ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения

Могилев 2018

УДК 519.8
ББК 22.18
М 34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «16» октября 2018 г., протокол № 4

Составитель канд. техн. наук, доц. А. В. Кушнер

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. Д. Камчицкая

В методических рекомендациях кратко изложены теоретические сведения, необходимые для лабораторных работ. Составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математическое моделирование» для направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ответственный за выпуск	А. И. Якимов
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2018

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Содержание

1 Виды моделирования и постановка задач моделирования……4
2 Общие принципы математического моделирования и методы исследования моделей…….. 6
3 Построение имитационных математических моделей с использованием метода Монте-Карло……. 9
4 Построение экспериментально-статистических моделей путем пассивного эксперимента 14
5 Построение экспериментально-статистических моделей путем активного эксперимента 19
6 Построение и оптимизация математических моделей процессов при ограничении на параметры в виде равенств 24
7 Построение математических моделей многостадийных процессов..... 27
Список литературы 32

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

1 Виды моделирования и постановка задач моделирования

Цель работы: изучить виды математического моделирования, научиться постановке задач, решаемых методом математического моделирования.

1.1 Основные теоретические сведения

Каждый конкретный объект характеризуется набором свойств, под которыми понимаются величины, отражающие его поведение и учитывающие условия его функционирования во взаимодействии с внешней средой.

Модель объекта может быть представлена в виде множества величин, описывающих процесс функционирования и отражающих следующие подмножества:

– входные воздействия на объект (подмножество $\{X\}$);

– воздействия внешней среды на объект (подмножество $\{V\}$);

– внутренние (собственные) параметры системы (подмножество $\{H\}$);

– выходные характеристики системы (подмножество $\{Y\}$).

В общем случае указанные выше подмножества являются элементами непересекающихся подмножеств и содержат как детерминированные, так и стохастические (вероятностные) составляющие.

Подмножества $\{X\}$, $\{V\}$, $\{H\}$ являются независимыми (экзогенными) переменными, которые в векторной форме имеют следующий вид:

$$\vec{x}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_i(t)\right);$$
$$\vec{v}(t)=\left(v_1(t),v_2(t),...,v_j(t)\right);$$
$$\vec{h}(t)=\left(h_1(t),h_2(t),...,h_k(t)\right), \qquad (1.1)$$

а подмножество $\{Y\}$ представляет собой зависимые переменные (эндогенные) и имеет в векторной форме следующий вид:

$$\vec{y}(t)=\left(y_1(t),y_2(t),...,y_l(t)\right). \qquad (1.2)$$

Процесс функционирования объекта моделирования описывается во времени оператором F, который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношением

$$\vec{Y}(t)=F\left(X(t),V(t),H(t)\right). \qquad (1.3)$$

Представленная зависимость называется законом функционирования объекта.

Моделирование заключается в отыскании закона функционирования моделируемого объекта (рисунок 1.1). При этом оно применяется как в учебной, так и научной практике для решения двух групп задач: задач обучения и исследовательских задач.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

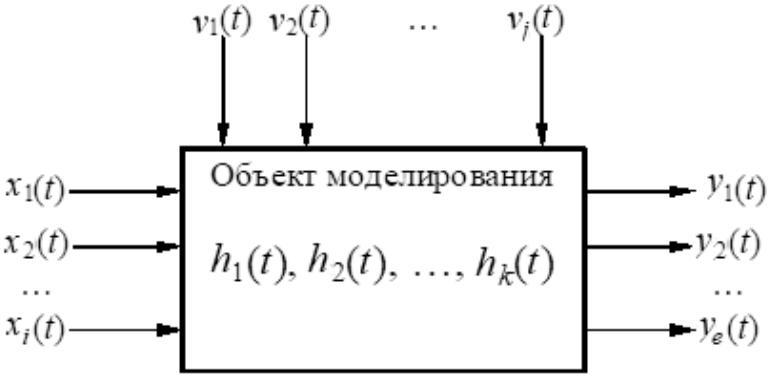


Рисунок 1.1 – Моделируемый объект

К задачам обучения относятся:

– применение моделирования и моделей для уяснения физических законов;

– рассмотрение действия новых установок и разработок;

– тренировки персонала действующих производственных объектов.

К исследовательским задачам, решаемым с помощью моделирования, относят:

– прямую задачу анализа, которая предполагает задание объекта параметрами своих элементов и параметрами исходного режима, структурой или уравнениями. Требуется определить реакцию объекта на действующие силы (условия, возмущения) или сигналы;

– обратную задачу анализа, которая по известной реакции объекта требует найти силы (условия, возмущения), заставившие прийти к данному состоянию и вызвавшие данную реакцию;

– задачу синтеза, которая требует нахождения таких параметров объекта, при которых процессы, происходящие в этом объекте будут иметь желательный по каким-либо соображениям характер;

– индуктивные задачи, которые имеют целью проверку гипотез, уточнение уравнений, описывающих процессы в моделируемом объекте, выявление свойств элементов моделируемого объекта.

Особую значимость в практике моделирования физических процессов имеют первые три задачи.

Индивидуальное задание

Решить следующую прямую задачу анализа.

Задача. Для реализации датчика перемещений используется емкостная система на основе плоского конденсатора. Каким образом будет изменяться емкость C на выходе датчика, если пластины конденсатора имеют площадь S, расстояние d между пластинами изменяется в интервале $[d_1; d_2]$, а пространство между пластинами заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ε?

Примечание – $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Самостоятельно сформулировать обратную задачу анализа. Решить сформулированную задачу. При этом задаться минимальным и максимальным значениями емкости C, рассчитанными ранее.

Самостоятельно сформулировать задачу синтеза. Решить задачу синтеза.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Указания к выполнению задания

Проанализируйте поставленную прямую задачу и определите входные воздействия, множество внешних воздействий, множество собственных параметров моделируемого процесса, множество выходных параметров.

Получите связь этих параметров в виде аналитического выражения, отражающего физический процесс.

Контрольные вопросы

1 Дайте определение понятию «моделирование», «модель».

2 Как классифицируется моделирование? Поясните каждый из видов моделирования.

3 С помощью каких подмножеств представляется модель объекта?

4 Какие переменные (подмножества переменных) называются зависимыми? Независимыми?

5 Какая зависимость называется законом функционирования?

6 Для решения каких задач применяется математическое моделирование?

7 Сформулируйте прямую задачу анализа, обратную задачу анализа.

2 Общие принципы математического моделирования и методы исследования моделей

Цель работы: изучить основные этапы математического моделирования.

2.1 Основные теоретические сведения

Математические модели позволяют свести исследование реального «нематематического» объекта к решению математической задачи, открывая тем самым возможность использования для его изучения хорошо разработанного математического аппарата в сочетании с вычислительной техникой.

Решение задач моделирования начинается со сбора факторов и данных научных наблюдений, затем происходит формализация объекта и строится математическая модель, т. е. выделяются его наиболее существенные черты и свойства и производится их описание с помощью математических уравнений и формул. После того как построена модель, т. е. задаче придана математическая форма, можно либо воспользоваться для ее изучения известными математическими методами, либо, если таковых нет, разрабатывать новые.

Исходным пунктом построения модели, как правило, бывает некоторая эмпирическая реальная картина явления, выдвигающая перед исследователем задачу, на которую нужно найти ответ. Но прежде всего следует установить, в чем заключается задача.

