со временем.

Эта математика соответствует физике процессов в цепи, лишенной внешнего источника энергии.

3 Промежуточный ответ:  $i = i_{np} + i_{св} = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ .

4 Определяем  $A$ , полагая в этом уравнении  $t = 0$ :

$$i(0_+) = \frac{U}{R} + A.$$

Тогда  $A = i(0_+) - \frac{U}{R}$ .

Для данного примера  $i(0_+) = i(0_-) = 0$ . Следовательно,  $A = -\frac{U}{R}$ .

5 Окончательный ответ:  $i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ .

Проверка: при  $t = 0$   $i(0_+) = 0$ ; при  $t = \infty$   $i_{уст} = \frac{U}{R}(e^{-\infty} = 0)$ .

6 Напряжение на индуктивности



$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left[ \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right] = L \left[ \left( -\frac{U}{R} \right) \left( -\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \right] = +U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Проверка: при  $t = 0$   $u_L(0) = U$ ; при  $t = \infty$   $u_L(\infty) = 0$ .

В цепи с одним накопителем энергии кривые тока и напряжения изменяются монотонно; колебательные процессы отсутствуют.

10.2.2 Замыкание цепи с последовательным соединением  $R$  и  $L$  накоротко.

**Задача 2.** Дано:  $U$ ,  $R$ ,  $L$ . Определить:  $i(t)$  и  $u_L(t)$  при переходном процессе (рисунок 10.2).

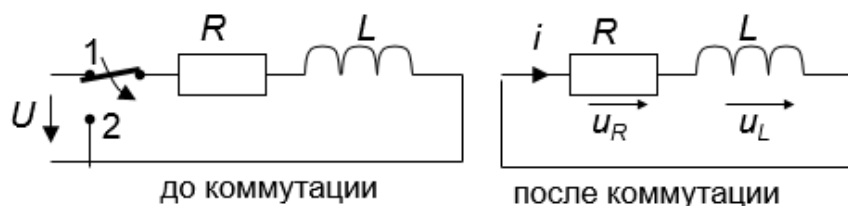


Рисунок 10.2 – Цепь с последовательным соединением  $R$  и  $L$  накоротко

*Решение*

Производим коммутацию и запускаем переходный процесс. Уравнение 2-го закона Кирхгофа  $U = u_R + u_L$ .

*Аналитическое решение*

1 Составляем дифференциальное уравнение по 2-му закону Кирхгофа для цепи, образовавшейся после коммутации:

$$u_R + u_L = 0; L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

2 Его общий интеграл (искомый ток  $i$ ) имеет одну составляющую:

$$i = i_{cs} = A e^{pt},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;

$p^{cs}$  – корень характеристического уравнения:  $R + pL = 0$ . Следовательно,

$$p = -\frac{R}{L}.$$

3 Промежуточный ответ:  $i = A e^{-\frac{R}{L}t}$ .

4 Определяем  $A$ , полагая в этом уравнении  $t = 0$ :  $i(0+) = A$ .



Для данного примера  $i(0_+) = i(0_-) = \frac{U}{R}$ .

Таким образом,  $A = \frac{U}{R}$ .

5 Окончательный ответ.

Искомый ток  $i = \left(\frac{U}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$ .

Проверка: при  $t = 0$   $i(0_+) = \frac{U}{R}$ ; при  $t = \infty$   $i(\infty) = 0$ .

6 Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left[ \left(\frac{U}{R}\right) \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t} \right] = -U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Проверка: при  $t = 0$   $u_L(0_+) = -U$ ; при  $t = \infty$   $u_L(\infty) = 0$ .

Заметим, что в цепи с одним накопителем энергии кривые тока и напряжения изменяются монотонно; колебательные процессы отсутствуют.

10.2.3 Включение цепи с последовательным соединением  $R$  и  $C$  на постоянное напряжение.

**Задача 3.** Дано:  $U$ ,  $R$ ,  $C$ . Определить:  $i(t)$  и  $u_C(t)$  при переходном процессе (рисунок 10.3).

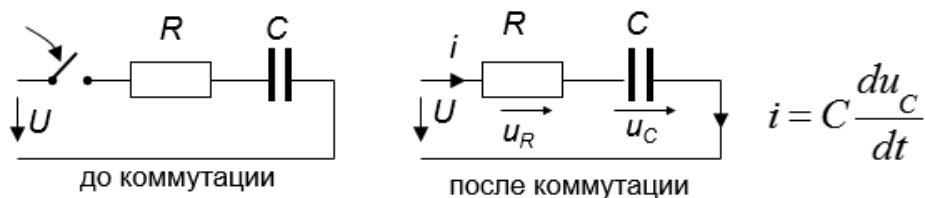


Рисунок 10.3 – Цепь с последовательным соединением  $R$  и  $C$  на постоянное напряжение

*Решение*

Производим коммутацию и запускаем переходный процесс. Уравнение 2-го закона Кирхгофа  $U = u_R + u_C$ .

*Аналитическое решение*

1 Составляем дифференциальное уравнение по 2-му закону Кирхгофа для цепи, образовавшейся после коммутации:

$$u_R + u_C = Ri + u_C = 0,$$

где  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .



Тогда  $U = CR \left( \frac{du_C}{dt} \right) + u_C$ .

Заметим, что в цепях с емкостью дифференциальное уравнение составляется относительно неизвестного напряжения на емкости  $u_C$ .

2 Общий интеграл этого уравнения  $u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв}$ .

Здесь принужденная составляющая  $u_{Cnp} = u_{Cуст} = U$ .

Свободная составляющая

$$u_{Cсв} = Ae^{pt},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;

$p$  – корень характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение цепи  $CRp + 1 = 0$ .

Его корень  $p = -\frac{1}{CR}$ .

3 Промежуточный ответ:  $u_C = U + Ae^{pt} = U + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$ .

4 Постоянную  $A$  определяем при  $t = 0$ :  $u_C(0+) = U + A$ .

Тогда  $A = u_C(0+) - U$ .

Для данного примера  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ .

Следовательно,  $A = -U$ .

5 Окончательный ответ:  $u_C = U - Ue^{-\frac{1}{CR}t} = U \left( 1 - e^{-\frac{1}{CR}t} \right)$ .

Проверка: при  $t = 0$   $u_C(0+) = U(1 - 1) = 0$ ; при  $t = \infty$   $u_C(\infty) = u_{Cуст} = U(1 - 0) = U$ .

6 Ток цепи (в емкости)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left( U - Ue^{-\frac{1}{CR}t} \right) = C \left[ (-U) \left( -\frac{1}{CR} \right) e^{-\frac{1}{CR}t} \right] = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{CR}t}.$$

Проверка: при  $t = 0$   $i_C(0+) = \frac{U}{R}$ ; при  $t = \infty$   $i_C(\infty) = 0$ .

В цепи с одним накопителем энергии кривые тока и напряжения изменяются монотонно; колебательные процессы отсутствуют.

10.2.4 Замыкание цепи с последовательным соединением  $R$  и  $C$  накоротко.

**Задача 4.** Дано:  $U, R, C$ . Определить:  $i(t)$  и  $u_C(t)$  при переходном процессе (рисунок 10.4).



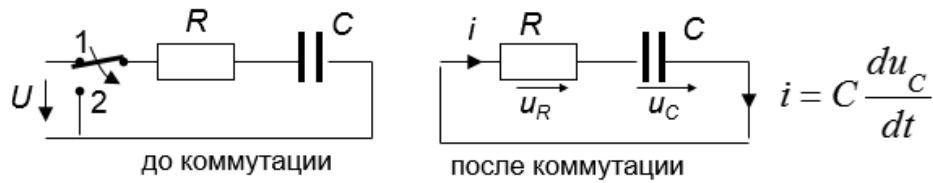


Рисунок 10.4 – Цепь с последовательным соединением  $R$  и  $C$  накоротко

### Решение

Производим коммутацию и запускаем переходный процесс. Уравнение 2-го закона Кирхгофа  $U = u_R + u_C$ .

### Аналитическое решение

1 Составляем дифференциальное уравнение по 2-му закону Кирхгофа для цепи, образовавшейся после коммутации:

$$u_R + u_C = Ri + u_C = CR \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

2 Его общий интеграл  $u_C$  имеет одну составляющую:

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{pt},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;

$p$  – корень характеристического уравнения:  $CRp + 1 = 0$ .

Следовательно,  $p = -\frac{1}{CR}$ .

3 Промежуточный ответ:  $u_C = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$ .

4 Определяем  $A$ , полагая в уравнении  $t = 0$ :  $u_C(0+) = A$ .

Для данного примера  $u_C(0+) = u_C(0-) = U$ . Таким образом,  $A = U$ .

5 Окончательный ответ:  $u_C(t) = Ue^{-\frac{1}{CR}t}$ .

Проверка: при  $t = 0$   $u_C(0+) = U$ ; при  $t = \infty$   $u_C(\infty) = u_{C\text{уст}} = 0$ .

6 Ток цепи (в емкости)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left( Ue^{-\frac{1}{CR}t} \right) = C \left[ (U) \left( -\frac{1}{CR} \right) e^{-\frac{1}{CR}t} \right] = -\frac{U}{R} e^{-\frac{1}{CR}t}.$$

Проверка: при  $t = 0$   $i_C(0+) = -\frac{U}{R}$ ; при  $t = \infty$   $i_C(\infty) = 0$ .



10.2.5 Электромагнитная постоянная времени. Практическая длительность переходного процесса.

С помощью  $\tau$  определяют практическую длительность переходного процесса:

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right|.$$

Тогда во всех примерах  $e^{pt} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Через время  $t = (4 \dots 5) \tau$  после начала переходного процесса этот переходный процесс практически завершается.

Ток цепи (в емкости)  $e \approx 2,71$  (неперово число).

### Самостоятельная работа

Решить задачи на переходные процессы в цепях постоянного тока, рекомендованные преподавателем.

## 11 Расчёт переходных процессов классическим методом в разветвленной цепи постоянного тока с несколькими источниками

Основные теоретические положения изложены в подразделе 10.1.

### 11.1 Пример расчёта переходного процесса

В качестве примера приведен расчёт переходных процессов в электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 11.1. Исходные данные даны в таблице 11.1.

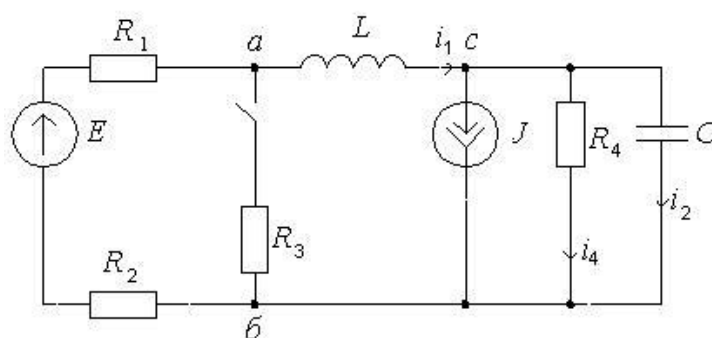


Рисунок 11.1 – Расчетная схема

Таблица 11.1 – Исходные данные

$E, \text{В}$	$J, \text{А}$	$L, \text{Гн}$	$C, \text{Ф}$	$R_1, \text{Ом}$	$R_2, \text{Ом}$	$R_3, \text{Ом}$	$R_4, \text{Ом}$	Определить
120	0,08	$10^{-2}$	$10^{-5}$	10	90	1000	1000	$i_1$



### 11.1.1 Классический метод расчета.

Рассчитываем цепь до коммутации с целью определения независимых начальных условий (т. е.  $u_C(0_-)$  и  $i_L(0_-)$ ).

