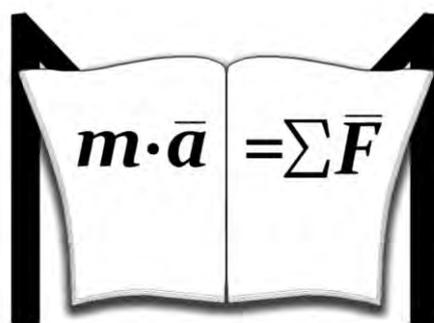


ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы»
дневной формы обучения*



Могилев 2018

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С 55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «31» августа 2018 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель Е. Г. Кривоногова

Рецензент канд. техн. наук А. П. Прудников

Приведены примеры расчета при сложном сопротивлении, энергетические методы определения перемещений, примеры расчета статически неопределимых стержневых систем, расчет на устойчивость сжатых стержней, а также расчет конструкций при динамическом воздействии.

Учебно-методическое издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 24.01.2014

Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2018



Содержание

Введение.....	4
1 Сложное сопротивление.....	5
2 Энергетические методы определения перемещений.....	12
3 Расчет статически неопределимых стержневых систем. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых плоских рам.....	13
4 Расчет статически неопределимых стержневых систем. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых балок.....	18
5 Устойчивость сжатых стержней.....	23
6 Принципы расчета конструкций при динамическом воздействии. Расчеты на прочность и жесткость при ударе.....	28
Список литературы.....	32



Введение

Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» – научить студента правильному решению задач расчета на прочность, жесткость и устойчивость конструкций, используемых в сложных эксплуатационных условиях под действием как статических, так и динамических нагрузок, рациональному назначению конструкционных материалов и формы поперечного сечения, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности, экономичности и эффективности изделий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

ПК-1. Способен в составе коллектива исполнителей участвовать в выполнении теоретических и экспериментальных научных исследований по поиску и проверке новых идей совершенствования наземных транспортно-технологических машин, их технологического оборудования и создания комплексов на их базе.

ПК-8. Способен в составе коллектива исполнителей участвовать в разработке технологической документации для производства, модернизации, эксплуатации и технического обслуживания, наземных транспортно-технологических машин и их технологического оборудования.

ОПК-7. Способен решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–5], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

Методические рекомендации предназначены для студентов направления подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» дневной формы обучения в рамках изучения дисциплины «Сопротивление материалов» на протяжении 4-го семестра.

1 Сложное сопротивление

1.1 Косой изгиб

Пример 1 – Проверить прочность балки, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

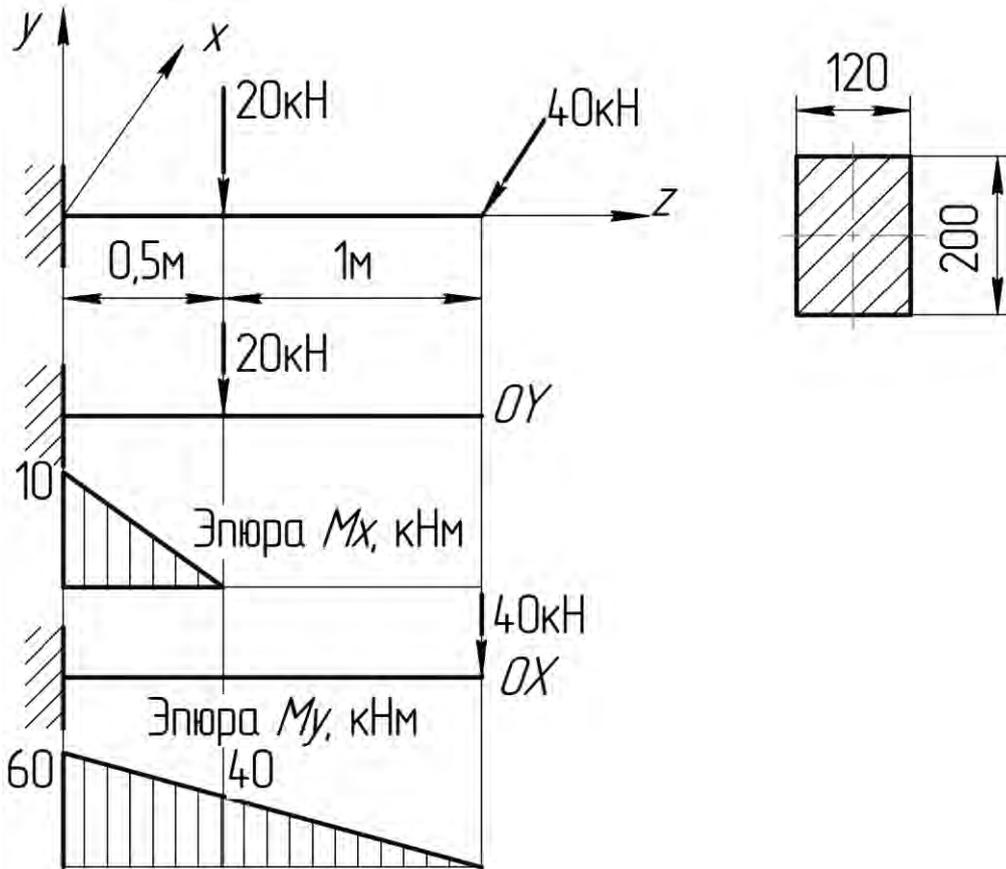


Рисунок 1.1 – Расчетная схема и эпюры действующих моментов

Решение

Определяем изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях и строим соответствующие эпюры.

Определяем моменты сопротивления по формулам

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad (1.1)$$

$$W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}. \quad (1.2)$$

где b, h – размеры поперечного сечения, см.

$$W_x = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{20 \cdot 12^2}{6} = 480 \text{ см}^3.$$

Выполняем проверку прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{10 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} + \frac{60 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-6}} = 137,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Задания для самостоятельной работы

Проверить прочность балки, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $F_1 = 30 \text{ кН}$, $F_2 = 10 \text{ кН}$, $q = 25 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$.

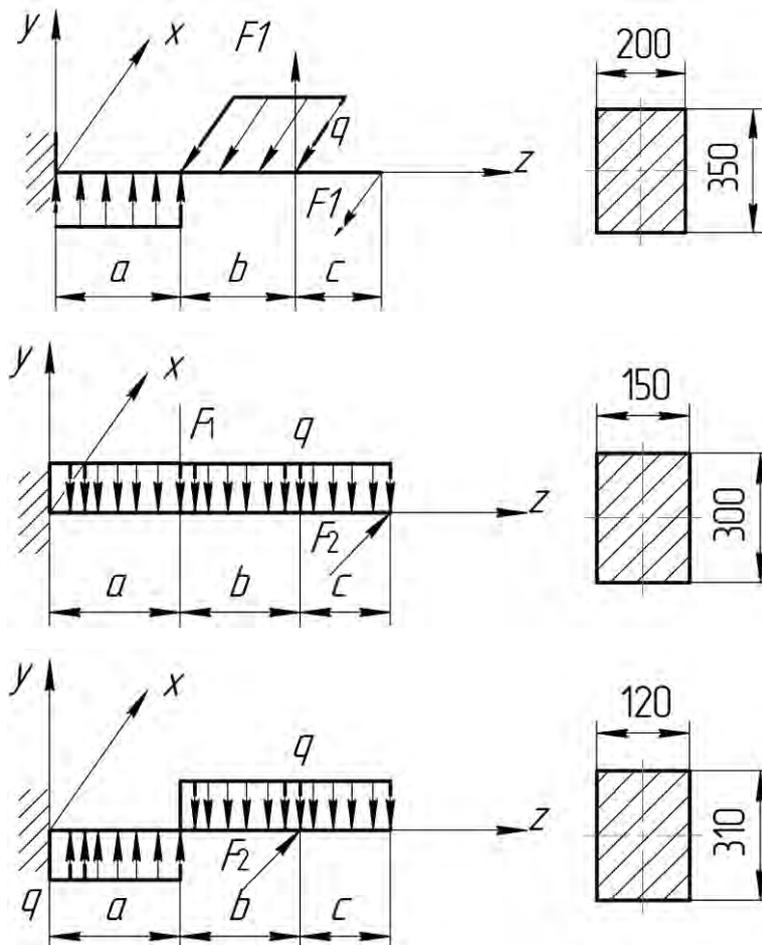


Рисунок 1.2 – Задания для самостоятельной работы

1.2 Совместное действие изгиба и кручения

Пример 2 – На вал круглого сплошного сечения насажены шестерня средним диаметром $D_1 = 0,23$ м и шкив ременной передачи диаметром $D_2 = 0,39$ м (рисунок 1.3, а). Вес шкива $G = 600$ Н, собственным весом шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допустимое напряжение материала вала $[\sigma] = 80$ МПа .

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности.

Решение

Определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов показана на рисунке 1.3, б.

Построение эпюры внутреннего силового фактора (крутящего момента $M_{кр}$), возникающего в сечениях вала, производим по участкам слева направо:

- участок 1 $M_{кр} = 0$;
- участок 2 $M_{кр} = m = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
- участок 3 $M_{кр} = m - m = 0$.

