ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направлений подготовки 09.03.01«Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения

Могилев 2018

УДК 004.4
ББК 32.973.26
С 23

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «04» сентября 2018 г., протокол № 2

Составитель канд. техн. наук, доц. А. В. Кушнер

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. Д. Камчицкая

В методических рекомендациях кратко изложены теоретические сведения, необходимые для лабораторных работ. Составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Случайные процессы» для направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Технический редактор А. А Подошевко

Компьютерная верстка Е. С. Лустенкова

Подписано в печать .Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Разработка программных датчиков псевдослучайных последовательностей чисел

Цель работы

Разработка и реализация программных датчиков псевдослучайных последовательностей чисел с равномерным законом распределения.

1.1 Основные теоретические положения

В большинстве случаев в алгоритмах формирования на ЭВМ последовательности случайных чисел, распределенных по заданному вероятностному закону, используются последовательности равномерно распределенных в интервале [0,1] случайных чисел.

Для получения равномерно распределенной числовой последовательности разработано несколько алгоритмов. Рассмотрим некоторые из них.

1.1.1 Алгоритм, основанный на методе вычетов.

Два числа назовем конгруэнтными по модулю q, если разность этих чисел делится на q без остатка. Символически это записывается в виде

$$x = y \cdot \mathrm{mod}\, q$$

Выражение y mod q обозначает остаток от деления числа y на q. Рекурентное соотношение

$$x_{n+1} = \left(k \cdot x_n \cdot \mathrm{mod}\, q\right)$$

порождает последовательность чисел x_n, распределенных приблизительно по равномерному закону.

Качество этой последовательности тем выше, чем больше число q.

К недостаткам данного метода относятся:

– интервал распределения отличен от [0,1];

– имеется довольно сильная корреляционная зависимость в последовательности x_n.

Первый недостаток устраняется простым преобразованием

$$x'_{ni} = \frac{x_n}{10^{\{\lg(q)\}+1}}$$

где $\{\lg(q)\}$ означает целую часть от $\lg(q)$.

Для уменьшения корреляции специальным образом выбирают числа x_1 и k.

В частности, можно использовать следующий алгоритм:

$$x_1 = 3141592;$$

$$x_{n+1} = \left(1000 \cdot x_n + x_n + 231\right) \bmod 10^8;$$

$$x_{n+1}^* = \frac{x_{n+1}}{10^8}.$$

Рекомендуемые значения для 32-разрядной сетки:

$$q = 2^{31} = 2147483648;$$

$$k = 2^{16} + 3 = 65539;$$

$$x_0 = k,$$

а число $x_i = \dfrac{x_i}{q}$.

1.1.2 Алгоритм, основанный на методе произведений.

Пусть даны два числа x_0 и x_1 в интервале [0,1]. Число знаков после запятой y, x_0 и x_1 одинаково и равно n (n – четное).

Вычислим $x_2' = x_0 \cdot x_1$.

Выделим из x_2' n средних цифр и образуем число $x_2 = 0,xx\ldots x$.

Произведем те же действия с числами x_1 и x_2, получив x_3, затем с числами x_2 и x_3 и т. д.

В результате получим последовательность чисел, равномерно распределенных в интервале [0,1].

1.1.3 Алгоритм, основанный на методе срединных квадратов.

Пусть дано число x_1 в интервале [0,1]. Число знаков после запятой x_1 равно n (n – четное).

Вычислим $x_1' = x_1^2$.

Выделим из x_1' n средних цифр и образуем число $x_2 = 0,xx\ldots x$.

Произведем те же действия с числом x_2, получив x_3, затем с числом x_3 и т. д.

Если приведенное соотношение разрешается в явном виде относительно z_i, то можно получить функциональную зависимость равномерно распределенной величины X и случайной величины Z с плотностью распределения $f(z)$.

Недостатки методов (см. пп. 1.1.2 и 1.1.3) – наличие корреляции между числами последовательности, иногда случайность может отсутствовать. Кроме того, может наблюдаться вырождение последовательности, т. е. при некотором i получим $x_i = 0$.

1.1.4 Алгоритм Д. Лемера.

Пусть задано $2n$-разрядное число X_0 и постоянный множитель C. Тогда алгоритм Д. Лемера можно сформулировать в виде последовательности следующих шагов:

1) число X_0 возвести в квадрат;

2) выбрать $2n$ последних цифр из x_0^2, результат присвоить X_0';

3) найти произведение $C \cdot X_0'$ и из него выделить первые $2n$ цифр, результат присвоить x_0'';

4) x_0'' возвести в квадрат;

5) выделить первые $2n$ цифр из $(x_0'')^2$, результат присвоить x_0''';

6) умножить x_0''' на C;

7) из произведения $C * x_0'''$ выбрать последние $2n$ цифр, результат присвоить переменной x_0'''';

8) сложить x_0'' и x_0''''. Полученная сумма и является случайным числом X_1.

Для получения X_2 с X_1 необходимо проделать те же операции и т. д.

1.2 Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с теоретическими положениями работы.

2 Разработать математическую модель и алгоритм генерации равномерно распределенных псевдослучайных числовых последовательностей, учитывающий возможность вычисления основных статистических характеристик.

3 Разработать программный датчик моделирования равномерно распределенных случайных чисел в интервале [0,1].

4 Выполнить отладку программы и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

Отчет по работе должен содержать:
– цель работы;
– постановку задачи и исходные данные;
– схему алгоритма и программу;
– результаты моделирования реализаций псевдослучайных равномерно распределенных числовых последовательностей и их основные статистические характеристики;
– результаты тестирования разработанного датчика;
– выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Какие методы моделирования равномерно распределенных псевдослучайных чисел Вы знаете?

2 Как получить последовательность равномерно распределенных в интервале $[a,b]$ псевдослучайных чисел?

3 Как вычислить основные статистические характеристики псевдослучайных последовательностей чисел?

4 Какие проверки качества программных датчиков псевдослучайных чисел Вы знаете?

5 Какие критерии используются для статистической проверки результатов моделирования псевдослучайных последовательностей чисел?

2 Исследование программных датчиков псевдослучайных последовательностей чисел

Цель работы

Проверка качества моделируемых псевдослучайных последовательностей чисел.

2.1 Основные теоретические положения

2.1.1 Характеристики качества генераторов.

