ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» дневной формы обучения

Могилев 2018

УДК 621.3
ББК 31.2
О 27

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «31» августа 2018 г., протокол № 1

Составитель канд. техн. наук, доц. А. Г. Старовойтов

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации предназначены к практическим занятиям для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Ответственный за выпуск	С. С. Сергеев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Расчет измерительной цепи с резистивным датчиком и генераторным датчиком

Цель работы: изучить основные законы электротехники, методы преобразования электрических цепей при различных способах соединения резисторов, основные методы расчета электрических цепей постоянного тока с одним источником питания.

1.1 Основные теоретические сведения

1 Закон Ома для пассивного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}. \tag{1.1}$$

2 Закон Ома для активного участка цепи

$$I = \frac{\pm\sum E \pm \sum U}{\sum R}. \tag{1.2}$$

Знак «плюс» пишется, если направление ЭДС и напряжения совпадают с направлением тока.

3 Первый закон Кирхгофа для электрического узла

$$\sum_{к=1}^{n} I_к = 0, \tag{1.3}$$

где $I_к$ – ток к-й ветви, присоединенной к данному узлу, причем притекающие токи берутся со знаком «плюс», вытекающие – со знаком «минус».

4 Второй закон Кирхгофа для замкнутого контура

$$\sum_{к=1}^{n} E_к = \sum_{i=1}^{m} I_i R_i , \tag{1.4}$$

где $E_к$ – ЭДС к-го источника контура;

I_i – ток, протекающий через R_i резистор.

I_i и $E_к$ берутся со знаком «плюс», если их направления совпадают с направлением обхода контура.

5 Мощность, потребляемая активным сопротивлением,

$$P = I^2 \cdot R. \tag{1.5}$$

6 Баланс мощности для электрической цепи постоянного тока

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot I_i = \sum_{i=1}^{n} I_i^2 \cdot R_i. \tag{1.6}$$

$(E_i \cdot I_i)$ берется со знаком «плюс», если направления ЭДС и тока совпадают, и со знаком «минус», если их направления не совпадают.

7 Эквивалентное преобразование электрических цепей постоянного тока.

Расчет сложных электрических цепей во многих случаях можно упростить и сделать более наглядным путем эквивалентного преобразования схемы одного вида в схему другого вида. При этом токи и напряжения в частях цепи, не затронутых преобразованием, должны остаться такими же, как и в исходной схеме. Целесообразное преобразование схемы приводит к уменьшению числа ее ветвей или узлов, а значит и числа уравнений, необходимых для расчета.

Примеры преобразования схем:

– замена нескольких последовательно или параллельно соединенных резисторов одним (рисунок 1.1);

– преобразование треугольника резисторов в эквивалентную звезду и наоборот (рисунок 1.2).

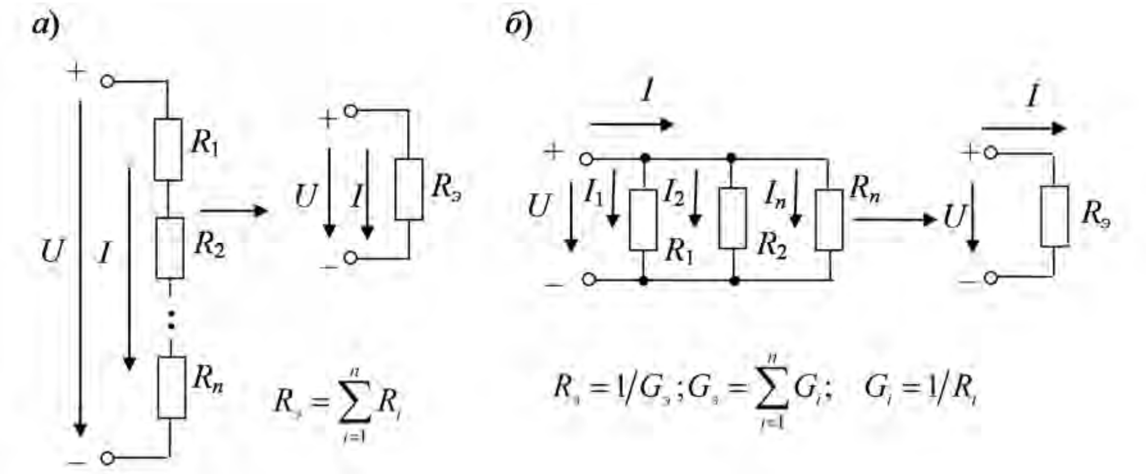


Рисунок 1.1 – Последовательное (*а*) и параллельное (*б*) соединение резисторов

Формулы для расчета R_A, $R_{B,}$ R_C (преобразование треугольника в звезду):

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}};$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}};$$

$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Формулы для расчета R_A, $R_{B,}$ R_C (преобразование звезды в треугольник):

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C};$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A};$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B}.$$

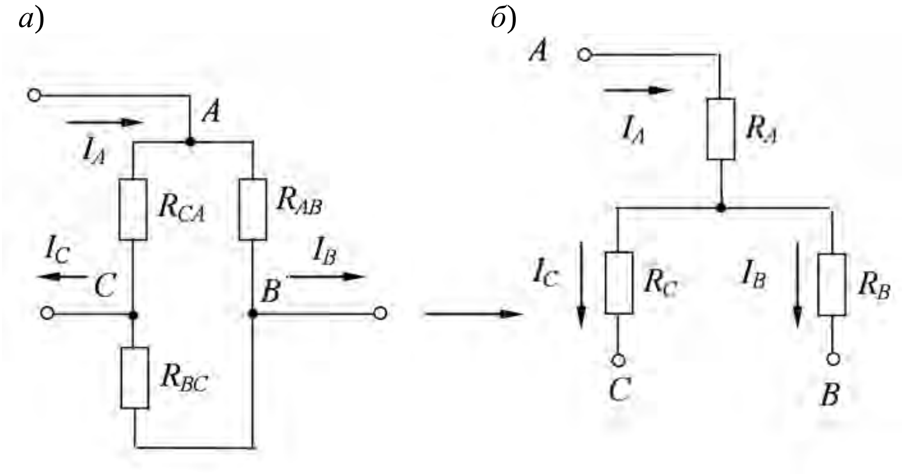


Рисунок 1.2 – Соединение резисторов треугольником (*а*) и звездой (*б*)

1.2 Примеры решения задач

Задача 1. Определить токи и напряжения на отдельных участках схемы (рисунок 1.3), если напряжение на входе U = 240 В, а сопротивления резисторов $R_1 = R_2$ = 0,5 Ом, $R_3 = R_5$ = 10 Ом, $R_4 = R_6 = R_7$ = 5 Ом. Определить мощность P, потребляемую электрической цепью.

Решение

Определим эквивалентное сопротивление схемы:

$$R_{bc} = \frac{(R_6 + R_7) \cdot R_5}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{(5+5) \cdot 10}{5+5+10} = 5 \text{ Ом},$$

т. к. резисторы R_6 и R_7 соединены последовательно друг с другом и параллельно с резистором R_5.

$$R_{ab} = \frac{(R_{bc} + R_4) \cdot R_3}{R_{bc} + R_4 + R_3} = \frac{(5+5) \cdot 10}{5+5+10} = 5 \text{ Ом},$$

т. к. резисторы R_{BC} и R_4 соединены последовательно друг с другом и параллельно с резистором R_3.

$$R_э = R_{ab} + R_1 + R_2 = 5 + 0,5 + 0,5 = 6 \text{ Ом}.$$

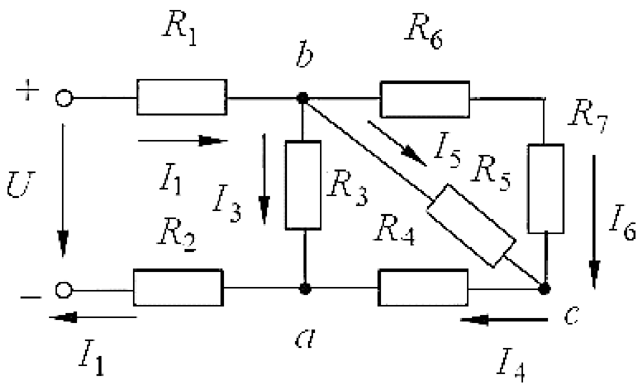


Рисунок 1.3 – Электрическая цепь постоянного тока для задачи 1

Ток I_1 рассчитываем по закону Ома:

$$I_1 = U / R_э = 240 / 6 = 40 \text{ А}.$$

Напряжение между точками a и b определяем по закону Ома:

$$U_{ab} = R_{ab} \cdot I_1 = 40 \cdot 5 = 200 \text{ В},$$

или по второму закону Кирхгофа $U_{ab} = U - \left(R_1 + R_2\right) \cdot I_1 = 200$ В.

Токи:

$$I_3 = U_{ab} / R_3 = 200 / 10 = 20 \text{ А};$$

$$I_4 = I_1 - I_3 = 40 - 20 = 20 \text{ А};$$

$$I_6 = I_5 = I_4 / 2 = 20 / 2 = 10 \text{ А},$$

т. к. $R_6 + R_7 = R_5$.

Напряжения:

$$U_{bc} = R_5 \cdot I_5 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ В};$$

$$U_{ca} = R_4 \cdot I_4 = 20 \cdot 5 = 100 \text{ В}.$$

Мощность, потребляемая электрической цепью,

$$P = U \cdot I_1 = 240 \cdot 40 = 9600 \text{ Вт}.$$

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование работы схемы в среде Multisim.

После запуска программы на экране появляется рабочее поле, предназначенное для виртуального построения принципиальной схемы электрической цепи с подключением к ней необходимых источников воздействий и измерительно-регистрирующих приборов.

Вызов необходимых компонентов осуществляется или нажатием левой кнопки мышки на соответствующем меню панели компонентов, расположенном горизонтально над экраном, или нажатием правой кнопки мышки на пустом месте наборного поля с последующим вызовом меню компонентов через *Place Component*.

Сборка модели может быть проведена следующим образом. В группе меню элементов *SOURCES*, подгруппе *Power Sources*, находим источник постоянной ЭДС *DC Voltage* и, выделив его, с помощью кнопки *OK* переносим элемент на рабочее поле.