Определяем окружное усилие F_1 , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Рассчитываем изгибающую силу F_2 от ременной передачи на шкиве, действующую на вал в горизонтальной плоскости:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 1.3, в.

Для определения опорных реакций R_{Ay} и R_{By} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ay} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,8 - 600 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1,2} = 3507 \text{ Н}.$$



$$\sum m_A = 0; \quad R_{By} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1,2} = 2128 \text{ Н.}$$

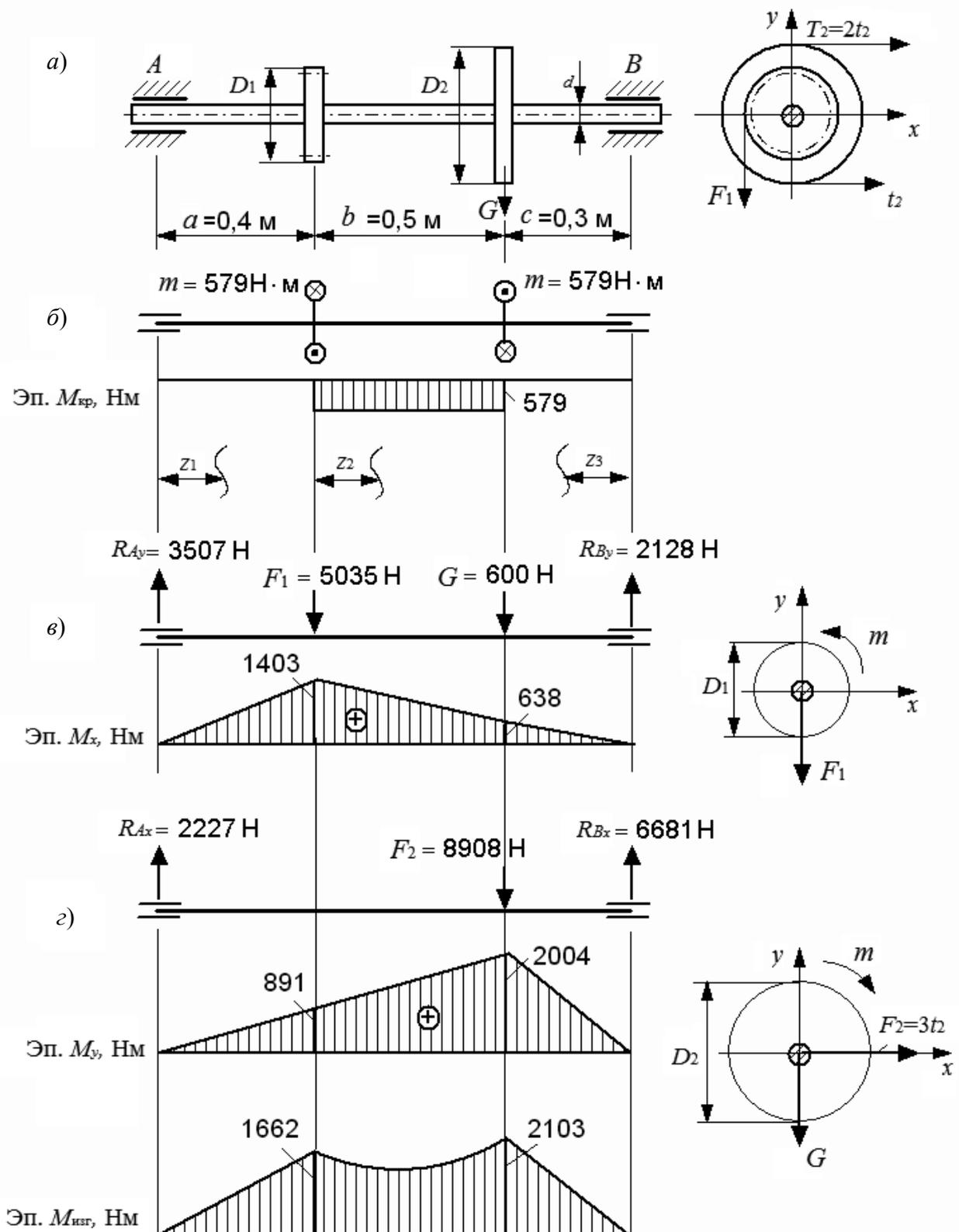


Рисунок 1.3 – Заданная схема вала и вспомогательные схемы и эпюры для примера 2 (эпюры изгибающих моментов M_x и M_y построены на сжатом волокне)

Выполним проверку:

$$\sum y = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_x по участкам.

Участок 1 ($0 \leq z_1 \leq 0,4$ м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ($0 \leq z_2 \leq 0,5$ м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot (0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ($0 \leq z_3 \leq 0,3$ м):

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия горизонтальных изгибающих сил, повернутых в плоскость чертежа, показана на рисунке 1.3, *з*.

Для определения опорных реакций R_{Ax} и R_{Bx} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н}.$$



Выполним проверку:

$$\sum x = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_y по участкам.

Участок 1 ($0 \leq z_1 \leq 0,4$ м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ($0 \leq z_2 \leq 0,5$ м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ($0 \leq z_3 \leq 0,3$ м):

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов $M_{изг}$ в характерных сечениях вала по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2};$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов $M_{изг}$ показана на рисунке 1.3.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива диаметром D_2 , т. к. в нем действуют наибольший изгибающий момент $M_{изг} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и крутящий момент $M_{кр} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Определяем значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности:

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$



Рассчитываем диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м} = 65 \text{ мм.}$$

Диаметр вала принимаем равным $d = 65$ мм.

Задания для самостоятельной работы

На вал круглого сплошного сечения диаметром d насажены шестерня средним диаметром D_1 и шкив ременной передачи диаметром D_2 (рисунок 1.4). Вес шкива равен G , собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает n оборотов в минуту и передает мощность, равную N киловатт. Допускаемое напряжение материала вала $[\sigma] = 80$ МПа.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности. Исходные данные к задаче представлены в таблице 1.1.

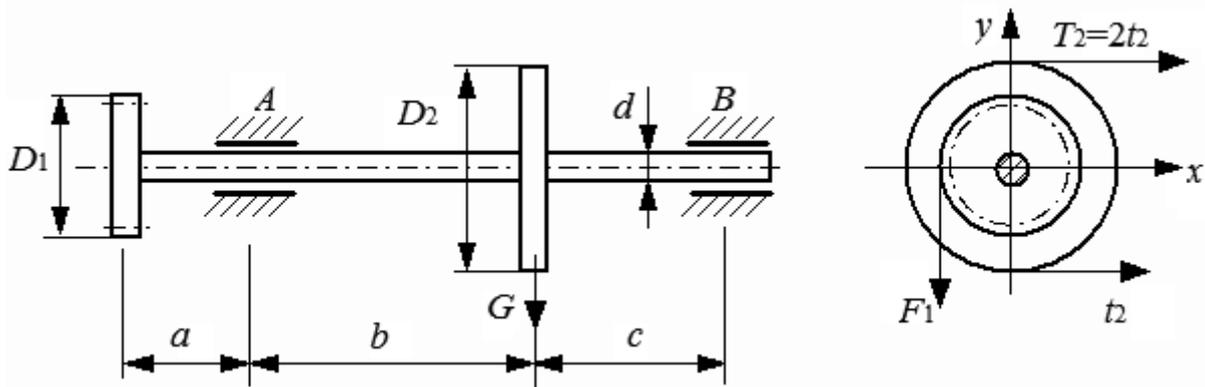


Рисунок 1.4 – Расчетная схема вала

Таблица 1.1 – Значения исходных данных

Номер строки	N , кВт	n , об/мин	G , Н	a , м	b , м	c , м	D_1 , мм	D_2 , мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320
3	30	1300	240	0,13	0,43	0,33	130	330
4	40	1400	260	0,14	0,44	0,34	140	340
5	50	1500	280	0,15	0,45	0,35	150	350
6	60	1600	300	0,16	0,46	0,36	160	360
7	70	1700	320	0,17	0,47	0,37	170	370
8	80	1800	340	0,18	0,48	0,38	180	380
9	90	1900	360	0,19	0,49	0,39	190	390
10	100	2000	380	0,20	0,50	0,40	200	400

2 Энергетические методы определения перемещений

Пример – Определить линейное перемещение y_B и угловое перемещение Θ_C методом Верещагина при $EI_x = \text{const}$.

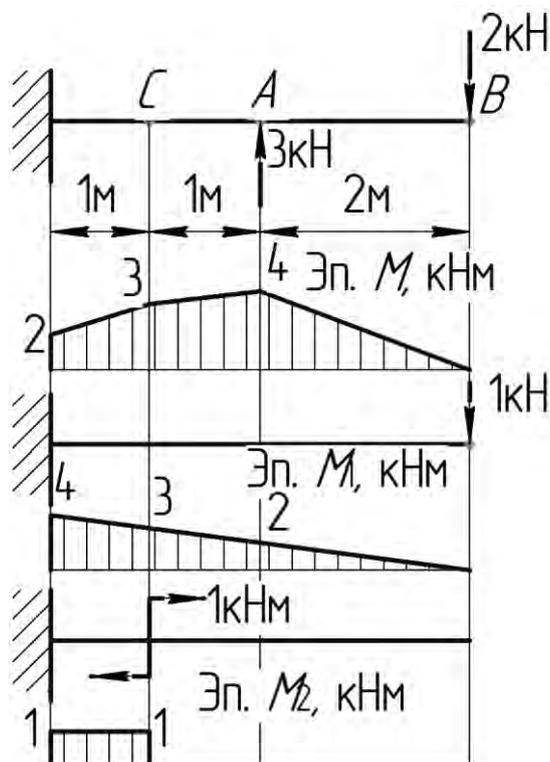


Рисунок 2.1 – Расчетная схема и эпюры моментов

Решение

Строим грузовую эпюру, предварительно определив изгибающие моменты.