При использовании программных генераторов псевдослучайных квазиравномерных последовательностей важными характеристиками качества генератора является *длина периода T и длина отрезка апериодичности L.* Длина отрезка апериодичности L псевдослучайной последовательности $\{x_i\}$ есть наибольшее целое число, такое, что при $0 \le j < i < L$ событие $P\{x_i = x_j\}$ не имеет места. Это означает, что все числа x в пределах отрезка апериодичности не повторяются.

Очевидно, что использование при моделировании систем последовательности чисел $\{x_i\}$, длина которой больше отрезка апериодичности L, может привести к повторению испытаний в тех же условиях, что и раньше, т. е. увеличение числа реализаций не дает новых статистических результатов.

Чем больше T и L, тем лучше датчик (особенно L).

Способ экспериментального определения длины периода P и длины отрезка апериодичности L сводится к следующему.

1 Берем V – достаточно большое число.

2 Генерируем $x_0, x_1, \ldots, x_{V-1}$ и проверяем x_V, запоминая его.

3 Генерируем $x_{V+1}, \ldots, x_{V+V}$ и проверяем $x_{V+i} = x_V$. Если нет для $i = \overline{1, V-1}$, то $T \ge V$ и $L \ge 2V - 1$. Иначе запоминаем i_1, для которого $x_{V+i_1} = x_V$, и находим следующий i_2, для которого (если нужно, генерируются дополнительные величины). Тогда $T = i_2 - i_1$.

4 Генерируем $x_0, x_1, \ldots$ и $x_T, x_{T+1}, \ldots$ и ищем первое совпадение $x_i = x_{T+i}$. Тогда $L = T + i$.

2.1.2 Проверка равномерности.

Проверка равномерности последовательностей псевдослучайных квазиравномерно распределенных чисел $\{x_i\}$ может быть выполнена по гистограмме с использованием косвенных признаков. Суть проверки по гистограмме сводится к следующему. Выдвигается гипотеза о равномерности распределения чисел в интервале (0, 1). Затем интервал (0, 1) разбивается на k равных частей, тогда при генерации последовательности $\{x_i\}$ каждое из чисел x с вероятностью $PJ = 1/k$, $j = 1...k$ *(теоретические значения)*, попадает в один из подынтервалов. Всего в каждый j-й подынтервал попадает N_J чисел последовательности $\{x_i\}$, $i = 1... N$, причем $N = \Sigma N_J$. Относительная частота попадания случайных чисел последовательности $\{x_i\}$ в каждый из подынтервалов будет равна N_j/N *(экспериментальные значения)*. Очевидно, что если числа x_i принадлежат псевдослучайной квазиравномерно распределенной последовательности, то при достаточно больших N экспериментальная гистограмма приблизится к теоретической прямой.

Оценка степени приближения, т. е. равномерности последовательности, может быть проведена с использованием критериев согласия. На практике обычно принимается $k = 20 – 50$, $N = (10^2 – 10^3)k$.

Суть проверки равномерности по косвенным признакам сводится к следующему. Генерируемая последовательность чисел $\{x_i\}$ разбивается на две последовательности: первая с нечетными номерами $\{x_i\}$ $i = 1, 3, 5, ...$, вторая с четными $\{x_i\}$ $i = 2, 4, 6, …, i = 1...N$.

Затем проводится следующий эксперимент. Если выполняется условие

$$x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 < 1,$$

то фиксируется наступление некоторого события и в счетчик событий добавляется единица. После $N/2$ опытов, когда генерировано N чисел, в счетчике будет некоторое число $k < N/2$.

Геометрически условие означает, что точка (x_{2i-1}, x_{2i}), находится внутри четверти круга радиусом r = 1. В общем случае точка (x_{2i-1}, x_{2i}) всегда попадает внутрь единичного квадрата. Тогда теоретически вероятность попадания этой точки в четверть круга $p_k= \pi/4$.

Если числа последовательности $\{x_i\}$ равномерны, то в силу закона больших чисел теории вероятностей при больших N относительная частота $2k/N \to \pi/4$.

2.1.3 Проверка стохастичности.

Метод комбинаций. Сущность метода комбинаций сводится к определению закона распределения длин участков между единицами (нулями) или закона распределения (появления) числа единиц (нулей) в n-разрядном двоичном числе X_i. На практике длину последовательности N берут достаточно большой и проверяют все n разрядов или только l старших разрядов числа X_i.

Теоретически закон появления j единиц в l разрядах двоичного числа X_i описывается исходя из независимости отдельных разрядов биномиальным законом распределения

$$P(j,l) = C_l^j p^j(l) \cdot p^{l-j}(0),$$

где $P(j, l)$ – вероятность появления j единиц в l разрядах числа X_i. Тогда при фиксированной длине выборки N теоретически ожидаемое число появления случайных чисел X_i с j единицами в проверяемых l разрядах будет определяться как

$$n_j = N \cdot P(j,l).$$

После нахождения теоретических и экспериментальных вероятностей $P(j, l)$ или чисел n_j при различных значениях $l < n$ гипотеза о стохастичности проверяется с использованием критериев согласия.

Метод серий. При анализе стохастичности последовательности чисел $\{x\}$ методом серий последовательность разбивается на элементы первого и второго рода (a и b), т. е. $x_i = a$, если $x_i < p$, b – в противном случае, где $0 < p < 1$.

Теоретическая вероятность появления серии длиной j в последовательности длиной l в N опытах (под опытом здесь понимается генерация числа x_i и проверка условия $x_i < p$) определится формулой Бернулли

$$P(j,l) = C_l^j\, p^j \cdot (1-p)^{l-j}.$$

В случае экспериментальной проверки оцениваются частоты появления серий длиной j. В результате получаются теоретическая и экспериментальная зависимости $P(j, l)$, сходимость которых проверяется по известным критериям согласия.

2.1.4 Проверка независимости.

Проверка независимости элементов псевдослучайных равномерно распределенных чисел проводится на основе вычисления корреляционного момента.

Случайные величины ξ и η называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Следовательно, независимость элементов последовательности может быть проведена путем введения в рассмотрение последовательности $\{y_i\} = \{x_i + \tau\}$, где τ – величина сдвига последовательности.