На рисунке 2.1 указаны основные этапы построения конкретных моделей.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

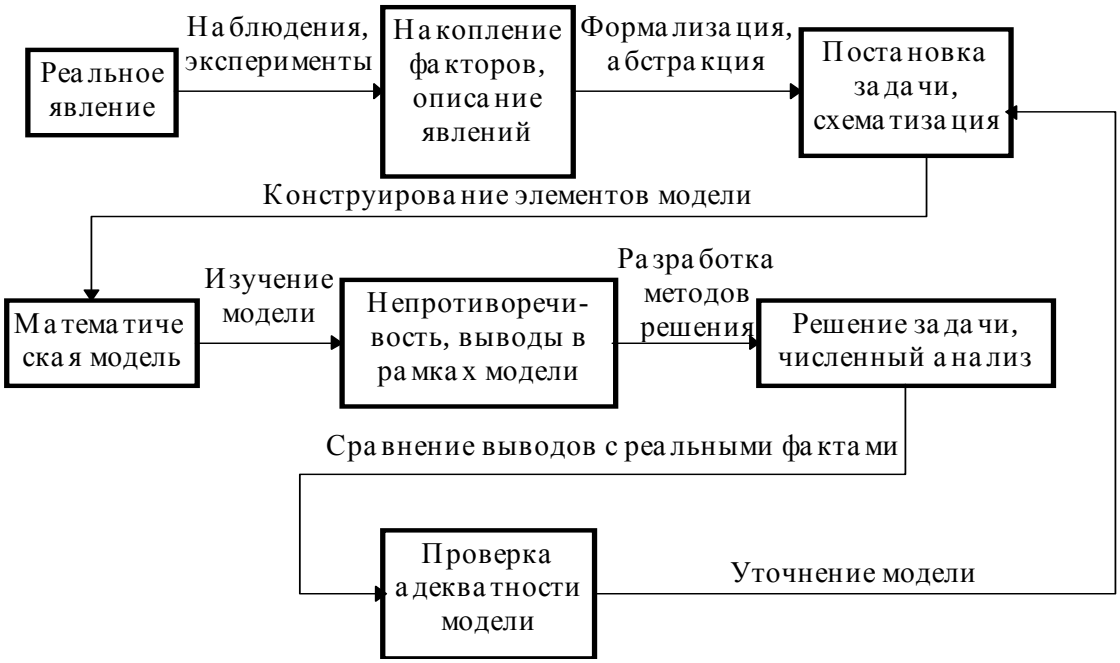


Рисунок 2.1 – Схема построения математической модели

Этап 1. При уяснении и постановке задачи на физическом уровне происходит процесс схематизации и идеализации явления, т. е. выделение его существенных особенностей. Некоторые черты явлений могут оказаться важными, другие несущественными.

Этап 2. После выделения существенных факторов следующий шаг заключается в переводе нужных данных на язык математических понятий и величин. Эта самая трудная стадия процесса моделирования. Здесь приходится часто опираться на фундаментальные физические законы, законы электромагнетизма, принципы теории вероятностей и т. д.

Этап 3. После построения модели (да и в ходе его) часто следует проводить проверку логической непротиворечивости модели и ее адекватности явлению. Так, например, можно использовать весьма простое и всегда эффективное правило проверки физической размерности всех членов уравнений.

Этап 4. Все существенные данные из перечня определяющих величин и параметров явления должны входить в математическую формулировку задачи. Справедливость модели проверяется по результатам решения теоретической задачи и сопоставлению полученного результата с реальной ситуацией, которая изучается.

Возможны два варианта получения результата моделирования:

1) аналитическое решение задачи;

2) применение численных методов.

Первый вариант применим, когда математическая модель достаточно проста. В случаях, когда математическое описание моделируемого процесса представляет сложную математическую систему уравнений, приходится применять численные методы решения. Естественно, при этом должна обеспечиваться заданная точность решения. Однако прежде чем выбрать тот или иной

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

метод численного решения, следует проанализировать ограничения, связанные с его использованием.

В процессе решения задачи модель может уточняться.

Индивидуальное задание

На плоскопараллельную пластинку толщиной d падает тонкий луч света под углом α (рисунок 2.2). На расстоянии L от центральной плоскости с обеих сторон пластинки установлены экраны Э1 и Э2. Показатель преломления материала пластинки n_2, показатель преломления среды с одной стороны пластинки n_1, а с другой – n_3. Исходные данные для каждого варианта приведены в таблице.

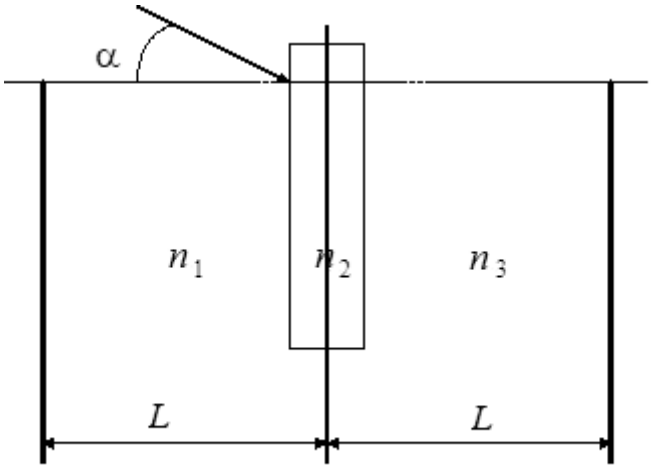


Рисунок 2.2 – Схема для расчета прохождения луча света

Необходимо получить зависимость изменения отклонения луча на экранах Э1 и Э2, если угол падения изменяется от 0 до 90 град.

Отражением света на границах раздела сред можно пренебречь.

Указания к выполнению задания

Решение задачи должно основываться на строгой последовательности выполнения этапов математического моделирования.

Во-первых, необходимо уяснить на физическом уровне происходящие явления (преломление, отражение света), схематизировать и идеализировать их. Схема должна быть дополнена ходом лучей. При этом необходимо определить существенные и несущественные черты происходящего явления.

Во-вторых, перевести необходимые данные на язык математических понятий и величин. На этом этапе следует воспользоваться законом преломления лучей при прохождении ими границы раздела сред.

В-третьих, после построения модели следует проверить ее логическую непротиворечивость.

В-четвертых, полученная модель должна быть простой и наглядной.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Контрольные вопросы

1 Какие требования предъявляются к моделям? Поясните смысл этих требований.

2 Какие уровни моделирования Вам известны?

3 Какие подходы к моделированию существуют? Поясните смысл каждого из подходов.

4 На какие этапы можно разбить процесс построения математической модели?

5 Зачем и в каких случаях производят корректировку модели?

6 Какие существуют варианты получения результата моделирования?

3 Построение имитационных математических моделей с использованием метода Монте-Карло

Цель работы: освоить применение метода Монте-Карло для построения моделей, учитывающих воздействие на объект случайно изменяющихся факторов.

3.1 Основные теоретические сведения

Метод Монте-Карло заключается в использовании случайных чисел для моделирования различных объектов, ситуаций и физических явлений. Квазиравномерно распределенные случайные числа обычно генерируются ЭВМ в отрезке значений [0; 1]. Перевод равномерно распределенных случайных чисел в интервал [a; b] производится с помощью формулы

$$Z_i = a + (b - a) \cdot X_i . \tag{3.1}$$

Случайные числа с различными законами распределения получают с помощью формул преобразования.