Строим эпюры моментов от единичной силы и от единичного момента.

Определяем перемещения путем перемножения соответствующих эпюр.

Можно использовать готовую формулу перемножения трапеций, которая имеет вид:

$$\frac{l}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + c \cdot b). \quad (2.1)$$

где a, b, c, d – основания трапеций.

Определяем линейное перемещение:

$$y_B = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = \frac{68}{3} = 22,67 \text{ ед.}$$

Находим угловое перемещение:

$$\Theta_c = \frac{2+3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2,5 \text{ ед.}$$

Задания для самостоятельной работы

Для приведенных расчетных схем определить линейное перемещение y_B и угловое перемещение Θ_A методом Верещагина при $EI_x = \text{const}$.

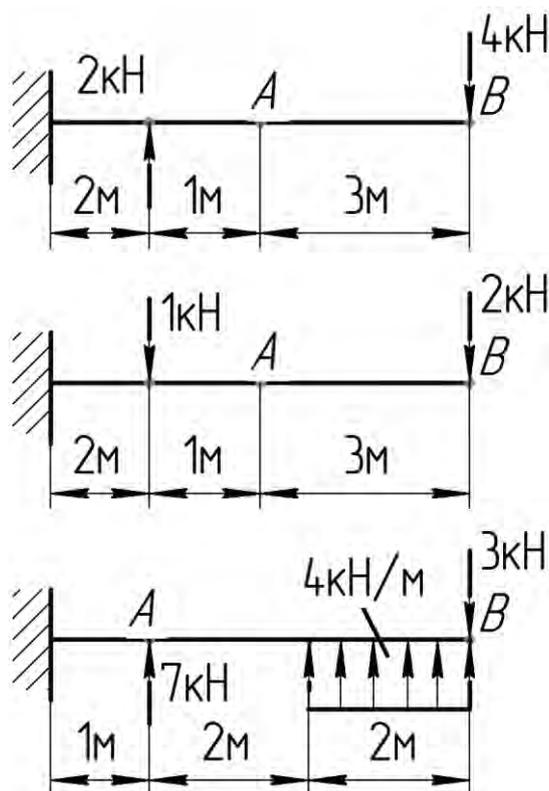


Рисунок 2.2 – Задания для самостоятельной работы

3 Расчет статически неопределимых стержневых систем. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых плоских рам

Пример – Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданной рамы (рисунок 3.1, а).

Решение

Находим степень статической неопределимости:

$$S = 8 + 0 - 3 = 4.$$

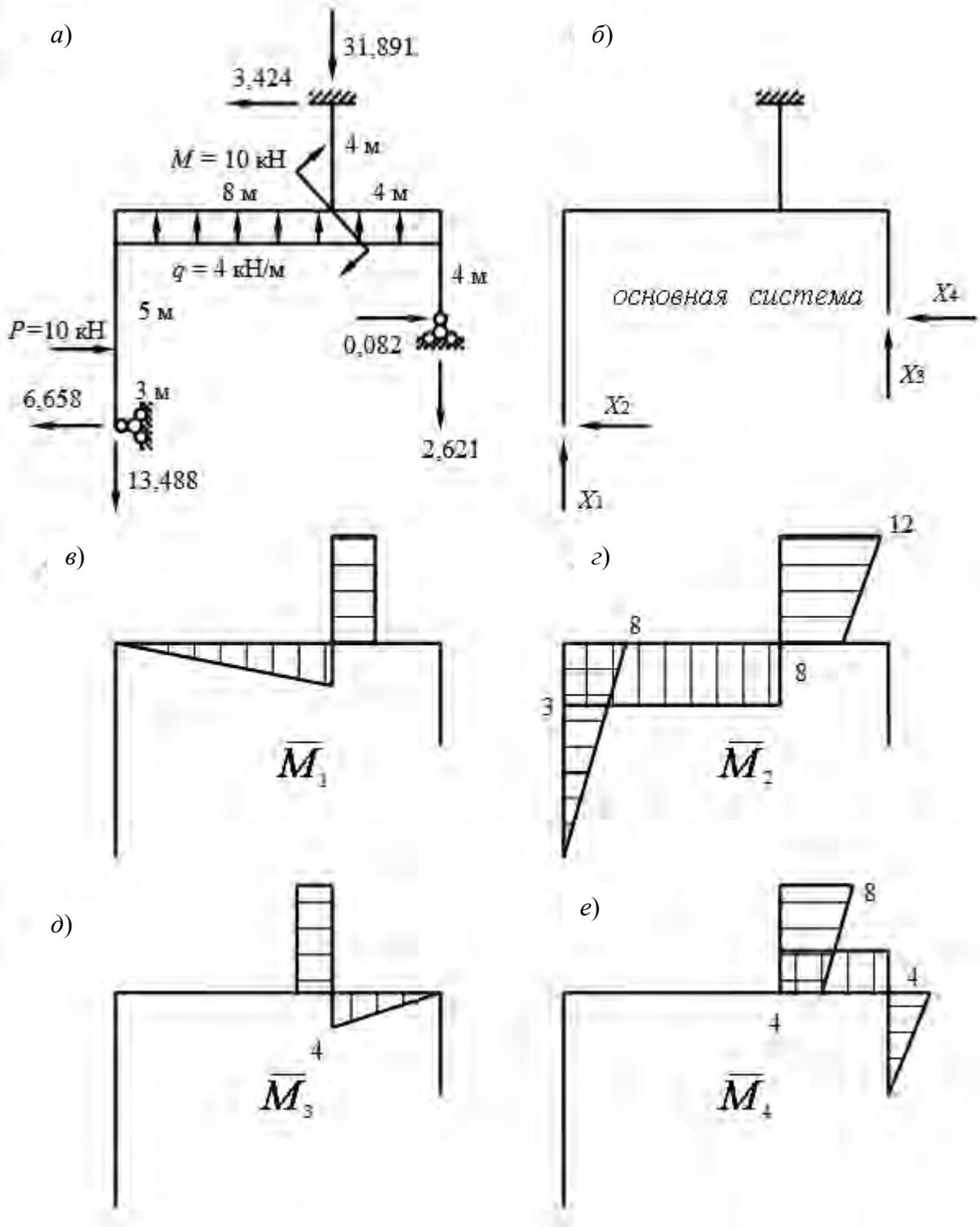
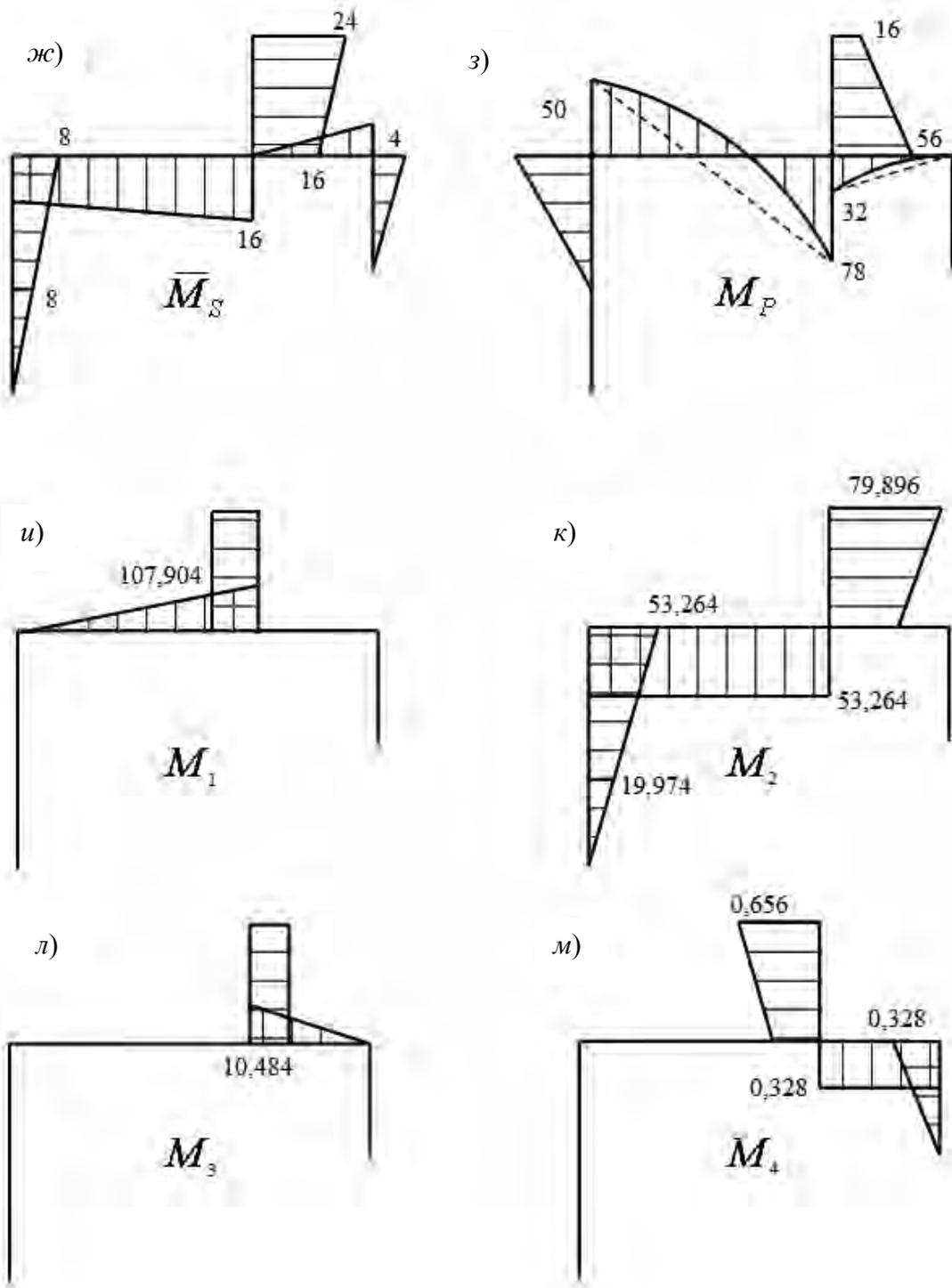
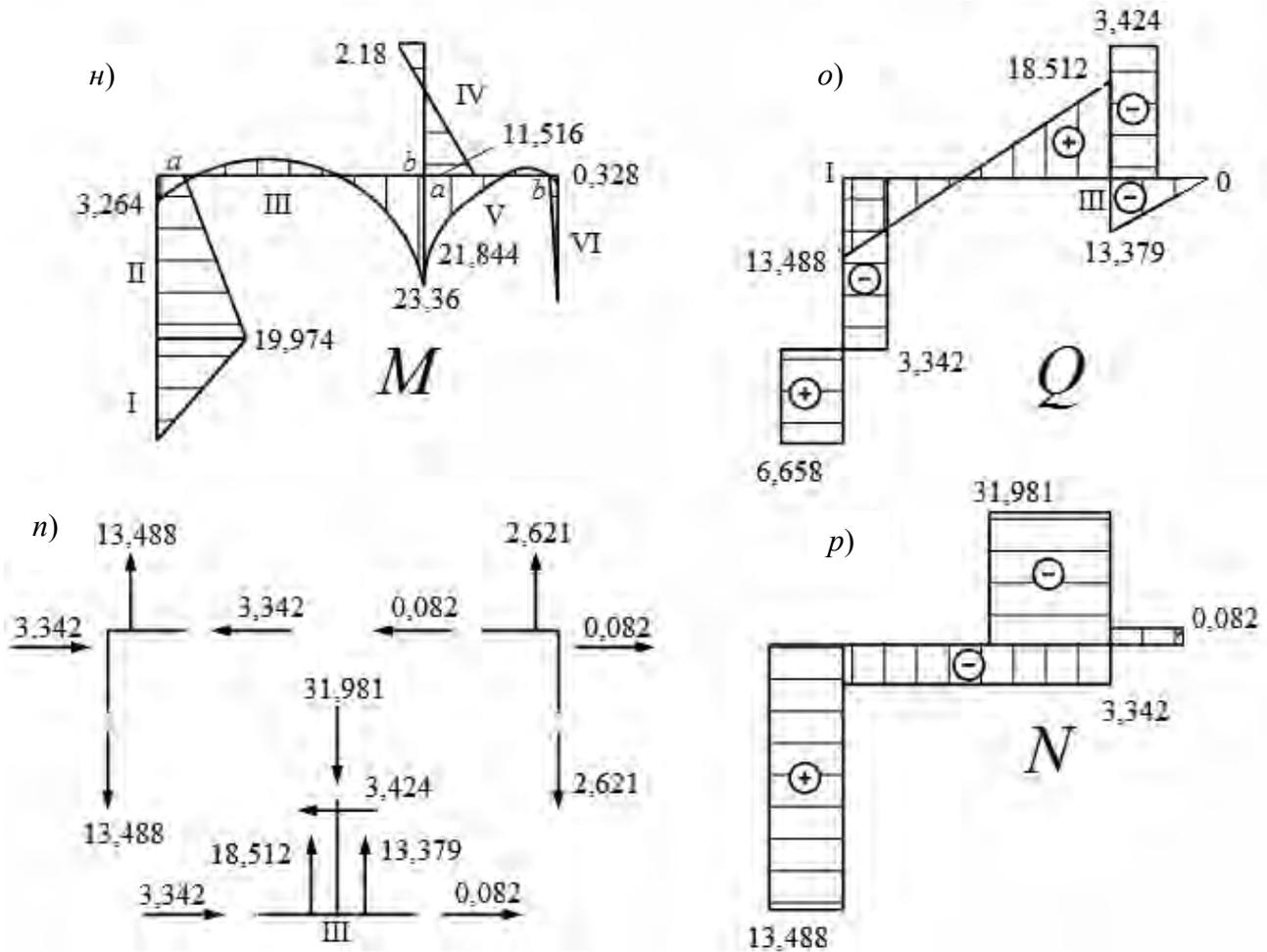