При любом $\tau \neq 0$ для достаточно больших N с доверительной вероятностью β справедливо соотношение

$$\rho_{\xi\eta}(\tau) \le \beta\sqrt{1/N},$$

где $\rho_{\xi\eta}(\tau)$ – коэффициент корреляции,

$$\rho_{\xi\eta}(\tau) = \frac{\dfrac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{n-\tau} x_i \cdot x_{i+\tau} - \dfrac{1}{(N-\tau)^2}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i \cdot \sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}}{\sqrt{D[x_i]\cdot D[x_{i+\tau}]}}.$$

Здесь

$$D[x_i] = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i^2 - \frac{1}{(N-\tau)^2}\left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i\right)^2;$$

$$D[x_{i+\tau}] = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}^2 - \frac{1}{(N-\tau)^2}\left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}\right)^2.$$

Если найденное значение находится в указанных пределах, то с вероятностью β можно утверждать, что последовательность чисел $\{x_i\}$ удовлетворяет гипотезе корреляционной независимости.

Важными характеристиками качества генератора псевдослучайных равномерно распределенных последовательностей является длина периода p и длина отрезка апериодичности L. Параметр p определяет количество чисел повторяющихся групп в последовательности $\{x_i\}$, а параметр L – максимальный отрезок, в пределах которого все числа x_i не повторяются.

Моделируется v чисел. Число x_v запоминается. Затем снова начиная с x_o моделируются числа и определяется период p путем сравнения x_v с x_i : $p = i_2 - i_1$.

Для определения L фиксируется минимальный номер $i - i_3$, при котором $x_i = x_{p+i}$, и в этом случае длина отрезка апериодичности (рисунок 2.1) $L = i_3 + p$.

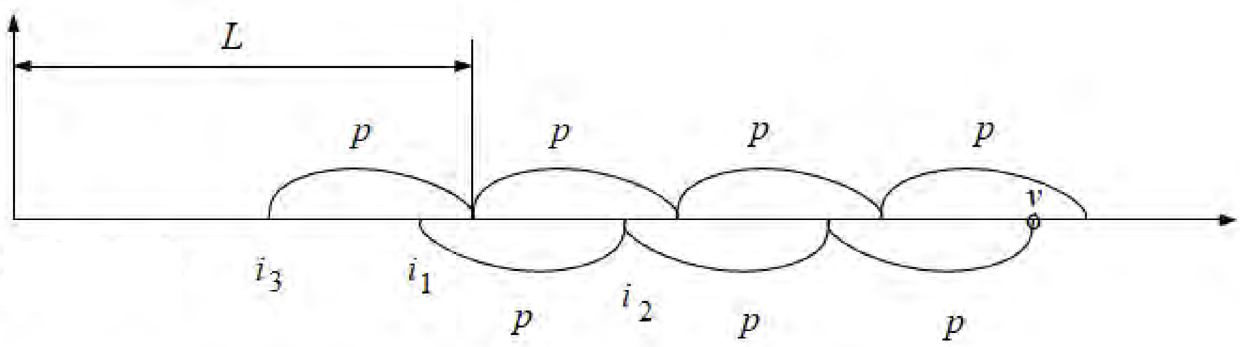

Рисунок 2.1 – Схема для определения периода и длины отрезка апериодичности последовательности случайных чисел

2.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Выбрать исходные данные для выполнения работы согласно варианту, указанному преподавателем.

3 Разработать алгоритм для проверки качества псевдослучайных последовательностей.

4 Разработать программную реализацию алгоритма и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.
2 Постановка задачи и исходные данные.
3 Схема алгоритма и программа.
4 Результаты проверки качества псевдослучайных последовательностей.
5 Выводы по оценке результатов.

Контрольные вопросы

1 Какие существуют разновидности проверок качества псевдослучайных последовательностей?

2 В чем заключается проверка равномерности?

3 Моделирование дискретной случайной величины

Цель работы

Разработка алгоритма моделирования дискретной случайной величины.

3.1 Основные теоретические положения

Моделирование дискретной СВ с заданным рядом распределения. Случайная величина X может принять значение x_1 с вероятностью P_1, значение x_2 с вероятностью P_2, …, значение x_n с вероятностью P_n.

Схематично это показано на рисунке 3.1.

Рисунок 3.1 – Случайная величина X

Для моделирования такой случайной величины можно воспользоваться датчиком случайной величины E с равномерным распределением в интервале от 0 до 1. Выданное датчиком значение e последовательно сравнивается следующим образом:

– если $e < P(x_1)$, то принимаем $X = x_1$;

– если $e < P(x_2) + P(x_1)$, то принимаем $X = x_2$ и т. д.;

– если $e < P(x_2) + P(x_1) + P(x_{n-1})$, то принимаем $X = x_{n-1}$;

– если ни одно из предыдущих условий не выполнено, то принимаем $X = x_n$.

Задание

1 Необходимо смоделировать реализацию случайной величины X, которая может принимать семь значений 5, 7, 17, 19, 21, 25, 55 со следующими вероятностями:

$$P(X = 5) = 0{,}01;\ P(X = 7) = 0{,}05;\ P(X = 17) = 0{,}3;\ P(X = 19) = 0{,}3,\ P(X = 21) = 0{,}3;$$
$$P(X = 25) = 0{,}02;\ P(X = 55) = 0{,}02.$$

2 Смоделировать следующие распределения (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Распределение случайных чисел

x	0	1	…	n
p	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$	…	$\frac{1}{n+1}$

Тогда $x = \mathrm{int}(\alpha(n+1))$.

3.1.1 Геометрическое распределение.

Значения случайной величины $x = 0, 1, 2, \ldots$ до ∞

$$p\{x = m\} = p(1-p)^m; 0 < p < 1$$

$$x = \mathrm{int}\left(\frac{\ln\alpha}{\ln(1-p)}\right).$$

3.1.2 Отрицательно-биномиальное распределение.

$x = 0, 1, 2, \ldots$ до ∞.

Параметры: $0 < p < 1$ и $r = 1, 2, 3, \ldots$.

$$p\{x = m\} = C_{m+r-1}^{m} \cdot p^r (1-p)^m.$$

Для $r = 1$ это распределение совпадает с геометрическим, поэтому можно представить $x = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$, где $\xi_i, (i = \overline{1,r})$ – независимые случайные величины, распределенные по геометрическому закону. Таким образом,

$$x = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{int}\left(\frac{\ln\alpha_i}{\ln(1-p)}\right)$$

(базовый датчик должен выдать r чисел для генерации одного x).