В цепях постоянного тока установившийся ток через конденсатор не протекает:  $u_C(0_-) = 0$ . Следовательно,  $i_2(0_-) = 0$ .

Ток через индуктивность  $i_L(0_-) = i_1(0_-)$  определяем по закону Ома:

$$i_1(0_-) = \frac{E + J \cdot R_4}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{120 + 0,08 \cdot 1000}{10 + 90 + 1000} = 0,18 \text{ А.}$$

Напряжение на конденсаторе  $C$  равно напряжению на сопротивлении  $R_4$  (т. к. эти ветки параллельны):

$$u_C(0_-) = i_4(0_-) \cdot R_4.$$

По первому закону Кирхгофа для узла  $C$

$$u_4(0_-) = i_1(0_-) - J = 0,18 - 0,08 = 0,1 \text{ А.}$$

Тогда

$$i_4(0_-) = i_4(0_-) \cdot R_4 = 0,1 \cdot 1000 = 100 \text{ В.}$$

Принужденное значение искомого тока  $i_{1np}$  определяется для схемы после коммутации (рисунок 11.2).

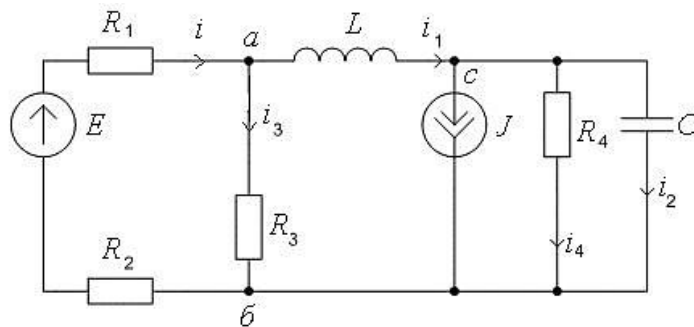


Рисунок 11.2 – Схема электрической цепи после коммутации

Используя метод двух узлов, рассчитываем напряжение  $U_{aб}$ :

$$U_{aб} = \frac{\sum E \cdot Y + \sum J}{\sum Y};$$



$$U_{a\bar{b}} = \frac{E \cdot 1 / (R_1 + R_2) - J}{1 / (R_1 + R_2) + 1 / R_3 + 1 / R_4} = \frac{120 \cdot 0,01 - 0,08}{0,01 + 0,001 + 0,001} = 93,3 \text{ В.}$$

Тогда по закону Ома

$$i_{1np} = \frac{U_{a\bar{b}} + J \cdot R_4}{R_4} = \frac{93,3 + 80}{1000} = 0,173 \text{ А.}$$

Составляем характеристическое уравнение, используя выражение для входного сопротивления схемы. При этом все источники ЭДС в схеме должны быть закорочены (рисунок 11.3), а источники тока отключены. Внутренние сопротивления источников в схеме сохраняются. Размыкается любая из ветвей, и этот обрыв (на рисунке 11.3 точки  $c, d$ ) считается входом. Следует записать  $Z_{ex}(j\omega)$  в комплексной форме, а затем заменить там  $j\omega$  на  $p$  и приравнять к нулю:  $Z_{ex}(p) = 0$ .

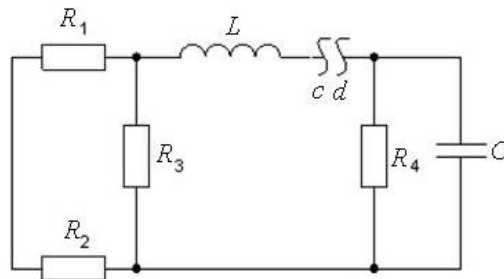


Рисунок 11.3 – Схема для определения характеристического уравнения через входное сопротивление

Обозначим сопротивление параллельного участка (см. рисунок 11.3) через  $R'$ :

$$R' = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{100000}{1100} = 90,91 \text{ Ом.}$$

Тогда входное сопротивление после замены  $j\omega$  на  $p$

$$\begin{aligned} Z_{ex}(p) &= R' + p \cdot L + \frac{\frac{1}{p \cdot C} \cdot R_4}{\frac{1}{p \cdot C} + R_4} = R' + p \cdot L + \frac{R_4}{1 + p \cdot C \cdot R_4} = \\ &= \frac{p^2 \cdot (L \cdot C \cdot R_4) + p \cdot (L + C \cdot R' \cdot R_4) + (R_4 + R')}{1 + p \cdot C \cdot R_4}. \end{aligned}$$

Приравниваем  $Z_{ex}$  к нулю и получаем характеристическое уравнение

$$p^2 \cdot (L \cdot C \cdot R_4) + p \cdot (L + C \cdot R' \cdot R_4) + (R_4 + R') = 0.$$

После подстановки численных значений определяем корни характеристического уравнения:

$$p^2 \cdot (10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 1000) + p \cdot (10 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 90,91) + 90,91 + 1000 = 0;$$

$$p^2 + 9191 \cdot p + 10909100 = 0;$$

$$p_1 = -1400,3; p_2 = -7790,6.$$

Записываем ожидаемое решение как сумму принужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1np} + i_{1cb} = i_{1np} + \sum_{k=1}^2 A_k \cdot e^{p_k \cdot t} = 0,173 + A_1 \cdot e^{-1400,3t} + A_2 \cdot e^{7790,6t}. \quad (11.1)$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_k$  необходимо рассчитать значения искомого тока и его первой производной в момент времени  $t = 0_+$ :

$$i_1(0_+) \text{ и } \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+}.$$

По первому закону коммутации  $i_1(0_+) = i_1(0_-) = 0,18$  А. При  $t = 0_+$  уравнение (11.1) примет вид:

$$0,18 = 0,173 + A_1 \cdot e^0 + A_2 \cdot e^0$$

ИЛИ

$$0,18 = 0,173 + A_1 + A_2. \quad (11.2)$$

Для определения  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+}$  воспользуемся законами Кирхгофа (см. рисунок 11.2) для схемы после коммутации:

$$\begin{cases} i = i_1 + i_3; \\ E = i \cdot (R_1 + R_2) + i_3 \cdot R_3; \end{cases}$$



$$\begin{cases} i_3 = i - i_1; \\ E = i \cdot (R_1 + R_2) + (i - i_1) \cdot R_3; \end{cases}$$

$$i = \frac{E + i_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (11.3)$$

В уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа для внешнего контура схемы (см. рисунок 11.2),

$$E = L \cdot \frac{di_1}{dt} + i \cdot (R_1 + R_2) + u_C$$

подставляем значение  $i$  согласно (11.3), а затем выражаем  $\frac{di_1}{dt}$ :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L} \cdot \left( E \cdot \left( 1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \right) - \frac{i_1 \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_C \right).$$

При  $t = 0_+$  по второму закону коммутации  $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 100$  В. Тогда

$$\begin{aligned} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} &= \frac{1}{L} \cdot \left( E \cdot \left( 1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \right) - \frac{i_1(0_+) \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_C(0_+) \right) = \\ &= 100 \cdot \left( 120 \cdot \left( 1 - \frac{100}{1100} \right) - \frac{0,18 \cdot 1000 \cdot 100}{1100} - 100 \right) = -727,4. \end{aligned}$$

Дифференцируем (11.1):

$$\frac{di_1}{dt} = A_1 \cdot (-1400,3) \cdot e^{-1400,3t} - 7790,6 \cdot A_2 \cdot e^{-7790,6t}$$

и подставляем  $t = 0$ :

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0_+} = -1400,3 \cdot A_1 - 7790,6 \cdot A_2 = -727,4. \quad (11.4)$$

Решая систему уравнений (11.2) и (11.3)

$$\begin{cases} 0,18 = 0,173 + A_1 + A_2; \\ -727,4 = -1400,3 \cdot A_1 - 7790,6 \cdot A_2, \end{cases}$$



находим  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{cases} A_1 = 0,007 - A_2; \\ -727,4 = -9,8 + 1400,3 \cdot A_2 - 7790,6 \cdot A_2; \end{cases}$$

$$A_2 = 0,112; A_1 = -0,105.$$

Подставляем  $A_1$  и  $A_2$  в (11.1) и получаем ответ

$$i_1(t) = 0,173 - 0,105 \cdot e^{-1400,3t} + 0,112 \cdot e^{-7790,6t}. \quad (11.5)$$

Рассчитываем время окончания переходного процесса:

$$T = 4\tau_{\max} = \frac{4}{|P_{\min}|} = \frac{4}{1400,3} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальная постоянная времени электрической цепи.

Чтобы точно построить график  $i_1(t)$ , по формуле (11.5) нужно определить точку экстремума и точку перегиба. Для этого приравниваются к нулю первая производная  $\frac{di_1}{dt} = 0$  и вторая производная  $\frac{d^2i_1}{dt^2} = 0$  и, соответственно, находится время  $t_{\text{экстр}}$  и  $t_{\text{пер}}$ , а при расчете величин  $i_1(t_k)$  для различных значений времени  $t_k$  в обязательном порядке должны быть определены  $i_1(t_{\text{экстр}})$  и  $i_1(t_{\text{пер}})$ . Можно автоматизировать процесс построения  $i_1(t)$ , используя стандартное математическое обеспечение компьютера, и если при этом взять большое количество расчетных точек ( $n \approx 100 \dots 200$ ), то достаточная точность построения графика обеспечивается и без определения  $t_{\text{экстр}}$  и  $t_{\text{пер}}$ .

Построим график с помощью программы *Mathcad*, для чего сначала задаем интервал времени ( $t = 3 \cdot 10^{-3} \approx T$ ) и шаг  $\left(\frac{t}{100}\right) = 3 \cdot 10^{-5}$  в секундах  $t = 0,3 \cdot 10^{-5} \dots 3 \cdot 10^{-3}$ .

Затем вводим расчетную формулу (11.5) и выбираем в меню построение графика: **Graph Toolbar**, в нем – **X-Y Plot@**. Ось абсцисс графика обозначаем  $t$ , ось ординат –  $i_1$ . Результаты приведены на рисунке 11.4.





$$t := 0,00003 \dots 0,003$$

$$i_1(t) := 0,173 - 0,105 \cdot e^{-1400,3t} + 0,112 \cdot e^{-7790,6t}$$

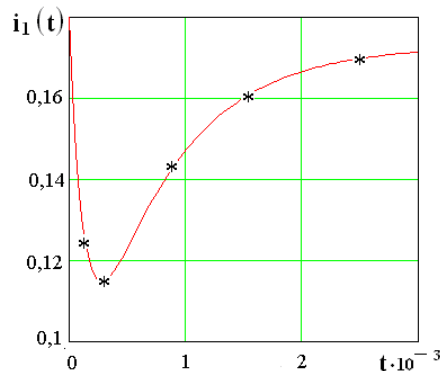


Рисунок 11.4 – График зависимости переходного тока  $i_1$  от времени при расчете классическим методом

### Самостоятельная работа

Решить классическим методом задачи на переходные процессы в цепях постоянного тока с несколькими источниками, рекомендованные преподавателем.