В этой же группе, подгруппе источников тока *Signal Current*, находим идеальный источник постоянного тока *DC Current* и также переносим его на поле. В этой же группе рекомендуется взять схемные заземлители *Ground*.

Резисторы аналогичным образом берутся из группы пассивных компонентов *Basic*. Анализируемые схемы обязательно заземляются. Амперметры, вольтметры необходимо взять из группы *Indicators*.

При необходимости поворота элемента на 90° следует, установив на нем указатель мыши, нажать на правую кнопку и в появившемся окне выбрать знак поворота.

После расстановки элементов в соответствии с предполагаемой конфигурацией модели для их соединения между собой необходимо, поставив метку на один из зажимов элемента мышкой с нажатой левой кнопкой, отпустить ее и затем, подведя метку к зажиму другого элемента, снова щелкнуть левой кнопкой.

После соединения элементов проводится установка их параметров. Она может производится двумя способами:

1) элемент с необходимыми параметрами выбирается в группе *Basic* перед переносом его на поле;

2) после установки на поле двойным щелчком левой кнопки мыши на элементе вызывается окно установки параметров элемента. После впечатывания в соответствующие строки окна необходимых параметров нужно нажать в окне клавишу *OK*. При установке параметров следует иметь в виду, что режим *AC* измерительных устройств означает измерение действующего значения переменной составляющей сигнала, а режим *DC* – среднее значение его (постоянную составляющую). При использовании осциллографа на его входах режим *DC* означает осциллографирование переменного сигнала и постоянной составляющей, а в режиме *AC* постоянная составляющая на входной каскад усилителя не пропускается.

Вольтметры в группе *Indicators* имеют большое сопротивление (10 МОм), что вполне достаточно в большинстве случаев. Амперметры имеют очень малое сопротивление (1 нОм). Поэтому без особой необходимости перестраивать их внутреннее сопротивление не нужно.

Для удаления ненужного элемента или ошибочного соединения из рабочего поля необходимо, установив курсор на удаляемом элементе или соединении, щелкнуть левой кнопкой мыши и затем, после выделения элемента, нажать кнопку *Delete*. Вся схема удаляется полным ее выделением с последующей операцией *Delete*.

Включение и выключение моделируемой цепи наиболее наглядно и просто производится с помощью виртуальных тумблеров в строке над рабочим экраном. После включения модели, собранной в соответствии с рисунком 1.4, на табло измерительных приборов высвечиваются значения измеренных напряжений, токов. Для считывания показаний ваттметра необходимо предварительно щелкнуть по нему дважды левой кнопкой мыши для получения изображения индикаторной панели.

Показания измерительных приборов соответствуют расчётным значениям.

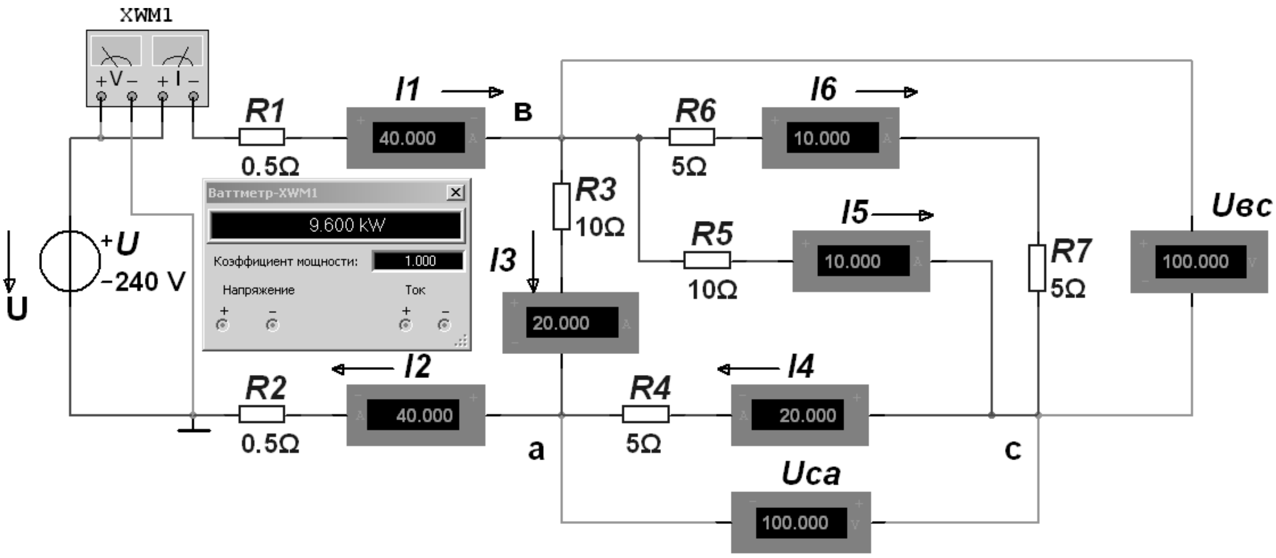


Рисунок 1.4 – Модель электрической цепи постоянного тока к задаче 1

Задача 2. Вольтметр на номинальное напряжение 3 В имеет внутреннее сопротивление 400 Ом.

Определить сопротивления добавочных резисторов, которые нужно подключить к вольтметру, чтобы расширить пределы измерения до 15 и 75 В (рисунок 1.5).

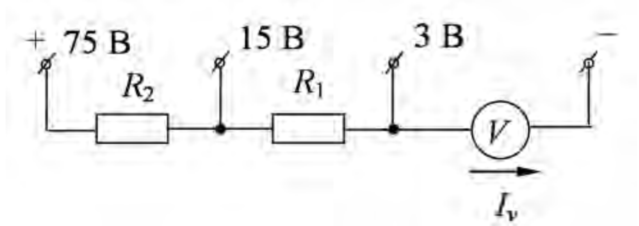


Рисунок 1.5 – Схема подключения вольтметра для расширения диапазона измерения

Решение

Ток в вольтметре при полном отклонении стрелки

$$I_v = U_н / R_v = 3/400 = 0{,}0075 \text{ А}.$$

Добавочные резисторы R_1 и R_2 при включении вольтметра на напряжения 15 и 75 В должны быть подобраны так, чтобы ток при полном отклонении оставался равным 0,0075 А.

$$I_v = \frac{15}{R_1 + 400} = 0{,}0075 \text{ А};$$

$$I_v = \frac{75}{R_1 + R_2 + 400} = 0{,}0075 \text{ А}.$$

Тогда $R_1 = 1600$ Ом и $R_2 = 8000$ Ом.

Самостоятельная работа

Решить самостоятельно задачи, предложенные преподавателем, а также следующую задачу.

Задача 3. Для цепи (рисунок 1.6) известны значения R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 и ток I_2. R_0 = 0,1 Ом, R_1 = 0,7 Ом, R_2 = 40 Ом, R_3 = 8 Ом, R_4 = 4 Ом, R_5 = 2,4 Ом, R_6 = 4 Ом, I_2 = 0,25 А.

Определить ЭДС источника, а также значения токов в ветвях. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

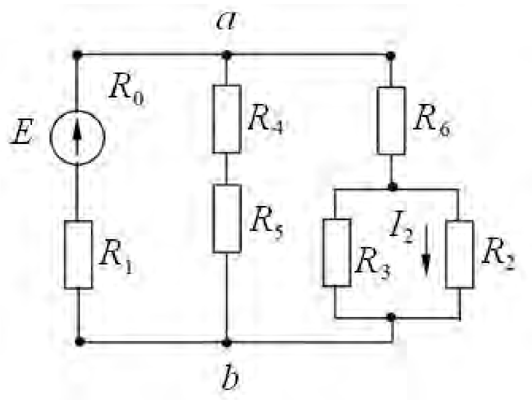


Рисунок 1.6 – Электрическая цепь задачи для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

1 Дать информацию о способах определения эквивалентного сопротивления электрической цепи.

2 Записать закон Ома для пассивного и активного участков электрической цепи.

3 Сформулировать законы Кирхгофа.

4 Записать формулы расчета мощности, потребляемой электрической цепью.

2 Расчет разветвленных электрических цепей постоянного тока с несколькими источниками питания

Цель работы: изучить основные методы расчета разветвленных цепей постоянного тока с несколькими источниками.

2.1 Основные теоретические сведения

2.1.1 Расчет сложных электрических цепей методом непосредственного применения законов Кирхгофа.

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа является универсальным при расчетах и анализах сложных электрических цепей.

Порядок расчета по этому методу состоит в следующем:

– указываем произвольно положительные направления токов в ветвях, а также направления обхода в выбранных независимых контурах;

– записываем уравнения по первому закону Кирхгофа согласно формуле (1.3); количество уравнений по первому закону Кирхгофа равно $\kappa-1$, где κ – число узлов электрической цепи;

– записываем уравнения по второму закону Кирхгофа применительно к контуру, согласно формуле (1.4).

Число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, равно

$$n-\left(\kappa-1\right),$$

где n – число ветвей электрической цепи.

Решая систему полученных уравнений, определяем токи ветвей.

Для проверки правильности расчета электрической цепи используют уравнение баланса мощностей согласно формуле (1.6).

2.1.2 Расчет сложных электрических цепей методом контурных токов.

Метод контурных токов вытекает из метода, основанного на непосредственном применении законов Кирхгофа. Уравнения по методу контурных токов получают по второму закону Кирхгофа введением так называемых контурных токов. Количество уравнений, составленных по методу контурных токов, равно

$$n-\left(\kappa-1\right).$$

Направления контурных токов выбираются произвольно. При составлении уравнений положительными принимаются ЭДС, совпадающие с направлениями контурных токов. Решая систему уравнений, определим значение контурных токов. Во внешних ветвях контурные токи будут являться истинными токами. Токи в смежных ветвях определяют по первому закону Кирхгофа.

2.1.3 Расчет сложных электрических цепей методом двух узлов.

