ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации», направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2018

УДК 512.817
ББК 22.176
Д 48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «04» сентября 2018 г., протокол № 2

Составитель доц. А. И. Якимов

Рецензент С. В. Болотов

Методические рекомендации предназначены к лабораторным работам по дисциплине «Дискретная математика» (2 семестр). Приведены задания и список литературы для подготовки.

Учебно-методическое издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	А. И. Якимов
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

Введение

Целью преподавания дисциплины «Дискретная математика» является ознакомление студентов с основными дискретными математическими моделями и методами, понятиями теории множеств и отношений, операциями алгебры логики, критериями полноты систем булевых функций, задачами анализа и синтеза логических схем, различными представлениями графов и операциями над графами; способами задания конечного автомата, методами синтеза и минимизации абстрактного конечного автомата.

Методические рекомендации имеют целью помочь студентам в подготовке и выполнении лабораторных работ по дисциплине.

1 Лабораторная работа № 1. Реализация операций над подмножествами заданного универсума

Цель работы: изучение реализации операций над подмножествами заданного универсума.

Порядок выполнения работы

1 Изучить теоретические сведения.

2 Получить задание у преподавателя.

3 Исследовать способы представления множеств в ЭВМ и операции над подмножествами заданного универсума:

– для реализации операций над подмножествами заданного универсума подготовить конечные множества a и b;

– составить программу для нахождения пересечения, объединения, дополнения множеств a и $в$;

– дать обоснование полученного решения.

4 Сделать выводы по результатам исследований.

5 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования операций над подмножествами заданного универсума.

4 Выводы.

Основные теоретические положения

Пусть универсум U конечный и число элементов в нем не превосходит разрядности ЭВМ: $|U| < n$. Элементы универсума нумеруются: $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Подмножество A универсума U представляется кодом (машинным словом или битовой шкалой) C, в котором

$$C[i] = \begin{cases} 1, \text{ если } & u_i \in A, \\ 0, \text{ если } & u_i \notin A, \end{cases}$$

где $C[i]$ – это i-й разряд кода C.

Код пересечения множеств A и B есть поразрядное логическое произведение кода множества A и кода множества B.

Код объединения множеств A и B есть поразрядная логическая сумма кода множества A и кода множества B.

Код дополнения множества A есть инверсия кода множества A.

В большинстве ЭВМ для этих операций есть соответствующие машинные команды. Таким образом, операции над небольшими множествами выполняются весьма эффективно.

Контрольные вопросы и задания

1 Какие из приведенных соотношений верны (ответ обосновать):

а) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{3\} \in \{\{1\}, 3\}$; $\{1, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

б) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; $\{1, 3\} \in \{\{1, 3\}\}$; $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

в $3 \in \{\{1, 2, 3)\}$; $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

г) $1 \in \{1, \{2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

д) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; $2 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

е) $2 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; $3 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

ж) $3 \in \{\{1, 2\}, 3\}\}$; $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $\{2, 3\} \in \{1, 2, 3\}$;

з) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, 3\}$;

и) $\{3\} \in \{1, 2, 3\}$; $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; $\{1, \{3\}\} \in \{1, 2, \{3\}\}$;

к) $2 \in \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{3\}\}$; $\{2, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

2 Какие из приведенных соотношений верны (ответ обосновать):

а) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$;

б) $\{1\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{2, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, 3\}\}$;

в) $2 \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{\{1\}, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, 3\}$; $\{1, \{3\}\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$;

г) $1 \subseteq \{\{1\}, 2, 3\}$; $\{2, 3\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{1, \{2\}\} \subseteq \{1, 2, \{2, 3\}\}$;

д) $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

е) $3 \subseteq \{1, 2, \{3\}\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{2\} \subseteq \{\{1\}, 2, \{2, 3\}\}$;

ж) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, 3\}$;

з) $\{3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$; $\{2, 3\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$;

и) $2 \subseteq \{\{1\}, 2, 3\}$; $\{1, 3\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$; $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;

к) $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\{\{1\}, 2\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$; $\{3\} \subseteq \{1, \{2\}, 3\}$.

3 Привести примеры множеств *A*, *B*, *C*, *D* и *F*, которые удовлетворяют заданным условиям:

а) $A \subset B, B \in C, C \subset D, D \subseteq F$;

б) $A \in B, B \subseteq C, C \subset D, D \subseteq F$;

в) $A \subseteq B, B \in C, C \subset D, D \in F$;

г) $A \subseteq B, B \in C, C \notin D, D \subseteq F$;

д) $A \in B, B \subseteq C, C \subset D, D \notin F$;

е) $A \in B, B \notin C, C \subset D, D \in F$;

ж) $A \subset B, B \in C, C \subseteq D, D \notin F$;

з) $A \in B, B \subseteq C, C \subset D, D \notin F$;

и) $A \in B, B \notin C, C \subseteq D, D \subseteq F$;

к) $A \notin B, B \in C, C \subseteq D, D \subseteq F$.

4 Для заданного множества *A* определить множество всех подмножеств множества *A*, т. е. булеан множества *A*:

а) $A = \{1, 2, \{3\}\}$;

б) $A = \{\varnothing, \{1\}, \{\varnothing\}\}$;

в) $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

г) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 1\}$;

д) $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$;

е) $A = \{1, \{2\}, 3\}$;

ж) $A = \{\varnothing, \{1\}, 2\}$;

з) $A = \{1, \varnothing, \{1, 2\}\}$;

и) $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$;

к) $A = \{1, \{\varnothing\}, \{1, 2\}\}$.

2 Лабораторная работа № 2. Исследование свойств отношений

Цель работы: изучить свойства отношений: симметрию, антисимметрию, рефлексивность, антирефлексивность, транзитивность, полноту.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Основные теоретические положения

Пусть бинарное отношение R на M задано в виде диаграммы, состоящей из узлов и стрелок так, что узлам взаимно однозначно соответствуют элементы множества M, а стрелкам, соединяющим пару a и b в направлении от a к b, – наличие отношения $a\ R\ b$. Определить графические особенности диаграммы в зависимости от характера свойств отношения R.

1 Отношение $R \subseteq M \times M$ рефлексивно, если $a\ R\ a$ для любых $a \in M$. Соответствующая диаграмма рефлексивного отношения должна содержать петли во всех узлах (т.е. стрелки, начинающиеся и заканчивающиеся в одном узле).

2 Отношение R антирефлексивно, если ни для каких $a \in M$ не выполняется $a\,R\,a$. Диаграмма антирефлексивного отношения не должна содержать ни одной петли.

3 Отношение R симметрично, если из $a\,R\,b$ следует $b\,R\,a$. В диаграмме симметричного отношения для каждой стрелки, соединяющей два узла, существует также стрелка, соединяющая эти узлы в обратном направлении.

4 Отношение R антисимметрично, если из $a\,R\,b$ и $b\,R\,a$ следует $a = b$. В диаграмме антисимметричного отношения не существует двух различных узлов, связанных парой (разнонаправленных) стрелок.

5 Отношение R транзитивно, если из $a\,R\,b$ и $b\,R\,c$ следует $a\,R\,c$. В диа-

грамме транзитивного отношения для любых двух стрелок таких, что одна направлена от a к b, а другая – от b к c, существует стрелка, соединяющая a и c в направлении от a к c.

Контрольные вопросы и задания

1 Каковы свойства отношений, заданных:

а) на множестве натуральных чисел N: R_1 – «быть не больше ≤»; R_2 – «быть делителем»; R_3 – «быть равным»;

б) на множестве точек действительной плоскости $\Re \times \Re$: R_4 – «находиться на одинаковом расстоянии от начала координат»; R_5 – «быть симметричным относительно оси X»;

в) на системе множеств 2^M: R_6 – «пересекаться с …» (иметь непустое пересечение); R_7 – «являться строгим включением с …»;

г) на множестве людей: R_8 – «быть сыном»; R_9 – «жить в одном городе»; R_{10} – «быть братом»;

д) на множестве элементов структуры (рисунок 1): R_{11} – «быть непосредственно связанным с …»; R_{12} – «быть начальником».

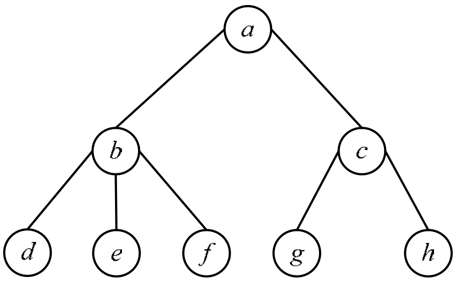


Рисунок 1 – Структура элементов множества

2 Определить, является ли отношение R на множестве $B = \{1, 2, 3, 4\}$ симметричным, антисимметричным, рефлексивным, антирефлексивным, транзитивным, полным. Построить граф, график и матрицу отношения R, если:

а) $R = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$;

б) $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

в) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

г) $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

д) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 4), (4,1)\}$;

е) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

ж) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

з) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$;

и) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$;

к) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 4)\}$.