## 12 Расчёт переходных процессов классическим методом в цепях $R,L$ и $R,C$ при действии синусоидальной ЭДС

### 12.1 Основные теоретические положения

Рассмотрим процесс включения цепи  $RC$  под синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ .

Напряжение  $u_{C0}$  в установившемся режиме

$$u_{C0} = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A e^{-t/\tau}, \quad (12.1)$$

где  $I_m = \frac{U_m}{Z}$ ;

$$Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2};$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{-1}{R\omega C};$$

$$\tau = RC.$$

Если конденсатор не был заряжен, то  $u_C(0_-) = 0$ :



$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2} + A\right);$$

$$A = -\frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Напряжение на конденсаторе будет

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/\tau}. \quad (12.2)$$

Ток в переходном режиме

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{I_m}{R\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/\tau}. \quad (12.3)$$

Если конденсатор был предварительно заряжен, то

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A;$$

$$A = u_C(0) - \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Из (12.2) и (12.3) видно, что переходный процесс зависит от величины  $\psi$ .

Если  $\psi = \varphi \pm \pi/2$ , то переходный процесс не возникает и сразу же наступит установившийся режим, так как при этом в момент  $t = 0$  установившееся напряжение равно нулю. Таким образом, имеется полное соответствие между запасом энергии в конденсаторе до включения и запасом энергии, который должен быть в установившемся режиме в этот момент.

Если включение происходит при  $\psi = \varphi$ , то свободное напряжение  $u_{Cсв}$  будет наибольшим и в начальный момент имеет значение  $I_m X_C$ . Начальное значение свободного тока при этом  $-\frac{I_m}{\omega CR}$ . Если  $\omega CR > 1$ , т. е.  $R < X_C$ , то в начальный

момент времени происходит большой всплеск тока, намного превосходящий амплитуду  $I_m$ . Однако такой большой ток протекает незначительную часть периода, так как  $\omega CR = 2\pi \cdot \tau / T < 1$  и  $\tau < T$ .

Кривые изменения тока при включении конденсатора под переменное напряжение показаны на рисунке 12.1.

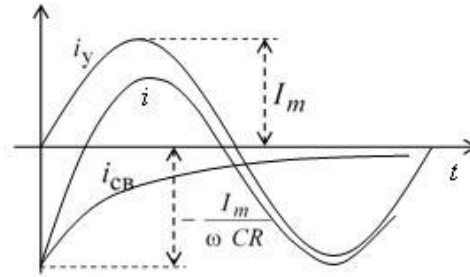


Рисунок 12.1 – Кривые изменения тока

Максимальное значение напряжения  $u_C$  в переходном процессе не превышает удвоенной амплитуды  $U_{Cm} = I_m / \omega C$  напряжения на конденсаторе в установившемся режиме.

Рассмотрим процесс при включении цепи под синусоидальное напряжение:  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ .

Ток установившегося режима

$$i_y = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Общий ток

$$i = i_o + i_{\tilde{n}\tilde{a}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-t/\tau},$$

где  $I_m = \frac{U_m}{Z}$ ;

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R};$$

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяем из начального условия  $i(0_-) = 0$ :

$$i(0_+) = i(0_-) = I_m \sin(\psi - \varphi) + A = 0.$$

Общий ток

$$i = i_o + i_{\tilde{n}\tilde{a}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (12.4)$$

Кривые изменения тока и напряжения изображены на рисунках 12.2 и 12.3.

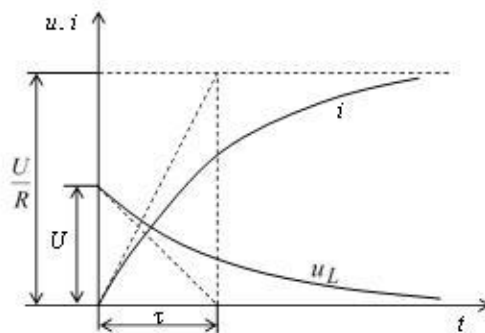


Рисунок 12.2 – Кривые изменения тока и напряжения

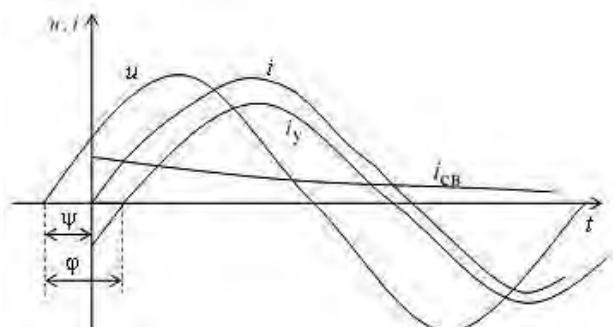


Рисунок 12.3 – Кривые изменения тока и напряжения при включении катушки на синусоидальное напряжение

Начальное значение свободного тока зависит от начальной фазы  $\psi$  напряжения. Наибольшее значение свободного тока, равное амплитуде  $I_m$  установившегося тока, имеет место, если  $\psi - \varphi = +\pi/2$ . Наибольшее значение результирующего тока не превышает двойной амплитуды установившегося тока. Свободный ток не возникает, и сразу наступает установившийся режим при условии  $\psi = \varphi$ .

### ***Самостоятельная работа***

Расчёт переходных процессов классическим методом в цепях  $R,L$  и  $R,C$  при действии синусоидальной ЭДС по данным, заданным преподавателем [8].

## **13 Расчёт переходных процессов операторным методом**

### ***13.1 Основные положения операторного метода***

Сущность операторного метода заключается в том, что функция  $x(t)$  действительной переменной, называемая оригиналом, заменяется функцией  $X(p)$  комплексного переменного  $p = s + j \cdot \omega$ , называемой изображением. Для перехода от оригинала  $x(t)$  к изображению  $X(p)$  применяется прямое преобразование Лапласа:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt; \quad X(p) \equiv x(t). \quad (13.1)$$

Благодаря свойствам преобразования Лапласа интегродифференциальные уравнения, описывающие процессы в электрической цепи, преобразуются в алгебраические. При решении полученных алгебраических уравнений определяются изображения искомых величин, а затем при помощи обратного преобразования Фурье, специальных таблиц или формулы разложения – оригиналы, т. е. искомые функции времени.

Изображения искомых величин  $X(p)$  чаще всего получают расчётом операторной схемы замещения, составленной на основании исходной схемы заменой каждого из её элементов соответствующим операторным изображением (рисунок 13.1) с учетом независимых начальных условий для токов в индуктивностях  $i_L(0)$  и напряжений на емкостях  $u_C(0)$ , определяемых из расчета схемы до коммутации.

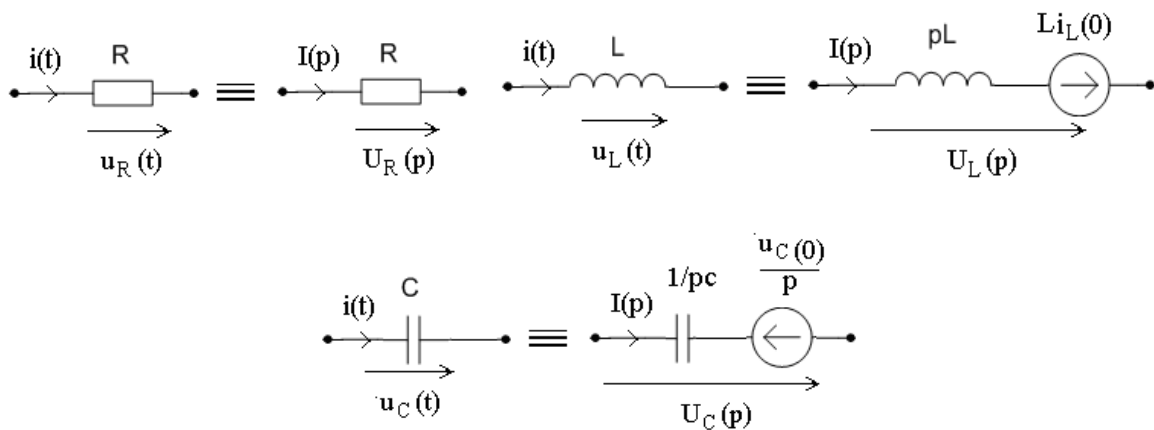


Рисунок 13.1 – Операторные изображения основных элементов схемы

Обычно операторное изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби:

$$X(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \quad (13.2)$$

Для перехода к оригиналу  $X(t)$  могут быть использованы таблицы изображений Лапласа или теорема разложения, которая в зависимости от вида корней знаменателя дроби (13.2) может иметь различные аналитические выражения. Если корни управления  $F_2(p) = 0$  вещественные и разные, то

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t}. \quad (13.3)$$

Если ненулевые корни  $F_2(p) = 0$  действительные и равные ( $p_1 = 0; p_2 = p_3$ ), то

$$X(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} + \left[ \frac{d}{dp} F_1(p) e^{pt} \right]_{p=p_2=p_3}. \quad (13.4)$$

Если ненулевые корни  $F_2(p) = 0$  комплексно-сопряженные, то

$$X(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} \right]. \quad (13.5)$$

Составляем операторную схему замещения с учетом ненулевых начальных условий (рисунок 13.2).

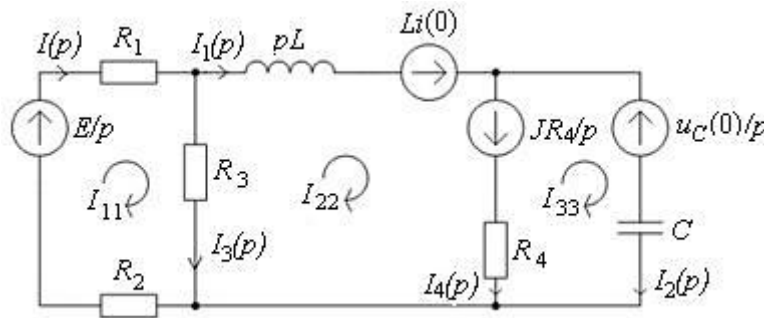


Рисунок 13.2 – Операторная схема замещения

Изображение искомого тока  $I_1(p)$  определяем методом контурных токов, при этом  $I_1(p) = I_{22}(p)$ .