Метод двух узлов применяется в тех случаях, если схема имеет два узла и ряд параллельных ветвей между ними. Для нахождения неизвестных токов составляют уравнения по закону Ома:

$$I_i = \frac{\pm E_i \pm U_{AB}}{R_i} = \left(\pm E_i \pm U_{AB}\right) \cdot G_i,$$

где I_i – ток i-й ветви;

E_i – ЭДС i-й ветви;

U_{AB} – узловое напряжение;

R_i – сопротивление i-й ветви;

G_i – проводимость i-й ветви, $G_i = 1/R_i$.

ЭДС и напряжение берутся со знаком «+», если их направления совпадают с направлением тока рассматриваемой ветви.

Величина U_{AB} находится по формуле

$$U_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\pm E_i \cdot G_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} G_1}.$$

В этой формуле E_i берется со знаком плюс «+», если ее направление противоположно направлению U_{AB}, и со знаком минус «–», если их направления совпадают.

2.1.4 Расчет сложных электрических цепей методом эквивалентного генератора напряжений.

Данный метод целесообразно использовать, если необходимо определить только ток одной ветви. Сущность метода состоит в том, что любая сложная активная цепь представляется активным двухполюсником, внутренняя ЭДС которого равна напряжению холостого хода U_{xx} на участке, где определяется ток при отключении резистора, а внутреннее сопротивление – сопротивлению всей остальной цепи при отключенной ветви и закороченных источниках ЭДС ($R_{кз}$).

Ток в i-й ветви рассчитывается по формуле

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{R_{кз} + R_1},$$

где U_{xx} – напряжение холостого хода относительно точек разрыва в ветви, где определяется ток;

$R_{кз}$ – внутреннее сопротивление цепи при отключенной нагрузке и закороченных источниках ЭДС;

R_1 – сопротивление резистора, где определяется ток.

Напряжение U_{xx} эквивалентного генератора напряжения находят путем расчета цепи при отключенной нагрузке любым из методов расчета.

Сопротивление $R_{кз}$ определяется как $R_{экв}$ электрической цепи относительно точек разрыва и закороченных источников ЭДС.

2.1 Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотрим пример расчета электрической цепи (рисунок 2.1) методом непосредственного применения законов Кирхгофа и методом контурных токов.

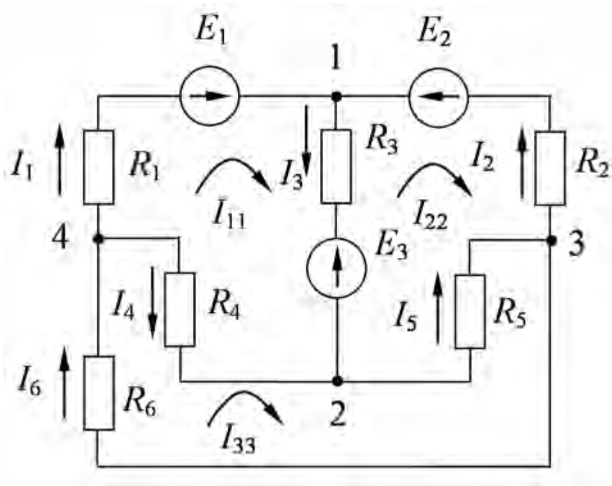


Рисунок 2.1 – Электрическая цепь к примеру расчёта методом непосредственного применения законов Кирхгофа и методом контурных токов

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа.

Число узлов $к = 4$. Число ветвей $n = 6$.

Число уравнений по первому закону Кирхгофа

$$к - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Число уравнений по второму закону Кирхгофа

$$n - (к - 1) = 6 - (4 - 1) = 3.$$

Число всех уравнений $n = 6$.

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ – узел 1;

$I_3 + I_4 - I_5 = 0$ – узел 2;

$I_5 - I_6 - I_2 = 0$ – узел 3;

$E_1 - E_3 = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4$ – контур 1, 2, 4, 1;

$E_3 - E_2 = -I_2 \cdot R_2 - I_5 \cdot R_5 - I_3 \cdot R_3$ – контур 1, 3, 2, 1;

$0 = I_5 \cdot R_5 + I_6 \cdot R_6 + I_4 \cdot R_4$ – контур 2, 3, 4, 2.

Метод контурных токов.

Количество уравнений

$$n-(к-1)=6-(4-1)=3.$$

Обозначение контурных токов: I_{11}, I_{22}, I_{33}.

Система уравнений

$$\begin{cases} E_1 - E_3 = I_{11}\cdot(R_1+R_3+R_4) - I_{22}\cdot R_3 - I_{33}\cdot R_4 & \text{– контур } 1, 2, 4, 1; \\ E_3 - E_2 = -I_{11}\cdot R_3 + I_{22}\cdot(R_2+R_5+R_3) - I_{33}\cdot R_5 & \text{– контур } 1, 3, 2, 1; \\ 0 = -I_{11}\cdot R_4 - I_{22}\cdot R_5 + I_{33}\cdot(R_4+R_5+R_6) & \text{– контур } 2, 3, 4, 2. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, определяем значения контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33}.

Находим значения токов в ветвях:

$$I_1 = I_{11};\ I_2 = -I_{22};\ I_3 = I_{11} - I_{22};\ I_4 = I_{33} - I_{11};\ I_5 = I_{33} - I_{22};\ I_6 = I_{33}.$$

Проверяем правильность расчета по балансу мощности:

$$E_1\cdot I_1 - E_3\cdot I_3 + E_2\cdot I_2 = I_1^2\cdot R_1 + I_2^2\cdot R_2 + I_3^2\cdot R_3 + I_4^2\cdot R_4 + I_5^2\cdot R_5 + I_6^2\cdot R_6.$$

Задача 2. Составить необходимые уравнения для определения значений токов в ветвях схемы (рисунок 2.2), используя метод двух узлов.

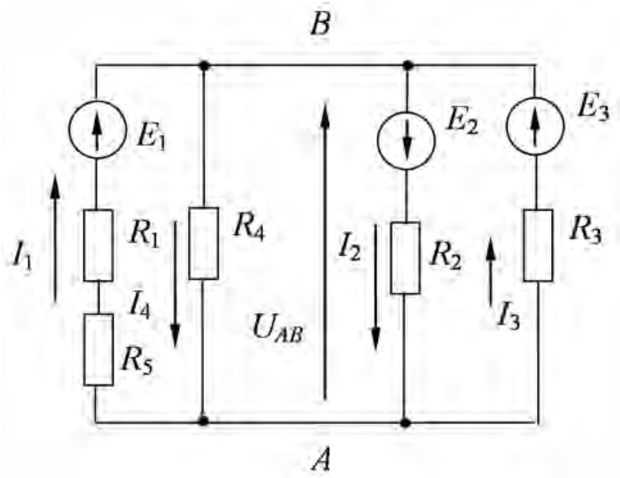


Рисунок 2.2 – Электрическая цепь к примеру расчёта методом двух узлов

Решение

По закону Ома токи в ветвях:

$$I_1 = (E_1 + U_{AB})\cdot G_1;$$

$$I_2 = \left(E_2 - U_{AB}\right) \cdot G_2;$$

$$I_3 = \left(E_3 + U_{AB}\right) \cdot G_3;$$

$$I_4 = -U_{AB} \cdot G_4,$$

где $G_1 = 1/\left(R_1 + R_5\right)$; $G_2 = 1/R_2$; $G_3 = 1/R_3$; $G_4 = 1/R_4$.

Напряжение между двумя узлами

$$U_{AB} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\pm E_i \cdot G_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_1} = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}.$$

Задача 3. Определить методом эквивалентного генератора напряжений значение тока I_5 в схеме на рисунке 2.3.

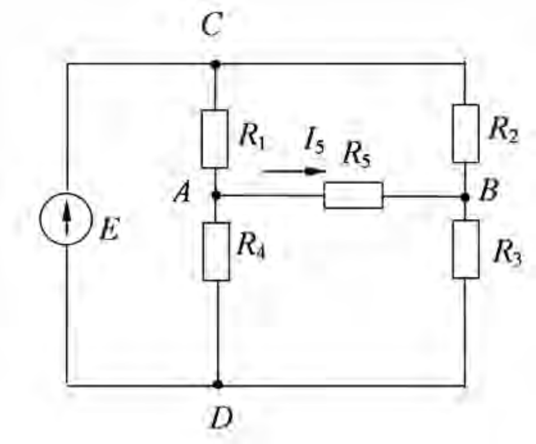


Рисунок 2.3 – Электрическая схема для задачи 3

Решение

Определяем напряжение холостого хода U_{xx} (рисунок 2.4, *а*), используя второй закон Кирхгофа:

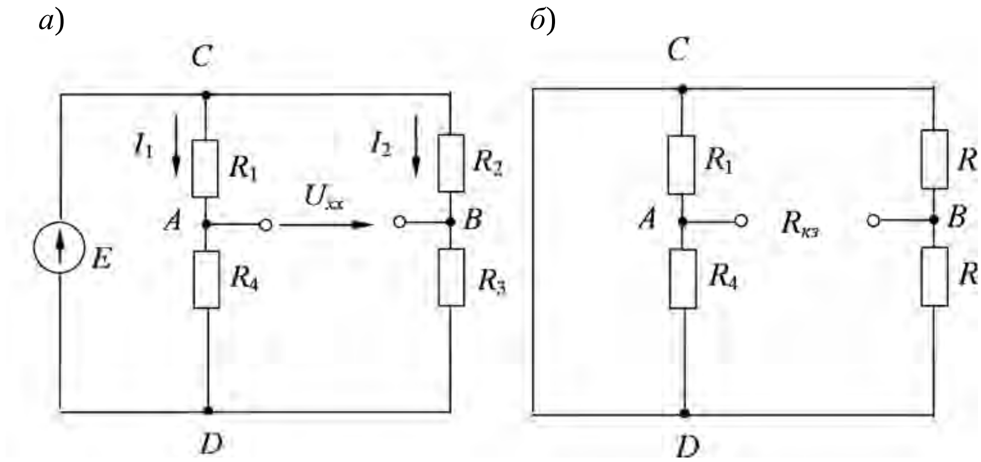
$$U_{xx} = I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1.$$

Токи в ветвях (рисунок 2.4, *б*):

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_4}; \quad I_2 = \frac{E}{R_2 + R_3}.$$

Рассчитываем значение сопротивления $R_{кз}$ (см. рисунок 2.4, *б*):

$$R_{кз} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}.$$



а – определение напряжения холостого хода; *б* – определение сопротивления $R_{кз}$

Рисунок 2.4 – Электрические схемы к примеру расчёта методом эквивалентного генератора

Определяем значение тока I_5:

$$I_5 = \frac{U_{xx}}{R_{кз} + R_5}.$$

Самостоятельная работа

Решить самостоятельно задачи, предложенные преподавателем, а также задачи 4 и 5.