Рисунок 3.1 – Расчет статически неопределимой рамы методом сил



Продолжение рисунка 3.1



Окончание рисунка 3.1

Образовываем основную систему, отбрасывая четыре «лишние» связи (шарнирно-неподвижные опоры) [1]. Для расчета проще всего в качестве основной системы выбирать конструкцию с жестким защемлением (рисунок 3.1, б). Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{42} \cdot X_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4P} = 0. \end{cases}$$

Строим единичные эпюры изгибающих моментов \overline{M}_1 , \overline{M}_2 , \overline{M}_3 , \overline{M}_4 , а также грузовую эпюру моментов M_P от действия заданной нагрузки (см. рисунок 3.1, в–з). Суммарная единичная эпюра, получаемая сложением ординат единичных эпюр по участкам, представлена на рисунке 3.1, ж. Перемножая эпюры соответствующим образом, находим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + 8 \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{1280}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{12+8}{2} \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{1728}{3EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-8 \cdot 4 \cdot 4) = -\frac{384}{3EI};$$

$$\delta_{14} = \delta_{41} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_4}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{8+4}{2} \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{576}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{8}{6} \cdot (2 \cdot 78 \cdot 8 - 50 \cdot 8) - \frac{4 \cdot 8^3}{12} \cdot 4 + \frac{16+56}{2} \cdot 4 \cdot 8 \right) = \frac{4800}{3EI}.$$

Аналогично определяем остальные коэффициенты и свободные члены канонического уравнения метода сил.

Подставляя найденные значения в систему уравнений и решая ее, находим неизвестные усилия X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} 1280 \cdot X_1 + 1728 \cdot X_2 - 384 \cdot X_3 + 576 \cdot X_4 + 4800 = 0; \\ 1728 \cdot X_1 + 3264 \cdot X_2 - 480 \cdot X_3 + 736 \cdot X_4 + 377 = 0; \\ -384 \cdot X_1 - 480 \cdot X_2 + 256 \cdot X_3 - 384 \cdot X_4 - 1344 = 0; \\ 576 \cdot X_1 + 736 \cdot X_2 - 384 \cdot X_3 + 704 \cdot X_4 + 1920 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = -13,488 \text{ кН}, \quad X_2 = 6,658 \text{ кН}, \quad X_3 = -2,621 \text{ кН}, \quad X_4 = -0,082 \text{ кН}.$$

Умножая ординаты единичных эпюр \overline{M}_1 , \overline{M}_2 , \overline{M}_3 , \overline{M}_4 на соответствующие усилия X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , получаем «исправленные» эпюры изгибающих моментов M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (рисунок 3.1, *и-м*). Суммируя ординаты эпюр M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_P , получаем окончательную эпюру моментов M (рисунок 3.1, *н*). Статической проверкой правильности построения эпюры моментов служит равновесие узлов. Проводим кинематическую проверку:

$$\delta = \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 19,974 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 19,974 + 2 \cdot 8 \cdot 3,264 + 3,264 \cdot 3 + 19,974 \cdot 8) + \right. \\ \left. + \frac{8}{6} \cdot (2 \cdot 3,264 \cdot 8 + 2 \cdot 23,36 \cdot 16 + 3,264 \cdot 16 + 23,36 \cdot 8) - \frac{4 \cdot 8^3}{12} \cdot 12 + \right. \\ \left. + \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 2,18 \cdot 24 + 2 \cdot 11,56 \cdot 16 - 2,18 \cdot 16 + 11,56 \cdot 24) + \right. \\ \left. + \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 0,328 \cdot 4 - 21,844 \cdot 4) + \frac{4 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,328 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \\ = -0,891.$$

По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил (рисунок 3.1, *o*).