3 Лабораторная работа № 3. Операции над графами

Цель работы: изучить операции над графами для образования новых графов из нескольких более простых.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Основные теоретические положения

Пусть $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(X_2, E_2)$ – произвольные графы. Объединением $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $X_1 \cup X_2$ и с множеством ребер (дуг) $E_1 \cup E_2$.

Рассмотрим операцию на примере графов $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(X_2, E_2)$, приведенных на рисунке 2. Множества вершин первого и второго графов определяется как $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $X_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$, а множество вершин результирующего графа – $X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Аналогично определяем множества дуг графа:

$E_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_3)\}$; $E_2 = \{(x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$;

$E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$.

Результирующий граф $G(X, E) = G_1(X_1, E_1) \cup G_2(X_2, E_2)$ также приведен на рисунке 2.

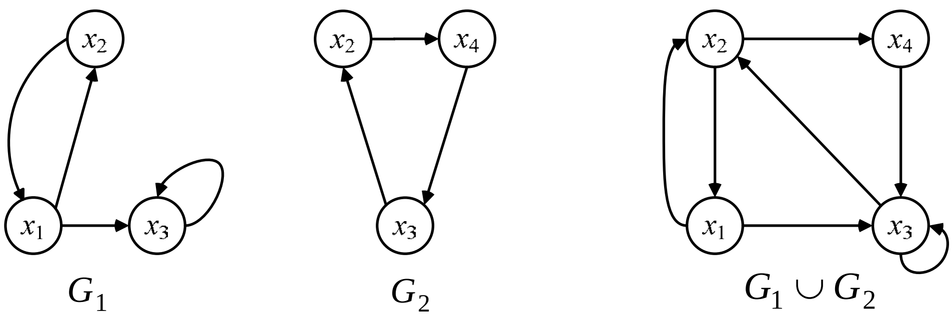


Рисунок 2 – Операция объединения графов

Операция объединения обладает свойствами, которые следуют из определения операции и свойств операций на множествах:

$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$ – свойство коммутативности;

$G_1 \cup (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cup G_2) \cup G_3$ – свойство ассоциативности.

Операция объединения графов может быть выполнена в матричной форме.

Пусть $G_1(X_1, E_1)$ и $G_2(X_2, E_2)$ – произвольные графы. Пересечением $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $X_1 \cap X_2$ с множеством ребер (дуг) $E = E_1 \cap E_2$.

Операция пересечения обладает свойствами, которые следуют из определения операции и свойств операций на множествах:

$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$ – свойство коммутативности;

$G_1 \cap (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cap G_2) \cap G_3$ – свойство ассоциативности.

Для того чтобы операция пересечения была всеобъемлющей, необходимо ввести понятие пустого графа. Граф $G(X,E)$ называется пустым, если множество X вершин графа является пустым ($X = \varnothing$). Заметим, что в этом случае и множество E ребер (дуг) графа также пустое множество ($E = \varnothing$). Пустой граф обозначается символом $\varnothing$. Такой граф может быть получен в результате выполнения операции пересечения графов, у которых $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. В этом случае говорят о непересекающихся графах.

Рассмотрим выполнение операции пересечения графов, изображенных на рисунке 3. Для нахождения множества вершин результирующего графа запишем множества вершин исходных графов и выполним над этими множествами операцию пересечения:

$X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$; $X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$;

$X = X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

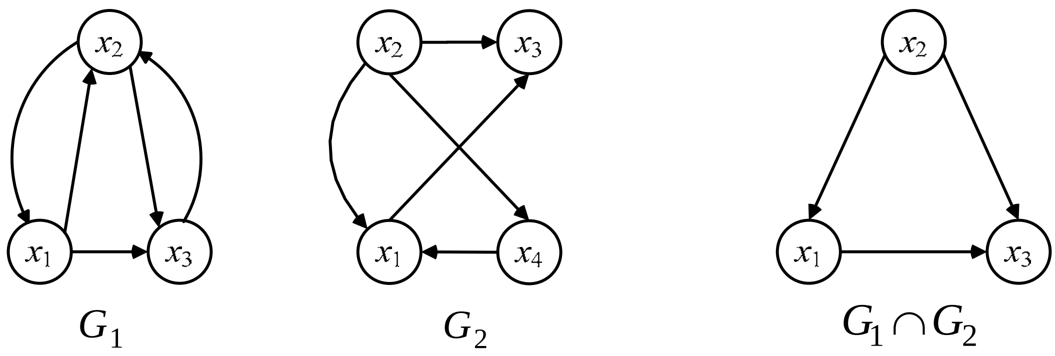


Рисунок 3 – Операция пересечения графов

Аналогично определяем множество E дуг результирующего графа:

$E_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\}$;

$E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_1)\}$;

$E = E_1 \cap E_2 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3)\}$.

Графы $G_1(X_1, E_1)$, $G_2(X_2, E_2)$ и их пересечение приведены на рисунке 3.

Операция пересечения графов может быть выполнена в матричной форме.

Контрольные вопросы и задания

Даны графы G_1 и G_2. Найти $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1\ (G_2)$, $G_2\ (G_1)$, $G_1 \times G_2$, $G_1 + G_2$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найти матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1 (рисунок 4).

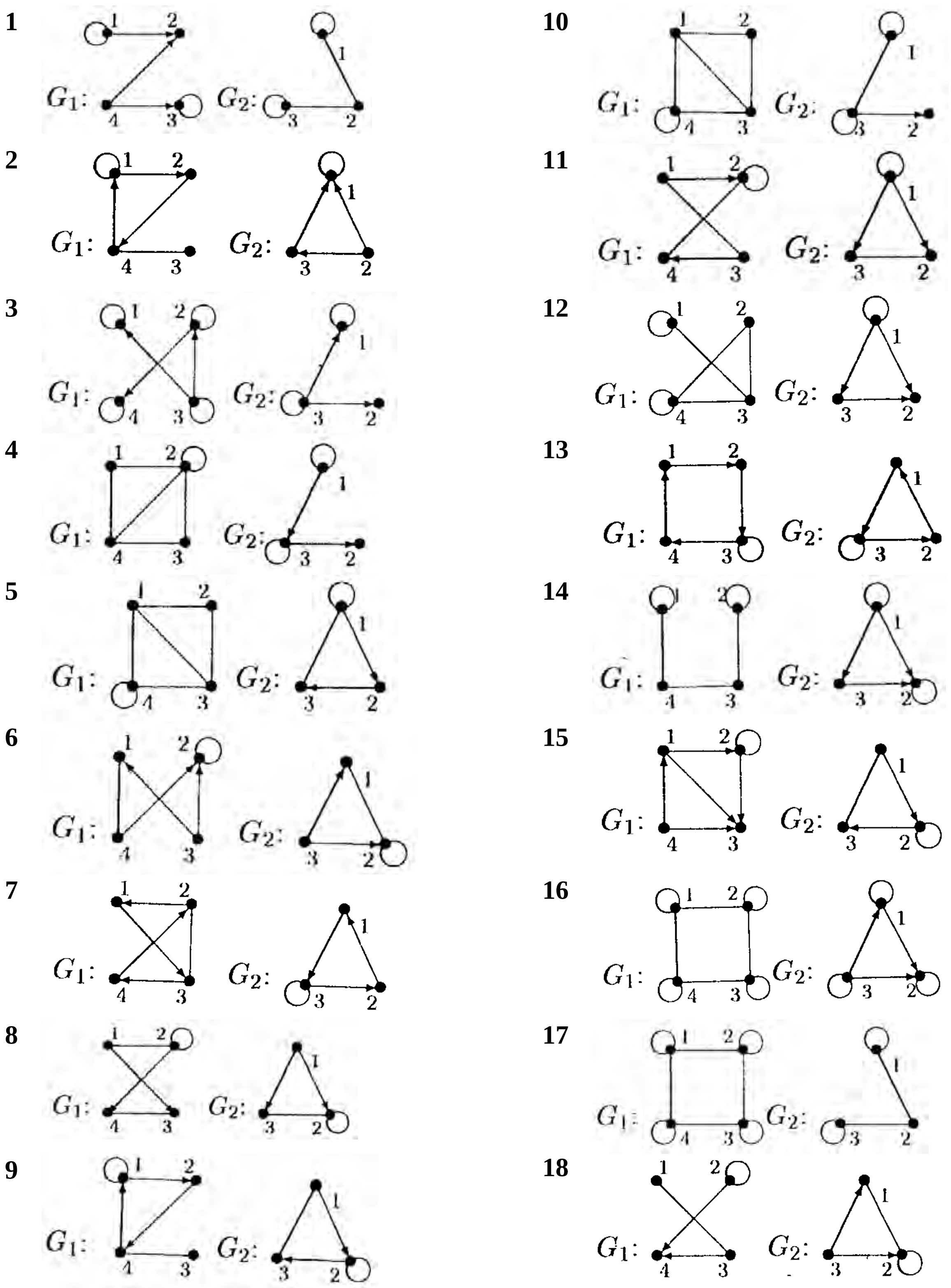
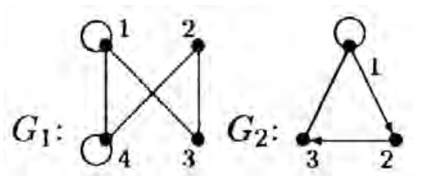
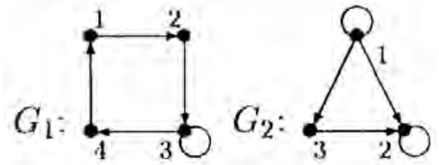