Если случайная величина η имеет функцию распределения плотности вероятностей $f_\eta(x)$, то случайная величина

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f_\eta(x)dx$$

является равномерно распределенной в интервале [0; 1].

Алгоритм получения случайных чисел y_i с заданным законом распределения в этом случае имеет следующий вид:

1) решается относительно z_i интегральное уравнение

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$x_i = \int_{-\infty}^{z_i} f_\eta(x)\,dx; \qquad (3.2)$$

2) моделируется число x_i, имеющее равномерное распределение в интервале [0; 1];

3) рассчитывается значение Z_i на основе полученной зависимости.

Следует иметь в виду, что указанное интегральное уравнение не всегда позволяет сформулировать случайные числа с заданным законом распределения $f_\eta(x)$. В этом случае прибегают к численным методам решения, что увеличивает затраты времени и усложняет моделирование.

Второй из способов позволяет получить последовательность случайных чисел, закон распределения которых приближен к заданному «по гистограмме». При этом учитывается, что возможные значения чисел должны лежать в известном интервале [a; b]. Для реализации метода интервал [a; b] разбивается на m подынтервалов и на каждом из подынтервалов значение функции распределения плотности вероятностей считается постоянной величиной. Вероятность попадания случайных чисел в каждый подынтервал сохраняют одинаковой. Границы каждого подынтервала a_k, a_{k+1} определяют исходя из выражения

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{1}{m}. \qquad (3.3)$$

Алгоритм реализации рассматриваемого метода следующий:

1) генерируется случайное число x_i, равномерно распределенное в интервале [0;1];

2) с помощью этого случайного числа выбирается номер интервала (случайный розыгрыш по жребию), в который должно масштабироваться число;

3) генерируется случайное число x_{i+1} и масштабируется в подинтервал (a_k;a_{k+1}).

Полученная последовательность представляет собой случайные числа с заданным законом распределения.

Случайные числа с нормальным распределением могут быть получены с помощью формул:

$$R_i' = \cos(2\pi \cdot X_{i+1})\sqrt{2 \cdot \ln\left(\frac{1}{X_i}\right)}; \qquad (3.4)$$

$$R_i'' = \sin(2\pi \cdot X_{i+1})\sqrt{2 \cdot \ln\left(\frac{1}{X_i}\right)}. \qquad (3.5)$$

При этом получается сопряженная пара чисел, имеющих среднее значение m_R = 0 и среднеквадратичное отклонение σ_R = 1. Для получения случайных

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

чисел с произвольным математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ используется формула

$$Z_i = m + R_i \cdot \sigma . \tag{3.6}$$

Обобщенный алгоритм реализации метода Монте-Карло обеспечивает моделирование работы объекта и вычисление основных статистических характеристик его функциональных параметров.

Наиболее полным описанием случайной величины является задание закона распределения вероятностей. В случае статистических исследований выдвигаются и исследуются различные гипотезы (принадлежность или непринадлежность случайной величины к тому или иному закону распределения, значения параметров распределения и т. д.).

Вторым подходом является определение точечных и интервальных оценок выборочных моментов (выборочного среднего, дисперсии и т. д.)

Выборочное среднее определяется по результатам проведения численного эксперимента как

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{3.7}$$

где n – количество результатов в выборке;

x_i – значение элементов выборки.

Доверительный интервал для выборочного среднего рассчитывается следующим образом:

$$(\overline{x} + \Delta_{\overline{x}}, \overline{x} - \Delta_{\overline{x}}),$$

а величина интервала

$$\Delta_{\overline{x}} = t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3.8}$$

где $t_{p,\nu}$ – процентиль распределения Стьюдента;

p – заданная вероятность, $p = 1 - \alpha$;

ν – число степеней свободы, $\nu = n - 1$;

s – выборочное стандартное отклонение.

Выборочное стандартное отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} . \tag{3.9}$$

Эти формулы применимы для расчета доверительных интервалов в том случае, если исследуемая случайная величина принадлежит нормальному закону распределения.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Часто для описания экспериментальных данных используют выборочное распределение вероятностей.

Для его расчета весь диапазон значений случайной величины разбивают на k интервалов $[c_1, c_2)$, $[c_2, c_3)$, …, $[c_k, c_{k+1})$. Количество интервалов определяют по формуле

$$k = \text{целая часть } (10 \cdot \lg(n)), \tag{3.10}$$

где n – количество элементов в выборке.

Далее рассчитываются частоты попадания значений случайной величины в каждый интервал:

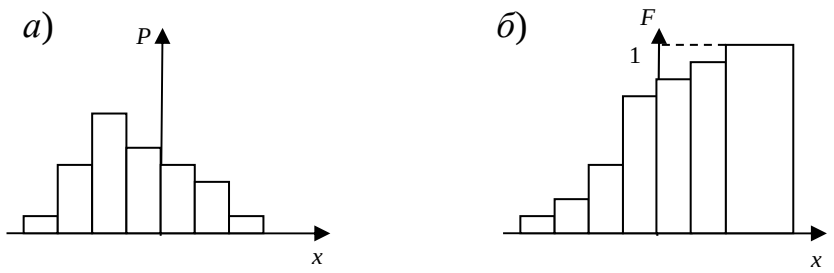
$$p_i = \frac{n_i}{n}, \tag{3.11}$$

где i – номер интервала;

n_i – количество значений случайной величины, попавших в интервал $[c_i, c_{i+1})$;

n – объем выборки.

Далее полученный набор частот используется для построения выборочного распределения, которое рассчитывается как накопленная сумма частот на предыдущих интервалах (рисунок 3.1).



а – гистограмма выборочных частот; *б* – выборочное распределение

Рисунок 3.1 – Выборочное распределение

Индивидуальное задание

Исследовать характер изменения тока I в электрической цепи (рисунок 3.2) при условии, что значение переменной ЭДС составляет E, резистор имеет значение R, конденсатор – C, индуктивность – L. Частота прикладываемого напряжения изменяется от 50 Гц до 100 кГц.

Указания к выполнению задания

При решении задачи следует использовать метод статистического моделирования на ЭВМ (метод Монте-Карло). Алгоритм моделирования следующей:

– составить модель, описывающую поведение электрической цепи в виде зависимости тока, протекающего в цепи от параметров цепи;

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

– решить прямую задачу анализа в предположении, что частота источника ЭДС – входной параметр, внутренние параметры модели детерминированные, со значениями, равными середине интервалов варьирования;

– приняв частоту источника ЭДС, равной 50 кГц, провести численный эксперимент;

– обработать результаты численного эксперимента, определив выборочное среднее, выборочную дисперсию тока в цепи, доверительные интервалы для выборочного среднего и построив выборочное распределение.

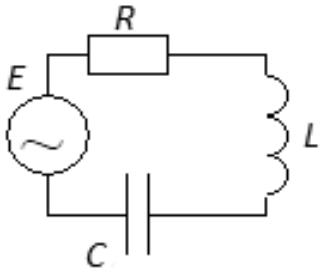


Рисунок 3.2 – Схема моделируемой электрической цепи

Численный эксперимент проводится в следующей последовательности:

– генерируется N чисел с соответствующим законом распределения для каждого стохастического параметра модели;

– вычисляется N значений выходного параметра модели (тока в цепи) в зависимости от случайных значений входных параметров. Эта выборка мощностью N и будет результатом проведения численного эксперимента.