Эпюру продольных сил (рисунок 3.1, *p*) строим способом вырезания узлов (рисунок 3.1, *n*).

Статическая проверка представлена на рисунке 3.1, *a*.

$$\sum X = 10 - 6,658 - 3,424 + 0,082 = 0;$$

$$\sum Y = -13,488 + 4 \cdot 12 - 31,891 - 2,621 = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданных рам (рисунок 3.2), если $P = 15$ кН, $m = 20$ кН·м, $q = 10$ кН/м, $a = 2$ м.

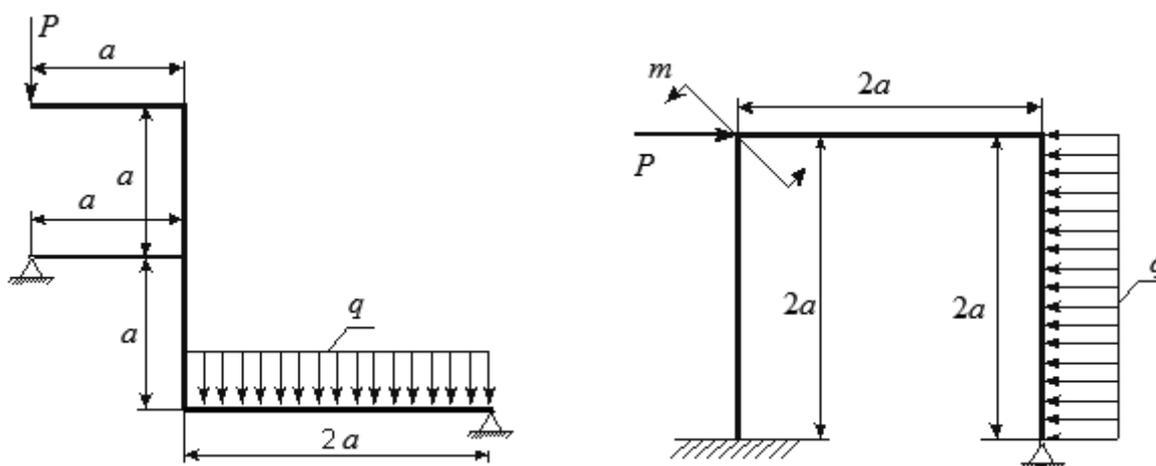


Рисунок 3.2 – Задания для самостоятельной работы



4 Расчет статически неопределимых стержневых систем. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых балок

Пример – Подобрать необходимое поперечное сечение в виде двутавра для статически неопределимой балки (рисунок 4.1), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Находим степень статической неопределимости [5]:

$$S = 5 - 3 = 2.$$

Образовываем основную систему, отбрасывая две «лишние» связи. Проще всего в качестве основной системы выбирать конструкцию с жестким

защемлением (рисунок 4.2, б). Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

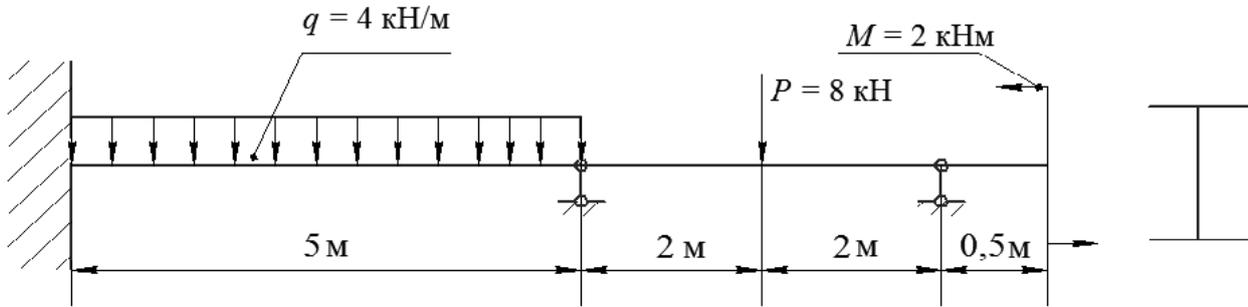


Рисунок 4.1 – Расчетная схема статически неопределимой балки

Показываем расчетные схемы и строим единичные эпюры изгибающих моментов \overline{M}_1 и \overline{M}_2 от действия $\overline{X}_1=1$ и $\overline{X}_2=1$, а также грузовую эпюру моментов M_P от действия заданной нагрузки (рисунок 4.2, в–з). Перемножая эпюры соответствующим образом, находим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{729}{3EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{125}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 5 + 5 \cdot 4) = \frac{275}{3EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 14 \cdot 2 - 2 \cdot 4)) + \\ &+ \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 14 + 2 \cdot 9 \cdot 104 + 14 \cdot 9 + 104 \cdot 4) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{9+4}{2} = \frac{5614,5}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 104 + 5 \cdot 14)) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{2462,5}{3EI}.$$

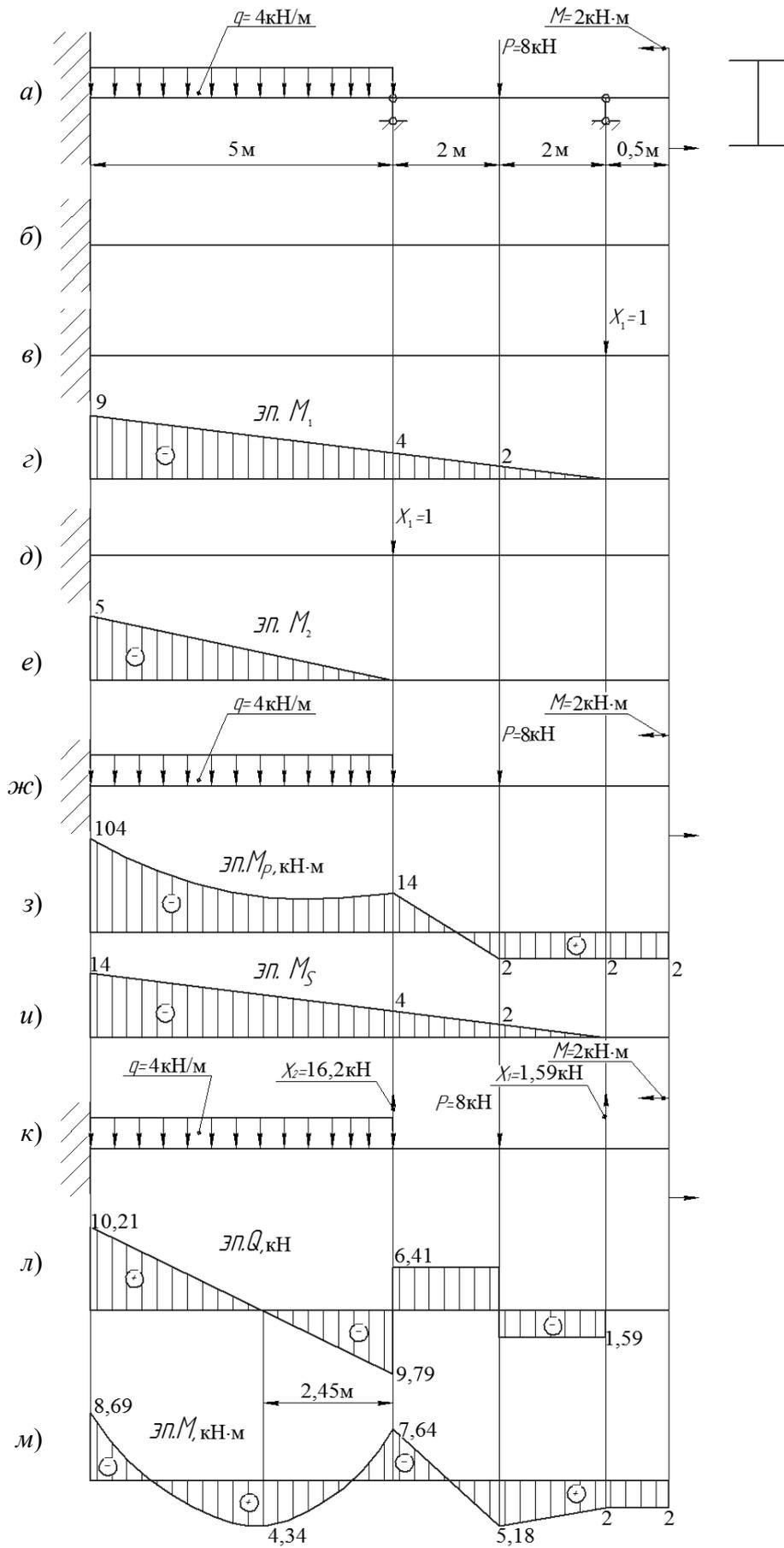


Рисунок 4.2 – К расчету статически неопределимой балки



Подставляя найденные коэффициенты в систему уравнений и решая ее, находим неизвестные усилия X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{729}{3EI} \cdot X_1 + \frac{275}{3EI} \cdot X_2 + \frac{5614,5}{3EI} = 0; \\ \frac{275}{3EI} \cdot X_1 + \frac{125}{3EI} \cdot X_2 + \frac{2462,5}{3EI} = 0; \end{cases} \begin{cases} 729 \cdot X_1 + 275 \cdot X_2 + 5614,5 = 0; \\ 275 \cdot X_1 + 125 \cdot X_2 + 2462,5 = 0; \end{cases}$$

$$X_1 = -1,59 \text{ кН}, \quad X_2 = -16,2 \text{ кН}.$$

Суммарная единичная эпюра \overline{M}_s , получаемая сложением ординат единичных эпюр по характерным участкам, отображена на рисунке 4.2, *и*.