Рисунок 4 – Варианты контрольных заданий

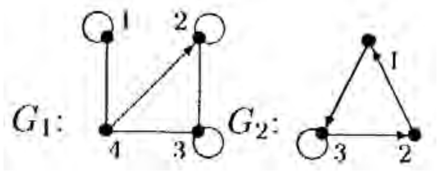
19



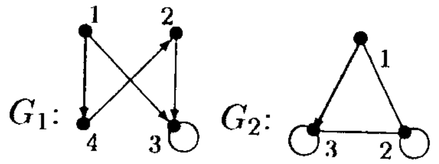
20



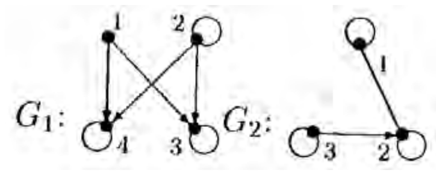
21



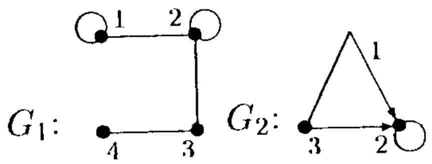
22



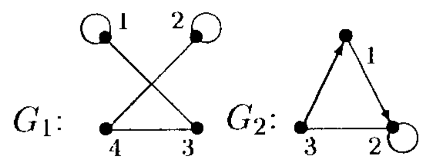
23



24



25



Окончание рисунка 4

4 Лабораторная работа № 4. Решение задач теории графов в системе компьютерной алгебры Maple

Цель работы: изучить основные функций компьютерной алгебры Maple для решения задач теории графов.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Система Maple хорошо зарекомендовала себя при изучении учебных дисциплин, позволяя решать задачи, связанные с графами. Некоторые команды, реализуемые в Maple (использование функций):

Graph() – для задания графа;

CompleteGraph() – для создания полного графа;

DrawGraph(G,style=cycle) – для соединения графа по контуру;

New(G) – для создания пустого графа;

RandomGraph(G) – для создания случайного графа;

Graph ([количество вершин]) – для создания графа без ребер;

AddEdge(G,{},inplace=false) – для добавления ребер в граф, третий оператор необязателен. Он используется, если измененный граф не нужно сохранять и распечатывать;

AddVertex(G,[]) – для добавления вершин в граф;

DeleteEdge(G,{})/Vertex(G,[]) – для удаления ребер и вершин из графа;

DrawGraph(G) – для построения графа;

GraphUnion(G1,G2) – для объединения двух графов;

AdjacencyMatrix(G) – для нахождения матрицы смежности;

IncidenceMatrix(G) – для нахождения матрицы инцидентности;

WeightMatrix(G) – для нахождения весов ребер;

IsNetwork(G) – для нахождения начальных и конечных вершин;

DijkstrasAlgoritm(G, ‘s’, ‘t’) – для нахождения кратчайшего расстояния (где s – начало, t – конец).

Для работы с графами в Maple предназначена библиотека GraphTheory. Команда подключения этой библиотеки стандартная, т. е. достаточно воспользоваться оператором with (библиотека network в 14 версии Maple устарела!).

Основные моменты работы с графами в системе Maple.

Для начала подключим библиотеку GraphTheory для того, чтобы ядро системы знало, что работа будет идти с графами.

with(GraphTheory):

Двоеточие после функции ставится в случае, если не нужно отображать ее результат. В этом случае функция все равно выполняется.

Создадим граф с четырьмя вершинами и четырьмя дугами:

G := Graph({{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}}).

Построим заданный граф:

DrawGraph(G).

Контрольные вопросы и задания

На заданной сети (рисунок 5) указаны пропускные способности ребер. Предполагается, что пропускные способности в обоих направлениях одинаковы.

Требуется:

1) сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока *I* в сток *S*;

2) выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

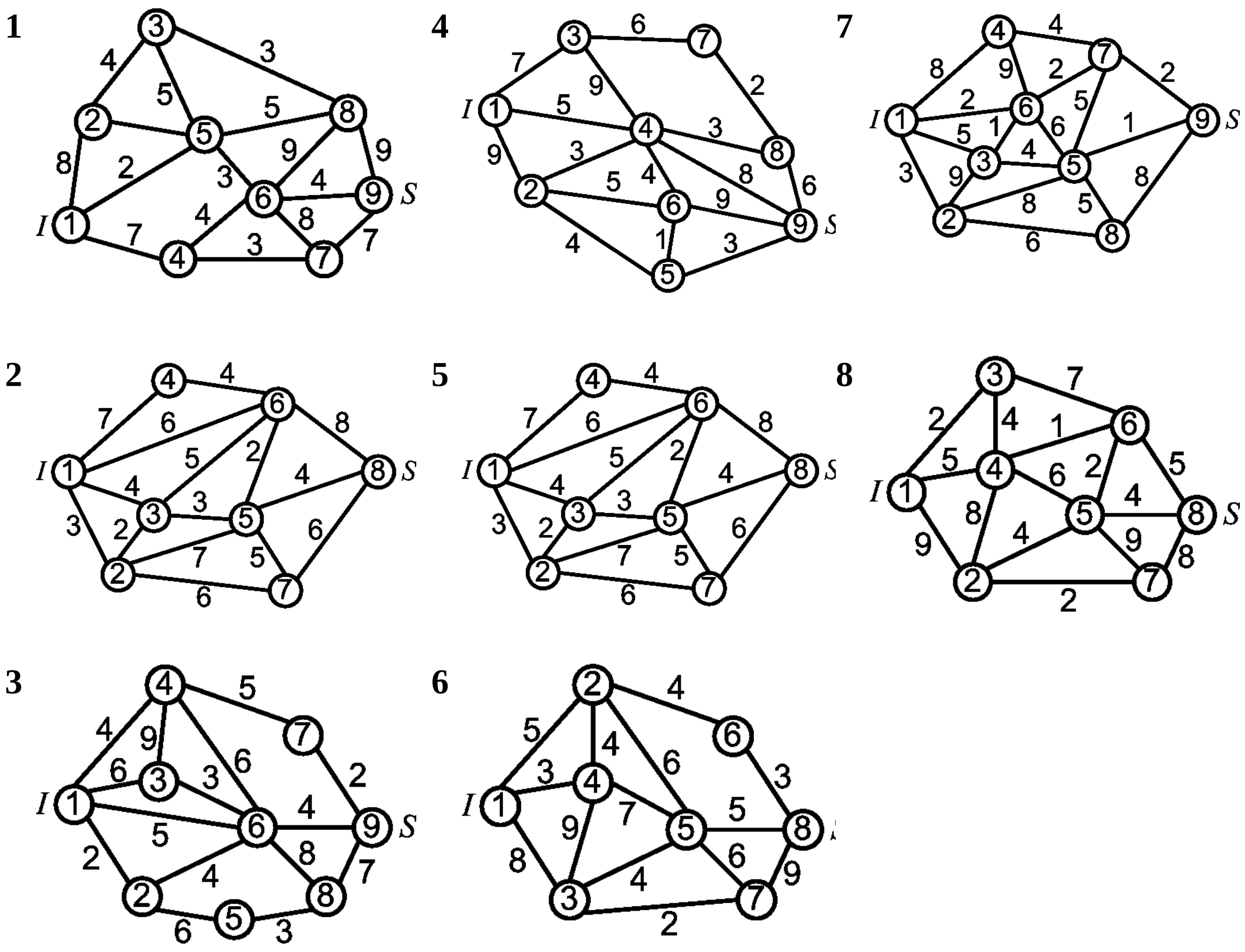


Рисунок 5 – Варианты контрольных заданий

5 Лабораторная работа № 5. Исследование полноты системы булевых функций

Цель работы: изучить методику исследования полноты системы булевых функций по теореме Поста.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Самодвойственные функции.

Функция $g(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *двойственной* к $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если $g(\tilde{x}^n)=\bar{f}(\bar{\tilde{x}}^n)$. Двойственная функция обозначается $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется самодвойственной, если $f(\tilde{x}^n) = f^*(\tilde{x}^n)$. Класс самодвойственных функций обозначается *S*.

Линейные функции.

Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *линейной*, если она представима в виде

$$f(\tilde{x}^n)=\alpha_0\oplus\alpha_1x_1\oplus\ldots\oplus\alpha_nx_n;\qquad \alpha_i\in\{0,1\};\quad 0\le i\le 1.$$

Множество всех линейных функций обозначается *L*.

Функции, сохраняющие константу.

Говорят, что функция $f(\tilde{x}^n)$ сохраняет константу 0 (константу 1), если $f(0,0,...,0) = 0$ (соответственно, $f(1,1,...,1) = 1$). Множества функций, сохраняющих константу 0 или 1, обозначаются соответственно T_0 и T_1.