3.1.3 Биномиальное распределение.

$x = 1, 2, \ldots, n$ событий;

$p\{x = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ (теорема об опытах – вероятность наступления m A в n опытах).

Введем функцию Хэвисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0; \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

Тогда $x = \sum_{k=1}^{n} \theta(p - \alpha)$;

$(p - \alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha < p$ – наступило единичное событие $\Rightarrow$ сумма дает количество событий, наступивших в n опытах, тождественно биномиальному распределению.

3.1.4 Пуассоновское распределение.

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ до } \infty;$$

$$p\{x = m\} = \frac{\lambda^m}{n!} e^{-\lambda};$$

$$x = \min \left\{ m : \sum_{i=0}^{m} \ln \alpha_i < -\lambda \right\}.$$

3.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Получить исходные данные для выполнения работы по заданию преподавателя.

3 Разработать алгоритм моделирования дискретной случайной величины.

4 Разработать процедуру реализации алгоритма и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и листинг программной процедуры.

4 Результаты выполнения алгоритма моделирования дискретной случайной величины.

5 Выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Что такое дискретная случайная величина?

2 Какие разновидности распределения дискретных случайных величин Вы знаете?

4 Моделирование псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения

Цель работы

Изучение моделирования псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения.

4.1 Основные теоретические положения

Для получения последовательностей псевдослучайных чисел с заданным законом распределения чаще всего используют последовательности случайных величин, равномерно распределенных в интервале [0,1].

Пусть для величины z, имеющей заданное распределение, известна функция плотности распределения $f(z)$. Тогда, используя свойство функции распределения принимать значение от 0 до 1 при изменении аргумента от $-\infty$ до $+\infty$, каждому значению x_i случайной величины X, равномерно распределенной в интервале [0,1], ставим в однозначное соответствие значение z_i величины Z:

$$x_i = \int_{-\infty}^{z_i} f(z)dz\,. \qquad (4.1)$$

Формирование последовательности случайных чисел с показательным распределением.

Показательное распределение случайной величины имеет следующую плотность вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \forall\ x \ge 0; \\ 0, \forall\ x < 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Это распределение зависит от одного параметра λ, а его функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda x}, \forall\ x > 0; \\ 0, \forall\ x \le 0. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Подставим выражение (4.3) в (4.1), тогда

$$x_i = \lambda \int_0^{z_i} e^{-\lambda \cdot x} dz\,; \qquad (4.4)$$

$$x_i = 1 - e^{-\lambda z_i}\,; \qquad (4.5)$$

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x_i)\,. \qquad (4.6)$$

Так как $(1 - x_i)$ случайное равномерно распределенное в интервале [0; 1] число, то

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln x_i\,. \qquad (4.7)$$

Теоретические значения математического ожидания m, дисперсии D и среднего квадратического отклонения σ последовательности случайных чисел с показательным распределением представлены следующим образом:

$$m = \frac{1}{\lambda}; \; D = \frac{1}{\lambda^2}; \sigma = \sqrt{D}. \tag{4.8}$$

Формирование последовательности случайных чисел, равномерно распределенных в интервале **[*a*, *b*].**

Для формирования псевдослучайных числовых последовательностей z_i, равномерно распределенных в интервале $[a, b]$ с плотностью распределения

$$f(z)' = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \forall \;\; a \le z \le b; \\ 0, \forall \;\; z < a; \; z > b; \end{cases} \tag{4.9}$$

достаточно случайное число x_i из интервала [0; 1] привести к интервалу $[a, b]$ и сдвинуть на величину a:

$$z_i = (b - a)x_i + a. \tag{4.10}$$

При этом теоретическое значение математического ожидания m последовательности случайных чисел и их дисперсия D определяются по формулам:

$$m = \frac{a+b}{2}; \quad D = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{4.11}$$

Формирование последовательности случайных чисел, подчиняющихся распределению Пуассона (приближенный метод).

Во многих задачах (анализ вызовов на АТС, излучение электронов из накаленного катода, анализ микробов в воздухе и т. д.) используются случайные величины, распределенные по своеобразному закону, который называется законом Пуассона.

Случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение m из ряда чисел 0, 1, 2, ..., m, ..., выражается формулой

$$P_m = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\alpha},$$

где α – некоторая положительная величина, называемая параметром закона Пуассона (может быть и нецелой).

Ряд случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, имеет вид, представленный в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Ряд случайной величины X, распределенной по закону Пуассона

X_m	0	1	2	…	m	…
P_m	$e^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{1!}\cdot e^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{2!}\cdot e^{-\alpha}$	…	$\frac{\alpha}{m!}\cdot e^{-\alpha}$	…

На рисунке 4.1 приведены распределения случайной величины X по закону Пуассона, соответствующие различным значениям параметра.

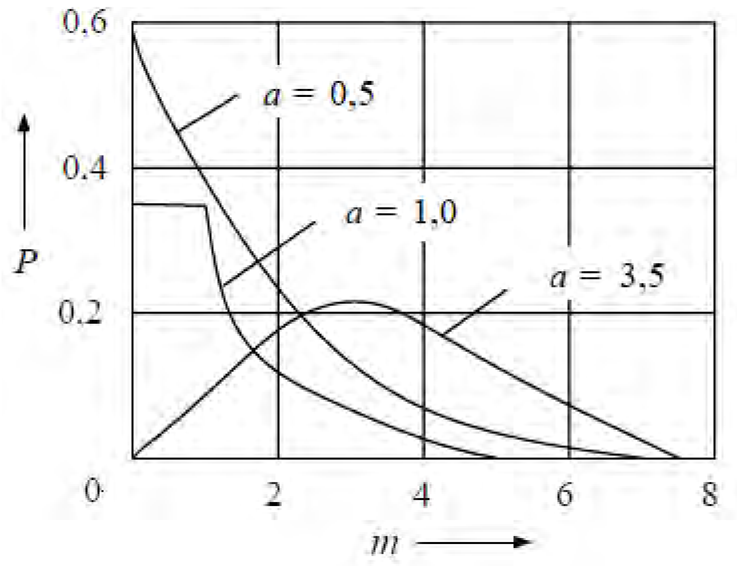

Рисунок 4.1– Распределение случайной величины X по закону Пуассона

Для формирования такой последовательности может быть использована следующая процедура. Берется произведение равномерно распределенных в интервале [0,1] чисел x_j. Причем число сомножителей m выбирается таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\prod_{i=1}^{m} x_i < e^{-\lambda}, \tag{4.12}$$

где m – параметр моделируемого распределения Пуассона.