Содержание отчета

1 Цель работы.
2 Исследуемая схема.
3 Полученная математическая модель.
4 Реализация модели на ЭВМ.
5 Результаты моделирования.

Контрольные вопросы

1 Какие способы получения случайных чисел Вам известны? Каковы их достоинства и недостатки?

2 Как получить последовательность случайных чисел, имеющую произвольный закон распределения плотности вероятностей $f(x)$? Какие ограничения накладываются на данный способ?

3 В чем сущность способа получения последовательности чисел с произвольным законом распределения плотности вероятностей «по гистограмме»?

4 Как получить последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения плотности вероятностей в произвольном интервале $[a; b]$?

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

5 Как получить последовательность чисел с нормальным законом распределения плотности вероятностей?

6 В чем сущность метода Монте-Карло?

4 Построение экспериментально-статистических моделей путем пассивного эксперимента

Цель работы: освоить методику составления математических моделей объектов методом регрессионного анализа.

Индивидуальное задание

По результатам экспериментальных исследований волоконно-оптического датчика перемещений необходимо:

– методом наименьших квадратов рассчитать выборочные коэффициенты, построить корреляционное поле и графики (в одной системе координат):

а) уравнение линейной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x$;

б) уравнение квадратичной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2$;

в) уравнение нелинейной регрессии $\hat{y} = \dfrac{1}{1 + e^{b_1 \cdot x + b_0}}$;

– вычислить остаточные дисперсии для каждого из трех уравнений:

$$\bar{S}^2_{ост} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n - n_в},$$

где $n_в$ – число коэффициентов в уравнении регрессии;

– выбрать оптимальную форму парной регрессии по минимальной остаточной дисперсии;

– проверить адекватность построения уравнений регрессии;

– построить доверительные интервалы для параметров модели.

4.1 Числовой пример парного регрессионного анализа

Пусть в результате экспериментальных исследований получены следующие выборки значений перемещения *x* и сигнала на выходе датчика *y* (таблица 4.1).

Вычислим коэффициенты парной линейной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x$ по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad (4.1)$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}. \qquad (4.2)$$

Таблица 4.1 – Исходные данные

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i, 10^{-4} м	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y	1,00	0,94	0,93	0,96	0,87	0,70	0,60	0,52	0,51	0,51

Продолжение таблицы 4.1

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i, 10^{-4} м	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
y	0,35	0,33	0,22	0,21	0,15	0,12	0,09	0,08	0,06	0,02

В результате вычислений получаем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3{,}4 \cdot 10^{-3}; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 9{,}17; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 8{,}02 \cdot 10^{-4};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 8{,}44 \cdot 10^{-7}; \quad \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0{,}084.$$

Откуда имеем $b_0 = 0{,}943$; $b_1 = -2{,}848 \cdot 10^3$, т. е.

$$\hat{y}_i = 0{,}943 - 2848 \cdot x_i. \qquad (4.3)$$

Используя полученное уравнение линейной регрессии, вычислим остаточную дисперсию:

$$\overline{S}_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}. \qquad (4.4)$$

Итак, в случае линейной регрессии $S_{ост}^2 = 4{,}675 \cdot 10^{-3}$.

Коэффициенты уравнения параболической регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 \qquad (4.5)$$

можно вычислить путем решения системы уравнений:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum x_i + b_2 \cdot \sum x_i^2 = \sum y_i\,; \\ b_0 \cdot \sum x_i + b_1 \cdot \sum x_i^2 + b_2 \cdot \sum x_i^3 = \sum x_i \cdot y_i\,; \\ b_0 \cdot \sum x_i^2 + b_1 \cdot \sum x_i^3 + b_2 \cdot \sum x_i^4 = \sum x_i^2 \cdot y_i. \end{cases} \tag{4.6}$$

При этом значения $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i \cdot y_i$, $\sum x^2_i$ найдены ранее. Остается определить значения $\sum x^3_i$, $\sum x^4_i$, $\sum x^2_i \cdot y_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} x^3{}_i = 2{,}339 \cdot 10^{-10};\ \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 6{,}918 \cdot 10^{-14}\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i = 1{,}391 \cdot 10^{-7}\,;\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = 0{,}05\,.$$

В результате система алгебраических уравнений (4.5) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 20 + b_1 \cdot 3{,}4 \cdot 10^{-3} + b_2 \cdot 8{,}44 \cdot 10^{-7} = 9{,}17; \\ b_0 \cdot 3{,}4 \cdot 10^{-3} + b_1 \cdot 8{,}44 \cdot 10^{-7} + b_2 \cdot 2{,}339 \cdot 10^{-10} = 8{,}012 \cdot 10^{-4}; \\ b_0 \cdot 8{,}44 \cdot 10^{-7} + b_1 \cdot 2{,}339 \cdot 10^{-10} + b_2 \cdot 6{,}918 \cdot 10^{-14} = 1{,}391 \cdot 10^{-7}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Решением системы являются коэффициенты

$$b_0 = 0{,}997; \quad b_1 = -\,4{,}029 \cdot 10^3; \quad b_2 = 3{,}473 \cdot 10^6.$$

Следовательно, уравнение параболической регрессии имеет вид:

$$y_i = 0{,}997 - 4{,}029 \cdot 10^3 \cdot x_i + 3{,}473 \cdot 10^6 \cdot \mathrm{x}^2{}_i\,. \tag{4.8}$$

Используя данное уравнение, вычислим остаточную дисперсию:

$$S_{ост}^2 = \frac{0{,}05}{17} = 2{,}957 \cdot 10^{-3}.$$

Рассмотрим, наконец, случай нелинейного уравнения регрессии:

$$\hat{y}_i = \frac{1}{1 + e^{b_1 \cdot x_i + b_0}}\,. \tag{4.9}$$

Это уравнение сводится к линейному случаю (линеаризуется) путем логарифмирования:

$$y_i' = \ln\left(\frac{1}{y_i} - 1\right) = b_1 \cdot x_i + b_0\,. \tag{4.10}$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Заметим, что ввиду особенности функции ln необходимо отбросить точки $y_0 = 1$. Проведя вычисления, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3{,}42 \cdot 10^{-3}; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i' = 7{,}214; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i' = 5{,}248 \cdot 10^{-3};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 8{,}436 \cdot 10^{-7}; \quad \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = 0{,}049.$$

Тогда $b_0 = -2{,}292$; $b_1 = 1{,}55 \cdot 10^4$, т. е.

$$y_i = \frac{1}{1 + e^{1{,}55 \cdot 10^4 \cdot x_i - 2{,}292}}.$$

$$S^2_{ост} = 2{,}747 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, сравнивая остаточные дисперсии для всех трех случаев, выбираем последнее уравнение в качестве оптимальной формы парной регрессии.

Адекватность этого выражения проверим по критерию Фишера.

Рассчитаем среднее значение сигнала на выходе датчика:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{20} \cdot 9{,}17 = 0{,}458.$$

Определим дисперсию среднего:

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}118.$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия Фишера:

$$F_{набл} = \frac{S_y^2}{S_{ост}^2} = 42{,}96. \qquad (4.11)$$

Если при этом

$$F_{набл} \geq F_{\alpha;\nu 1;\nu 2},$$

где $F_{\alpha;\nu 1;\nu 2}$ – квантиль F-распределения со степенями

$\nu_1 = n - 1 = 20 - 1 = 1$, $\nu_2 = n - n_B = 20 - 2 = 18$;

то рассматриваемое уравнение регрессии адекватно.