Монотонные функции.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ из B^n, таких, что $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ имеет место неравенство $f(\tilde{\alpha})\le f(\tilde{\beta})$.

В противном случае функция называется *немонотонной*.

Вершина $\tilde{\alpha}$ куба B^n называется *нижней единицей* (*верхним нулем*) монотонной функции $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\alpha})=1$ ($f(\tilde{\alpha})=0$) и для всякой вершины $\tilde{\beta}$ из $\tilde{\alpha}>\tilde{\beta}$ вытекает, что $f(\tilde{\beta}) = 0$ (соответственно, из $\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}$ вытекает $f(\tilde{\beta}) = 1$). Множество монотонных функций обозначается *M*.

Теорема.

Система *K* полна в P_2 тогда, и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, *S*, *L*, *M*.

Контрольные вопросы и задания

Доказать, является ли система булевых функций полной при:
1) $\{\to,\ 0\}$;
2) $\{\wedge,\ \oplus,\ 1\}$;
3) $\{\to,\ 1\}$;
4) $\{|\}$, где $x\mid y=\neg(x\wedge y)$ – штрих Шеффера;
5) $\{\downarrow\}$, где $x\downarrow y=\neg(x\vee y)$ – стрелки Пирса;
6) $\{\to,\ \oplus\}$;

7) $\{\equiv,\ \wedge,\ 0\}$;

8) $\{xy \vee xz \vee yz, -x\}$;

9) $\{\oplus,\ 1\}$;

10) $\{\oplus,\ \vee,\ 0\}$;

11) $\{xy, (x \equiv y) \equiv z\}$;

12) $\{\rightarrow,\ \vdash\rightarrow\}$, где $x \vdash\rightarrow y = \neg(x \rightarrow y)$;

13) $\{\vdash\rightarrow,\ \neg\}$;

14) $\{\vdash\rightarrow\equiv\}$;

15) $\{\vee,\ \neg\}$.

6 Лабораторная работа № 6. Минимизация функций булевой алгебры

Цель работы: изучить методы минимизации функций булевой алгебры.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.

2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.

3 Сделать выводы по результатам исследований.

4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.

2 Постановка задачи.

3 Результаты исследования.

4 Выводы.

Основные теоретические положения

Задача минимизации булевых функций.

Задачу поиска наиболее простой записи булевой функции называют задачей минимизации. Решение такой задачи основывается на понятии несущественности переменных. Переменная называется несущественной на паре наборов, если при изменении ее значения на противоположное булева функция сохраняет свое значение. Две конъюнкции, содержащие несущественную переменную, заменяются одной, в которой несущественная переменная отсутствует.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции $f(x_1,\ldots, x_n)$ называют ***кратчайшей***, если она содержит наименьшее число элементарных конъюнкций по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) булевой функции $f(x_1,\ldots, x_n)$ называют ***минимальной***, если она имеет наименьшее число аргументов среди всех эквивалентных ей ДНФ.

Импликантой функции $f(x_1,\ldots, x_n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1,\ldots, x_n\}$, что $K \vee f(x_1,\ldots, x_n) = f(x_1,\ldots, x_n)$. Импликанта называется ***простой***, если при отбрасывании любого аргумента из K получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантой функции f. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется ***сокращенной*** ДНФ функции f.

ДНФ булевой функции $f(x_1,\ldots, x_n)$ называют ***тупиковой,*** если отбрасывание любого слагаемого или аргумента приводит к неэквивалентной ДНФ.

Тупиковая ДНФ функции $f(x_1,\ldots, x_n)$ получается из сокращенной ДНФ этой функции путем отбрасывания некоторых элементарных конъюнкций. Среди тупиковых ДНФ находят минимальную и кратчайшую ДНФ функции.

Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод может быть применен для минимизации функций алгебры логики от любого числа аргументов, однако для простоты изложения и большей наглядности его рассмотрение будем производить на примере минимизации функции трех аргументов.

Представим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде следующей ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = k_1^0\bar{x}_1 \vee k_1^1 x_1 \vee k_2^0\bar{x}_2 \vee k_2^1 x_2 \vee k_3^0\bar{x}_3 \vee k_3^1 x_3 \vee k_{12}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee$$

$$\vee k_{12}^{01}\bar{x}_1 x_2 \vee k_{12}^{10} x_1\bar{x}_2 \vee k_{12}^{11} x_1 x_2 \vee k_{13}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee k_{13}^{01}\bar{x}_1 x_3 \vee k_{13}^{10} x_1\bar{x}_3 \vee k_{13}^{11} x_1 x_3 \vee$$

$$\vee k_{23}^{00}\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee k_{23}^{01}\bar{x}_2 x_3 \vee k_{23}^{10} x_2\bar{x}_3 \vee k_{23}^{11} x_2 x_3 \vee k_{123}^{000}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{001}\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee$$

$$\vee k_{123}^{010}\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{011}\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee k_{123}^{100} x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{101} x_1\bar{x}_2 x_3 \vee k_{123}^{110} x_1 x_2\bar{x}_3 \vee k_{123}^{111} x_1 x_2 x_3. \quad (1)$$

Здесь представлены все возможные конъюнктивные члены, которые могут входить в дизъюнктивную форму представления $f(x_1, x_2, x_3)$. Коэффициенты k с различными индексами являются неопределенными и подбираются так, чтобы получающаяся после этого дизъюнктивная форма была минимальной. Если теперь задавать все возможные наборы аргументов (x_1, x_2, x_3) и приравнивать полученное после этого выражение (отбрасывая нулевые конъюнкции) значению функции на выбранных наборах, то получим систему из 2^3 уравнений для определения коэффициентов k:

$$\begin{cases} k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{000} = f(0,0,0); \\ k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{001} = f(0,0,1); \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{010} = f(0,1,0); \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{011} = f(0,1,1); \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{100} = f(1,0,0); \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{101} = f(1,0,1); \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{110} = f(1,1,0); \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{111} = f(1,1,1). \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть таблично задана некоторая функция $f(x_1, x_2, x_3)$. Задание некоторой конкретной функции определяет значения правых частей системы (2): $f(x_1, x_2, x_3) = 0 \vee 1$. Если функция $f(x_1, x_2, x_3)$ на соответствующем наборе переменных равна нулю, то все коэффициенты, входящие в уравнение, будут равны нулю. Это вытекает из того, что дизъюнкция равна нулю только тогда, когда все члены, входящие в нее, равны нулю.

Рассмотрев все наборы, на которых данная функция обращается в нуль, получим все нулевые коэффициенты k. В уравнениях, в которых справа стоят единицы, вычеркнем все нулевые коэффициенты. Из оставшихся коэффициентов приравняем единице коэффициент, определяющий конъюнкцию наименьшего возможного ранга, а остальные коэффициенты в левой части данного уравнения примем равными нулю (это можно сделать, т. к. дизъюнкция обращается в единицу, если хотя бы один член ее равен единице). Единичные коэффициенты k определят из (1) соответствующую ДНФ.

Пример – $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$.

Составим систему (2):

$$\begin{cases} k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{000} = 1; \\ k_1^0 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{00} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{001} = 0; \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{00} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{010} = 0; \\ k_1^0 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{01} \vee k_{13}^{01} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{011} = 0; \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{100} = 1; \\ k_1^1 \vee k_2^0 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{01} \vee k_{123}^{101} = 1; \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^0 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{10} \vee k_{123}^{110} = 1; \\ k_1^1 \vee k_2^1 \vee k_3^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{11} \vee k_{23}^{11} \vee k_{123}^{111} = 1. \end{cases}$$

Из второго, третьего и четвертого уравнений в силу свойств дизъюнкции вытекает, что

$$k_1^0 = k_2^0 = k_2^1 = k_3^0 = k_3^1 = k_{12}^{00} = k_{12}^{01} = k_{13}^{00} = k_{13}^{01} = k_{23}^{01} = k_{23}^{10} = k_{23}^{11} = k_{123}^{001} = k_{123}^{010} = k_{123}^{011} = 0.$$

Таким образом, данная система имеет вид:

$$\begin{cases} k_{23}^{00} \vee k_{123}^{000} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{10} \vee k_{23}^{00} \vee k_{123}^{100} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{10} \vee k_{13}^{11} \vee k_{123}^{101} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{10} \vee k_{123}^{110} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{12}^{11} \vee k_{13}^{11} \vee k_{123}^{111} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} k_{23}^{00} = 1; \\ k_1^1 \vee k_{23}^{00} = 1; \\ k_1^1 = 1; \\ k_1^1 = 1; \\ k_1^1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим минимальную ДНФ для данной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Описанный метод эффективен лишь для минимизации функций, число аргументов в которых не больше пяти-шести. Это связано с тем, что число уравнений равно 2^n.

Правила минимизации с использованием диаграмм Вейча (карт Карно).

В диаграммах Вейча (картах Карно) таблица истинности булевой функции представляется в виде координатной карты состояний, которая содержит 2^n клеток (по числу входных наборов булевой функции n переменных). Переменные функции разбиваются на две группы так, что одна группа определяет координаты столбца карты, а другая – координаты строки.