Если условие (4.12) выполняется, то можно утверждать, что число $z_j = m - 1$ будет представлять случайное число, принадлежащее последовательности чисел, распределенных по закону Пуассона с параметром m.

Формирование последовательности случайных чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами m и σ.

Плотность распределения последовательности случайных чисел, распределенных по нормальному закону, имеет вид:

$$f(z') = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.13}$$

В силу центральной предельной теоремы случайная величина

$$z_j = \sum_{i=1}^{N} x_i, j = 1, ..., k \tag{4.14}$$

при достаточно большом N будет иметь распределение, близкое к нормальному. Здесь в качестве x_i могут быть использованы равномерно распределенные псевдослучайные числа, N – количество равномерно распределенных чисел в сумме, k – количество моделируемых нормально распределенных чисел.

Если x_i некоррелированные величины, то

$$m[z] = \sum_{1}^{N} m_{xi} = N\frac{a+b}{2}; \quad D[z] = \sum_{1}^{N} D_{xi} = N\frac{(a+b)^2}{12}. \tag{4.15}$$

Используя последние выражения для заданного N, можно определить границы $[a;\ b]$, такие, при которых Z имела бы заданные значения параметров m и σ, решив систему уравнений:

$$\sigma = \frac{(b-a)\sqrt{N}}{2\sqrt{3}}; \qquad m = \frac{N(a+b)}{2}, \tag{4.16}$$

откуда

$$a = \frac{m - \sigma\sqrt{N}}{N}; \qquad b = \frac{m + \sigma\sqrt{3N}}{N}. \tag{4.17}$$

Для получения псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале $[a;\ b]$, можно использовать преобразование (4.10).

Используя аппарат функциональных преобразований, а также размножение функции в ряды специального вида, можно получить уточненную формулу для формирования последовательностей случайных чисел, распределенных по нормальному закону:

$$z = z' + \frac{1}{20 \cdot N}\left[(z')^3 - 3 \cdot z'\right].$$

Вычисление основных статистических характеристик полученных псевдослучайных числовых последовательностей.

Оценка математического ожидания m_p, дисперсии D_p и среднего квадратического отклонения ζ_p числовой последовательности x_i выполняется по формулам:

$$m_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \quad D_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2; \quad \sigma_p = \sqrt{D_p}, \tag{4.18}$$

где x_i – i-е значение псевдослучайной числовой последовательности.

Оценка результатов статистического моделирования реализаций случайных величин.

В силу случайных причин теоретические значения m, D и σ, полученные по формулам (4.8) и вычисленные на основе смоделированных экспериментальных реализаций по формулам (4.18), будут отличаться на величину ε, называемую точностью оценки:

$$\left(m-m_p\right)<\varepsilon; \quad \left(D-D_p\right)<\varepsilon. \tag{4.19}$$

Вероятность α того, что неравенства (4.19) выполняются, называют достоверностью оценки. Тогда

$$p\left(\left|m-m_p\right|<\varepsilon\right)=\alpha. \tag{4.20}$$

Согласно центральной предельной теореме оценка среднего при больших значениях реализаций N будет иметь распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием m и дисперсией ζ^2/N. При этом точность оценки ε смоделированной нормально распределенной числовой последовательности при числе реализаций N может быть определена выражением

$$\varepsilon=\frac{t_\alpha \sigma_p}{\sqrt{N}}, \tag{4.21}$$

где t_α – квантиль порядка α (заданной вероятности α) для нормальной функции распределения с параметрами $m = 0$; $\sigma = 1$.

Квантилем порядка α одномерного распределения называется такое значение t_α случайной величины t, для которого $p(t < t_\alpha) = \alpha$.

Для нормального закона распределения случайной величины с параметрами m и ζ вероятность $p(t < t_a)$ вычисляется следующим образом:

$$p\left(t<t_\alpha\right)=\Phi\left(\frac{t_\alpha-\alpha}{\sigma}\right), \tag{4.22}$$

где Φ – табулированная нормальная функция распределения Лапласа.

При моделировании случайных величин важным является вопрос о соответствии полученной реализации заданному закону распределения.

Существует несколько методов проверки качества числовых последовательностей: проверка случайности и периодичности, гипотезы о соответствии последовательности заданному закону распределения.

Последняя проверка производится с помощью критериев согласия [1.2], из которых чаще всего используется критерий χ^2 Пирсона.

4.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Выбрать исходные данные для выполнения работы согласно варианту, указанному преподавателем.

3 Разработать математическую модель и алгоритм генерации заданных псевдослучайных последовательностей, учитывающий возможность вычисления математического ожидания и среднеквадратического отклонения экспериментальной числовой последовательности.

4 Разработать программную реализацию алгоритма и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и программу.

4 Результаты моделирования реализаций псевдослучайных числовых последовательностей и их основные статистические характеристики.

5 Выводы по оценке результатов моделирования реализаций псевдослучайных числовых последовательностей.

Контрольные вопросы

1 Какие методы моделирования равномерно распределенных псевдослучайных чисел Вы знаете?

2 Почему для получения последовательности случайных чисел с заданным законом распределения в качестве базовой последовательности используются равномерно распределенные случайные числа?

3 Как получить последовательность равномерно распределенных в интервале $[a, b]$ псевдослучайных чисел?

5 Проверка гипотез о законах распределения случайных величин

Цель работы

Проверка закона распределения случайных величин.

5.1 Основные теоретические положения

Обычно сущность проверки гипотезы о законе распределения экспериментальных данных (ЭД) заключается в следующем. Имеется выборка ЭД фиксированного объема, выбран или известен вид закона распределения генеральной совокупности. Необходимо оценить по этой выборке параметры закона, определить степень согласованности ЭД и выбранного закона распределения, в котором параметры заменены их оценками. Рассмотрим вопрос проверки согласованности распределений с использованием наиболее употребительных критериев.