Выбрав $p = 1 - \alpha = 0{,}95$ ($1 - \alpha$ – доверительная вероятность), получим, что $F_{набл} = 42{,}96$, а $F_{0{,}05;\,19;\,18} = 2{,}19$, т. е.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$F_{набл} \geq F_{0,05;\ 19;\ 18}.$$

Таким образом, построенное уравнение регрессии адекватно с вероятностью 0,95.

Для построения доверительных интервалов коэффициентов регрессии рассмотрим матрицу Фишера, которая представляет собой матрицу коэффициентов при неизвестных в системах линейных уравнений для нахождения коэффициентов регрессии. Для выбранного уравнения регрессии матрица Фишера имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{pmatrix}. \qquad (4.12)$$

Дисперсии оценок коэффициентов регрессии

$$S_{b_j}^2 = S_{ост}^2 \cdot C_{jj}, \qquad (4.13)$$

где C_{jj} – диагональные элементы матрицы, $C_{jj} = \Phi^{-1}$.

Тогда величина доверительного интервала для коэффициентов регрессии определяется по формуле

$$\Delta_{b_j} = t_{\alpha,\nu} \cdot S_{b_j}, \qquad (4.14)$$

где $t_{\alpha,\nu}$ – квантиль распределения Стьюдента с уровнем значимости $\alpha = 1 - p$ и количеством степеней свободы $\nu = n - n_B$.

Матрица C имеет вид:

$$C = \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 3{,}42 \cdot 10^{-3} \\ 3{,}42 \cdot 10^{-3} & 8{,}436 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}163 & -660{,}793 \\ -660{,}793 & 3{,}864 \cdot 10^{6} \end{pmatrix}.$$

Дисперсии коэффициентов:

$$S_{b_0}^2 = 2{,}747 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}163 = 4{,}478 \cdot 10^{-4};$$

$$S_{b_0}^2 = 2{,}747 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}864 \cdot 10^{6} = 1{,}061 \cdot 10^{4}.$$

Выберем $p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Коэффициент Стьюдента $t_{0,05;18} = 1{,}734$. Доверительные интервалы имеют следующие значения:

$$\Delta_{b0} = 1{,}734 \cdot \sqrt{4{,}478 \cdot 10^{-4}} = 0{,}037;$$

$$\Delta_{b1} = 1{,}734 \cdot \sqrt{1{,}061 \cdot 10^{4}} = 178{,}61.$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Следовательно,

$$-2{,}329 < \beta_0 < -2{,}255;$$

$$1{,}53 \cdot 10^4 < \beta_1 < 1{,}57 \cdot 10^4.$$

5 Построение экспериментально-статистических моделей путем активного эксперимента

Цель работы: освоить методику составления математических моделей объектов методом факторного эксперимента.

5.1 Основные теоретические сведения

В отличие от пассивного эксперимента построение модели объекта методом активного эксперимента предполагает воздействие на ход процесса и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес. Установление каждого фактора на некоторый уровень определяет одно из вероятных состояний объекта. Если перебрать все допустимые наборы уровней факторов, то получим множество различных состояний объекта, что и обусловливает число возможных опытов N. Последнее определяется выражением $N = l^k$, где l – число уровней; k – число факторов.

Важным этапом механизма построения экспериментально-статистических моделей методом активного эксперимента является выбор вида математической модели объекта. Чаще всего используются полиномиальные модели, достоинством которых является универсальность.

Полином первого порядка при построении двухфакторной модели

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \tag{5.1}$$

полином второго порядка

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2. \tag{5.2}$$

Последний полином содержит свободный член b_0, линейные члены $b_1 x_1$ и $b_2 x_2$, квадратичные члены $b_{11} x_1^2$ и $b_{22} x_2^2$ и член $b_{12} x_1 x_2$, определяющий эффект двойного взаимодействия факторов.

Индивидуальное задание

Выход продукта y зависит от N факторов. Каждый из факторов z_j изменяется в указанном в таблице 5.1 диапазоне [z_j^{min}; z_j^{max}]. Построить полиномиальную математическую модель объекта, учитывая результаты эксперимен-

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

та y_i, полученные в результате активного эксперимента. В каждой точке плана проведены три параллельных опыта.

5.2 Числовой пример построения модели

Пусть изучается влияние на выход продукта у трех факторов: температуры T в интервале 100…200 °С, давления P = 20…60 кгс/см^2 и времени τ = 10…30 мин.

Построить модель физического процесса в виде полинома первого порядка, оценить значимость коэффициентов и проверить адекватность модели.

5.2.1 Определим уровни факторов, интервал варьирования и составим матрицу планирования эксперимента.

Основной уровень (центр плана) рассчитывается по формуле для любого фактора z_j:

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, k. \tag{5.3}$$

Интервал варьирования

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, k. \tag{5.4}$$

Для 1-го фактора (температура T) $T°$ = 150 °С; ΔT = 50 °С.

Для 2-го фактора (давление P) $P°$ = 40 кгс/см^2; ΔP = 50 кгс/см^2.

Для 3-го фактора (время τ) τ = 20 мин.; Δτ = 10 мин.

От системы координат $z_1, z_2, \ldots, z_k$ перейдем к новой безразмерной системе координат $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Формула перехода или кодирования имеет вид:

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.5}$$

В безразмерной системе координат верхний уровень равен +1, нижний равен –1, координаты центра плана равны нулю и совпадают с началом координат. В данной задаче k = 3. Число возможных комбинаций N из трех факторов на двух уровнях $N = 2^k = 2^3 = 8$. Запишем план проведения экспериментов (матрицу планирования) в виде таблицы 5.1.

Значения выхода y, полученные в результате реализации плана экспериментов, приведены в последнем столбце таблицы 5.2. В каждой точке плана поставлены три параллельных опыта.

Обычно записывают кодированную матрицу планирования 2^3 и результаты эксперимента, введя столбец так называемой фиктивной переменной x_0 = 1.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Таблица 5.1 – Матрица планирования

Номер опыта	Значение факторов						Выход
	в натуральном масштабе			в безразмерной системе			
	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	y
1	100	20	10	–1	–1	–1	2; 3; 2
2	200	20	10	+1	–1	–1	6; 9; 5
3	100	60	10	–1	+1	–1	4; 7; 10
4	200	60	10	+1	+1	–1	8; 10; 9
5	100	20	30	–1	–1	+1	10; 7; 12
6	200	20	30	+1	–1	+1	18; 20; 21
7	100	60	30	–1	+1	+1	8; 9; 8
8	200	60	30	+1	+1	+1	12; 12; 10

Таблица 5.2 – Расширенная матрица планирования

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	2; 3; 2
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	6; 9; 5
3	+1	–1	+1	–1	+1	+1	+1	+1	4; 7; 10
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	8; 10; 9
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	10; 7; 12
6	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	8; 9; 8
7	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	12; 12; 10

5.2.2 Математическая модель процесса в виде полинома имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{123}x_1x_2x_3 \ . \qquad (5.6)$$

При этом для определения коэффициентов b_{12}, b_{13}, b_{23} (эффект двойного взаимодействия) и коэффициента b_{123} (эффект тройного взаимодействия) матрицу, записанную в безразмерной системе координат, с учетом столбца фиктивной переменной расширяют, как показано в таблице 5.2.