Показываем расчетную схему балки, приложив внешнюю нагрузку и найденные усилия X_1 и X_2 , причем направление X_1 и X_2 меняем на противоположное, т. к. по расчету они получились со знаком « \leftarrow » (рисунок 4.2, *к*). Используя обычный метод сечений, строим эпюры Q и M (рисунок 4.2, *л, м*).

Проводим деформационную проверку:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EI} &= \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 5,18 - 2 \cdot 2) + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 5,18 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 7,64 + \right. \\ &+ 7,64 \cdot 2 - 5,18 \cdot 4) + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 14 \cdot 8,69 + 2 \cdot 7,64 \cdot 4 + 8,69 \cdot 4 + 7,64 \cdot 14) - \\ &\left. - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{14 + 4}{2} \right) = \frac{383,453 - 383,24}{EI} = \frac{0,213}{EI}. \end{aligned}$$

Процент расхождения

$$\delta = \frac{0,213}{383,24} \cdot 100 \% = 0,06 \% < 3 \%$$

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

выражаем осевой момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,0543 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 54,3 \text{ см}^3.$$



Полученному значению соответствует двутавр № 12 (ГОСТ 8239–89), у которого $W_x = 58,4 \text{ см}^3$. Находим величину напряжения, возникающего в опасном сечении балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 148,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

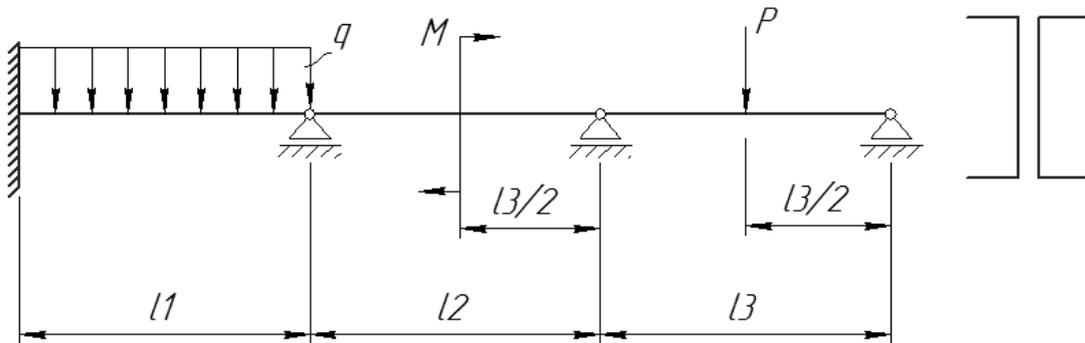
Таким образом, выбранный двутавр № 12 работает с небольшим запасом прочности в

$$\delta = \frac{160 - 148,8}{148,8} \cdot 100 \% = 7,5 \ \%.$$

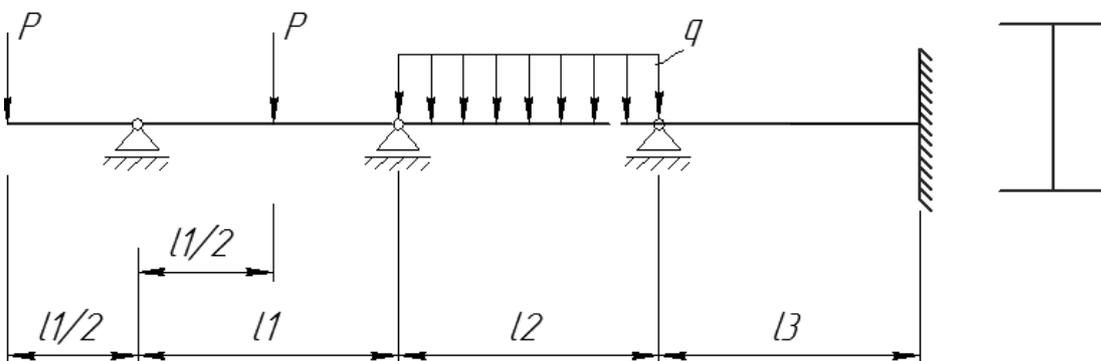
Вывод: для заданной балки выбрано поперечное сечение в виде двутавра № 12, для которого выполняется условие прочности.

Задания для самостоятельной работы

Подобрать необходимое поперечное сечение для статически неопределимых балок (рисунок 4.3), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

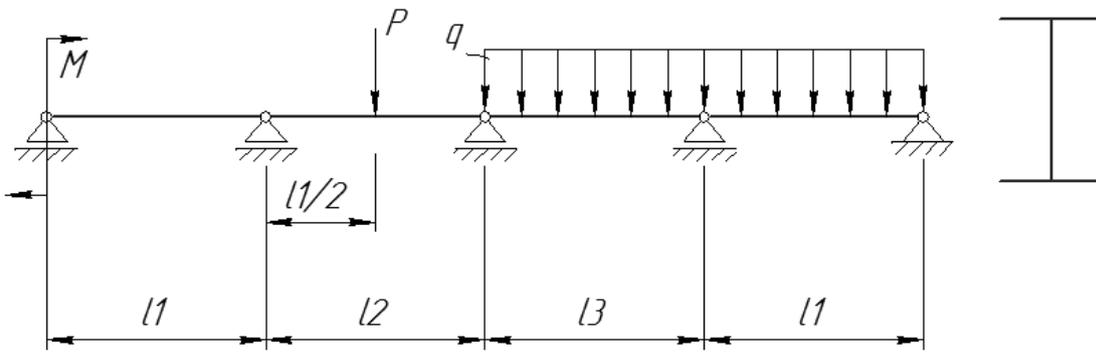


$$l_1 = 1 \text{ м}; l_2 = 2 \text{ м}; l_3 = 3 \text{ м}; P = 25 \text{ кН}; q = 20 \text{ кН/м}; m = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



$$l_1 = 2 \text{ м}; l_2 = 1 \text{ м}; l_3 = 2 \text{ м}; P = 15 \text{ кН}; q = 40 \text{ кН/м}; m = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Рисунок 4.3 – Примеры заданий для самостоятельной работы



$$l_1 = 2 \text{ м}; l_2 = 4 \text{ м}; l_3 = 2 \text{ м}; P = 25 \text{ кН}; q = 40 \text{ кН/м}; m = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Окончание рисунка 4.3

5 Устойчивость сжатых стержней

Пример – Подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

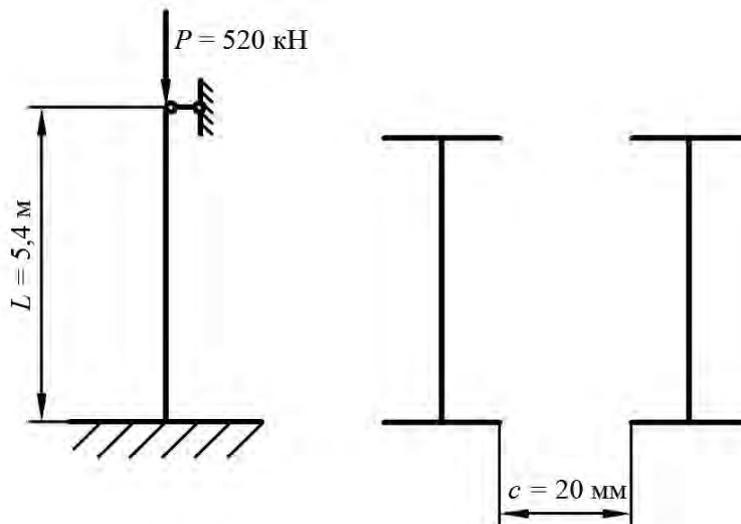


Рисунок 5.1 – Схема закрепления и поперечное сечение колонны

Решение

Расчет размеров поперечного сечения ведем методом последовательных приближений из условия устойчивости.

Первое приближение.

Пусть $\varphi_1 = 0,5$.

Тогда расчетная площадь одного двутавра

$$A_1^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 32,5 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 24: $A_1^{об} = 34,8 \text{ см}^2$; $I_{x1} = 3460 \text{ см}^4$; $I_{y1} = 198 \text{ см}^4$; $b_1 = 115 \text{ мм}$.