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - I_{22}(p) \cdot R_3 = \frac{E}{p}; \\ -I_{11}(p) \cdot R_3 + I_{22}(p) \cdot (R_3 + p \cdot L + R_4) - I_{33}(p) \cdot R_4 = \frac{J \cdot R_4}{p} + L \cdot i_1(0); \\ -I_{22}(p) \cdot R_4 + I_{33}(p) \cdot \left( R_4 + \frac{1}{p \cdot C} \right) = -\frac{U_C(0)}{p} - \frac{J \cdot R_4}{p}. \end{cases}$$

Подставляем численные значения:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot 1100 - I_{22}(p) \cdot 1000 = \frac{120}{p}; \\ -I_{11}(p) \cdot 1000 + I_{22}(p) \cdot \left(2000 + \frac{p}{100}\right) - I_{33}(p) \cdot 1000 = \frac{80}{p} + \frac{0,18}{100}; \\ -I_{22}(p) \cdot 1000 + I_{33}(p) \cdot \left(1000 + \frac{10^5}{p}\right) = -\frac{180}{p}. \end{cases}$$

По методу Крамера  $I_{22}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ , где  $\Delta$  – определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1100 & -1000 & 0 \\ -1000 & 2000 + p/100 & -1000 \\ 0 & -1000 & 1000 + 10^5/p \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 1100 \cdot \left( \left(2000 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1000 + \frac{10^5}{p}\right) - 10^6 \right) + 1000 \cdot (-1000) \cdot \left(1000 + \frac{10^5}{p}\right) = \\ &= \frac{11 \cdot 10^3 \cdot p^2 + 1011 \cdot 10^5 \cdot p + 12 \cdot 10^{10}}{p}; \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1100 & 120/p & 0 \\ -1000 & 80/p + 0,18/100 & -1000 \\ 0 & -180/p & 1000 + 10^5/p \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 1100 \cdot \left( \left(\frac{80}{p} + \frac{0,18}{100}\right) \cdot \left(1000 + \frac{10^5}{p}\right) - \frac{180000}{p} \right) - \frac{120}{p} \cdot (-1000) \cdot \left(1000 + \frac{10^5}{p}\right) = \\ &= \frac{1980 \cdot p^2 + 10198000 \cdot p + 208 \cdot 10^8}{p^2}; \end{aligned}$$

$$I_1(p) = I_{22}(p) = \Delta_2 / \Delta = \frac{1980 \cdot p^2 + 10198000 \cdot p + 208 \cdot 10^8}{p \cdot (11000 \cdot p^2 + 1011 \cdot 10^5 \cdot p + 12 \cdot 10^{10})}.$$

Для перехода от изображения к оригиналу применим теорему разложения, обозначив числитель через  $F_1(p)$ , а знаменатель –  $F_2(p)$ :

$$I_1(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$



Тогда искомый ток

$$i_1(t) = \sum_{k=0}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}, \quad (13.6)$$

где  $p_k$  – корни знаменателя  $F_2(p) = 0$ .

Один корень нулевой:  $p_0 = 0$ , а ненулевые корни находим из уравнения

$$11 \cdot p^2 + 101100 \cdot p + 12 \cdot 10^7 = 0;$$

$$p_1 = -1400,3; \quad p_2 = -7790,6.$$

Тогда

$$i_1(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} + \frac{F_1(-1400,3)}{F_2'(-1400,3)} \cdot e^{-1400,3t} + \frac{F_1(-7790,6)}{F_2'(-7790,6)} \cdot e^{-7790,6t}. \quad (13.7)$$

Учитывая, что

$$F_1(p) = 1980 \cdot p^2 + 1019800 \cdot p + 208 \cdot 10^8;$$

$$F_2(p) = 11000 \cdot p^3 + 1011 \cdot 10^5 \cdot p^2 + 12 \cdot 10^{10} \cdot p;$$

$$F_2'(p) = 33000 \cdot p^2 + 2022 \cdot 10^5 \cdot p + 12 \cdot 10^{10},$$

имеем

$$\frac{F_1(-1400,3)}{F_2'(-1400,3)} = 0,105; \quad \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} = 0,173;$$

$$\frac{F_1(-7790,6)}{F_2'(-7790,6)} = 0,112.$$

Подставляем эти численные значения в (13.7) и получаем ответ, аналогичный полученному классическим методом.

$$i_1(t) = 0,173 - 0,105 \cdot e^{-1400,3t} + 0,112 \cdot e^{-7790,6t} \text{ А.} \quad (13.8)$$



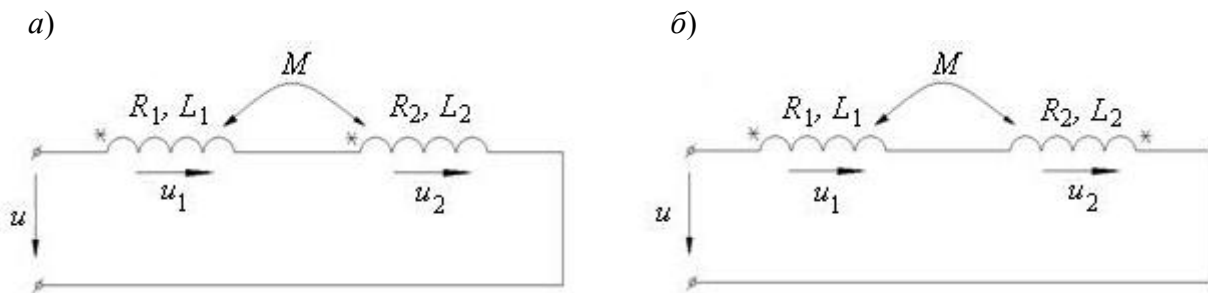


### Самостоятельная работа

Рассчитать переходные процессы операторным методом, предложенным преподавателем [8].

## 14 Расчет переходных процессов операторным методом в электрических цепях с взаимной индуктивностью

Две последовательно соединенные индуктивно связанные катушки могут быть включены согласно (рисунок 14.1, а) либо встречно (рисунок 14.1, б).



а – согласное включение; б – встречное включение

Рисунок 14.1 – Последовательное соединение индуктивно связанных катушек

Если протекающий по катушкам ток изменяется во времени, то согласно закону электромагнитной индукции напряжения на каждой из катушек

$$\begin{aligned} u_1 &= iR_1 + \frac{d\Psi_I}{dt}; \\ u_2 &= iR_2 + \frac{d\Psi_{II}}{dt}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

При синусоидально изменяющемся токе уравнения (14.1) можно записать в символической форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I} R_1 + j\omega \dot{I} (L_1 \pm M) = \dot{I} (R_1 + jX_{1\pm}); \\ \dot{U}_2 &= \dot{I} R_2 + j\omega \dot{I} (L_2 \pm M) = \dot{I} (R_2 + jX_{2\pm}); \\ \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{I} (R_1 + R_2) + j\omega (L_1 + L_2 \pm 2M) \dot{I} = \dot{I} (R_3 + jX_3) = \dot{I} \underline{Z}_3, \end{aligned} \quad (14.2)$$

где  $R_3$  и  $X_3$  – эквивалентные активное и реактивное сопротивления цепи;

$X_{1\pm}, X_{2\pm}$  – эквивалентные реактивные сопротивления первой и второй катушек:

$$R_3 = R_1 + R_2; \quad (14.3)$$

$$X_{\vartheta} = \omega(L_1 + L_2 \pm 2M); X_{1\vartheta} = \omega(L_1 \pm M); X_{2\vartheta} = \omega(L_2 \pm M). \quad (14.4)$$

В зависимостях (14.2)–(14.4) знак «+» относится к согласному включению, знак «-» – к встречному. Из них следует, что при согласном включении катушек индуктивная связь увеличивает, а при встречном включении уменьшает эквивалентные реактивные сопротивления каждой из катушек и всей цепи.

### 14.1 Примеры решения задач

**Задача 1.** В схеме (рисунок 14.2)  $u(t) = 170 \sin(314t + 30^\circ)$  В;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 5$  Ом;  $R_3 = 15$  Ом;  $L_1 = 30$  мГн;  $L_2 = 50$  мГн;  $M = 25$  мГн. Найти  $i_1(t)$  с помощью формулы разложения.

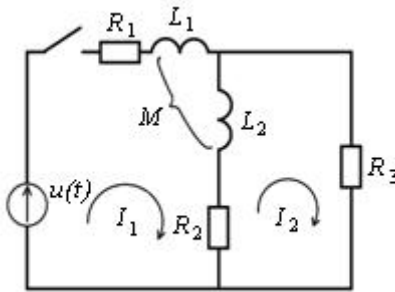


Рисунок 14.2 – Схема для расчета переходных процессов операторным методом в цепях с взаимной индуктивностью

#### Решение

Составим уравнения по методу контурных токов:

$$I_1(p) \cdot [R_1 + R_2 + p(L_1 + L_2 + 2M)] - I_2(p) \cdot [R_2 + p(L_2 + M)] = U(p);$$

$$-I_1(p)[R_2 + p(L_2 + M)] + I_2(p)[R_2 + R_3 + pL_2] = 0.$$

Совместное их решение дает

$$I_1(p) = \frac{U_m(20 + 0,05p)}{(p - j\omega)(0,000875p^2 + 2,6p + 275)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Корни уравнения  $M(p) = 0$ :

$$p_1 = 314j, \quad p_2 = -2860, \quad p_3 = 114 \text{ с}^{-1};$$

$$M'(p) = 0,000875p^2 + 2,6p + 275 + (p - j\omega)(0,00175p + 2,6);$$



$$N(p_1) = 4301 e^{j68^\circ 20'}; N(p_2) = 123 \cdot 170 e^{j210^\circ};$$

$$N(p_3) = 14,29 \cdot 170 e^{j30^\circ}; M'(p_1) = 838 e^{j77^\circ}; M'(p_2) = 6930 e^{j6^\circ 16'};$$

$$M'(p_3) = 806 e^{-j110^\circ 40'}.$$

Ток

$$i(t) = I_m \left\{ \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{N(p_3)}{M'(p_3)} e^{p_3 t} \right\} = I_m \left\{ 5,13 e^{j(\omega t - 8^\circ 40')} + \right. \\ \left. + 3,03 e^{j203^\circ 44'} e^{-2860t} + 3,01 e^{j140^\circ} e^{-114t} \right\} = 5,13 \sin(\omega t - 8^\circ 40') - 1,16 e^{-2860t} + 1,97 e^{-114t} \text{ A}.$$

### Самостоятельная работа

Рассчитать переходные процессы операторным методом в электрических цепях с взаимной индуктивностью, рекомендованные преподавателем [8].

## 15 Расчет характеристических параметров схем замещения и частотных характеристик четырехполюсников

### 15.1 Основные теоретические положения

Источник и приемник электрической энергии обычно соединяются через промежуточную цепь, которая может быть сколь угодно сложной. Если эта цепь имеет два входных и два выходных зажима, то ее называют четырехполюсником (применение теории четырехполюсников позволяет значительно упростить и облегчить расчет и анализ многих электрических и радиотехнических схем). На схемах четырехполюсник обычно изображается в виде прямоугольника с четырьмя выводами (рисунок 15.1). Четырехполюсники разделяются на следующие основные виды: линейные, нелинейные; пассивные, активные; симметричные, несимметричные.

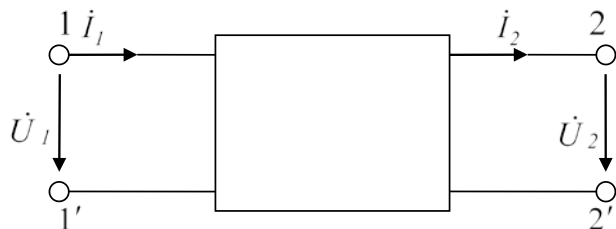


Рисунок 15.1 – Четырехполюсник

В работе исследуется линейный пассивный четырехполюсник, т. е. такой, который не содержит в себе нелинейных элементов и источников энергии.

Энергия поступает только через входные зажимы 1–1' и передается дальше через выходные зажимы 2–2' или наоборот.