При таком способе построения каждая клетка определяется значениями переменных, соответствующих определенному двоичному набору. Внутри каждой клетки карты Карно ставится значение функции на данном наборе. Переменные в строках и столбцах располагаются так, чтобы соседние клетки карты Карно различались только в одном разряде переменных, т. е. были соседними. Поэтому значения переменных в столбцах и в строках карты образуют соседний код Грея. Такой способ представления очень удобен для наглядности при минимизации булевых функций.

При минимизации булевых функций с помощью диаграмм Вейча (карт Карно) используют следующие правила.

1 В карте Карно группы единиц (для получения ДНФ) и группы нулей (для получения конъюнктивной нормальной формы (КНФ)) необходимо обвести четырехугольными контурами. Внутри контура должны находиться только одно-

именные значения функции. Этот процесс соответствует операции склеивания или нахождения импликант данной функции.

2 Количество клеток внутри контура должно быть целой степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16...).

3 При проведении контуров крайние строки карты (верхние и нижние, левые и правые), а также угловые клетки считаются соседними (для карт до четырех переменных).

4 Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.

5 Все единицы (нули) в карте (даже одиночные) должны быть охвачены контурами. Любая единица (нуль) может входить в контуры произвольное количество раз.

6 Множество контуров, покрывающих все 1 (0) функции, образуют тупиковую ДНФ (КНФ). Целью минимизации является нахождение минимальной из множества тупиковых форм.

7 В элементарной конъюнкции (дизъюнкции), которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри обведенного контура. Переменные булевой функции входят в элементарную конъюнкцию (для значений функции 1) без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 1, и с инверсией – если 0. Для значений булевой функции, равных 0, записываются элементарные дизъюнкции, куда переменные входят без инверсии, если их значение на соответствующих координатах равно 0, и с инверсией – если 1.

Контрольные вопросы и задания

Найти минимальные ДНФ и КНФ булевых функций:

1) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15$;

2) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14$;

3) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15$;

4) $f(x, y, z, t) = 1 | 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15$;

5) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15$;

6) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 15$;

7) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15$;

8) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15$;

9) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15$;

10) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14$;

11) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 4, 6, 7, 10, 12, 14, 15$;

12) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15$;

13) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14$;

14) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11$;

15) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 15$;

16) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 15$;
17) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 3, 10, 11, 14, 15$;
18) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13$;
19) $f(x, y, z, t) = 1 | 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 15$;
20) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14$;
21) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 3, 7, 8, 9, 12, 13$;
22) $f(x, y, z, t) = 1 | 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$;
23) $f(x, y, z, t) = 1 | 1, 3, 4, 5, 9, 11, 12$;
24) $f(x, y, z, t) = 1 | 3, 4, 5, 6, 7, 11, 14, 15$;
25) $f(x, y, z, t) = 1 | 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14$.

7 Лабораторная работа № 7. Синтез логических схем

Цель работы: изучить методы анализа и синтеза логических схем.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Задача синтеза логической схемы.
По заданной функции f требуется построить схему, реализующую данную функцию. Задача синтеза решается неоднозначно. Можно поставить в соответствие заданной функции f целое множество схем. Для построения логической схемы необходимо элементы, предназначенные для выполнения логических операций, указанных в логической функции, располагать в порядке, указанном в булевом выражении.

Пример 1 – Построить логическую схему устройства, реализующего логическую функцию $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ (рисунок 6).

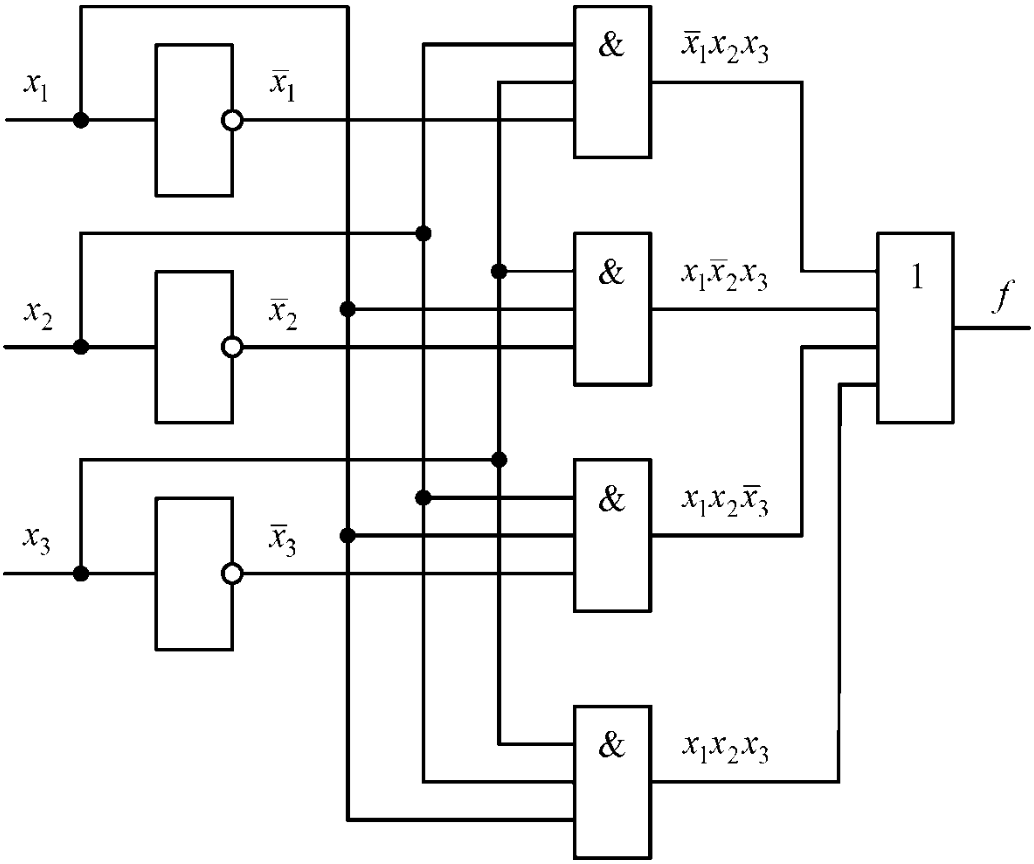


Рисунок 6 – Пример логической схемы устройства

Синтез логических устройств в заданном базисе.

С целью уменьшения номенклатуры используемых микросхем часто используют функционально полную систему в составе двух логических элементов, выполняющих операции И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Любую логическую функцию можно записать в заданном базисе логических элементов. Если задан базис И-НЕ, то путем двойного инвертирования исходного выражения или его части и применения теорем де Моргана логическая функция приводится к виду, содержащему только операции логического умножения и инвертирования. Если же задан базис ИЛИ-НЕ, исходную логическую функцию теми же приемами приводят к виду, содержащему только операции логического сложения и инверсии. Далее логическое выражение записывается через условные обозначения выбранных операций.

Пример 2 – Заданную функцию *f* перевести в базисы И-НЕ и ИЛИ-НЕ. Исходная ДНФ в базисе И-НЕ имеет вид:

$$f = x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3}} =$$

$$= \overline{(\overline{x_2 x_4})(\overline{\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4})(\overline{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3})} = (x_2 \mid x_4) \mid (\bar{x}_1 \mid x_3 \mid \bar{x}_4) \mid (x_1 \mid \bar{x}_2 \mid \bar{x}_3)\,.$$

Аналогично КНФ в базисе ИЛИ-НЕ имеет вид:

$$f=\overline{\overline{(x_1\vee x_4)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4)}}=$$

$$=\overline{\overline{(x_1\vee x_4)}\vee\overline{(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)}\vee\overline{(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4)}}=$$

$$=(x_1\downarrow x_4)\downarrow(\bar{x}_1\downarrow x_2\downarrow x_3)\downarrow(\bar{x}_2\downarrow\bar{x}_3\downarrow\bar{x}_4).$$

Пример 3 – Пусть логическая функция задана выражением

$$f=x_1x_4\vee\overline{(\bar{x}_1\vee x_3\vee\bar{x}_4)}(x_2\vee\bar{x}_3).$$

Привести логическую функцию в базис И-НЕ, ИЛИ-НЕ:
а) приводим функцию к базису И-НЕ:

$$f=f_1\vee\overline{f_2}f_3=f_1\vee\overline{\overline{\overline{f_2}f_3}}=f_1\vee\overline{(\overline{f_2}\mid f_3)}=\overline{\overline{f_1\vee\overline{(\overline{f_2}\mid f_3)}}}=\overline{\overline{f_1}\wedge\overline{\overline{(\overline{f_2}\mid f_3)}}}=\overline{f}_1\mid(\overline{f_2}\mid f_3);$$

$$\overline{f_1}=\overline{x_1x_4}=x_1\mid x_4;$$

$$\overline{f_2}=\overline{\bar{x}_1\vee x_3\vee\bar{x}_4}=x_1\bar{x}_3x_4=\overline{\overline{x_1\bar{x}_3x_4}}=\overline{x_1\mid\bar{x}_3\mid x_4};$$

$$f_3=x_2\vee\bar{x}_3=\overline{\overline{x_2\vee\bar{x}_3}}=\overline{\bar{x}_2x_3}=\bar{x}_2\mid x_3;$$

$$f=(x_1\mid x_4)\mid((\overline{x_1\mid\bar{x}_3\mid x_4})\mid(\bar{x}_2\mid x_3));$$