Критерий К. Пирсона.

Использование этого критерия основано на применении такой меры (статистики) расхождения между теоретическим $F(x)$ и эмпирическим распределением $F_n(x)$, которая приближенно подчиняется закону распределения χ^2. Гипотеза H_0 о согласованности распределений проверяется путем анализа распределения этой статистики. Применение критерия требует построения статистического ряда.

Итак, пусть выборка представлена статистическим рядом с количеством разрядов ψ. Наблюдаемая частота попаданий в i-й разряд n_i. В соответствии с теоретическим законом распределения ожидаемая частота попаданий в i-й разряд составляет F_i. Разность между наблюдаемой и ожидаемой частотой составит величину $(n_i - F_i)$. Для нахождения общей степени расхождения между $F(x)$ и $F_n(x)$ необходимо подсчитать взвешенную сумму квадратов разностей по всем разрядам статистического ряда

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{M} \frac{\left(n_i - F_i\right)}{F_i} \tag{5.1}$$

Величина χ^2 при неограниченном увеличении n имеет распределение хи-квадрат (асимптотически распределена как χ^2). Это распределение зависит от числа степеней свободы k, т. е. от количества независимых значений слагаемых в выражении (5.1). Число степеней свободы равно числу ψ минус число линейных связей, наложенных на выборку. Одна связь существует в силу того, что любая частота может быть вычислена по совокупности частот оставшихся $\psi - 1$ разрядах. Кроме того, если параметры распределения неизвестны заранее, то имеется еще одно ограничение, обусловленное подгонкой распределения к выборке. Если по выборке определяются φ параметров распределения, то число степеней свободы составит $k = \psi - \varphi - 1$.

Область принятия гипотезы H_0 определяется условием $\chi^2 \le \chi^2(k;\alpha)$, где $\chi^2(k;\alpha)$ – критическая точка распределения χ^2 с уровнем значимости α. Вероятность ошибки первого рода равна α, вероятность ошибки второго рода четко определить нельзя, потому что существует бесконечно большое множество различных способов несовпадения распределений. Мощность критерия зависит от количества разрядов и объема выборки. Критерий рекомендуется применять при $n > 200$, допускается применение при $n > 40$, именно при таких условиях критерий состоятелен (как правило, отвергает неверную нулевую гипотезу).

5.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Получить исходные данные для выполнения работы по заданию преподавателя.

3 Разработать математическую модель и алгоритм проверки гипотез о законах распределения случайных величин.

4 Разработать процедуру реализации алгоритма и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и листинг программной процедуры.

4 Результаты выполнения алгоритма проверки гипотез о законах распределения случайных величин.

5 Выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Что такое критерий Пирсона?

2 Для чего применяется критерий Пирсона?

6 Моделирование гауссовских случайных процессов с различными функциями корреляции

Цель работы

Изучение моделирования гауссовских случайных процессов с различными функциями корреляции.

6.1 Основные теоретические положения

Моделирование любого временного процесса, в том числе и случайного, представляет собой набор N значений (чисел) реализации данного процесса. Эти значения берутся из временного отрезка непрерывной функции $X(t)$ через фиксированный интервал времени (или шаг дискретизации) T:

$$X(0T), X(1T), X(2T), ..., X([N-1]T).$$

Для построением таких моделей в виде набора N случайных чисел вместо обозначения $X(nT)$ используем Xn или $X(n)$.

В цифровых системах наиболее распространена одна из разновидностей случайного процесса – *дискретный белый гауссовский шум*. Это последовательность случайных чисел X_n, каждое число при этом имеет гауссовскую плотность распределения вероятности с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D. При этом различные случайные числа статистически независимы, т. е. $f(x_n, x_m) = f(x_n)f(x_m)$ при различных n и m. Таким образом, для моделирования реализации из N дискретных отсчетов дискретного белого гауссовского шума необходимо N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D (для программной реализации такой модели достаточно сведений по лабораторной работе № 4).

Большое практическое значение имеет модель гауссовского шума при условии, что значения соседних элементов статистически зависимы. Такая модель описывает и изменение стоимости акций на бирже, и значения помехи на входе системы связи. Для характеристики статистической связи значений случайного процесса в различные моменты времени (непрерывного или дискретного) используется *функция корреляции*. В дальнейшем рассмотрим модели случайных процессов с различными функциями корреляции. Напомним, что функция корреляции для дискретного во времени стационарного процесса определяется следующим образом:

$$R(m)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x(n-m)-M\{X\}\right]\left[x(n)-M\{X\}\right]f\left[x(n),x(n-m)\right]dx(n)dx(n-m),$$

где $M\{X\}$ – математическое ожидание случайного дискретного во времени процесса $X(n)$.

Наибольшее распространение в природе и технике получили так называемые *гауссовские случайные процессы*, многомерная плотность распределения вероятности которых описывается гауссовским законом. Далее рассмотрим математические модели гауссовских случайных процессов с различными функциями корреляции.

1 С корреляционной функцией вида

$$R(m)=D\exp(-am),$$

где D – дисперсия процесса;

a – коэффициент, который определяет корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел (считаем $a > 0$).

Для моделирования гауссовского случайного процесса с экспоненциальной функцией корреляции используется следующий алгоритм:

$$x(n)=k_1e(n)+k_2x(n-1);$$

$$k_1=\sqrt{D\left(1-k_2^2\right)};\ k_2=\exp(-a),$$

где $e(n)$ – значения дискретного белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Параметрами модели в данном случае являются дисперсия выходного моделируемого процесса D и параметр a, который определяет статистическую связь соседних случайных отсчетов.

Как правило, на практике исходным параметром является нормированный коэффициент корреляции

$$\rho(1) = \frac{R(1)}{D} = \exp(-a),$$

который определяет нормированную корреляцию соседних отсчетов случайного процесса и практически задается из интервала от 0,9 до 0,9999. Когда этот коэффициент равен 1, то все значения случайного процесса становятся одинаковыми, а когда этот коэффициент стремится к 0, то получается рассмотренная ранее модель – дискретный белый гауссовский шум.

2 С корреляционной функцией вида

$$R(m) = D\exp(-a^2 m^2),$$

где D – дисперсия процесса;

a – коэффициент, который определяет корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел.