Режим работы четырехполюсника полностью определен, если известны напряжения  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$  и токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ . Обычно задача ставится так: две из четырех названных величин известны и их можно рассматривать как заданные воздействия на цепь, а требуется определить реакцию на эти воздействия, т. е. две остальные величины. В зависимости от конкретных условий задачи применяют различные формы записи уравнений четырехполюсника. Наиболее часто применяются уравнения четырехполюсника в А-форме (или А-параметрах):

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,\end{aligned}\tag{15.1}$$

где  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  – напряжение и ток на входе четырехполюсника;

$\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  – напряжение и ток на выходе четырехполюсника.

Коэффициенты  $A, B, C, D$  называются постоянными четырехполюсника или параметрами передачи. В общем случае это комплексные величины.

Между постоянными четырехполюсника существует связь

$$AD - BC = 1.\tag{15.2}$$

Уравнение (15.2) показывает, что только три параметра четырехполюсника являются независимыми.

При питании четырехполюсника со стороны вторичных зажимов направление протекания токов изменяется и, следовательно, в уравнениях (15.1) необходимо изменить знаки у токов и решить их относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ . Тогда получим уравнения четырехполюсника в В-форме:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 &= C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1.\end{aligned}\tag{15.3}$$

Четырехполюсник называют симметричным, если при рассмотрении его со стороны выходных зажимов он представляет собой такую же цепь, как и при рассмотрении его со стороны входных зажимов. Из (15.1) и (15.3) очевидно, что при этом должно выполняться условие

$$A = D.\tag{15.4}$$



Для пассивного симметричного четырехполюсника соотношение (15.2) приобретает вид:

$$A^2 - BC = 1, \quad (15.5)$$

т. е. только два параметра являются независимыми.

Во всех уравнениях постоянные  $A$  и  $D$  – безразмерные величины,  $B$  – имеют размерность сопротивления, а  $C$  – размерность проводимости.

Параметры линейного четырехполюсника можно определить из опытов холостого хода и короткого замыкания, т. к. они не зависят от величины токов и напряжений; следовательно, их можно находить при любом значении напряжений и токов, в частности, при напряжениях, равных нулю (закороченных зажимах), и при токах, равных нулю (разомкнутых зажимах).

В режиме холостого хода, при разомкнутых выходных зажимах 2–2', ток  $\dot{I}_2 = 0$  и уравнения четырехполюсника примут вид:

$$\dot{U}_{10} = A\dot{U}_2; \dot{I}_{10} = C\dot{U}_2. \quad (15.6)$$

При коротком замыкании зажимов 2–2'  $\dot{U}_2 = 0$ . Тогда

$$\dot{U}_{1k} = B\dot{I}_2; \dot{I}_{1k} = D\dot{I}_2. \quad (15.7)$$

На практике  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  определяют через входные сопротивления четырехполюсника в режимах холостого хода и короткого замыкания при питании как с первичной, так и со вторичной стороны. Действительно, из уравнений (15.6) и (15.7) следует, что

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{A}{C}; \quad (15.8)$$

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{B}{D}. \quad (15.9)$$

При питании с обратной стороны в режиме холостого хода, т. е. когда разомкнуты зажимы 1–1', ток  $\dot{I}_{10} = 0$ . Тогда согласно (15.3)

$$\dot{U}_{20} = D\dot{U}_1; \dot{I}_{20} = C\dot{U}_{10}. \quad (15.10)$$

Откуда



$$\underline{Z}_{20} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{I}_{20}} = \frac{D}{C}. \quad (15.11)$$

В режиме короткого замыкания, когда зажимы 1–1' замкнуты и  $\dot{U}_1 = 0$ , из (15.3) получим

$$\dot{U}_{2k} = B\dot{I}_1; \dot{I}_{2k} = A\dot{U}_1. \quad (15.12)$$

Тогда

$$\underline{Z}_{2k} = \frac{\dot{U}_{2k}}{\dot{I}_{2k}} = \frac{B}{A}. \quad (15.13)$$

Уравнения (15.8)–(15.13) не являются независимыми, т. к.

$$\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20}} = \frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1k}} = \frac{A}{D}. \quad (15.14)$$

При определении постоянных  $A, B, C, D$  необходимо учесть, что

$$AD - BC = 1. \quad (15.15)$$

В результате получим

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1k}}{(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k})\underline{Z}_{2k}}}; B = A\underline{Z}_{2k}; C = \frac{A}{\underline{Z}_{10}}; D = A\left(\frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{1k}}\right). \quad (15.16)$$

Каждый четырехполюсник характеризуется тремя независимыми постоянными, поэтому для любого четырехполюсника можно составить две эквивалентные схемы замещения, которые представлены на рисунке 15.2. В соответствии со своей конфигурацией они получили название Т-образной и П-образной соответственно. Связь между постоянными четырехполюсника и параметрами схем замещения имеет следующий вид:

– для Т-образной схемы

$$A = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0; B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0; C = \underline{Y}_0; D = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0; \quad (15.17)$$

– для П-образной схемы

$$A = 1 + \underline{Z}_0\underline{Y}_2; B = \underline{Z}_0; C = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0; D = 1 + \underline{Y}_1\underline{Z}_0. \quad (15.18)$$



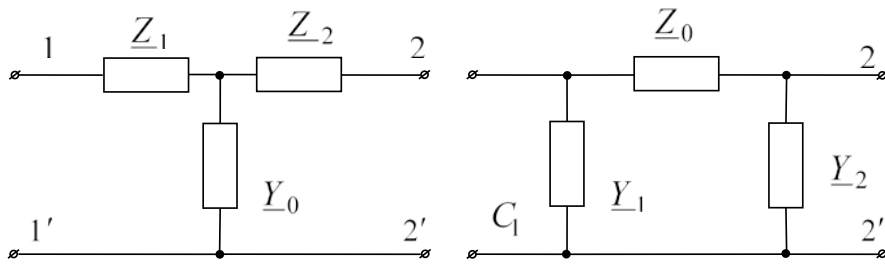


Рисунок 15.2 – Т-образная и П-образная схемы замещения

Из всех сопротивлений  $\underline{Z}_{BX1} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$  и  $\underline{Z}_{BX2} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$  два сопротивления  $\underline{Z}_{1C}$  и  $\underline{Z}_{2C}$  выбраны таким образом, что входное сопротивление со стороны зажимов 1–1' будет равно  $\underline{Z}_{1C}$ , если четырехполюсник нагружен со стороны выхода сопротивлением  $\underline{Z}_{2C}$ , и входное сопротивление со стороны зажимов 2–2' будет равно  $\underline{Z}_{2C}$ , если со стороны входа четырехполюсник нагрузить сопротивлением  $\underline{Z}_{1C}$ . Такие сопротивления называются характеристическими сопротивлениями несимметричного четырехполюсника. Они определяются как

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{10} &= \sqrt{AB/CD} = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1k}}; \\ \underline{Z}_{20} &= \sqrt{DB/CA} = \sqrt{\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{2k}}.\end{aligned}\quad (15.19)$$

У симметричного четырехполюсника  $A = D$  и

$$\underline{Z}_{1C} = \underline{Z}_{2C} = \underline{Z}_C = \sqrt{B/C} = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1k}} = \sqrt{\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{2k}}.$$

При этом отношения напряжения к току на входе и выходе четырехполюсника будут одинаковыми:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_C.\quad (15.20)$$

Сопротивление  $\underline{Z}_C$  симметричного четырехполюсника часто называют повторным. Режим работы четырехполюсника при  $\underline{Z}_C = \underline{Z}_H$  называют согласованным.

Третий характеристический параметр четырехполюсника

$$g = \frac{1}{2} \ln (\dot{U}_1 \dot{I}_1 / \dot{U}_2 \dot{I}_2)\quad (15.21)$$

называется мерой передачи (или постоянной передачи).

При наличии согласования  $g$  выражается через А-параметры как



$$g = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}), \quad (15.22)$$

а отношение токов и напряжений на входе и выходе

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = K_T e^g; \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = (1/K_T) e^g,$$

где  $K_T$  – коэффициент трансформации четырехполюсника,  $K_T = \sqrt{A/D}$ .

Для симметричного четырехполюсника  $A = D$  и  $K_T = 1$ .

### 15.2 Примеры решения задач

**Задача 1.** Опытным путем было найдено, что  $Z_{1x} = 7,815e^{j51^\circ 12'}$  Ом;  $Z_{1k} = 12,5e^{j66^\circ 23'}$  Ом;  $Z_{2k} = 3,33e^{j27^\circ 33'}$  Ом. Определить коэффициенты  $A, B, C, D$  четырехполюсника.

*Решение*

Найдем  $Z_{1x} - Z_{1k} = 5 - 6j - 12j - 5 = -18j$ .

По формуле подсчитаем:

$$A = \sqrt{\frac{7,18e^{-j51^\circ 12'} \cdot 12,5e^{j66^\circ 23'}}{3,33e^{j27^\circ 33'} \cdot 18e^{-j90^\circ}}} = 1,28e^{j39^\circ 40'};$$

$$C = A / Z_{1x} = 1,28e^{j39^\circ 40'} / 7,815e^{-j51^\circ 21'} \approx 0,166e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$B = A / Z_{2k} = 4,26e^{j67^\circ} \text{ Ом}; \quad D = B / Z_{1k} = 0,34.$$

*Расчет частотных характеристик четырехполюсников*

Связь коэффициентов четырехполюсника с параметрами элементов Т-образной схемы замещения определяется соотношениями

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3; \quad \underline{C} = 1 / \underline{Z}_3; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3.$$

Или конкретно для фильтра на рисунке 15.3, а

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{j\omega L}{1 / j\omega C} = 1 - \omega^2 LC; \quad (15.23)$$





$$\underline{B} = 2j\omega L + \frac{(j\omega L)^2}{1/j\omega C} = 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C; \quad (15.24)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{j\omega C}. \quad (15.25)$$

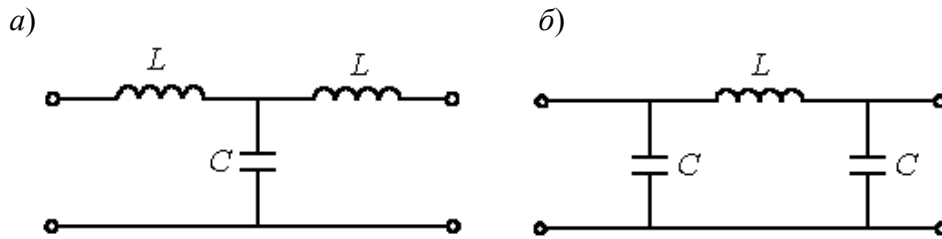


Рисунок 15.3 – Т-образный (а) и П-образный (б) фильтры

Границы полосы пропускания определяются неравенством

$$-1 \leq 1 - \omega^2 LC \leq 1,$$

которому удовлетворяют частоты, лежащие в диапазоне

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}}. \quad (15.26)$$

Для характеристического сопротивления фильтра на основании (15.24) и (15.25) имеем

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{2j\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - \omega^2 LC)}. \quad (15.27)$$

Анализ соотношения (15.27) показывает, что с ростом частоты  $\omega$  в пределах, определяемых неравенством (15.26), характеристическое сопротивление фильтра уменьшается до нуля, оставаясь активным. Поскольку при нагрузке фильтра сопротивлением, равным характеристическому, его входное сопротивление также будет равно  $\underline{Z}_C$ , то вследствие вещественности  $\underline{Z}_C$  можно сделать заключение, что фильтр работает в режиме резонанса, что было отмечено ранее. При частотах, больших  $\sqrt{2/(LC)}$ , как это следует из (15.27), характеристическое сопротивление приобретает индуктивный характер.