Найдем выборочное среднее результатов в каждой точке плана:

$$\overline{y}_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{u=1}^{m} y_{iu} \ , \qquad (5.7)$$

где m – количество параллельно поставленных опытов.

Для приведенного выше примера

$$y = (2{,}3;\ 6{,}7;\ 7{,}0;\ 9{,}0;\ 9{,}7;\ 19{,}7;\ 8{,}3;\ 11{,}3).$$

Определим дисперсию воспроизводимости каждого опыта:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{u=1}^{m} (y_{iu} - \overline{y}_i)^2 . \qquad (5.8)$$

S_i^2 = (0,3; 4,3; 9,0; 1,0; 6,3; 2,3; 0,3; 1,3).

Рассчитаем дисперсию воспроизводимости эксперимента:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{u=1}^{m} S_i^2 = 3{,}1 . \qquad (5.9)$$

Любой коэффициент уравнения регрессии b_j определяется по формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \overline{y}_i , \qquad (5.10)$$

где N – число опытов в матрице планирования.

Например, для определения коэффициента b_1 при x_1 необходимо получить сумму произведений:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & \overline{y} & & x_1\overline{y} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 2{,}3 \\ 6{,}7 \\ 7 \\ 9 \\ 9{,}7 \\ 19{,}7 \\ 8{,}3 \\ 11{,}3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -2{,}3 \\ 6{,}7 \\ -7 \\ 9 \\ -9{,}7 \\ 19{,}7 \\ -8{,}3 \\ 11{,}3 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_{1i} \overline{y}_i = 19{,}3; \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_{1i} y_i}{N} = \frac{19{,}3}{8} = 2{,}42.$$

Аналогично получим

b_0 = 9,25; b_1 = 2,42; b_2 = –0,33; b_3 = 3.

Эффекты взаимодействия определяют аналогично линейным эффектам:

b_{12} = –1,17; b_{13} = 0,83; b_{23} = –2,08; b_{123} = –0,58.

Таким образом, математическая модель процесса записывается следующим образом:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$\hat{y} = 9{,}25 + 2{,}42\, x_1 - 0{,}33\, x_2 + 3\, x_3 - 1{,}17\, x_1x_2 +$$
$$+ 0{,}83\, x_1x_3 - 2{,}08\, x_2x_3 - 0{,}58\, x_1x_2x_3. \qquad (5.12)$$

5.2.3 Определим значимость коэффициентов по критерию Стьюдента.

Рассчитаем дисперсию оценок коэффициентов регрессии:

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m}. \qquad (5.13)$$

Для приведенного примера $S_b^2 = 0{,}13$.

Оценим значимость коэффициентов по критерию Стьюдента:

$$t_0 = \frac{|b_0|}{s_b} = \frac{9{,}25}{0{,}13} = 71{,}04.$$

$t_1 = 18{,}56$; $t_2 = 2{,}56$; $t_3 = 23{,}04$; $t_{12} = 8{,}96$; $t_{13} = 6{,}4$; $t_{23} = 16$; $t_{123} = 4{,}48$.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ и числа степеней свободы $v = N\cdot(m - 1) = 16$ табулированное значение критерия Стьюдента $t_\alpha(v) = 2{,}583$. Таким образом, коэффициент b_2 незначим, и его следует исключить из уравнения. После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии примет вид:

$$\hat{y} = 9{,}25 + 2{,}42\, x_1 + 3\, x_3 - 1{,}17\, x_1x_2 + 0{,}83\, x_1x_3 - 2{,}08\, x_2x_3 - 0{,}58\, x_1x_2x_3.$$

Проверим адекватность полученного уравнения по критерию Фишера.

Рассчитаем дисперсию адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N - N_b} \sum_{i=1}^{N} (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \qquad (5.14)$$

где N_b – количество значимых коэффициентов регрессии.

Для примера

$$S_{ад}^2 = 2{,}67.$$

Найдем значение критерия:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}. \qquad (5.15)$$

Полученное значение сравним с табличным значением критерия Фишера F_T, определяемым в зависимости от уровня значимости $\alpha = 1 - p$ и числа степеней свободы k_1 и k_2, с которыми рассчитывались дисперсии $S_{ад}^2$ и S_y^2:

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$k_1 = N - N_b; \quad k_2 = N(m - 1). \qquad (5.16)$$

Например,

$$F = 0{,}853; \quad k_1 = 8 - 7 = 1; \quad k_2 = 8(3 - 1) = 16; \quad \alpha = 0{,}01; \quad F_T = 8{,}53.$$

Так как $F < F_T$, уравнение адекватно.

Содержание отчета

1 Цель работы.
2 Исходные данные для расчета.
3 Расчеты, связанные с определением уровня факторов, интервала варьирования, составлением матрицы планирования эксперимента.
4 Общий вид математической модели. Расчеты, связанные с определением коэффициентов уравнения регрессии.
5 Расчеты, определяющие значимость коэффициентов и адекватность модели.

Контрольные вопросы

1 В чем сущность метода активного эксперимента?
2 Какие требования предъявляются к факторам?
3 В каком виде чаще всего строится модель методом активного эксперимента?
4 Каким образом в модели учитывается эффект кратного взаимодействия факторов?
5 Каким образом составляют матрицу планирования?
6 Каким образом учитываются в матрице планирования эффекты кратного взаимодействия факторов?
7 Как рассчитываются коэффициенты регрессионного уравнения?
8 Поясните методику проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии.
9 Каким образом производится проверка адекватности регрессионного уравнения?

6 Построение и оптимизация математических моделей процессов при ограничении на параметры в виде равенств

Цель работы: освоить методику составления моделей, методы ее оптимизации при наличии ограничений на параметры.

6.1 Основные теоретические сведения

Оптимизация заключается в нахождении оптимума рассматриваемой функции или оптимальных условий проведения данного процесса.

Для оценки оптимума необходимо прежде всего выбрать критерий опти-

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

мизации. В зависимости от конкретных условий в качестве критерия оптимизации можно взять технологический критерий, например максимальный съем продукции с единицы объема аппарата, экономический критерий – минимальную стоимость продукта при заданной производительности.

На основании выбранного критерия оптимизации составляется так называемая целевая функция, или функция выгоды, представляющая собой зависимость критерия оптимизации от параметров, влияющих на его значение. Задача оптимизации заключается в нахождении экстремума (максимума или минимума) целевой функции.

В зависимости от характера рассматриваемых математических моделей применяют различные математические методы оптимизации. Многие из них сводятся к нахождению минимума или максимума целевой функции. Это аналитические методы (аналитический поиск экстремума, метод множителей Лагранжа), методы математического программирования (линейное, нелинейное программирование, динамическое программирование), методы поисковой оптимизации (метод градиента, метод наискорейшего спуска).

Метод множителей Лагранжа. Этот метод обычно используется, когда на переменные наложены ограничения типа равенства.

Так, если требуется найти экстремум функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наличии ограничений типа равенств на независимые переменные $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ($i = 1, \ldots, m_i$; $m < n$), то вводится вспомогательная функция

$$\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)=F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i\left(x_1,\ldots,x_n\right), \qquad (6.1)$$

где λ_i ($i = 1, \ldots, m$) – неопределенные множители Лагранжа.

В этом случае экстремальные точки функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ определяются решением системы уравнений, получаемой приравниванием нулю производных от функции $\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)$ по всем независимым переменным x_k ($k = 1, \ldots, n$) и по всем множителям Лагранжа λ_i ($i = 1, \ldots, m$).