Определяем геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции X_c и Y_c (рисунок 5.2). Площадь сечения

$$A_1 = 2 \cdot A_1^{об} = 2 \cdot 34,8 = 69,6 \text{ см}^2.$$

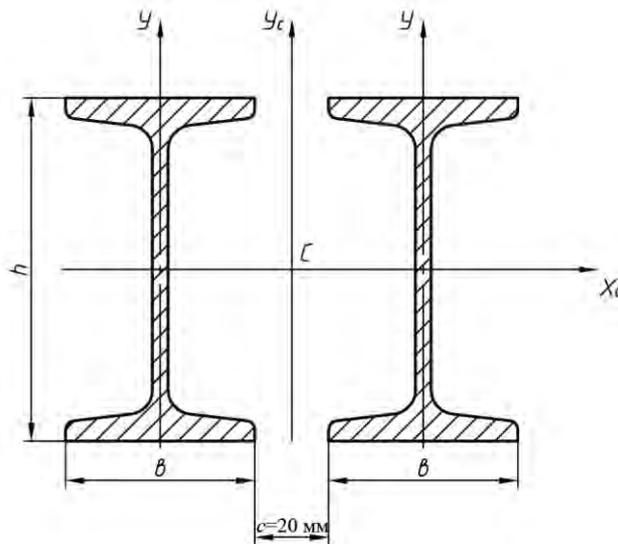


Рисунок 5.2 – Поперечное сечение колонны

Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_{xc1} = 2 \cdot (I_{x1} + a^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (3460 + 0^2 \cdot 34,8) = 6920 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_{yc1} &= 2 \cdot (I_{y1} + b^2 \cdot A_1) = 2 \cdot \left(I_{y1} + \left(\frac{b_1}{2} + \frac{c}{2} \right)^2 \cdot A_1 \right) = \\ &= 2 \cdot \left(198 + \left(\frac{11,5}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 34,8 \right) = 3567,15 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Главные центральные радиусы инерции

$$i_{xc1} = \sqrt{\frac{I_{xc1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{6920}{69,6}} = 9,97 \text{ см};$$

$$i_{y_c1} = \sqrt{\frac{I_{y_c1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{3567,15}{69,6}} = 7,16 \text{ см.}$$

Гибкость стержня относительно материальной оси X_c

$$\lambda_{x1} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c1}} = \frac{0,7 \cdot 540}{9,97} = 37,91,$$

где μ – коэффициент приведения длины для заданной схемы закрепления колонны, $\mu = 0,7$.

Гибкость стержня относительно свободной оси Y_c

$$\lambda_{y1} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c1}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{7,16}\right)^2} = 66,24.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости: $\lambda_{\max} = \lambda_{y1} = 66,24$.

Уточняем коэффициент продольного изгиба φ : $\varphi = 0,86$ при $\lambda = 60$, $\varphi = 0,81$ при $\lambda = 70$.

Линейно интерполируя, получаем

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (66,24 - 60) = 0,829.$$

Так как $\varphi_1 \neq \varphi'_1$, то проводим следующее приближение.

Второе приближение.

Коэффициент продольного изгиба рассчитываем следующим образом:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,829}{2} = 0,6645.$$

Повторяем расчет, как в первом приближении.

$$A_2^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,6645 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,445 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,45 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20: $A_2^{ог} = 26,8 \text{ см}^2$; $I_{x2} = 1840 \text{ см}^4$; $I_{y2} = 115 \text{ см}^4$; $b_2 = 100 \text{ мм}$.

Геометрические характеристики сечения

$$A_2 = 2 \cdot A_2^{ог} = 2 \cdot 26,8 = 53,6 \text{ см}^2;$$



$$I_{x_c2} = 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c1} = 2 \cdot \left(115 + \left(\frac{10}{2} + \frac{2}{2}\right)^2\right) \cdot 26,8 = 2159,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c2} = \sqrt{\frac{I_{x_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{3680}{53,6}} = 8,29 \text{ см};$$

$$i_{y_c2} = \sqrt{\frac{I_{y_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{2159,6}{53,6}} = 6,35 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x2} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c2}} = \frac{0,7 \cdot 540}{8,29} = 45,6;$$

$$\lambda_{y_c} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c2}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{6,35}\right)^2} = 71,72;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y_c} = 71,72.$$

Уточняем коэффициент φ : при $\lambda = 70$ $\varphi = 0,81$, при $\lambda = 80$ $\varphi = 0,75$. Тогда

$$\varphi'_2 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (71,72 - 70) = 0,8; \quad \varphi_2 \neq \varphi'_2.$$

Третье приближение.

Коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,6645 + 0,8}{2} = 0,732.$$

$$A_3^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,732 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 22,2 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 18: $A_3^{\text{об}} = 23,4 \text{ см}^2$; $I_{x3} = 1290 \text{ см}^4$; $I_{y3} = 82,6 \text{ см}^4$; $b_3 = 90 \text{ мм}$.

Геометрические характеристики сечения

$$A_3 = 2 \cdot A_3^{\text{об}} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c3} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4;$$



$$I_{y_c3} = 2 \cdot \left(82,6 + \left(\frac{9}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 23,4 \right) = 1580,9 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c3} = \sqrt{\frac{I_{x_c3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{2580}{46,8}} = 7,42 \text{ см};$$

$$i_{y_c3} = \sqrt{\frac{I_{y_c3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{1580,9}{46,8}} = 5,81 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x3} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c3}} = \frac{0,7 \cdot 540}{7,42} = 50,49;$$

$$\lambda_{y3} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c3}} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{5,81} \right)^2} = 76,37;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y3} = 76,37.$$

Уточняем коэффициент φ :

$$\varphi'_3 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (76,37 - 70) = 0,772; \quad \varphi_3 \neq \varphi'_3.$$

Четвертое приближение.

Коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,732 + 0,772}{2} = 0,752.$$

$$A_4^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,752 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 21,6 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 повторно выпадает двутавр № 18. Проверяем его устойчивость ($A = 46,8 \text{ см}^2$; $\lambda_{\max} = 76,37$; $\varphi = 0,772$):

$$\sigma_{\text{уст}} = \frac{P}{A} = \frac{520 \cdot 10^3}{46,8 \cdot 10^{-4}} = 11,1 \cdot 10^7 \text{ Па} = 111 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,772 \cdot 160 = 123,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 111 \text{ МПа} < \varphi \cdot [\sigma] = 123,52 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости соблюдается.

Так как значение максимальной гибкости для выбранного сечения не превышает предельного значения гибкости для стали $\lambda_{\max} = 76,37 < \lambda_{\text{пред}} = 100$, то критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$P_{кр} = (310 - 1,14 \cdot 76,37) \cdot 10^6 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4} = 1043,35 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1043,35 \text{ кН},$$

где $P_{кр}$ – коэффициенты формулы Ясинского для малоуглеродистой стали [1], $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1043,35}{520} \approx 2.$$

Вывод: для заданной колонны выбрано поперечное сечение, состоящее из двух двутавров № 18, для которого выполняется условие устойчивости с коэффициентом запаса 2.

Задания для самостоятельной работы

Подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости (рисунок 5.3). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

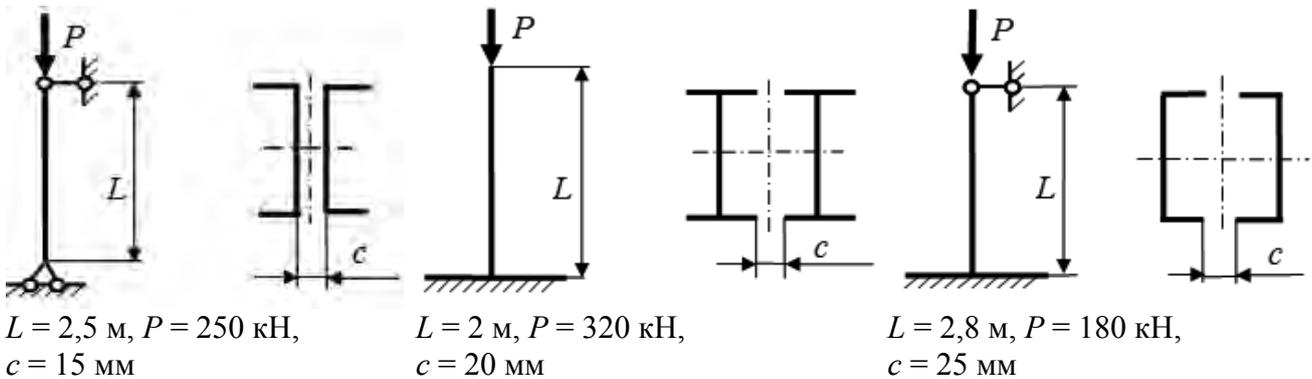


Рисунок 5.3 – Задания для самостоятельной работы

6 Принципы расчета конструкций при динамическом воздействии. Расчеты на прочность и жесткость при ударе

Пример – На двутавровую стальную балку (рисунок 6.1) с высоты h падает груз весом G . Найти максимальное нормальное напряжение, возникающее в балке.

Исходные данные: $h = 16$ мм; $G = 1,6$ кН; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^{11}$ Па.