На рисунке 15.4 приведены качественные зависимости  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  и  $Z_C(\omega)$ .

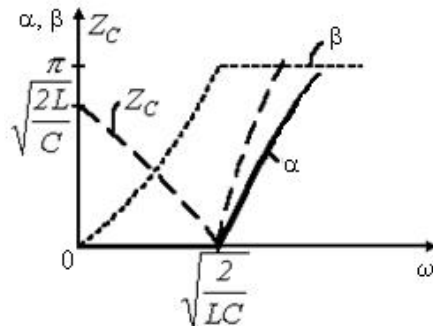
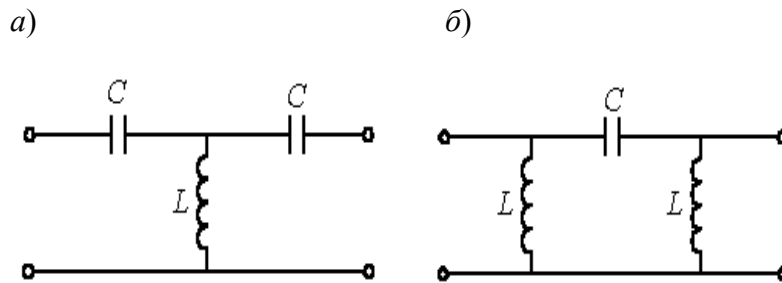


Рисунок 15.4 – Зависимости  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  и  $Z_c(\omega)$

Другим вариантом простейшего низкочастотного фильтра может служить четырехполосник по схеме на рисунке 15.3, б.

Схема простейшего высокочастотного фильтра приведена на рисунке 15.5.



а – Т-образный фильтр; б – П-образный фильтр

Рисунок 15.5 – Простейший высокочастотный фильтр

Для данного фильтра коэффициенты четырехполосника определяются выражениями

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{1/j\omega C}{j\omega L} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}; \quad (15.28)$$

$$\underline{B} = \frac{2}{j\omega C} + \frac{(1/j\omega C)^2}{j\omega L} = \frac{1}{j\omega C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right); \quad (15.29)$$

$$\underline{C} = \frac{1}{j\omega L}. \quad (15.30)$$

Как и для вышерассмотренного случая,  $A$  – вещественная переменная. Поэтому на основании (15.28)

$$-1 \leq 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \leq 1.$$

Характеристическое сопротивление фильтра

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)} = \sqrt{\frac{L}{C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}, \quad (15.31)$$

изменяясь в пределах от нуля до  $\sqrt{2L/C}$  с ростом частоты, остается вещественным. Это соответствует, как уже отмечалось, работе фильтра, нагруженного характеристическим сопротивлением, в резонансном режиме. Поскольку такое согласование фильтра с нагрузкой во всей полосе пропускания практически невозможно, реально фильтр работает с  $\alpha = 0$  в ограниченном диапазоне частот.

Качественный вид зависимостей  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  и  $Z_c(\omega)$  для высокочастотного фильтра представлен на рисунке 15.6.

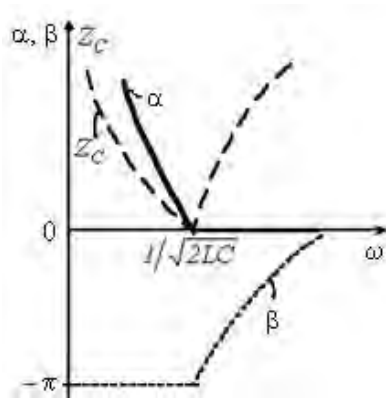


Рисунок 15.6 – Зависимости  $|\alpha|$ ,  $|\beta|$  и  $Z_c(\omega)$  для высокочастотного фильтра

**Задача 2.** В схеме (рисунок 15.7, а)  $L = 10$  мГн;  $C = 10$  мкФ. Определить  $b = f(\omega)$  в полосе пропускания,  $a = f(\omega)$  в полосе затухания. Построить векторную диаграмму при  $\omega = 2000$  рад/с и токе  $I_2 = 0,2$  А при согласованной нагрузке. Вывести формулу расчета фильтра (рисунок 15.7, а) при работе его в несогласованном режиме.

*Решение*

Частота среза  $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}} = 4470$  рад/с. В полосе пропускания  $a = 0$ ,  $b = \arccos A = \arccos(1 - \omega^2 LC)$ . При  $\omega = 2000$  рад/с  $b = 53^\circ 15'$ ,  $\omega L = 20$ .

$$\frac{1}{\omega C} = 50 \text{ Ом}, \quad Z_i = Z_n \sqrt{\frac{2L}{C} - \omega^2 L^2} = 40 \text{ Ом}.$$

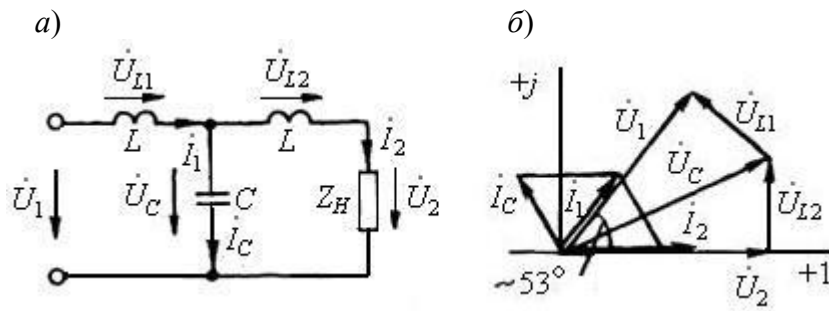


Рисунок 15.7 – Схема для задачи 2

Векторная диаграмма изображена на рисунке 15.7, б.  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_L = 8$  В,  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^a e^{jb} = 8e^{j53^\circ 15'}$  В. В полосе затухания при согласованной нагрузке  $a = \text{Arch}(\omega^2 LC - 1)$ . Если  $Z_L$  будет несогласована с  $Z_C$ , то расчет фильтра в полосе пропускания и в полосе затухания можно проводить, используя соотношения  $\dot{U}_1 = \dot{U}_C + \dot{I}_1 j\omega L$ ,  $\dot{U}_C = \dot{U}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_L} j\omega L$ ,

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_2}{Z_L} + \frac{\dot{U}_2}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{j\omega L}{Z_L} \frac{1}{j\omega C} \dot{U}_2; \dot{U}_1 = m \dot{U}_2,$$

где

$$m = 1 + \frac{2j\omega L}{Z_L} + \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{(j\omega L)^2}{Z_L \frac{1}{j\omega C}}.$$

Если взять  $\omega = 2\omega_2 = 8940$  рад/с (работа после затухания) и  $Z_L = 40$  Ом (вместо  $j 77,5$  Ом исходя из условия согласованности), то  $m = 12,55 e^{j118^\circ 40'}$ , т. е. затухание будет  $\ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln 12,55 = 2,53$  Нп (вместо 2,64 Нп при согласованной нагрузке).

Аналогичные формулы для несогласованного режима можно вывести для любого другого фильтра.

### Самостоятельная работа

Рассчитать характеристические параметры схем замещения и частотные характеристики четырехполюсников, заданные преподавателем [3–8].



## 16 Расчет нелинейных электрических цепей при постоянных и синусоидальных воздействиях

### 16.1 Основные теоретические положения

Свойства нелинейных элементов описывают с помощью вольт-амперных, вебер-амперных и кулон-вольтных характеристик (рисунок 16.1).

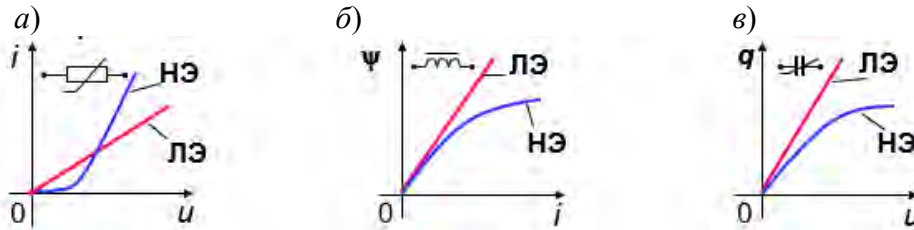


Рисунок 16.1 – Вольт-амперная характеристика (а), вебер-амперная характеристика (б), кулон-вольтная характеристика (в)

#### 16.1.1 Статические и динамические характеристики.

Характеристики всех нелинейных элементов получают экспериментально.

Статические характеристики получают на постоянном токе (с помощью реостата, амперметра и вольтметра).

Динамические характеристики получают на переменном токе сразу на экран осциллографа.

У тех элементов, нелинейность которых не связана с тепловыми процессами, статические и динамические характеристики практически совпадают.

У элементов, нелинейность которых связана с тепловыми процессами, динамические характеристики могут значительно отличаться от статических.

Статические и дифференциальные параметры определяются из статических характеристик.

Заметим, что у линейных элементов статические и дифференциальные параметры совпадают.

#### 16.1.2 Понятие о методах расчета нелинейных электрических цепей.

Нелинейные цепи описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Общих методов расчета таких уравнений не существует. Поэтому пользуются различными частными и методами – графическими и аналитическими.

При графических методах расчета искомое решение получают в результате графических построений.

Для аналитического расчета необходимо иметь математические выражения заданных нелинейных характеристик. Это можно сделать только приближенно.

Замена реальной характеристики ее приближенным аналитическим выражением называется аппроксимацией этой характеристики.

Наиболее общим способом аналитической аппроксимации является представление реальной характеристики в виде степенного ряда (ряд Маклорена):

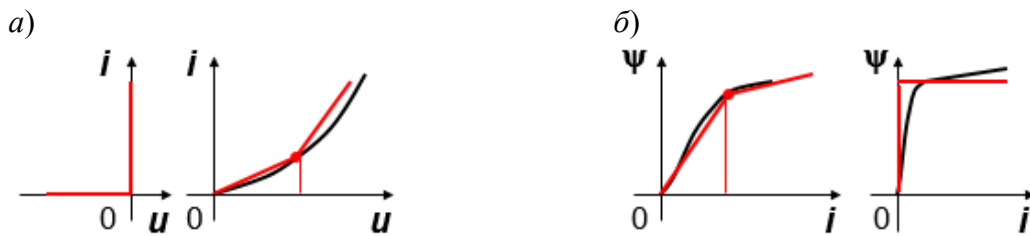
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots,$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  – постоянные коэффициенты.

Чем больше членов ряда, тем точнее аппроксимация, но тем сложнее расчет. На практике обычно ограничиваются одним или двумя членами ряда, например:

$$y = a_2x^2; y = a_3x^3; y = a_1x + a_2x^2; y = a_1x + a_3x^3.$$

Иногда реальную характеристику заменяют отрезками прямых – это кусочно-линейная аппроксимация (рисунок 16.2).



*a* – полупроводниковый диод; *б* – катушка индуктивности

Рисунок 16.2 – Кусочно-линейная аппроксимация

## 16.2 Примеры решения задач

16.2.1 Расчет нелинейных цепей постоянного тока графическим методом.