Получаемая в результате система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)}{\partial x_k}=0\ ;\ \ k=1,\ldots,n\ ; \\ \dfrac{\partial\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)}{\partial x_i}=f_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0\ ;\ \ i=1,\ldots,m \end{cases} \qquad (6.2)$$

содержит $n + m$ уравнений, из которых можно исключить m неопределенных множителей Лагранжа, имеющих вспомогательное значение, и найти координаты экстремальных точек x'_k ($k = 1, \ldots, n$), которых в общем случае может быть и несколько, т. е. $i = 1, 2, \ldots, n$.

Каждое ограничение добавляет еще одно уравнение, и на каждое ограничение вводится один множитель Лагранжа.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Индивидуальное задание

Проектируется корпус прибора неразрушающего контроля. Крышка прибора представляет собой параллелепипед, у которого отсутствует одна из стенок. Известно, что объем, который должна закрывать эта крышка, составляет V. Какими должны быть геометрические размеры крышки корпуса, чтобы площадь поверхности крышки была минимальной?

Указания к выполнению задания

Составить целевую функцию, отражающую зависимость площади крышки корпуса прибора от ее геометрических размеров.

Выяснить ограничения, накладываемые на переменные, входящие в целевую функцию. Записать эти ограничения в виде равенств.

Ввести вспомогательную функцию, содержащую вспомогательные множители Лагранжа.

Продифференцировать вспомогательную функцию и получить систему уравнений, которую решить относительно искомых параметров.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи в математическом выражении.

3 Целевая функция, ограничения на параметры, вспомогательная функция, решение системы уравнений, ответ.

Контрольные вопросы

1 Что такое оптимизация? Что лежит в основе оптимизации?

2 Какую функцию называют целевой, или функцией выгоды?

3 Какие линии называют линиями уровня при оптимизации?

4 Какие методы оптимизации Вы знаете? Для решения каких типов задач они применимы?

5 В чем недостаток метода аналитического поиска экстремума?

6 В чем сущность метода множителей Лагранжа? Какие типы оптимизационных задач он позволяет решать?

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

7 Построение математических моделей многостадийных процессов

Цель работы: освоить метод динамического программирования и его применение к моделированию многостадийных процессов.

7.1 Основные теоретические сведения

Метод динамического программирования применяется для многостадийных процессов, характеризуемых последовательностью процессов и тем, что состояние системы зависит только от предыдущего шага, т. е. не зависит от ранее сделанных шагов.

В таких случаях используется принцип оптимальности, который формулируется в следующем виде: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что, каково бы ни было первоначальное состояние и начальное решение, последующие решения должны приниматься исходя из оптимальной стратегии относительно состояния, получаемого в результате первого решения.

Таким образом, метод динамического программирования предполагает разбиение анализируемого процесса во времени или пространстве на стадии или ступени. В качестве стадии можно принять единицу времени (минута или час), единичный элемент оборудования (усилитель, фильтр и т. д.).

На рисунке 7.1 представлен многостадийный процесс (N – общее число стадий). Каждая стадия характеризуется входными x^{i-1} и выходными x^i параметрами, а также параметрами управления u^i. При помощи управляющих воздействий оптимизируется результирующая оценка эффективности многостадийного процесса, определяемая как аддитивная функция результатов, получаемых на каждой стадии $r_i\left(x_1^{i-1},u^i\right)$:

$$R_N=\sum_{i=1}^{N} r_i\left(x_1^{i-1},u^i\right). \tag{7.1}$$

Значение критерия оптимальности R_N зависит от совокупности u_N управляющих воздействий на всех стадиях. Совокупность управлений называется стратегией управления многостадийным процессом.

Основным уравнением динамического программирования является функциональное уравнение вида

$$f_N\left(x^0\right)=\max_{u^1\in U}\left\{r_1\left(x^0,u^1\right)+f_{N-1}\left[\varphi^1\left(x^0,u^1\right)\right]\right\}, \tag{7.2}$$

где $f_N\left(x^0\right)$ – оптимизируемая функция N-стадийного процесса, максимальное значение критерия R_N.

Максимизация первого слагаемого $r_1\left(x^0,u^1\right)$, представляющего собой частный критерий, характеризующий первую стадию, проводится толь-

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

ко по управлению u^1.

Член $f_{N-1}\left[\varphi^1\left(x^0,u^1\right)\right]$ есть значение оптимизируемой функции на последующих N – 1 стадиях и максимизируется выбором управлений на всех стадиях, u^i (i = 1, …, N), поскольку значение x^1 зависит от управления u^1.

Выражение (7.1) представляет собой рекуррентное соотношение, характеризующее последовательность функций $f_i\left(x^{N-i}\right)$, i = 1, …, N, последняя из которых $f_N\left(x^0\right)$ отвечает искомому решению оптимальной задачи. Стратегия решения выражается системой выбранных значений u_i – членов уравнения (7.2), где i = 1, 2, …, N; система дает решение функционального уравнения. Оптимальная стратегия выражается системой функций u_i, которые максимизируют правую часть уравнения (7.2), а именно: u_1*, u_2*, …, u_N* для i = 1, 2, …, N.

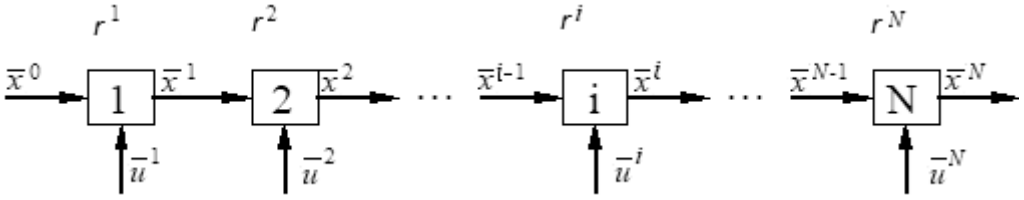


Рисунок 7.1 – Схема дискретного многостадийного процесса

Преимущество метода заключается в уменьшении количества рассматриваемых вариантов. Так, для анализа N стадийного процесса, в котором на каждой стадии принимается K решений, требует рассмотрения K^N возможных вариантов. Применение метода динамического программирования позволяет сократить количество вариантов до $N{\cdot}K$.

К недостаткам метода динамического программирования следует отнести отсутствие информации о том, как выполнять оптимизацию (подбирать значения u_N), а также сложность его применения в случае процессов с рециклами.

7.2 Общая схема решения задач

При решении задач оптимизации методом динамического программирования необходимо обратить внимание на следующие основные положения:

– оптимизируемый процесс должен быть дискретно распределенным во времени или пространстве (многостадийный процесс);

– отдельные стадии процесса должны обладать относительной независимостью, т. е. вектор выходных параметров любой стадии должен зависеть только от вектора входных параметров на эту стадию и управления на ней;

– критерий оптимальности всего процесса должен быть сформулирован как аддитивная функция критериев оптимальности каждой стадии.

Если выполняются эти условия, необходимо правильно сформулировать задачу оптимизации. При формулировке задачи оптимизации должны быть выявлены параметры, характеризующие состояние каждой стадии, управляющие параметры на каждой стадии, ограничения, которые накладываются на

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

параметры состояния процесса и управляющие параметры. Кроме того, должно быть составлено математическое описание для каждой стадии и определен критерий оптимальности.