Задача 4. Для разветвленной электрической цепи (рисунок 2.5), используя законы Кирхгофа и метод контурных токов, определить токи во всех ветвях.

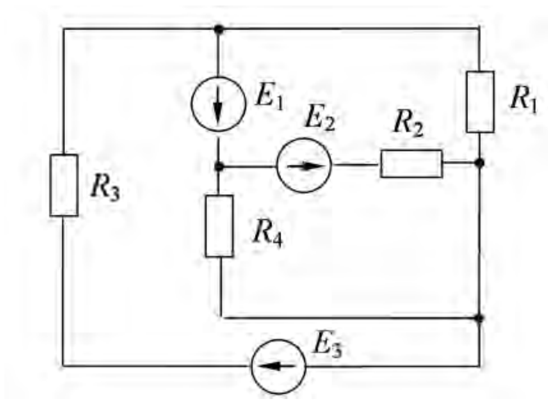


Рисунок 2.5 – Электрическая цепь к задаче 4 для самостоятельного решения

E_1 = 24 В; E_2 = 48 В; E_3 = 96 В; R_1 = 16 Ом; R_2 = 8 Ом; R_3 = 16 Ом; R_4 = 8 Ом.

Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

Задача 5. Для разветвленной электрической цепи (рисунок 2.6) определить токи во всех ветвях. При решении задачи воспользоваться преобразованием треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду.

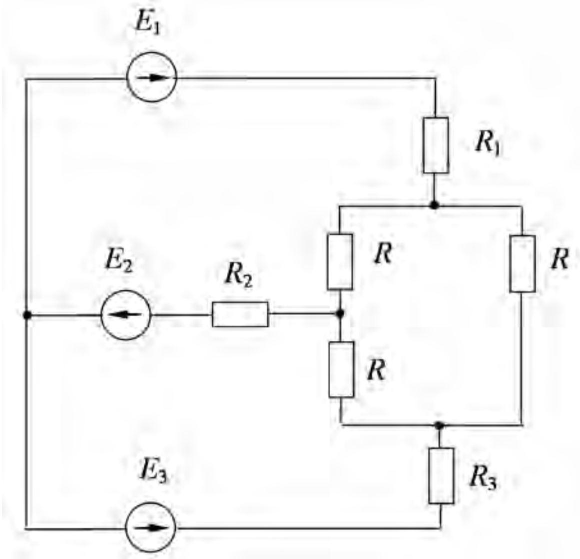


Рисунок 2.6 – Электрическая цепь к задаче 5 для самостоятельного решения

E_1 = 120 В; E_2 = 140 В; E_3 = 60 В; R = 2 Ом; R_1 = 1 Ом; R_2 = 0,4 Ом; R_3 = 0,5 Ом.

Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

Контрольные вопросы

1 Составить план расчета сложных электрических цепей методом контурных токов.

2 Составить план расчета сложных электрических цепей методом непосредственного применения законов Кирхгофа.

3 Составить план расчета сложных электрических цепей методом двух узлов.

4 Составить план расчета сложных электрических цепей методом эквивалентного генератора напряжений.

3 Расчет режимов работы цепи переменного тока при последовательном и параллельном соединении элементов *R, L, C*

Цель работы: изучить основные методы расчета неразветвленных цепей переменного тока с применением комплексных чисел.

3.1 Основные теоретические сведения

3.1.1 Символический метод расчета цепей переменного тока.

Сущность символического метода состоит в том, что гармонической функции тока (напряжения, ЭДС) ставится в соответствие комплексная гармоническая функция:

$$i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi)\,,\ \dot{I}_m = I_m \cdot e^{j(\omega t \pm \varphi)}.$$

Для $t = 0$ комплексное амплитудное значение тока $\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j(\pm\varphi)}$, а комплекс действующего значения тока – $\dot{I} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\pm\varphi)}$; аналогично рассчитывается комплекс действующего значения напряжения:

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\pm\varphi)}.$$

Закон Ома в символической форме имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

где $\underline{Z}$ – комплекс полного сопротивления цепи.

При последовательном соединении элементов R, L, C

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) = z \cdot e^{j\varphi},$$

где $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$;

$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{X_L - X_C}{R}$.

При параллельном соединении элементов

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \ldots + \frac{1}{\underline{Z}_i}.$$

3.2 Примеры решения задач

Задача 1. Пусть задана расчетная схема с последовательным соединением элементов R, L и C с параметрами R_1, $R_2 \ldots R_n$, X_{L1}, $X_{L2} \ldots X_{Ln}$, X_{C1}, $X_{C2} \ldots X_{Cn}$ и напряжением U на входе (рисунок 3.1). Определить ток I, угол сдвига по фазе φ и мощность на входе цепи.

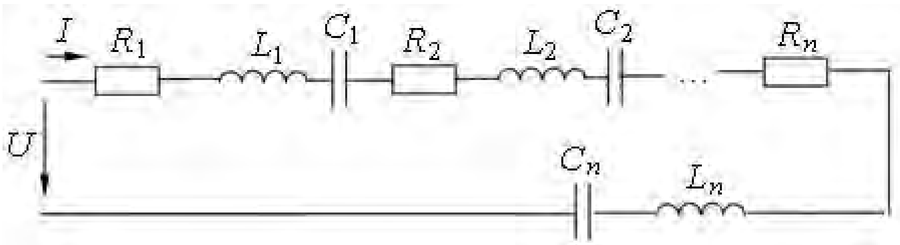


Рисунок 3.1 – Электрическая цепь с последовательным соединением элементов R, L и C к задаче 1

Решение

Комплекс действующего значения тока в цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

где $\dot{U} = U$, т. к. φ = 0°;

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2 + \ldots R_n) + j(X_{L1} - X_{C1} + X_{L2} - X_{C2} + \ldots + X_{Ln} - X_{Cn}).$$

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \overset{*}{I} = P \pm jQ,$$

где $\overset{*}{I}$ – сопряженный комплекс тока.

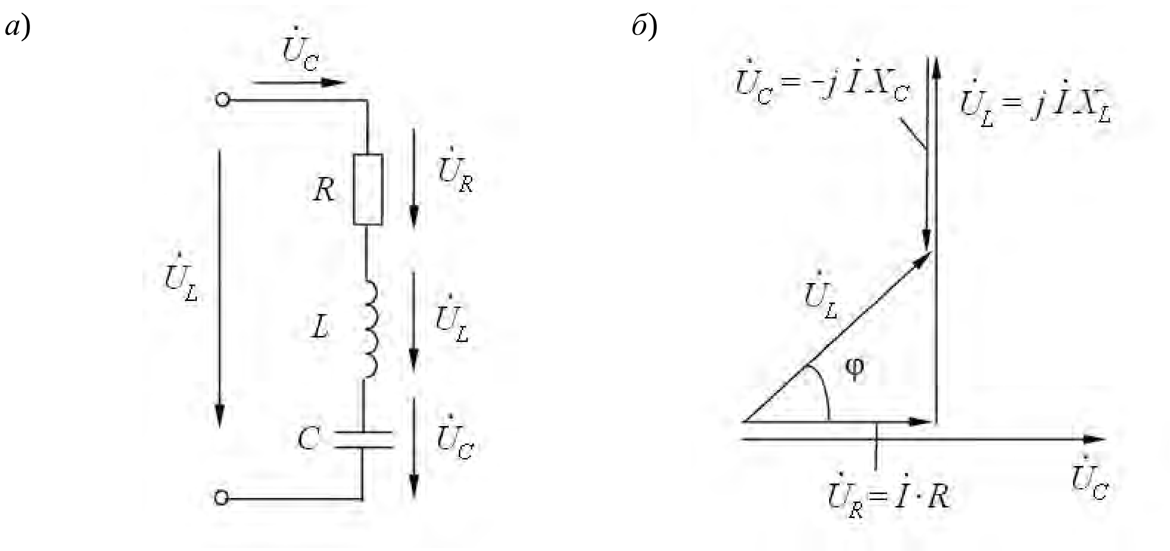
Задача 2. Катушка с активным сопротивлением R = 6 Ом и индуктивностью L = 25,5 мГн соединена последовательно с конденсатором, емкость которого C = 1590 мкФ.

Определить ток, напряжения на катушке и конденсаторе, мощности катушки, конденсатора и всей цепи. Построить векторную диаграмму напряжений, если напряжение на входе схемы (рисунок 3.2, *а*) U = 127 В и частота f = 50 Гц. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

Решение

Реактивные сопротивления элементов цепи:

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 25{,}5 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом};$$



а – схема электрической цепи; *б* – векторная диаграмма

Рисунок 3.2 – Электрическая цепь переменного тока к задаче 2

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 1590 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ Ом}.$$

Комплекс полного сопротивления цепи

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) = R + jX = 6 + j6 = \sqrt{6^2 + 6^2}\, e^{j\left(\operatorname{arctg}\frac{6}{6}\right)^\circ} = 8{,}5\, e^{j45^\circ}.$$

Комплекс полного сопротивления катушки

$$\underline{Z}_k = R + jX_L = 6 + j8 = \sqrt{6^2 + 8^2}\, e^{j\left(arctg\frac{8}{6}\right)^\circ} 10\, e^{j53^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексы напряжения и тока:

$$\dot U = 127 \text{ В};$$

$$\dot I = \frac{\dot U}{\underline{Z}} = \frac{127}{8{,}5 \cdot e^{j45^\circ}} = 14{,}9 \cdot e^{-j45^\circ} = 14{,}9 \cdot \cos(-45^\circ) + j \cdot \sin(-45)^\circ = 10{,}5 - j10{,}5 \text{ А}.$$

Комплексные действующие значения напряжений:
– на конденсаторе

$$\dot U_C = \underline{Z}_C \cdot \dot I = -j \cdot X_C \cdot \dot I = -j2 \cdot 14{,}9 \cdot e^{-j45^\circ} = 29{,}8 \cdot e^{-j135^\circ} = -21{,}1 - j21{,}1 \text{ В};$$

– на катушке

$$\dot{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \dot{I} = 10 \cdot e^{j53^\circ} \cdot 14{,}9 \cdot e^{-j45^\circ} = 149 \cdot e^{j8^\circ} = 147{,}5 + j20{,}7 \text{ В}.$$

Комплекс полной мощности

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \overset{*}{I} = 127 \cdot 14{,}9 \cdot e^{j45^\circ} = 1892 \cdot e^{j45^\circ} = 1338 + j1338 \text{ В·А},$$

где $\overset{*}{I}$ – сопряженный комплекс тока.