б) приводим функцию к базису ИЛИ-НЕ:

$$f=f_1\vee\overline{f_2}f_3=f_1\vee\overline{\overline{\overline{f_2}f_3}}=f_1\vee\overline{(f_2\vee\overline{f_3})}=\overline{\overline{f_1\vee\overline{(f_2\vee\overline{f_3})}}}=\overline{f_1\downarrow(f_2\downarrow\overline{f_3})};$$

$$f_1=x_1x_4=\overline{\overline{x_1x_4}}=\overline{\bar{x}_1\vee\bar{x}_4}=\bar{x}_1\downarrow\bar{x}_4;$$

$$f_2=\bar{x}_1\vee x_3\vee\bar{x}_4=\overline{\overline{\bar{x}_1\vee x_3\vee\bar{x}_4}}=\overline{\bar{x}_1\downarrow x_3\downarrow\bar{x}_4};$$

$$f_3=x_2\vee\bar{x}_3=\overline{\overline{x_2\vee\bar{x}_3}}=\overline{x_2\downarrow\bar{x}_3}\Rightarrow\overline{f_3}=x_2\downarrow\bar{x}_3;$$

$$f=\overline{(x_1\downarrow x_4)\downarrow\left(\left(\overline{\overline{x_1}\downarrow x_3\downarrow\overline{x_4}}\right)\downarrow(x_2\downarrow\overline{x_3})\right)}.$$

Задача анализа логической схемы

По заданной схеме требуется определить функцию *f*, реализуемую данной схемой.

При решении задачи анализа следует придерживаться следующей последовательности действий:

1) заданная схема разбивается по ярусам;

2) начиная с последнего выходы каждого элемента обозначаются проиндексированными функциями в зависимости от яруса, к которому относится элемент;

3) выходные функции каждого элемента записываются в виде формул в соответствии с введенными обозначениями;

4) подстановка одних выходных функций производится через другие с использованием входных переменных;

5) получившаяся булева функция записывается через входные переменные.

Пример 4 – По заданной логической схеме (рисунок 7) составить булеву функцию.

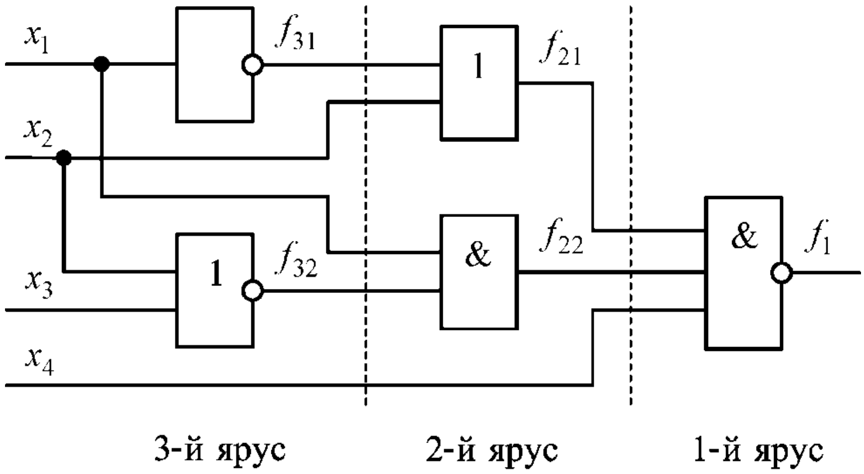


Рисунок 7 – Пример логической схемы устройства

Согласно приведенной выше последовательности действий произведем разбиение схемы на ярусы. Пронумеровав получившиеся ярусы, введем обозначения для каждой выходной функции (см. рисунок 7). Запишем все функции начиная с первого яруса:

1) $f_1 = \overline{f_{21} \cdot f_{22} \cdot x_4}$;

2) $f_{21} = f_{31} \vee x_2$; $f_{22} = f_{32} \cdot x_1$;

3) $f_{31} = \overline{x_1}$; $f_{32} = \overline{x_2 \vee x_3}$.

Теперь запишем все функции, подставляя входные переменные $x_1, \ldots, x_4$:

$$f_{21} = \overline{x_1} \vee x_2;$$

$$f_{22} = x_1 \cdot (\overline{x_2 \vee x_3}).$$

В итоге получим выходную функцию

$$f = f_1 = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (\overline{x_2 \vee x_3}) \cdot x_4}.$$

Контрольные вопросы и задания

1 Синтезировать в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ) сумматор для выполнения операции сложения четырехразрядных чисел в двоичном коде. Сложение двух двоичных чисел производится в соответствии с таблицей истинности (таблица 1), где A_i

и B_i – значения складываемых двоичных чисел в данном разряде; S_i – результат суммирования в данном разряде; P_i, P_{i-1} – значения сигналов переноса в данном и предыдущем разряде соответственно.

Таблица 1 – Выполнение операции сложения двоичных чисел

Вход			Выход	
A_i	B_i	P_{i-1}	P_i	S_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

2 Синтезировать в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ) преобразователь двухразрядного двоичного кода в трехразрядный (таблица 2).

Таблица 2 – Преобразование двухразрядного кода в трехразрядный

Вход		Выход		
a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

3 Реализовать функции И, ИЛИ и НЕ на логических элементах в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ).

4 Синтезировать в базисе И-НЕ (ИЛИ-НЕ) устройства, заданные логической функцией:

1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee (\overline{x_1 x_2})(\overline{x_3 x_4})$;
2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1 \vee x_2})\overline{x_3 x_4}$;
3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1 x_2}) \vee x_3 \vee x_4$;
4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$;
5) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$;
6) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \overline{x_1 x_2}$;
7) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;
8) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee (\overline{\bar{x}_1 \vee x_2})(\overline{x_3 \vee x_4})$;
9) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2 x_3 \vee x_4}$;

10) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$;

11) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \overline{x_2 x_3 x_4})$;

12) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4}$;

13) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4 \vee \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4} \vee x_1 \bar{x}_3$;

14) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee (\overline{x_2 x_3 (x_1 \vee \bar{x}_4)}$;

15) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1(\bar{x}_2 \vee x_3) \vee x_3 x_4}$;

16) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 x_4 \vee \overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_4}$;

17) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\overline{x_1 x_2} \vee x_3 \bar{x}_4} \vee x_1 x_3 x_4$;

18) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\overline{x_1 x_2} \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 x_2}$;

19) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_3 \bar{x}_4} \vee \overline{\bar{x}_1 x_2 x_4}$;

20) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{\bar{x}_1 x_2 \vee x_3} \vee \overline{\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4}$;

21) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee \overline{x_1 x_2} \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \overline{\bar{x}_1 x_4}$;

22) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(\bar{x}_2(x_3 \vee \overline{x_1 \bar{x}_4}) \vee \overline{x_1 x_3})$;

23) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee \overline{\bar{x}_2 x_4}$;

24) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_3)\overline{x_2 \bar{x}_4} \vee (x_2 \vee x_4)\overline{\bar{x}_1 x_3}$;

25) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \overline{x_3 x_4} \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)$.

8 Лабораторная работа № 8. Способы задания абстрактного конечного автомата

Цель работы: изучить способы задания конечного автомата.

Порядок выполнения работы

1 Изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект.
2 Получить задание у преподавателя, выполнить типовые задания.
3 Сделать выводы по результатам исследований.
4 Оформить отчет.

Требования к отчету

1 Цель работы.
2 Постановка задачи.
3 Результаты исследования.
4 Выводы.

Основные теоретические положения

Понятие конечного автомата.

Конечный автомат является математической моделью реальных дискретных устройств по переработке информации.

Конечным автоматом называется структура $A = \langle X; Q; Y; \delta; \lambda \rangle$, где X, Q, Y – произвольные непустые конечные множества.

Множество $X = \{a_1, ..., a_m\}$ называется входным алфавитом, а его элементы – входными символами, их последовательности – входными словами. Множество $Q = \{q_1, ..., q_n\}$ называется множеством состояний, а его элементы – состояниями. Множество $Y = \{b_1, ..., b_p\}$ называется выходным алфавитом, а его элементы – выходными символами, их последовательности – выходными словами.

Функция $\delta : X \times Q \to Q$ называется функцией переходов. Функция $\lambda : X \times Q \to Y$ называется функцией выходов, т. е. $\delta(a, q) \in Q$; $\lambda(a, q) \in Y \mid \forall a \in X; \forall q \in Q$.

Если в момент времени t = 1, 2, ... на вход автомата A = (X; Q;Y; δ; λ) последовательно подаются входные символы $x(t) \in X$ и при этом автомат находится в состоянии $q(t) \in Q$, то под воздействием символа $x(t)$ автомат перейдет в новое состояние $q(t+1) \in Q$ и выдаст выходной сигнал $y(t)$.