7.3 Числовой пример решения задачи динамического программирования

Многокаскадным компрессором сжимается газ. Рассчитать распределение давления по ступеням компрессора исходя из условия минимума энергии, затрачиваемой на сжатие газа.

Полные затраты энергии на сжатие газа определяются по соотношению

$$E = \sum_{i=1}^{N} K \left[\left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)^{\alpha} - 1 \right], \tag{7.3}$$

где K и α – положительные константы;

P_i – давление газа на входе в (i + 1)-ю ступень;

P_{i-1} – давление газа после (i – 1)-й ступени.

Исходные данные: число ступеней N = 5; абсолютное давление на входе в первую ступень P_0 = 0,1 МПа (1 кгс/см^2); абсолютное давление на выходе компрессора P_5 = 30 МПа (300 кг/см^2).

В данной постановке задачи критерий оптимальности

$$R = E = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)^{\alpha} - 1 \right], \tag{7.4}$$

т. е. R есть аддитивная функция частных критериев оптимальности, т. к. общая энергия, затрачиваемая на сжатие, есть сумма затрат на каждой стадии. Константа K не влияет на условие минимума R.

Решение проведем в два этапа.

Первый этап. Согласно принципу оптимальности для последней стадии процесса записываем

$$f_1(P_4) = \min_{P_5 \in P} \left[\left(\frac{P_5}{P_4} \right)^{\alpha} - 1 \right], \tag{7.5}$$

где P – область допустимых значений $P_i \left(P_0 \le P_i \le P_5 \right)$.

Поскольку давление P_5 задано, для $f_1(P_4)$ имеем

$$f_1(P_4) = \left(\frac{P_5}{P_4} \right)^{\alpha} - 1. \tag{7.6}$$

Далее получим

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$f_2(P_3) = \min_{P_4 \in P} \left\{ \left[\left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\alpha} - 1 \right] + \left[\left(\frac{P_5}{P_4} \right)^{\alpha} - 1 \right] \right\}. \qquad (7.7)$$

Обозначив выражение в фигурных скобках через u_4 и воспользовавшись необходимым условием существования экстремума функции одной переменной, записываем

$$\frac{du_4}{dP_4} = \left(\frac{\alpha P_4^{\alpha-1}}{P_3^{\alpha}} \right) - \left(\frac{\alpha P_5^{\alpha}}{P_4^{\alpha+1}} \right) = 0. \qquad (7.8)$$

Отсюда получим

$$P_4(opt) = (P_3 P_5)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.9)$$

При $P_4 = (P_3 P_5)^{\frac{1}{2}}$ достигается минимум функции u_4.

Подставив в уравнение (7.8) соотношение (7.10), имеем

$$f_2(P_3) = \left[\frac{(P_3 P_5)^{\frac{1}{2}\alpha}}{P_3^{\alpha}} - 1 \right] + \left[\frac{P_5^{\alpha}}{(P_3 P_5)^{\frac{1}{2}\alpha}} - 1 \right] = 2 \left[\left(\frac{P_5}{P_3} \right)^{\frac{1}{2}\alpha} - 1 \right]. \qquad (7.10)$$

Для $f_3(P_2)$

$$f_3(P_2) = \min_{P_3 \in P} \left\{ \left[\left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\alpha} - 1 \right] + 2 \left[\left(\frac{P_5}{P_3} \right)^{\frac{1}{2}\alpha} - 1 \right] \right\}. \qquad (7.11)$$

Выражение для P_3 находим аналогично предыдущему по необходимому условию существования экстремума функции одной переменной:

$$\frac{du_3}{dP_3} = \left(\frac{\alpha P_3^{\alpha-1}}{P_2^{\alpha}} \right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{P_5^{\frac{1}{2}\alpha}}{P_3^{\frac{1}{2}\alpha+1}} \right) = 0, \qquad (7.12)$$

где

$$u_3 = \left\{ \left[\left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\alpha} - 1 \right] + 2 \left[\left(\frac{P_5}{P_3} \right)^{\frac{1}{2}\alpha} - 1 \right] \right\}, \qquad (7.13)$$

откуда

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$P_{3opt} = \left(P_2^2 P_5\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (7.14)$$

Продолжая процедуру, находим

$$P_{2opt} = \left(P_1^3 P_5\right)^{\frac{1}{4}} . f_4\left(P_1\right) = 4\left[\left(\frac{P_5}{P_1}\right)^{\frac{1}{4}\alpha} - 1\right]. \qquad (7.15)$$

$$P_{1opt} = \left(P_0^4 P_5\right)^{\frac{1}{5}} . f_5\left(P_0\right) = R^* = 5\left[\left(\frac{P_5}{P_0}\right)^{\frac{1}{5}\alpha} - 1\right]. \qquad (7.16)$$

Второй этап. Рассчитаем значения параметров управления.

$$P_{1opt} = \left(P_0^4 P_5\right)^{\frac{1}{5}} = \left(1 \cdot 300\right)^{\frac{1}{5}} = 3{,}13. \quad P_{2opt} = \left(P_{1opt}^3 P_5\right)^{\frac{1}{4}} = \left(31 \cdot 300\right)^{\frac{1}{4}} = 9{,}8 \text{ кгс/см}^2.$$

$$P_{3opt} = \left(P_{2opt}^2 P_5\right)^{\frac{1}{3}} = \left(96 \cdot 300\right)^{\frac{1}{3}} = 30{,}7. \quad P_{4opt} = \left(P_3 P_5\right)^{\frac{1}{2}} = \left(30{,}7 \cdot 300\right)^{\frac{1}{2}} = 96 \text{ кгс/см}^2.$$

Индивидуальное задание

Проектируется многоканальный усилитель сигнала. Полные затраты энергии на усиление сигнала определяются выражением

$$E_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} K\left[\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\alpha} - 1\right], \qquad (7.17)$$

где K и α – положительные константы;

P_i – мощность сигнала на входе в $(i + 1)$-й каскад;

P_{i-1} – мощность сигнала после выхода с $(i - 1)$-го каскада.

Рассчитать мощность сигнала по каскадам усилителя при условии, что полные затраты энергии на усиление сигнала должны быть минимальны.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Схема моделируемого многостадийного процесса с определением входных и выходных величин на каждой стадии.

3 Критерий оптимальности в математическом выражении.

4 Расчеты, связанные с оптимизацией процесса на каждой стадии.

5 Расчет искомых величин.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Контрольные вопросы

1 В каких случаях применяется метод динамического программирования?

2 В чем сущность принципа оптимальности?

3 В чем заключается основная идея метода динамического программирования?

4 Какими параметрами характеризуется каждая стадия многостадийного процесса?

5 Что называется стратегией управления?

6 Запишите основные уравнения динамического программирования.

7 Какими недостатками обладает метод динамического программирования?

Список литературы

1 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2016. – 592 с. : ил.

2 **Колесов, Ю. Б.** Моделирование систем. Практикум по компьютерному моделированию : учебное пособие для вузов / Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2007. – 352 с.

3 **Зарубин, В. С.** Математическое моделирование в технике : учебник для вузов / В. С. Зарубин. – Москва : МГТУ им Н. Э. Баумана, 2001 . – 496 с.

4 **Емельянов, А. А.** Имитационное моделирование экономических процессов : учебное пособие / А. А. Емельянов, В. А. Власова, Р. В. Дума. – Москва : Финансы и статистика, 2002. – 368 с. : ил.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/