Следовательно, активная мощность цепи составляет $P = 1338$ Вт, а реактивная – $Q = 1338$ вар.

Реактивная мощность конденсатора

$$Q_C = I^2 \cdot X_C = 14{,}9^2 \cdot 2 = 444 \text{ вар}.$$

Комплекс полной мощности катушки

$$\tilde{S} = \dot{U}_k \cdot \overset{*}{I} = 149 \cdot 14{,}9 \cdot e^{j8^\circ} \cdot e^{j45^\circ} = 2220 \cdot e^{j53^\circ} = 1336 + j1773 \text{ В·А}.$$

Векторная диаграмма приведена на рисунке 3.2, *б*.

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование её работы в среде Multisim.

В качестве источника питания ля цепи на рисунке 3.3 можно использовать источник *AC Power* из группы *Sources*, установив действующее значение напряжения *RMS* и частоту *F*. Измерительные приборы перевести в режим *AC*. При этом они осуществляют индикацию действующих значений токов и напряжений. Результаты моделирования соответствуют расчётным значениям с небольшой погрешностью.

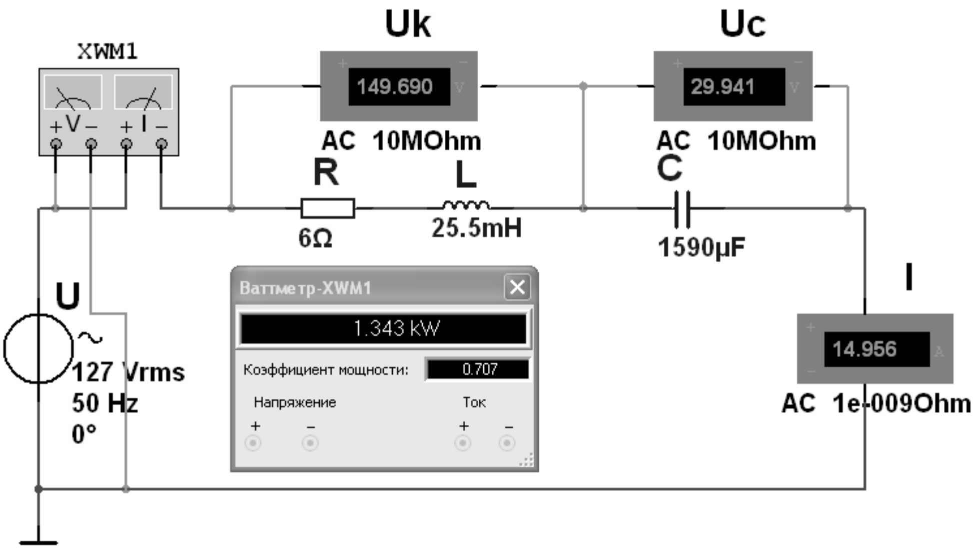


Рисунок 3.3 – Модель электрической цепи переменного тока в среде Multisim к задаче 2

Измерение мощностей P, S и Q можно провести с помощью ваттметра, который в Multisim, кроме активной мощности, измеряет коэффициент мощности $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.

В соответствии с показаниями ваттметра можно записать

P = 1343 Вт; $\cos\varphi = 0{,}707$;

φ = 45° (напряжение опережает ток по фазе);

$S = \dfrac{P}{\cos\varphi} = 1900\ \text{В·А};$

$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 1343$ вар, что с небольшой погрешностью соответствует расчётным значениям.

Задача 3. Определить токи в электрической цепи (рисунок 3.4), если напряжение на входе U_{ab} = 120 В, а значение сопротивлений X_{L0} = 4 Ом, R_1 = 6 Ом, X_{L1} = 8 Ом, X_C = 5 Ом, R_2 = 5 Ом. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

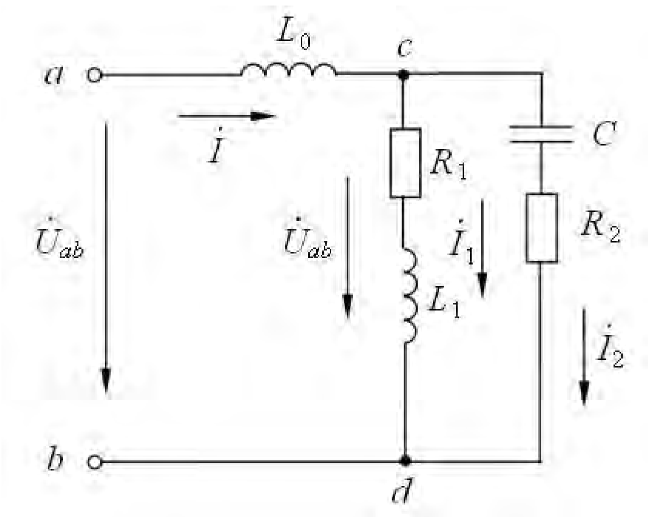


Рисунок 3.4 – Электрическая цепь переменного тока с параллельным соединением элементов к задаче 3

Решение

Входное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_0 + \underline{Z}_{cd} = \underline{Z}_0 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = jX_{L0} + \frac{(R_1 + jX_{L1}) \cdot (R_2 - jX_C)}{R_1 + jX_{L1} + R_2 - jX_C} =$$

$$= j4 + \frac{(6 + j8) \cdot (5 - j5)}{6 + j8 + 5 - j5} = 6{,}15 + j3{,}23 \text{ Ом}.$$

Общий ток цепи

$$\dot{I} = \frac{U_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{120}{6{,}15 + j3{,}23} = 15{,}39 - j8{,}08 = 17{,}4 \cdot e^{-j27{,}7^\circ} \text{ А.}$$

Комплексное напряжение на зажимах *cd* по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{cd} = \dot{U}_{ab} - \dot{U}_{ac} = 120 - j4 \cdot (15{,}39 - j8{,}08) = 87{,}78 - j61{,}5 = 107{,}2 \cdot e^{-j35^\circ} \text{ В.}$$

Токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_1} = \frac{87{,}8 - j61{,}5}{6 + j8} = 0{,}34 - j10{,}7 = 10{,}71 \cdot e^{-j88{,}2^\circ};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_2} = \frac{87{,}8 - j61{,}5}{5 - j5} = 14{,}92 + j2{,}64 = 15{,}2 \cdot e^{j10^\circ}.$$

Комплексная полная мощность всей цепи

$$\tilde{S} = \dot{U}_{ab} \cdot \overset{*}{I} = 120 \cdot (15{,}39 + j8{,}08) = 1846 + j970 = 2085 \cdot e^{j27{,}7^\circ};$$

$$S = \sqrt{1846^2 + 970^2} = 2085 \text{ В·А,}$$

откуда P = 1846 Вт; Q = 970 вар.

Для проверки баланса мощностей подсчитываем активные и реактивные мощности отдельных ветвей цепи:

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_{cd} \cdot \overset{*}{I}_1 = (87{,}8 - j61{,}5) \cdot (0{,}34 + j10{,}7) = 689 + j919 \text{ В·А,}$$

откуда P_1 = 689 Вт; Q_1 = 919 вар.

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_{cd} \cdot \overset{*}{I}_2 = (87{,}8 - j61{,}5) \cdot (14{,}92 + j2{,}64) = 1148 + j1148 \text{ В·А,}$$

откуда P_2 = 1148 Вт; Q_1 = −1148 вар

Активная и реактивная мощности всей цепи соответственно:

$$P_1 + P_2 = 689 + 1148 = 1837 \text{ Вт;}$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_0 = Q_1 + Q_2 + X_{L0} \cdot I^2 = 919 - 1148 + 1206 = 977 \text{ вар.}$$

Модель электрической цепи в среде Multisim приведена на рисунке 3.5. Действующие значения токов I_1, I_2, I_3, напряжения U_{cd} и активной мощности цепи P с небольшой погрешностью соответствуют расчётным.

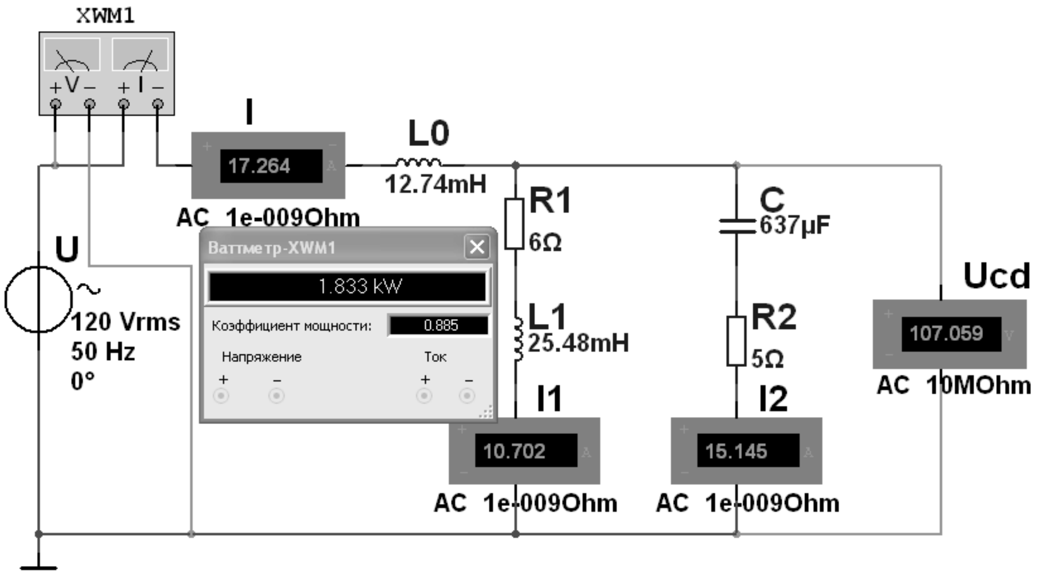


Рисунок 3.5 – Модель электрической цепи переменного тока с параллельным соединением элементов к задаче 3

Самостоятельная работа

Решить самостоятельно задачи, предложенные преподавателем, а также задачи 4 и 5.