**Задача 1.** Задана цепь с последовательным соединением двух нелинейных сопротивлений (рисунок 16.3).  $U = \text{const}$ ;  $U_1(I)$ ;  $U_2(I)$ . Определить:  $I$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ .

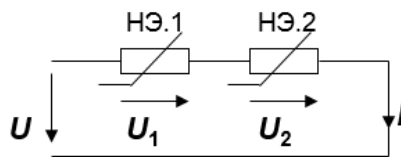


Рисунок 16.3 – Цепь с последовательным соединением двух нелинейных сопротивлений

*Решение*

По второму закону Кирхгофа  $U = U_1 + U_2$  при любом  $I$ .

Цель расчета – найти суммарную ВАХ цепи  $U(I)$ .

Задачу решаем графически (рисунок 16.4).

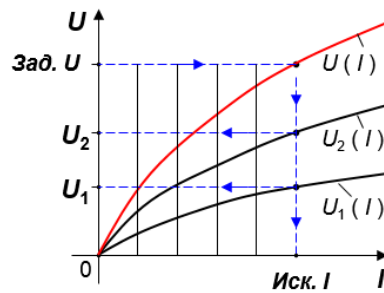


Рисунок 16.4 – Зависимость напряжений от тока для цепи с последовательным соединением двух нелинейных сопротивлений

**Задача 2.** Задана цепь с параллельным соединением двух нелинейных сопротивлений (рисунок 16.5).  $U = \text{const}$ ;  $U(I_1)$ ;  $U(I_2)$ . Определить:  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ .

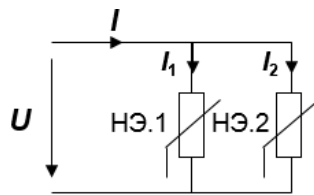


Рисунок 16.5 – Цепь с параллельным соединением двух нелинейных сопротивлений для задачи 2

*Решение*

По первому закону Кирхгофа  $I = I_1 + I_2$  при любом  $U$ .

Цель расчета – найти суммарную ВАХ цепи  $U(I)$ .

Задачу решаем графически (рисунок 16.6).

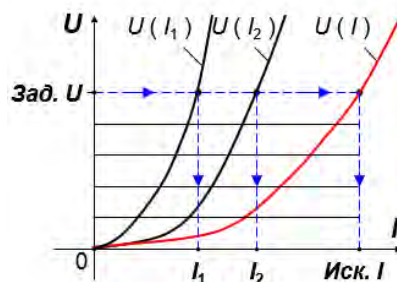


Рисунок 16.6 – Зависимость напряжений от тока для цепи с параллельным соединением двух нелинейных сопротивлений

**Задача 3.** Задана цепь со смешанным соединением трех нелинейных сопротивлений. Определить  $U(I_1)$ ,  $U(I)$ .

*Решение*

При последовательно-параллельном соединении (рисунок 16.7).

По первому закону Кирхгофа  $I_1 = I_2 + I_3$ .

По второму закону Кирхгофа  $U = U_1 + U_{23}$ .

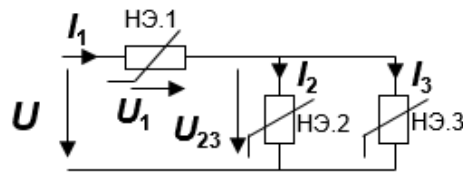


Рисунок 16.7 – Цепь с последовательно-параллельным соединением трех нелинейных сопротивлений для задачи 3

Порядок нахождения  $U(I_1)$ :

1) находим характеристику  $U(I)$ :

$$U_{23}(I_1) = U_2(I_2) + U_{23}(I_3);$$

2) находим общую характеристику:

$$U(I_1) = U_1(I_1) + U_{23}(I_1).$$

Для параллельно-последовательного соединения (рисунок 16.8).

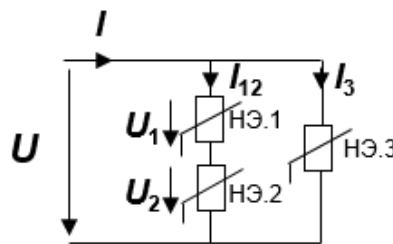


Рисунок 16.8 – Цепь с параллельно-последовательным соединением трех нелинейных сопротивлений для задачи 3

По первому закону Кирхгофа  $I = I_{12} + I_3$ .

По второму закону Кирхгофа  $U = U_1 + U_2$ .

Порядок нахождения  $U(I)$ :

1) находим характеристику:  $U(I_{12}) = U_1(I_{12}) + U_2(I_{12})$ ;

2) находим общую характеристику:  $U(I) = U(I_{12}) + U(I_3)$ .

### 16.2.2 Аналитический расчет нелинейной цепи постоянного тока.

**Задача 4.** Задана цепь с последовательным соединением двух нелинейных сопротивлений (рисунок 16.9) с известными  $U$ ,  $R$ ,  $U_{НЭ}(I) = \alpha I + \beta I^2$ . Определить ток цепи  $I$ .



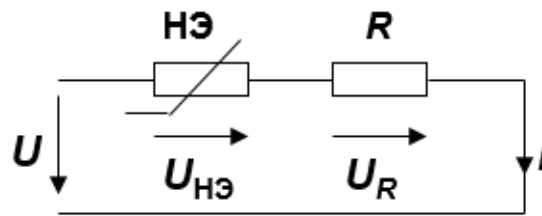


Рисунок 16.9 – Цепь с последовательным соединением двух нелинейных сопротивлений

### Решение

По второму закону Кирхгофа  $U = U_{НЭ} + IR$ .

Тогда  $U = (\alpha I + \beta I^2) + IR$  или  $\beta I^2 + (\alpha + R)I - U = 0$ .

Это квадратное уравнение относительно тока  $I$  вида  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Оно имеет два корня  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Искомый ток есть положительный вещественный корень этого уравнения.

**Задача 5.** Произвести аналитический расчет цепи переменного тока (рисунок 16.10) с инерционными нелинейными элементами (ИНЭ) при заданных  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $U_R = \alpha I^2$ , где  $\alpha$  – постоянное число. Определить ток цепи  $i$ .

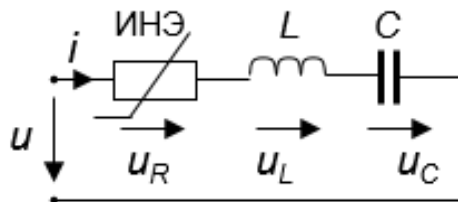


Рисунок 16.10 – Цепь переменного тока с инерционными нелинейными элементами для задачи 5

### Решение

К инерционным элементам применимы все методы расчета линейных цепей, кроме метода наложения. Воспользуемся символическим методом:

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}; \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}; \dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}; \dot{U}_R = (\alpha I)\dot{I},$$

$\alpha I$  имеет размерность  $R$ .

По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} \left( \alpha I + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) = \dot{I} \left[ \alpha I + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{I} [\alpha I + jX] = \dot{I}Z.$$

Формулу закона Ома  $\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z}$  применить нельзя, так как  $\underline{Z} = f(I)$ .

Для определения тока  $i$  используем другой подход.

Запишем данное уравнение в показательной форме:

$$Ue^{j\psi_u} = Ie^{j\psi_i} \sqrt{(\alpha I)^2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\alpha I}}.$$

Известно, что два комплексных числа равны между собой, если равны их модули и равны их аргументы.

$$\text{Уравнение для модулей } U = I \sqrt{(\alpha I)^2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

$$\text{Уравнение для аргументов } \psi_u = \psi_i + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\alpha I}.$$

Из уравнения для модулей находим  $I$  как положительный вещественный корень биквадратного уравнения  $\alpha^2 I^4 + (\omega L - 1/\omega C)^2 I^2 - U = 0$ .

$$\text{Из уравнения для аргументов находим } \psi_i = \psi_u - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\alpha I}.$$

Тогда искомым ток  $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i)$ .

Безынерционными называют элементы, нелинейность которых не связана с тепловыми процессами (полупроводниковые приборы, катушки на ферромагнитных сердечниках). Их ВАХ выражают зависимости между мгновенными значениями тока и напряжения.

**Задача 6.** Задана цепь переменного тока с диодом,  $u = U_m \sin \omega t$ ,  $i(u)$ . Определить графически  $i(t)$ .

*Решение*

Если к безынерционному нелинейному элементу приложить синусоидальное напряжение, ток в нем будет несинусоидальным и будет содержать высшие гармоники (рисунок 16.11).

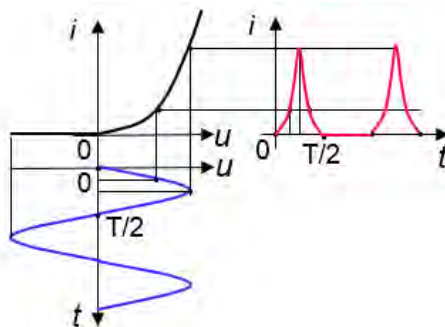


Рисунок 16.11 – Зависимости выходного сигнала от входного для задачи 6

**Задача 7.** Задана цепь переменного тока с катушкой на стальном сердечнике (рисунок 16.12),  $u = U_m \sin \omega t$ ,  $i(u)$ . Определить  $i(t)$  графически.

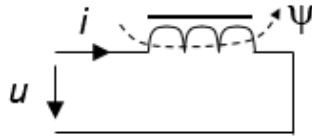


Рисунок 16.12 – Цепь переменного тока с катушкой на стальном сердечнике

*Решение*

$$U = IX_L = I\omega L = \omega LI = \omega\Psi.$$

Если к безынерционному нелинейному элементу приложить синусоидальное напряжение, ток в нем будет несинусоидальным и будет содержать высшие гармоники (рисунок 16.13).

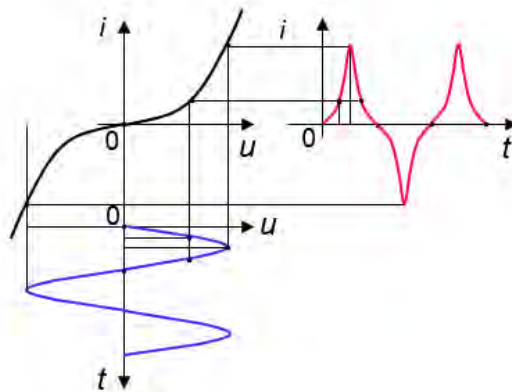


Рисунок 16.13 – Зависимости выходного сигнала от входного для задачи 7

### **Самостоятельная работа**

Решить самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем [8].

## **17 Расчёт нелинейных цепей при синусоидальных воздействиях. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях**

### **17.1 Основные теоретические положения**

Пусть необходимо рассчитать периодический процесс в нелинейной электрической цепи по характеристикам для мгновенных значений и построить графики изменения требуемых величин во времени.

Электрическая цепь (рисунок 17.1, а) питается от источника синусоидального тока  $i_1 = 0,1 \cdot \sin 10^4 t$  А. Характеристика нелинейной индуктивности

$\psi = f(i)$  приведена на рисунке 17.1, б;  $\psi = 0,853 \cdot 10^{-3}$  Вб,  $R = 100$  Ом;  
 $X_c = \frac{1}{\omega \cdot C} = 100$  Ом.