Двутавр № 24: $W_x = 289 \text{ см}^3 = 289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; $I_x = 3460 \text{ см}^4 = 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

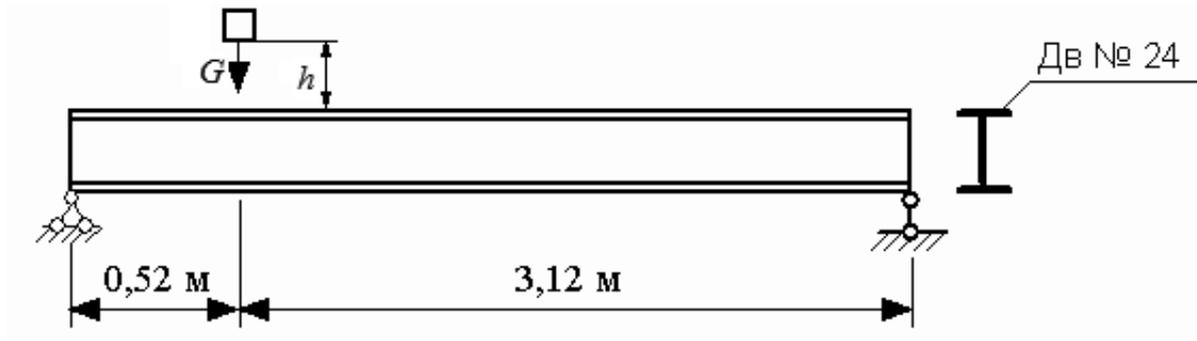
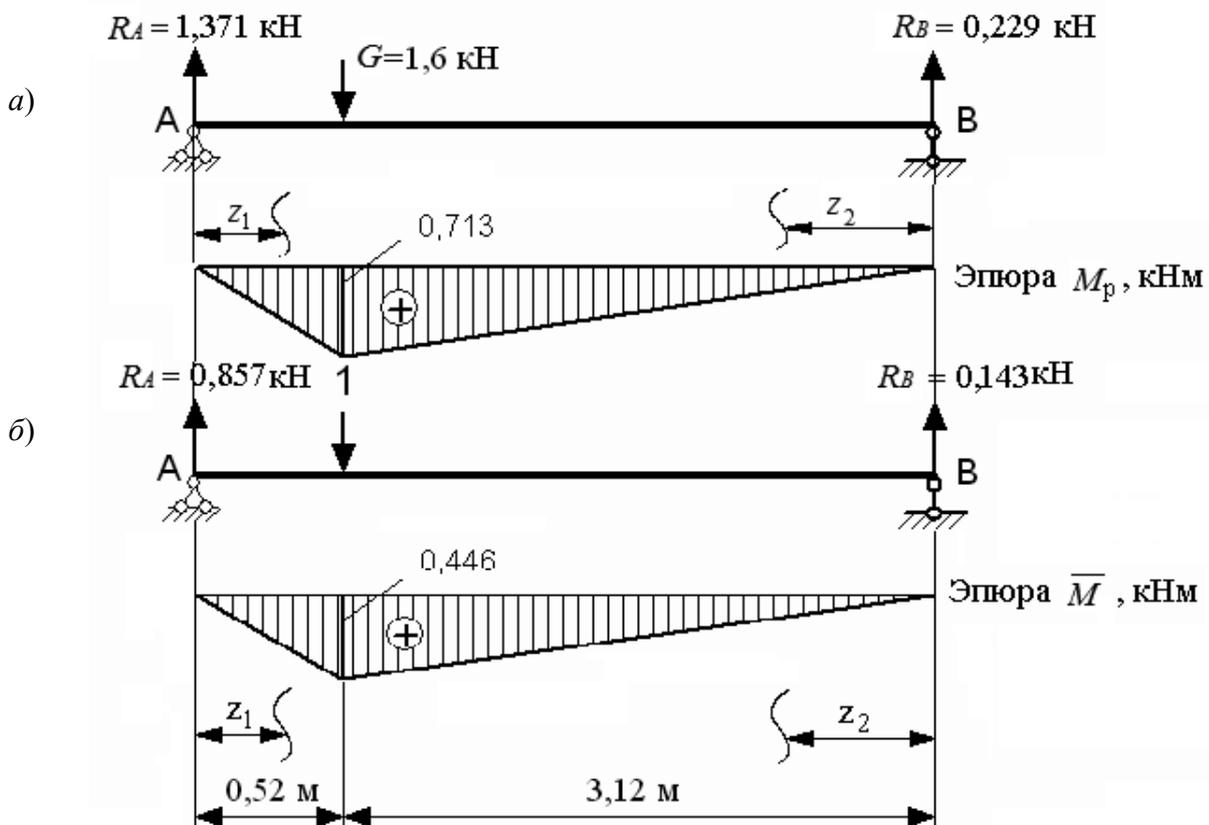


Рисунок 6.1 – Заданная схема балки

Решение

Для определения опасного сечения балки и деформаций в точке удара рассмотрим вспомогательные схемы, для которых построим эпюры изгибающих моментов (рисунок 6.2).



а – грузовая; б – единичная

Рисунок 6.2 – Вспомогательные схемы балки и эпюры изгибающих моментов

От схемы балки, в которой груз G приложен статически, строится грузовая эпюра изгибающих моментов M_p (см. рисунок 6.2, а) [5].

Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad G \cdot 0,52 - R_g \cdot 3,12 = 0;$$

$$R_g = \frac{1,6 \cdot 0,52}{3,12} = 0,229 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - G = 0;$$

$$R_A = G - R_g = 1,6 - 0,229 = 1,371 \text{ кН}.$$

Рассчитаем ординаты эпюры M_p по участкам.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 0,52$ м

$$M = R_A \cdot z_1 = 1,371 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 0,52 \text{ м}; \quad M = 0,713 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 3,12$ м

$$M = R_B \cdot z_2 = 0,229 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м}; \quad M = 0,713 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

От схемы балки, в которой в месте падения груза приложена единичная сила, строится единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M} (см. рисунок 6.2, б)).

Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad 1 \cdot 0,52 - \bar{R}_g \cdot 3,12 = 0;$$

$$\bar{R}_g = \frac{1 \cdot 0,52}{3,12} = 0,143 \text{ кН}.$$

$$\sum y = 0; \quad \bar{R}_A + \bar{R}_B - 1 = 0;$$

$$\bar{R}_A = 1 - \bar{R}_B = 1 - 0,143 = 0,857 \text{ кН}.$$

Рассчитаем ординаты эпюры \bar{M} по участкам:

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 0,52$ м

$$M = \bar{R}_A \cdot z_1 = 0,857 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$



$$z_1 = 0,52 \text{ м}; \quad M = 0,446 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 3,12 \text{ м}$

$$M = \bar{R}_B \cdot z_2 = 0,143 \cdot z_2;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м} \quad M = 0,446 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По грузовой эпюре M_p определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 0,713 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Максимальные статические напряжения

$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{0,713 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 2,47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,47 \text{ МПа}.$$

Рассчитаем статическое перемещение в точке удара по формуле Верещагина, перемножив эпюры \bar{M} и M_p :

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,713 \cdot 0,52 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,446 + \frac{1}{2} \cdot 0,713 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,446 \right) = \\ &= \frac{0,386}{E \cdot I_x} = \frac{0,386 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,0557 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

Определим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 16}{0,0557}} = 25.$$

Найдем максимальное динамическое напряжение:

$$\sigma_d^{\max} = \sigma_{cm}^{\max} \cdot k_d = 2,47 \cdot 25 = 61,65 \text{ МПа}.$$

Задания для самостоятельной работы

На двутавровую стальную балку (рисунок 6.3) с высоты h падает груз G . Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Найти максимальное нормальное напряжение в балке.

Исходные данные к задаче берутся из таблицы 6.1.



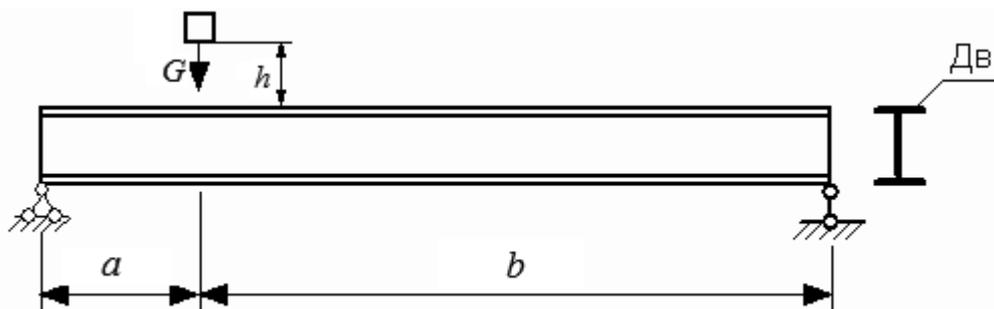


Рисунок 6.3 – Расчетная схема для самостоятельной работы

Таблица 6.1 – Исходные данные

Номер строки	a , м	b , м	h , мм	Номер двутавра	G , кН
1	1,1	3,1	11	14	2,1
2	1,2	3,2	12	16	2,2
3	1,3	3,3	13	18	2,3
4	1,4	3,4	14	20	2,4
5	1,5	3,5	15	22	2,5
6	1,6	3,6	16	24	2,6
7	1,7	3,7	17	27	2,7
8	1,8	3,8	18	30	2,8

Список литературы

1 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 2000. – 560 с.

2 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций : учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва : Машиностроение, 2002. – 436 с.

3 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Дельта, 2008. – 816 с.

4 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Высшая школа, 2007. – 797 с.

5 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.