Задача 4. В цепь переменного тока частотой 50 Гц (рисунок 3.6) включена катушка, обладающая активным сопротивлением R и индуктивным сопротивлением X_L. К цепи приложено напряжение $u = U_m \sin \omega t$. Определить показания измерительных приборов, а также активную, реактивную и полную мощности цепи. Построить треугольник сопротивлений и векторную диаграмму.

R = 3 Ом; X_L = 4 Ом; U_m = 282 В.

Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

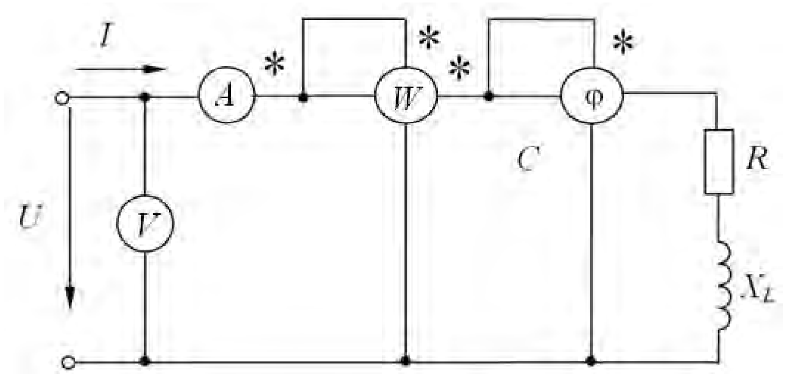


Рисунок 3.6 – Электрическая цепь с катушкой переменного тока задачи 4 для самостоятельного решения

Задача 5. В сеть переменного тока напряжением U включена цепь, приведенная на рисунке 3.7. Определить показания измерительных приборов, полную, реактивную и активную мощности, построить векторную диаграмму. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

U = 110 В; R_1 = 1,8 Ом; R_2 = 9 Ом; R_3 = 3,8 Ом; X_L = 4,8 Ом; X_C = 10 Ом.

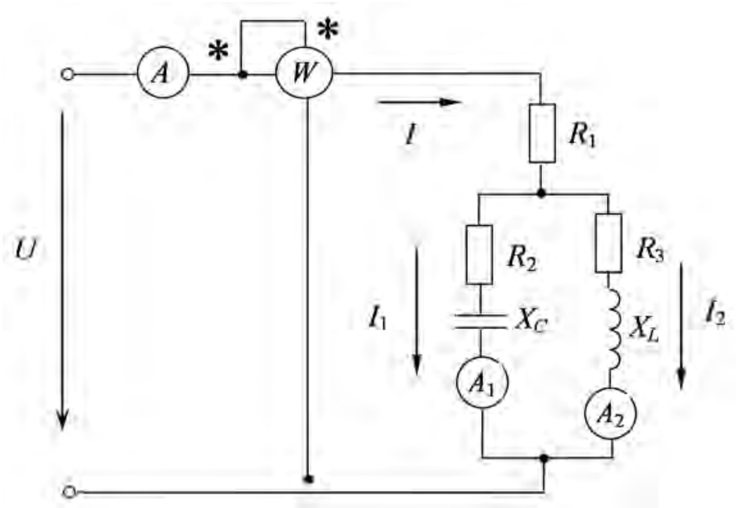


Рисунок 3.7 – Электрическая цепь переменного тока со смешанным соединением элементов задачи 5 для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

1 Запишите формулы комплексного сопротивления участка цепи при последовательном соединении элементов R, L, C.

2 Дайте формулировку и запишите закон Ома в комплексной форме для участка цепи с последовательным соединением элементов R, L, C.

3 Запишите комплексное сопротивление двух параллельно соединенных ветвей.

4 Запишите формулы для расчета комплексной мощности.

5 Поясните, что понимают под коэффициентом мощности и какое экономическое значение он имеет.

4 Расчет электрических цепей переменного тока с несколькими источниками питания при помощи комплексных чисел

Цель работы: изучить основные методы расчета сложных электрических цепей переменного тока с несколькими источниками питания при помощи комплексных чисел.

4.1 Основные теоретические сведения

Все методы расчета цепей постоянного тока применимы в комплексной форме к расчету цепей переменного тока, но расчетные формулы записываются в комплексной форме, где вместо *I*, *U*, *R*, *E* следует записывать их комплексные значения $\dot{I}, \dot{U}, \underline{Z}, \dot{E}$.

4.2 Примеры решения задач

Рассмотрим применение различных методов на задачах 1 и 2.

Задача 1. В электрической цепи включены два источника переменного напряжения: $e_1 = 141\sin \omega t$ и $e_2 = 141\sin(\omega t + 90°)$ (рисунок 4.1). Задачу решить методом контурных токов, методом непосредственного применения законов Кирхгофа и методом узлового напряжения. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

Определить токи в ветвях, если R_1 = 3 Ом; C_1 = 796,2 мкФ; R_2 = 8 Ом; L_2 = 19,1 мГн; L_3 = 31,85 мГн.

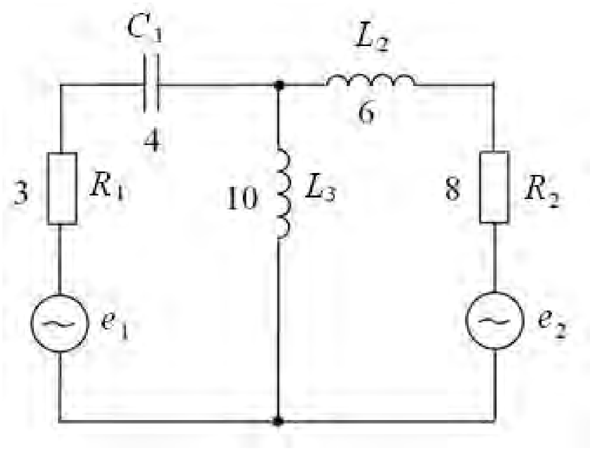


Рисунок 4.1 – Цепь переменного тока с двумя источниками питания к задаче 1

Решение

1 Метод контурных токов.

Определим значение реактивных сопротивлений элементов:

$$X_{C1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_1} = \frac{10^6}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 796{,}2} = 4 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_2 = 314 \cdot 19{,}1 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_3 = 314 \cdot 31{,}85 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом}.$$

Рассчитаем полные сопротивления отдельных ветвей в комплексной форме:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = 3 - j4 = 5 \cdot e^{-j53°};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 8 + j6 = 10 \cdot e^{j37°};$$

$$\underline{Z}_3 = jX_{L3} = j10 = 10 \cdot e^{j90°}.$$

Тогда исходная схема для решения методом контурных токов преобразуется к виду, представленному на рисунке 4.2.

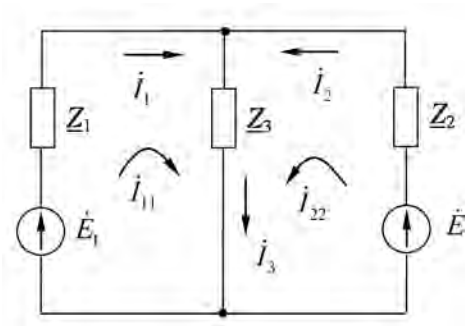


Рисунок 4.2 – Цепь переменного тока с двумя источниками питания к задаче 1 для решения методом контурных токов

Определим значения ЭДС источников в комплексной форме:

$$\dot{E}_1 = \frac{E_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В};$$

$$\dot{E}_2 = \frac{E_{m2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\phi} = \frac{141}{\sqrt{2}} \cdot e^{j90°} = j100.$$

Система уравнений для определения контурных токов

$$\begin{cases} \dot{E}_{11} = \dot{I}_{11}\underline{Z}_{11} + \dot{I}_{22}\underline{Z}_{12}; \\ \dot{E}_{22} = \dot{I}_{11}\underline{Z}_{21} + \dot{I}_{22}\underline{Z}_{22}, \end{cases}$$

где $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 = 100$ В;

$\dot{E}_{22} = \dot{E}_2 = j100 = 100 \cdot e^{j90°}$;

$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 3 - j4 + j10 = 3 + j6 = 6{,}7 \cdot e^{j63°}$;

$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 = j10 + 8 + j6 = 8 + j16 = 17{,}9 \cdot e^{j63°}$;

$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_3 = j10 = 10 \cdot e^{j90°}$.

Таким образом,

$$100 = \dot{I}_{11} \cdot (3 + j6) + \dot{I}_{22} \cdot j10;$$

$$j100 = \dot{I}_{11} j10 + \dot{I}_{22} \cdot (8 + j16).$$

Находим значение контурных токов:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta};$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 + j6 & j10 \\ j10 & 8 + j16 \end{vmatrix} = 28 + j96 = 100 \cdot e^{j74^\circ};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & j10 \\ j100 & 8 + j16 \end{vmatrix} = 1800 + j1600 = 2408 \cdot e^{j42^\circ};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 + j6 & 100 \\ j10 & j100 \end{vmatrix} = -600 - j700 = 922 \cdot e^{-j130^\circ}.$$

$$\dot{I}_{11} = \frac{2408 \cdot e^{j42^\circ}}{100 \cdot e^{j74^\circ}} = 24{,}08 \cdot e^{-j32^\circ} = 20{,}42 - j12{,}76;$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{922 \cdot e^{-j130^\circ}}{100 \cdot e^{j74^\circ}} = 9{,}22 \cdot e^{-j204^\circ} = -8{,}42 + j3{,}75.$$

Найти решение системы уравнений в комплексной форме можно, воспользовавшись *Калькулятором* (рисунок 4.3).