Последовательность этапов моделирования следующая.

2.1 Необходимо получить реализацию дискретного белого шума длительностью N (где N достаточно большое – около 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации следует N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать $e(n)$.

2.2 Далее выполняем следующее преобразование:

$$x(n) = \sum_{k=-p}^{p} C(k)e(n-k),$$

где

$$C(k) = (\sqrt{2Da} / \sqrt[4]{\pi})\exp(-2a^2k^2).$$

2.3 Здесь неопределенным остается предел суммирования P. Для его определения может служить рекомендация:

2.4 P = целая часть от деления 2 на a.

2.5 $a < 1$ – иначе моделирование не имело бы смысла. После этого в получившейся реализации необходимо отбросить первые и последние P отсчетов и оставить только $N - 2P$ отсчетов, т. к. стационарным фрагментом моделируемого случайного процесса (с постоянной дисперсией) является именно центральная часть. Таким образом, длительность реализации $N = N - 2P$.

3 С корреляционной функцией вида

$$R(m) = D\sin(am)/(am).$$

где D – дисперсия процесса;

a –коэффициент, определяющий корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел.

Последовательность этапов моделирования следующая.

3.1 Необходимо получить реализацию дискретного белого шума длительностью N (где N достаточно большое – около 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации следует N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать $e(n)$.

3.2 Далее выполняем следующее преобразование:

$$x(n) = \sum_{k=-p}^{p} C(k)e(n-k),$$

где

$$C(k) = (\sqrt{D}/\sqrt{\pi a})\sin(ak)/k.$$

3.3 Здесь неизвестным остается предел суммирования P.

3.4 P = целая часть от деления 2 на a ($a < 1$).

3.5 В получившейся реализации необходимо отбросить первые и последние P отсчетов.

Таким образом, длительность реализации стационарного процесса с требуемой функцией корреляции $N = N - 2P$.

4 С треугольной корреляционной функцией.

В рассматриваемом случае функция корреляции описывается формулой

$$R(m) = D\left(1 - \frac{|m|}{M}\right).$$

где $-M \le m \le M$, M определяет протяженность корреляционной функции;

D – дисперсия случайного процесса.

При других m $R(m) = 0$.

Алгоритм моделирования реализации гауссовского случайного процесса с рассматриваемой корреляционной функцией заключается в следующем.

4.1 Необходимо получить реализацию дискретного белого гауссовского шума длительностью N (где N достаточно большое – около 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации следует N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать $e(n)$.

4.2 Выполнить преобразование исходной последовательности $e(n)$ следующим образом:

$$x(n) = \sqrt{\frac{D}{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e(n-k).$$

4.3 После этого необходимо отбросить первые $M - 1$ отсчеты случайного процесса $x(n)$. Оставшиеся $N - M + 1$ представляют собой реализацию стационарного случайного процесса с требуемыми корреляционными свойствами.

6.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Получить исходные данные для выполнения работы по заданию преподавателя.

3 Разработать математическую модель и алгоритм модели гассовских процессов с различными функциями корреляции.

4 Разработать процедуру реализации алгоритма и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и листинг программной процедуры.

4 Результаты моделирования математической модели и алгоритма модели гауссовских процессов с различными функциями корреляции.

5 Выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Что такое гауссовские процессы?

2 Что такое корреляционная функция?

3 Какие разновидности корреляционых функций Вы знаете?

7 Моделирование виннеровского процесса. Арифметическое броуновское движение. Моделирование потоков событий

Цель работы

Изучение винеровского процесса, арифметического броуновского движения и моделирования потоков событий.

7.1 Основные теоретические положения

Винеровский случайный процесс.

Основные свойства винеровского процесса $w(t)$.

Если интервалы $[s, t]$и $[s', t']$ не пересекаются, то приращения $w(t) - w(s)$ и $w(t') - w(s')$ являются независимыми случайными величинами. Приращения $w(t) - w(s)$ являются нормальными случайными величинами

$$M\{w(t) - w(s)\} = 0;$$

$$D\{w(t) - w(s)\} = t - s.$$

Таким образом,

$$w(t_{i+1}) - w(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i).$$

Моделирование: $w(t_{i+1}) = w(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} \cdot \varsigma$.

Арифметическое броуновское движение.

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \mu(\, t_{i+1} - t_i) + \sigma \cdot (w(t_{i+1}) - w(t_i)).$$

Экономический смысл: тренд волатильность цены, точнее говоря – ее ln.

Моделирование: $x(t_{i+1}) = w(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} \cdot \varsigma$

Моделирование потоков событий.

Пусть в какие-то моменты непрерывного времени наступают события. Этот процесс называется потоком событий. Моделирование потока событий сводится к моделированию моментов времени, в которые они происходят.

Наибольший интерес представляет пуассоновский поток событий. Его основные свойства.

1 Независимость – каждое событие наступает независимо от того, наступали ли другие.

2 Ординарность – в один момент времени может произойти не более одного события.

3 Стационарность – вероятность наступления определенного количества событий на некотором интервале времени зависит только от его длины и не зависит от его положения на временной оси:

$$p(n, T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T},$$

где λ – интенсивность потока, т. е. среднее количество событий в единицу времени).

Обозначим $t_1 - t_0 = \tau$, $t_2 - t_1 = \tau_1$, … . Тогда τ_i – независимые случайные величины с экспоненциальным распределением $p(\tau_i) = \lambda e^{-\lambda \tau_i}$.

Моделирование: $t_{i+1} = t_i + \left(-\dfrac{\ln \alpha}{\lambda} \right)$

7.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Получить исходные данные для выполнения работы по заданию преподавателя.

3 Разработать алгоритмы виннеровского случайного процесса, арифметического броуновского движения и моделирования потоков событий.

4 Разработать процедуру реализации алгоритма и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и листинг программной процедуры.

4 Результаты выполнения алгоритма виннеровского случайного процесса, арифметического броуновского движения и моделирования потоков событий.

5 Выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Что такое виннеровский случайный процесс?

2 Что такое арифметическое броуновское движение?

3 Как производится моделирование потоков событий?

8 Моделирование дискретных цепей Маркова с дискретным временем

Цель работы

Изучение моделирования дискретных цепей Маркова с дискретным временем.