Величины $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$, $q(t+1)$ связаны между собой следующими уравнениями:

$$\begin{cases} q(t+1) = \delta(x(t), q(t)); \\ y(t) = \lambda(x(t), q(t)), \end{cases}$$
$$t = 1, 2, ..., n, ...$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями автомата A.

С конечным автоматом ассоциируется воображаемое устройство, которое может находиться в состоянии из множества Q, воспринимать символы из множества X и выдавать символы из множества Y.

Способы задания конечного автомата.

Существует несколько эквивалентных способов задания абстрактных автоматов, среди которых можно назвать следующие: табличный, графический, матричный и функциональный.

Табличное задание автомата. Из определения автомата следует, что его всегда можно задать таблицей с двумя входами, содержащей m строк и n столбцов, где на пересечении столбца q и строки a стоят значения функций $\delta(a, q)$, $\lambda(a, q)$ (таблица 3).

Задание автомата диаграммой Мура. Другой способ задания конечного автомата – графический. При этом способе состояния автомата изображают кружками, в которые вписывают символы состояний q_j (j = 1, ..., n). Из каждого кружка проводится m стрелок (ориентированных ребер), взаимно-однозначно соответствующих символам входного алфавита $X=\{a_1, ..., a_m\}$. Стрелке, соответствующей символу $a_i \in X$ и выходящей из кружка $q_j \in Q$, приписывается пара $(a_i, \lambda(a_i, q_j))$, причем эта стрелка ведет в кружок, соответствующий $\delta(a_i, q_j)$.

Таблица 3 – Табличное задание автомата

a	q				
	q_1	…	q_j	…	q_n
a_1	$\delta(a_1, q_1); \lambda(a_1, q_1)$	…	$\delta(a_1, q_j); \lambda(a_1, q_j)$	…	$\delta(a_1, q_n); \lambda(a_1, q_n)$
…	…	…	…	…	…
a_i	$\delta(a_i, q_1); \lambda(a_i, q_1)$	…	$\delta(a_i, q_j); \lambda(a_i, q_j)$	…	$\delta(a_i, q_n); \lambda(a_i, q_n)$
…	…	…	…	…	…
a_m	$\delta(a_m, q_1); \lambda(a_m, q_1)$	…	$\delta(a_m, q_j); \lambda(a_m, q_j)$	…	$\delta(a_m, q_n); \lambda(a_m, q_n)$

Полученный рисунок называется графом автомата, или диаграммой Мура. Для не очень сложных автоматов этот способ более нагляден, чем табличный.

Матричный способ задания автомата. Кроме рассмотренных выше способов, произвольный абстрактный автомат может быть описан матрицей соединений. Такое описание – один из способов матричного задания абстрактных автоматов. Матрица соединений автомата является квадратной и содержит столько столбцов (строк), сколько различных состояний имеет рассматриваемый автомат. Каждый столбец (строка) матрицы соединений помечается символом состояния автомата. Если автомат инициальный, то первый слева столбец и первая сверху строка матрицы помечаются символом начального состояния автомата. В клетке матрицы соединений, находящейся на пересечении столбца j и строки i, ставится входной символ a (или дизъюнкция входных символов), под воздействием которого осуществляется переход из состояния i в состояние j. Рядом с входным символом в скобках ставится выходной символ, который выдает автомат, выполняя переход из i-го состояния в j-е.

Контрольные вопросы и задания

Задание 1

Для автомата, заданного таблицей, построить диаграмму Мура. Задать этот автомат системой булевых функций.

1

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 1)	(3; 0)	(2; 0)	(2; 0)
1	(2; 1)	(2; 0)	(3; 0)	(3; 0)

2

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 0)	(3; 1)	(2; 0)	(1; 0)
1	(3; 0)	(1; 1)	(0; 1)	(3; 1)

3

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(1; 1)	(3; 1)	(2; 0)
1	(2; 0)	(0; 1)	(3; 1)	(1; 0)

4

x	q			
	0	1	2	3
0	(3; 0)	(2; 0)	(1; 1)	(0; 1)
1	(0; 1)	(1; 1)	(2; 0)	(3; 0)

5

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 0)	(2; 0)	(2; 1)	(3; 0)
1	(3; 0)	(3; 1)	(2; 1)	(1; 0)

6

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(1; 1)	(2; 0)	(3; 1)
1	(1; 0)	(0; 1)	(3; 0)	(2; 1)

7

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 1)	(0; 0)	(3; 1)	(2; 0)
1	(0; 1)	(2; 0)	(2; 1)	(3; 0)

8

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)
1	(3; 1)	(0; 1)	(1; 1)	(2; 0)

9

x	q	
	0	1
0	(0; 0)	(0; 1)
1	(0; 1)	(1; 0)
2	(0; 1)	(1; 0)
3	(1; 0)	(1; 1)

10

x	q	
	0	1
0	(0; 0)	(1; 1)
1	(1; 0)	(1; 1)
2	(0; 1)	(0; 0)
3	(–; 1)	(–; 0)

11

x	q			
	0	1	2	3
0	(2; 0)	(0; 0)	(3; 1)	(1; 0)
1	(1; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(3; 0)

12

x	q			
	0	1	2	3
0	(2; 1)	(2; 1)	(2; 1)	(2; 1)
1	(1; 1)	(3; 1)	(0; 0)	(1; 0)

13

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 1)	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)
1	(0; 0)	(0; 1)	(3; 1)	(2; 1)

14

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 0)	(0; 1)	(2; 0)	(2; 1)
1	(1; 0)	(1; 1)	(3; 0)	(3; 1)

15

x	q			
	0	1	2	3
0	(0; 1)	(0; 0)	(1; 0)	(1; 0)
1	(2; 0)	(2; 1)	(3; 0)	(3; 1)

16

x	q			
	0	1	2	3
0	(1; 0)	(3; 1)	(2; 1)	(2; 1)
1	(2; 1)	(2; 0)	(3; 0)	(3; 0)

17

x	q	
	0	1
0	(0; 0)	(1; 1)
1	(1; 1)	(1; 1)
2	(1; 1)	(1; 1)
3	(0; 0)	(1; 1)

18

x	q	
	0	1
0	(0; 0)	(1; 1)
1	(0; 0)	(0; 1)
2	(1; 1)	(1; 1)
3	(1; 1)	(0; 1)

19

x	q: 1	2	3
0	(2; 0)	(2; 1)	(3; 1)
1	(1; 1)	(3; 0)	(3; 1)
2	(1; 1)	(2; 1)	(1; 0)

20

x	q: 1	2	3
0	(1; 0)	(2; 1)	(0; 2)
1	(2; 1)	(2; 1)	(3; 0)
2	(3; 2)	(0; 1)	(2; 0)

Задание 2

Для автомата, заданного диаграммой Мура, выписать соответствующую таблицу и систему булевых функций (рисунок 8).