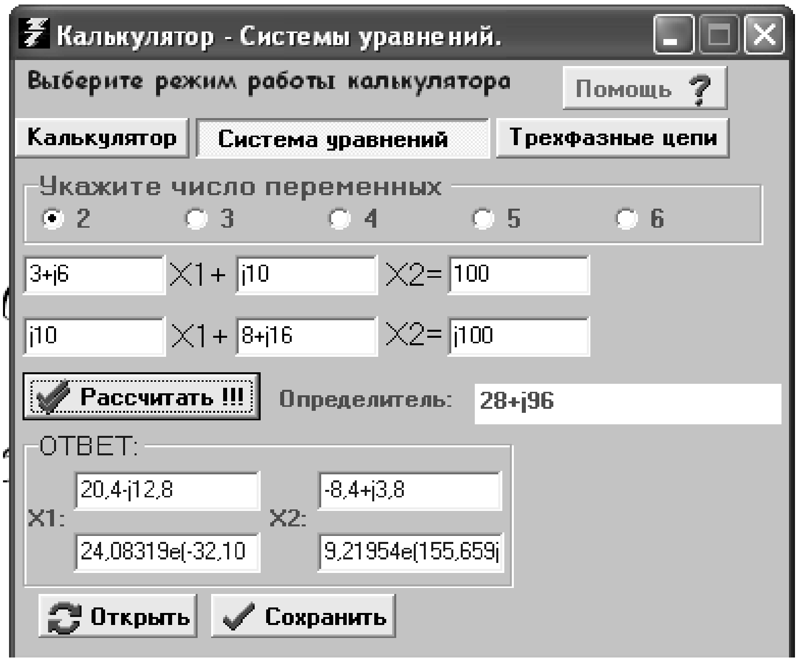


Рисунок 4.3 – Программа *Калькулятор* для решения системы уравнений

Токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 20,42 - j12,76 = 24,08 \cdot e^{-j32°};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} = -8,42 + j3,75 = 9,22 \cdot e^{-j204°};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 20,42 - j12,76 - 8,42 + j3,75 = 12 - j9 = 15 \cdot e^{-j37°}.$$

Модель электрической цепи в среде Multisim приведена на рисунке 4.4. Действующие значения токов I_1, I_2, I_3 соответствуют расчётным.

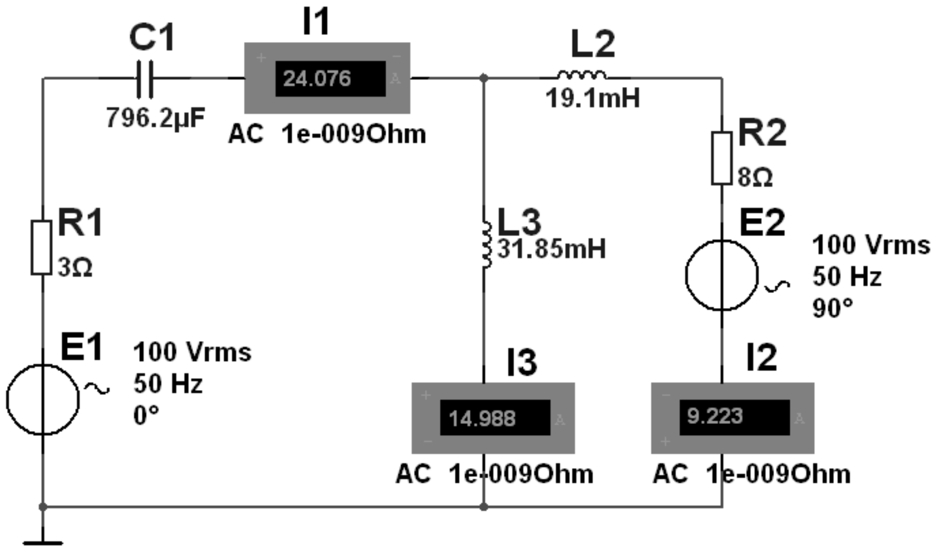


Рисунок 4.4 – Модель цепи переменного тока в Multisim с двумя источниками питания к задаче 1

Комплексные мощности источников ЭДС:

$$\dot{E}_1 \cdot \overset{*}{I}_1 = 100 \cdot \left(20,42 + j12,76\right) = 2042 + j1276;$$

$$\dot{E}_2 \cdot \overset{*}{I}_2 = 100 \cdot \left(-8,42 - j3,75\right) = 375 - j842.$$

Здесь

$$P_{ист} = P_1 + P_2 = 2042 + 375 = 2417 \text{ Вт};$$

$$Q_{ист} = Q_1 + Q_2 = 1276 - 842 = 434 \text{ вар}.$$

Комплексные мощности нагрузки

$$\tilde{S}_{нагр} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + j\left(-X_1 I_1^2 + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3\right) = 24,08^2 \cdot 3 + 9,22^2 \cdot 8 +$$
$$+ j\left(-4 \cdot 24,08^2 + 9,22^2 \cdot 6 + 15^2 \cdot 10\right) = 2419 + j440.$$

Небольшие расхождения в полученных значениях мощностей объясняются округлением величин при расчете.

2 Метод непосредственного применения законов Кирхгофа.

Преобразуем заданные комплексные величины из алгебраической формы в показательную:

$$\dot{E}_1 = 100 = 100 \cdot e^{j0^\circ}\text{ В};\quad \dot{E}_2 = j100 = 100 \cdot e^{j90^\circ}\text{ В};$$

$$\underline{Z}_1 = 3 - j4 = 5 \cdot e^{-j53^\circ}\text{ Ом};\quad \underline{Z}_2 = 8 + j6 = 10 \cdot e^{j37^\circ}\text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = j10 = 10 \cdot e^{j90^\circ}\text{ Ом}.$$

Записываем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла *a*:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \tag{4.1}$$

Записываем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{E}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \dot{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_3; \tag{4.2}$$

$$\dot{E}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_3. \tag{4.3}$$

Объединив уравнения (4.1)–(4.3), получим

$$\dot{E}_1 = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3\right) \cdot \dot{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_2; \tag{4.4}$$

$$\dot{E}_2 = \underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_1 + \left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3\right) \cdot \dot{I}_2. \tag{4.5}$$

В уравнения (4.4) и (4.5) подставляем значения заданных величин:

$$100 = \dot{I}_1 \cdot (3 - j4 + j10) + \dot{I}_2 \cdot j10 = \dot{I}_1 \cdot (3 + j6) + \dot{I}_2 \cdot j10; \tag{4.6}$$

$$j100 = \dot{I}_1 \cdot j10 + \dot{I}_2 \cdot (8 + j6 + j10) = \dot{I}_1 \cdot j10 + \dot{I}_2 \cdot (8 + j16). \tag{4.7}$$

Решаем уравнения (4.6) и (4.7), используя определители:

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100 & j10 \\ j100 & 8 + j16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j6 & j10 \\ j10 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = 20{,}4 - j12{,}8 = 24{,}1 \cdot e^{-j32^\circ}\text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j6 & 100 \\ j10 & j100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j6 & j10 \\ j10 & 8+j6 \end{vmatrix}} = -8,4 + j3,8 = 9,2 \cdot e^{j156^\circ}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 20,4 - j12,8 - 8,4 + j3,8 = 12 - j9 = 15 \cdot e^{-j36^\circ}\ \text{А}.$$

3 Метод узлового напряжения (метод двух узлов).

Размечаем схему применительно к методу узлового напряжения (рисунок 4.5).

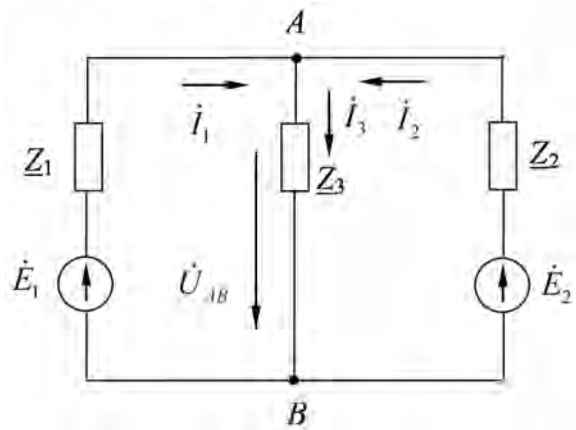


Рисунок 4.5 – Цепь переменного тока с двумя источниками питания к задаче 1 для решения методом двух узлов

Находим комплексные проводимости полных сопротивлений ветвей:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{5 \cdot e^{-j54^\circ}} = 0,2 \cdot e^{j54^\circ} = 0,12 + j0,16\ \text{См};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{10 \cdot e^{j37^\circ}} = 0,1 \cdot e^{-j37^\circ} = 0,08 - j0,06\ \text{См};$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{10 \cdot e^{j90^\circ}} = 0,1 \cdot e^{-j90^\circ} = -j0,1\ \text{См}.$$

Рассчитываем комплексное межузловое напряжение:

$$\dot{U}_{AB} = \frac{\dot{E}_1 \cdot \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{100 \cdot (0,12 + j0,16) + j100 \cdot (0,08 - j0,06)}{0,12 + j0,16 + 0,08 - j0,06 - j0,1} =$$

$$= 90 + j120 = 150 \cdot e^{j53^\circ}\ \text{В}.$$

Определяем токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \left(\dot{E}_1 - \dot{U}_{AB}\right) \cdot \underline{Y}_1 = \left(100 - 90 - j120\right) \cdot \left(0{,}12 + j0{,}16\right) = 20{,}4 - j12{,}8 = 24{,}1 \cdot e^{-j32^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_2 = \left(\dot{E}_2 - \dot{U}_{AB}\right) \cdot \underline{Y}_2 = \left(j100 - 90 - j120\right) \cdot \left(0{,}08 - j0{,}06\right) = -8{,}4 + j3{,}8 = 9{,}22 \cdot e^{j156^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_3 = \left(90 + j120\right) \cdot \left(-j0{,}1\right) = 12 - j9 = 15 \cdot e^{-j36^\circ} \text{ А.}$$

Самостоятельная работа

Решить самостоятельно задачи, предложенные преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Поясните методику расчета цепей переменного тока при смешанном соединении сопротивлений.
2 Укажите, в чем состоит сходство и различие методов расчета цепей постоянного тока и переменного тока.
3 Поясните порядок расчета сложных электрических цепей переменного тока с несколькими источниками питания.