8.1 Основные теоретические положения

Имеется система, которая может находиться в нескольких состояниях 1, 2, …, n. В некоторые дискретные моменты времени t_1, t_2, …, t_n эта система может изменять свое состояние.

Основное свойство цепи Маркова: состояние, в котором система окажется в следующий момент времени, зависит только от ее текущего состояния и не зависит от всех предыдущих.

Переход из состояния в состояние определяется матрицей (вероятностей) перехода $P = \left| p_{ij} \right|$, где $p_{ij} = p\{i \to j\}$, которая считается известной (заданной).

Для достаточно долго функционирующей системы определяется финальная вероятность $\pi_i = p\{i\}$ – вероятность того, что в текущий момент времени система находится в состоянии i. Финальные вероятности удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \pi_i p_{ij} = \pi_j, \; j = \overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases}$$

π_i можно найти как решение этой СЛАУ.

Моделирование.

1 Старт: i_0 задано (если не задано, то определяется как дискретная случайная величина с рядом π_i).

2 Получаем i_1 как дискретную случайную величину с рядом $p_{i_0 i}$.

3 Получаем i_2 как дискретную случайную величину с рядом $p_{i_1 i}$ и т. д.

Таким образом, получаем последовательность состояний системы i_0, i_1, i_2, ...

8.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Получить исходные данные для выполнения работы по заданию преподавателя.

3 Разработать алгоритм моделирования дискретных цепей Маркова с дискретным временем.

4 Разработать алгоритм и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и листинг программной процедуры.

4 Результаты выполнения программы моделирования дискретных цепей Маркова с дискретным временем.

5 Выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Что такое дискретные цепи Маркова с дискретным временем?

2 Для чего их применяют?

9 Моделирование цепей Маркова с непрерывным временем

Цель работы

Изучение моделирования дискретных цепей Маркова с непрерывным временем.

9.1 Основные теоретические положения

Переходы из одного состояния в другое осуществляются в произвольные моменты непрерывного времени.

Такая цепь характеризуется величинами q_{ij}, которые называются интенсивностями перехода (или инфинитезимальными коэффициентами).

Рассмотрим два момента времени t и $t + \Delta t$:

$$p\{i \to j\} \big| \Delta t\} = q_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t) \text{ для } j \neq i;$$

$$p\{i \to j\} \big| \Delta t\} = 1 + q_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

где $q_{ij} \geq 0$ для $j \neq i$ и $q_{ij} = -\sum\limits_{j \neq 1} q_{ij}$.

Финальные вероятности определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i q_{ij} = 0, \; j = \overline{1, n-1}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases}$$

Моделирование.

Пусть в момент времени 0 система находится в состоянии i. Вопрос: в каком состоянии она будет находиться в момент времени t?

Найдем вероятность того, что за время t система не изменила свое состояние через $P_i(t)$. Тогда

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t)(1 + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)) = P_i(t) + q_{ij}P_i(t)\Delta t + o(\Delta t);$$

$$\frac{P_i(t + \Delta t) - P_i(t)}{\Delta t} = q_{ij}P_i(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$ получаем $P_i'(t) = q_{ij}P_i(t)$ – ДУ с НУ $P_i(0) = 1$.

$$P_i(t) = e^{q_{ii}t} = e^{-(-q_{ii})t}$$

Решение

Обозначим через τ время, за которое система перешла из состояния i в другое. Найдем $p_i(\tau)$ – плотность распределенных интервалов перехода системы из состояния i в другое:

$$P_i(t) = p\{\tau \geq t\} = \int_t^{\infty} p_i(\tau)d\tau;$$

$$P_i'(t) = -p_i(t) \Rightarrow p_i(t) = -P_i'(t) = (-q_{ii})e^{-(-q_{ii})t}.$$

Моделирование: $\tau = -\dfrac{\ln\alpha}{-q_{ii}} = \dfrac{\ln\alpha}{q_{ii}}$.

Найдем вероятность перехода из состояния i в конкретное состояние j при условии, что известно, что переход в другое состояние произошел:

$$p\{i \to j \,|\, t \geq \tau\} = \begin{cases} \dfrac{q_{ii}}{\sum\limits_{j \neq i} q_{ii}}, \ j \neq i \\ 0, \ j \neq i \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{q_{ii}}{q_{ii}}, \ j \neq i; \\ 0, \ j \neq i. \end{cases}$$

Моделирование.

1 Старт: $t = t_0$. Состояние системы i_0 задано либо находим его как дискретную случайную величину с рядом распределения π_i.

2 $\tau = \dfrac{\ln\alpha}{q_{i_0 i_0}}$ переход в другое состояние происходит в момент $t = t_0 + \tau$.

Новое состояние i_1 находим как ДСВ с рядом $\begin{cases} -\dfrac{q_{ii}}{q_{ii}}, \ j \neq i; \\ 0, \ j \neq i. \end{cases}$

3 $\tau = \dfrac{\ln\alpha}{q_{i_1 i_1}}$ и т. д.

Получаем массив $(t_0, i_0), (t_1, i_1), \ldots$.

9.2 Порядок выполнения работы

1 Изучить методические рекомендации.

2 Получить исходные данные для выполнения работы по заданию преподавателя.

3 Разработать алгоритм моделирования дискретных цепей Маркова с непрерывным временем.

4 Разработать алгоритм и провести расчетный эксперимент.

5 Оформить отчет.

Содержание отчета

1 Цель работы.

2 Постановка задачи и исходные данные.

3 Схема алгоритма и листинг программной процедуры.

4 Результаты выполнения программы моделирования дискретных цепей Маркова с непрерывным временем.

5 Выводы по оценке результатов моделирования.

Контрольные вопросы

1 Что такое дискретные цепи Маркова с непрерывным временем?

2 Для чего их применяют?

Список литературы

1 **Аркашов, Н. С.** Теория вероятностей и случайные процессы / Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский. – Новосибирск: НГТУ, 2014. – 238 с.

2 **Шевелев, Ю. П.** Дискретная математика : учебное пособие для вузов / Ю. П. Шевелев. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 592 с.

3 **Шапорев, С. Д.** Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.

4 **Горбатов, В. А.** Теория автоматов : учебник / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Гобатова. – Москва : Астрель, 2008. – 559 с.