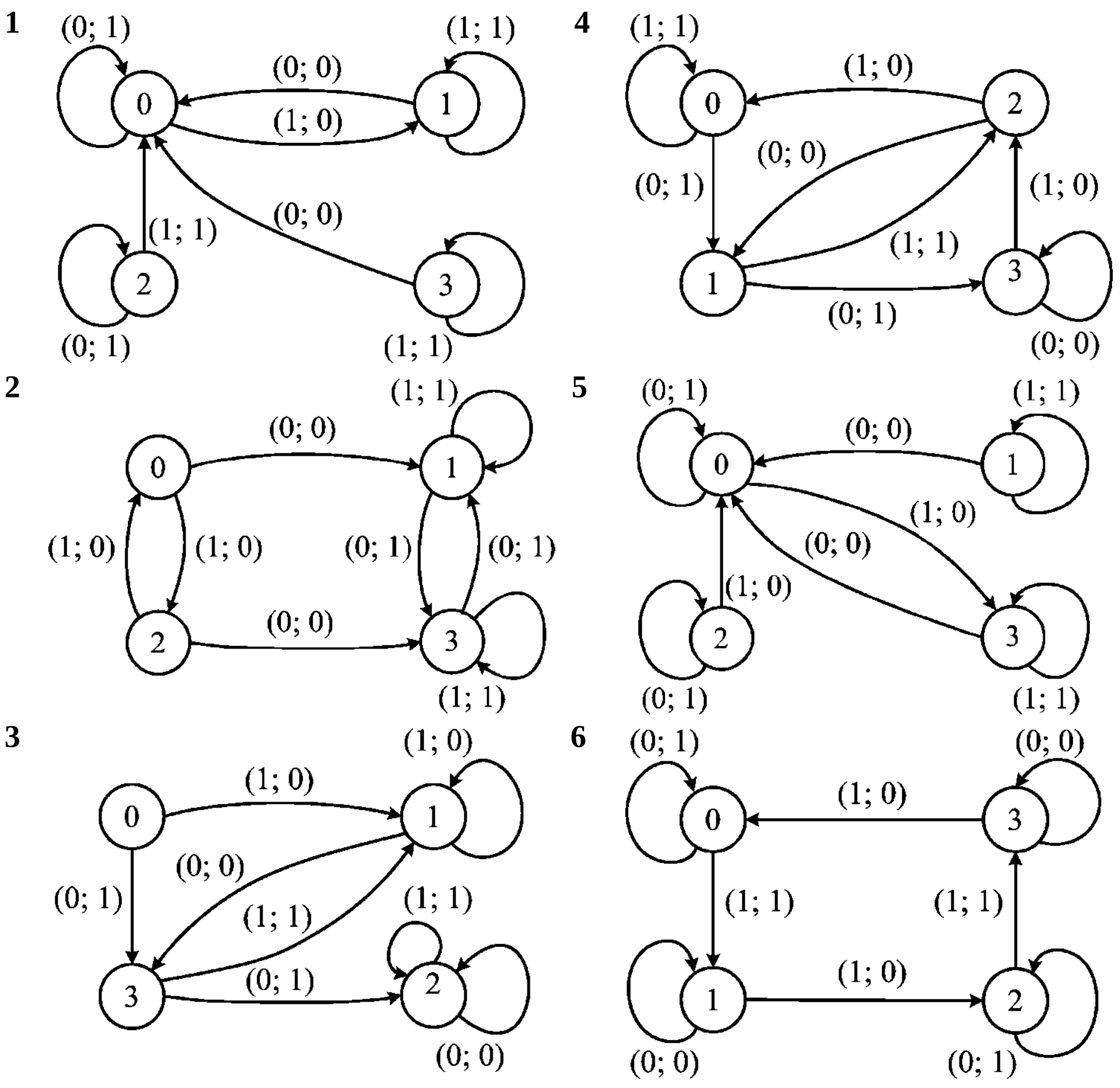
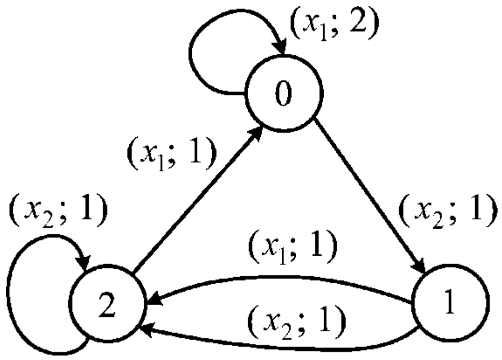
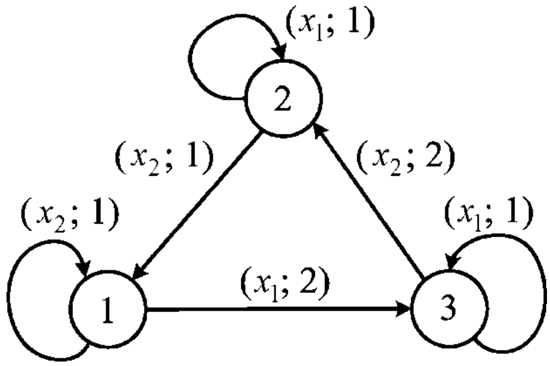


Рисунок 8 – Варианты контрольных заданий

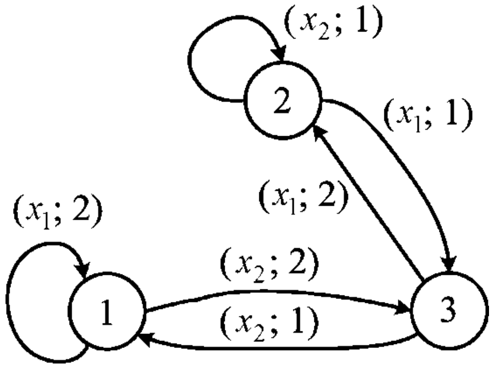
7



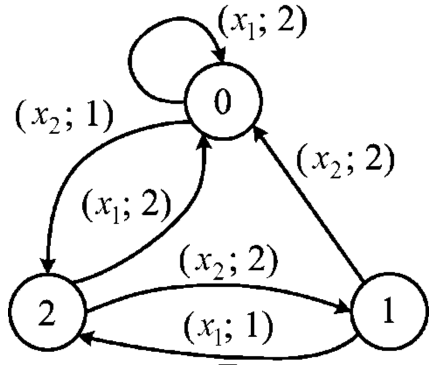
12



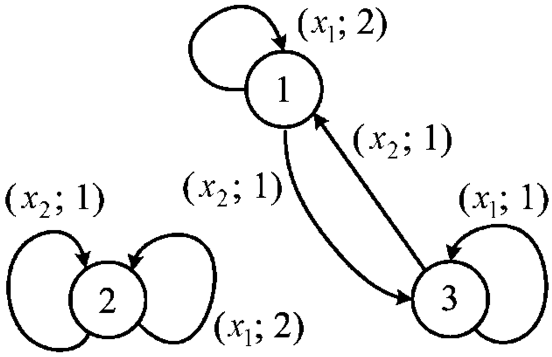
8



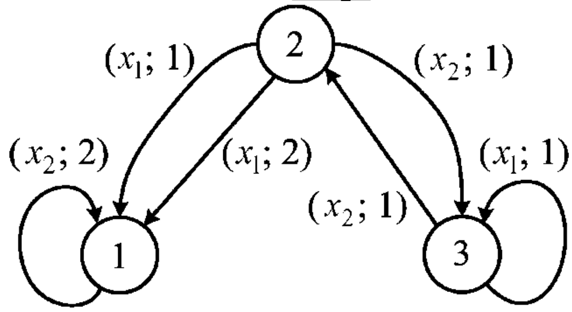
13



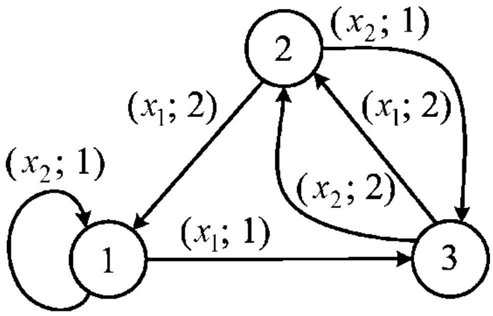
9



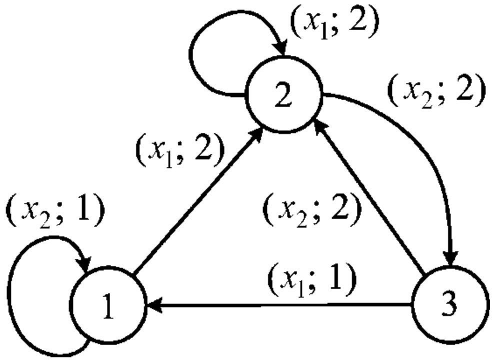
14



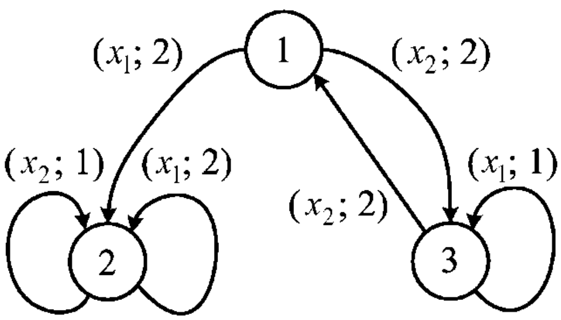
10



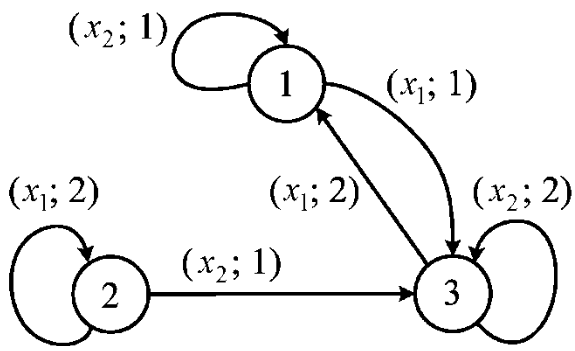
15



11



16



Окончание рисунка 8

Список литературы

1 Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование : учебное пособие / А. В. Кузнецов [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Высшая школа, 2003. – 382 с. : ил.

2 **Кирсанов, М. Н.** Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы / М. Н. Кирсанов. – Москва : Физматлит, 2007. – 168 с.

3 **Показеев, В. В.** Элементы дискретной математики : курс лекций / В. В. Показеев, В. И. Матяш, Г. В. Черкесова. – Москва : МАМИ, 2003. – 239 с.

4 **Кирсанов, М. М.** Дискретная математика. Основные тезисы / М. М. Кирсанов, В. В. Показеев. – Москва : МАМИ, 2003. – 26 с.

5 **Москинова, Г. И.** Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учебное пособие / Г. И. Москинова. – Москва : Логос, 2003. – 240 с.

6 **Баврин, И. И.** Дискретная математика: учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – Москва : Юрайт, 2015. – 209 с.

7 **Вороненко, А. А.** Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями : учебно-методическое пособие / А. А. Вороненко. – Москва : ИНФРА-М, 2014. – 104 с.

8 **Певзнер, Л. Д.** Практикум по математическим основам теории систем : учебное пособие / Л. Д. Певзнер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2013. – 400 с.

9 **Трохимчук, Р. М.** Основы дискретной математики. Практикум / Р. М. Трохимчук. – Киев : МАУП, 2004. – 168 с.