Рассчитать значения и построить графики  $u_c$ ,  $i(t)$ ,  $u_{cd}$ ,  $u_{ab}$  в функции  $\omega t$ .

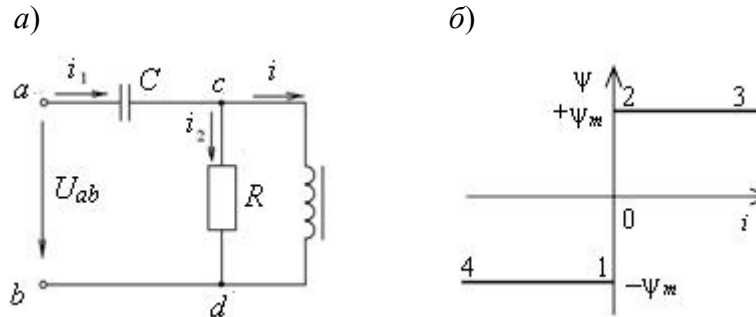


Рисунок 17.1 – Схема электрической цепи и характеристика нелинейной индуктивности

Составляют уравнения состояния цепи по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i + i_2;$$

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cd} = \frac{1}{C} \int i_1 dt + i_2 R; \quad (17.1)$$

$$U_{cd} = i_2 R = \frac{d\psi}{dt}.$$

К началу положительного полупериода  $\psi = -\psi_m$ , а в интервале времени от  $\omega t = 0$  до  $\omega t = \omega t_1$  (назовем его первым) ток  $i = 0$  (см. рисунок 17.1, б).

В этом интервале изображающая точка перемещается от 1 к 2. Следовательно,

$$i_2 = i_1 = 0,1 \sin 10^4 t \text{ А.} \quad (17.2)$$

Перемагничивание происходит под действием напряжения

$$U_{cd} = i_2 R = \frac{d\psi}{dt} = 100 \cdot 0,1 \sin 10^4 t = 10 \sin 10^4 t \text{ В.} \quad (17.3)$$

$$\begin{aligned} U_{ac} = U_c &= \frac{1}{C} \int i_1 dt = \frac{1}{C} \int 0,1 \sin 10^4 dt = -\frac{0,1}{10^4 C} \cdot \cos 10^4 t = \\ &= -0,1 \cdot 100 \cos 10^4 t = -10 \cos 10^4 t; \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$d\psi = U_{cd} dt = 10 \sin 10^4 t dt.$$

$$\psi = \int U_{cd} dt + C = -\frac{10}{10^4} \cdot \cos 10^4 t + C = -10^{-3} \cos 10^4 t + C, \quad (17.5)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Найдем постоянную интегрирования  $C$  и значение  $\omega t_1$  ( $t_1$  – время окончания перемагничивания).

Для определения  $C$  запишем уравнение (17.5) при  $\omega t = 0$ . При  $\omega t = 0$   $\psi = -\psi_m$ , поэтому  $-\psi_m = 10^{-3} + C$ . Отсюда  $C = -\psi_m + 10^{-3}$ . Тогда уравнение (17.5) имеет вид:

$$\psi = -10^{-3} \cos 10^4 t - \psi_m + 10^{-3}. \quad (17.6)$$

Для определения  $\omega t_1$  воспользуемся уравнением (17.6), учитывая, что при  $\omega t = \omega t_1$   $\psi = \psi_m$ . Получим

$$\psi_m = -10^{-3} \cos 10^4 t_1 - \psi_m + 10^{-3};$$

$$2\psi_m = 10^{-3}(1 - \cos 10^4 t_1); \quad \cos 10^4 t_1 = \cos \omega t_1 = -0,706; \quad \omega t_1 = 135^\circ.$$

Во втором интервале времени от  $\omega t = \omega t_1$  до  $\omega t = \pi$ , когда перемагничивание закончится (изображающая точка перемещается от 2 к 3), потокосцепление  $\psi$  остается постоянным и равным  $+\psi_m$ . В этом интервале  $U_{cd} = \frac{d\psi}{dt} = 0$  упадет до нуля,  $i_2$  станет равным нулю, а  $i = i_1 = 0,1 \sin 10^4 t$  А. Напряжение  $U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} = U_{ac}$ .

Графики искомых величин в функции  $\omega t$  приведены на рисунке 17.2.

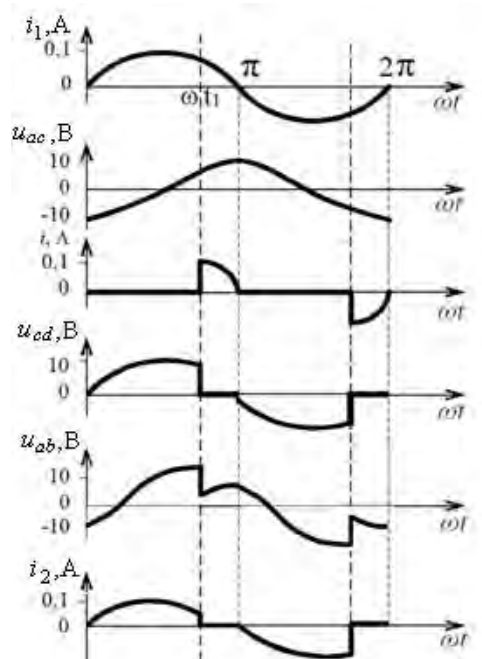


Рисунок 17.2 – Графики искомых величин

## 17.2 Примеры решения задач

**Задача 1.** Рассмотрим на конкретной схеме по рисунку 17.3 задачу о переходном процессе в нелинейной цепи.

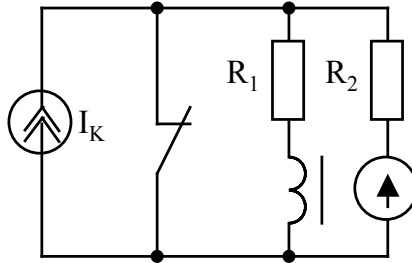


Рисунок 17.3 – Схема цепи для задачи 1

Пусть  $E = 2$  В;  $I_K = 1$  А,  $i_1(\psi) = a\psi + b\psi^2$  А;  $a = 10^2$  (1/Ом·с);  $b = 10^3$  (1/Ом·с<sup>2</sup>).  
Определить  $\psi(t)$ .

*Решение*

После коммутации  $E = i_{R1} \cdot R_1 + i_L \cdot R_2 + u_{L2}$ ;  $i_{R1} = i_L - I_K$ ;

$U_L = d\psi/dt$ ;  $i_L = i_L(\psi)$  или  $E + IR \cdot R_1 = d\psi / dt + (R_1 + R_2)\alpha\varphi + (R_1 + R_2) b\psi^2$ .

Представим  $i_1(\psi) = a\psi + b\psi^2$  в виде

$$\frac{d\psi}{dt} + a_1\psi = E\gamma - \mu b_1\psi^2, \quad (17.7)$$

где  $a_1 = (R_1 + R_2) \cdot a$ ;  $b_1 = (R_1 + R_2) \cdot b$ ;  $E\gamma = E + I_R R_1$ ;  $\mu = 1$  (начальное условие  $\psi(0) = 0$ ).

Решением (17.7) является

$$\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \dots \quad (17.8)$$

Подставим (17.8) в (17.7):

$$\frac{d\psi}{dt} + a_1\psi_0 = E\gamma; \quad (17.9)$$

$$\frac{d\psi}{dt} + a_1\mu\psi_0 = -b_1\psi_0^2. \quad (17.10)$$



Решение (17.9) и (17.10) операторным методом:

$$\Psi_0(p) = \frac{E_{\text{э}}}{p(p+a)}; \Psi_0(t) = \frac{E_{\text{э}}}{a_1}(1 - e^{-a_1 t});$$

$$\Psi_0(t)^2 = \left(\frac{E_{\text{э}}}{a_1}\right)^2 (1 - 2e^{-a_1 t} + e^{-2a_1 t});$$

$$\Psi_1(p) = -b_1 \left(\frac{E_{\text{э}}}{a_1}\right)^2 \left[ \frac{1}{p(p+a_1)} - \frac{2}{(p+a_1)^2} + \frac{1}{(p+a_1)(p+2a_1)} \right];$$

$$\Psi_1(t) = -\frac{b_1}{a_1} \left(\frac{E_{\text{э}}}{a_1}\right)^2 (1 - 2a_1 t e^{-a_1 t} - e^{-2a_1 t});$$

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{E_{\text{э}}}{a_1}(1 - e^{-a_1 t}) - \frac{b_1}{a_1} \left(\frac{E_{\text{э}}}{a_1}\right)^2 (1 - 2a_1 t e^{-a_1 t} - e^{-2a_1 t}) = \\ &= 0,02 \left[ (1 - e^{-a_1 t}) - 0,2(1 - 2a_1 t e^{-a_1 t} - e^{-2a_1 t}) \right]. \end{aligned}$$

График  $\Psi(t)$  показан на рисунке 17.4.

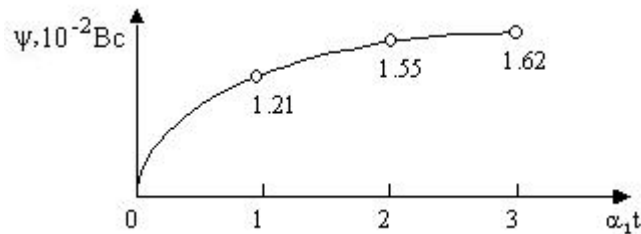


Рисунок 17.4 – График зависимости  $\Psi(t)$

### **Самостоятельная работа**

Решить самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем [9].

## Список литературы

- 1 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л. А. Бессонов. – 11-е изд., испр. и доп. – Москва : Гардарики, 2007. – 701 с.
- 2 **Иванов, И. И.** Электротехника: учебник / И. И. Иванов, Г. И. Соловьев, В. А. Фролов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 736 с.
- 3 **Марченко, А. Л.** Лабораторный практикум по электротехнике и электронике в среде Multisim: учебное пособие для вузов / А. Л. Марченко, С. В. Освальд. – Москва : ДМК Пресс, 2010. – 448 с.
- 4 **Марченко, А. Л.** Электротехника и электроника : учебник в 2 т. Т. 1: Электротехника / А. Л. Марченко, Ю. Ф. Опачий. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 574 с.
- 5 **Миленина, С. А.** Электротехника, электроника и схемотехника : учебник и практикум для академ. бакалавриата / С. А. Миленина ; под ред. Н. К. Миленина. – Москва : Юрайт, 2015. – 399 с.
- 6 **Рыбков, И. С.** Электротехника : учебное пособие / И. С. Рыбков. – Москва : РИОР ; ИНФРА-М, 2013. – 160 с.
- 7 **Марченко, А. Л.** Электротехника и электроника: курсовые работы с методическими указаниями и примерами / А. Л. Марченко, Ю. Ф. Опачий. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 126 с.
- 8 Сборник задач по электротехнике и электронике / Под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск : Вышэйшая школа, 2012. – 478 с.
- 9 Анализ переходных процессов в линейной электрической цепи на ЭВМ: методические указания к расчетно-графическим работам для студентов специальностей 14 04 00 «Электроэнергетика и электротехника», 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» / Сост. Г. И. Скрыбина, С. В. Болотов. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2012. – 35 с.