5 Расчет трехфазных цепей при соединении потребителей в звезду и в треугольник

Цель работы: изучить основные методы расчета трехфазных электрических цепей при соединении нагрузки звездой и треугольником при помощи комплексных чисел.

5.1 Основные теоретические сведения

Фазные напряжения для схемы (рисунок 5.1, *а*) в комплексной форме определяются по заданному линейному напряжению:

$$\dot{U}_A = U_A; \quad \dot{U}_B = U_B \cdot e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_C = U_C \cdot e^{-j240^\circ},$$

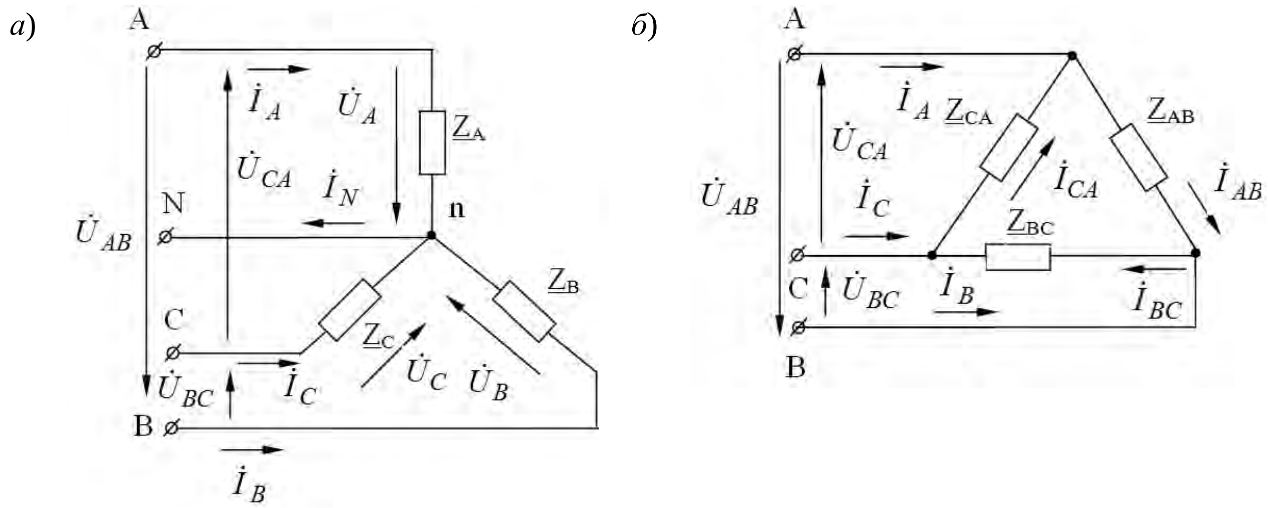
где $U_A = U_B = U_C = U_ф = U_л / \sqrt{3}$.

Для схемы (рисунок 5.1, *б*) фазные и линейные напряжения равны:

$$U_л = U_ф.$$

В комплексной форме

$$\dot{U}_{AB} = U_{AB}; \quad \dot{U}_{BC} = U_{BC} \cdot e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = U_{CA} \cdot e^{-j240^\circ}.$$



а – соединение звездой; *б* – соединение треугольником

Рисунок 5.1 – Трехфазные электрические цепи

5.2 Примеры решения задач

Задача 1. К трехфазной линии электропередачи, линейные напряжения которой симметричны: $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220$ В, присоединены три приемника энергии по схеме треугольник (рисунок 5.2). Комплексные сопротивления этих приемников $\underline{Z}_{AB} = 22$ Ом; $\underline{Z}_{BC} = 19 - j11$; $\underline{Z}_{CA} = 19 + j11$. Определить линейные и фазные токи в цепи и построить векторную диаграмму.

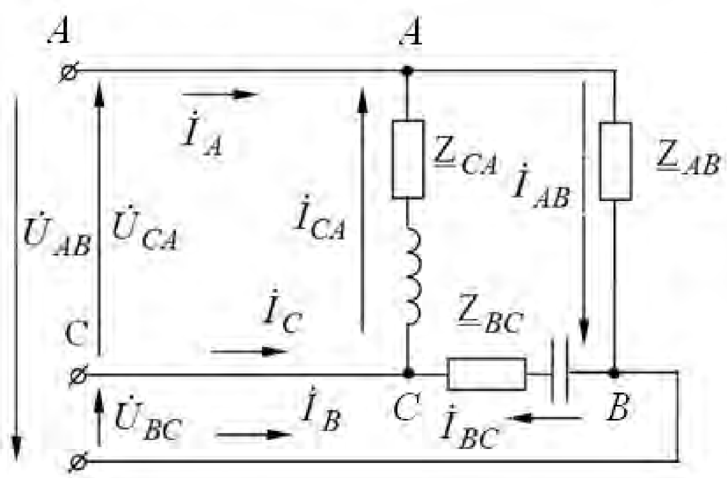


Рисунок 5.2 – Трехфазная электрическая цепь к задаче 1

Решение

Запишем значения линейных напряжений в комплексной форме:

$$\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 220 \text{ В},$$

тогда

$$\dot{U}_{BC} = U_{BC} \cdot e^{-j120^\circ} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} = -110 - j190;$$

$$\dot{U}_{CA} = U_{CA} \cdot e^{-j240^\circ} = 220 \cdot e^{-j240^\circ} = -110 + j190.$$

На основании закона Ома определим фазные токи:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB} = 220 / 22 = 10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / \underline{Z}_{BC} = (-110 - j190)/(19 - j11) = -j10 = 10 \cdot e^{-j90^\circ};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / \underline{Z}_{CA} = (-110 + j190)/(19 + j11) = j10 = 10 \cdot e^{j90^\circ}.$$

Применив первый закон Кирхгофа к точкам A, B, C, найдем линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 10 - j10 = 14{,}1 \cdot e^{-j45^\circ};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{CA} = -10 - j10 = 141 \cdot e^{-j135^\circ};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = j20 = 20 \cdot e^{j90^\circ}.$$

Проверка:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

$$10 - j10 - j10 - 10 + j20 = 0.$$

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование её работы в среде Multisim. Сопротивления в фазах нагрузки: R_{ab} = 22 Ом, R_{bc} = 19 Ом, C_{bc} = 1/ω · X_{bc} = 289,5 мкФ, R_{ca} = 19 Ом, R_{ca} = 19 Ом, L_{ca} = X_{ca}/ω = 35 мГн.

В качестве источника питания используем источник *Three phase wye* из группы *Sources*, установив действующее значение фазного напряжения *L-n, RMS* и частоту *F* (рисунок 5.3). Измерительные приборы переводим в режим *AC*. При этом они осуществляют индикацию действующих значений фазных и линейных токов I_a, I_b, I_c, I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}. Результаты моделирования соответствуют расчётным с небольшой погрешностью.

Правильность решения задачи можно проверить с помощью *Калькулятора*. При этом задаются модуль линейного напряжения *U* и комплексные сопротивления фаз нагрузки $\underline{Z}_{ab}, \underline{Z}_{bc}, \underline{Z}_{ca}$ (рисунок 5.4). Программа позволяет построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Задача 2. Определить токи в трехфазной цепи (рисунок 5.5), если линейные напряжения на входе в цепь симметричны: $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 208$ В, а комплексные сопротивления фаз $\underline{Z}_A = 8 + j6$ Ом; $\underline{Z}_B = 8 - j6$ Ом; $\underline{Z}_C = 25$ Ом.

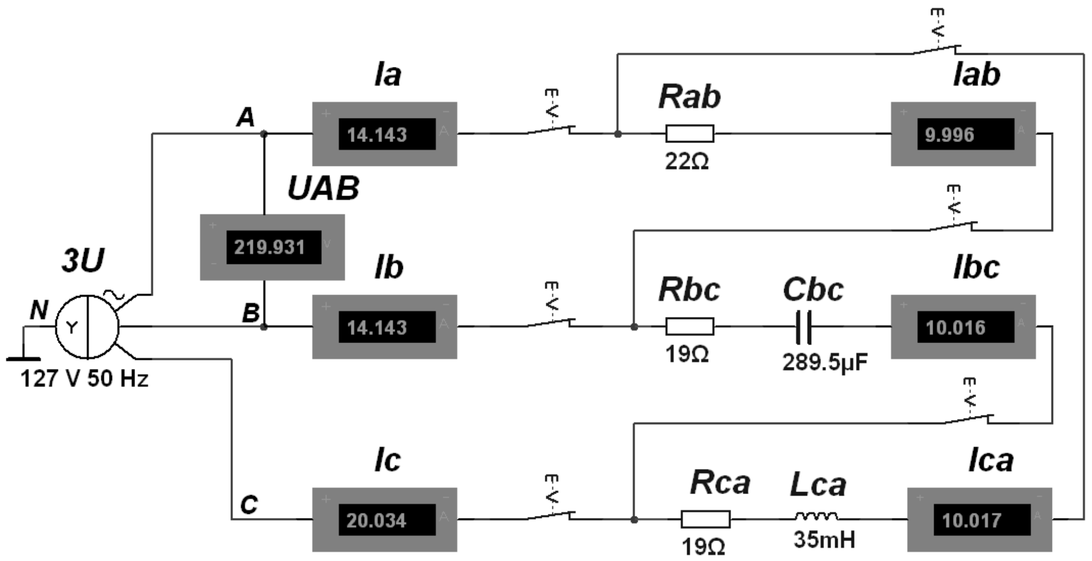


Рисунок 5.3 – Модель трехфазной электрической цепи в Multisim к задаче 1

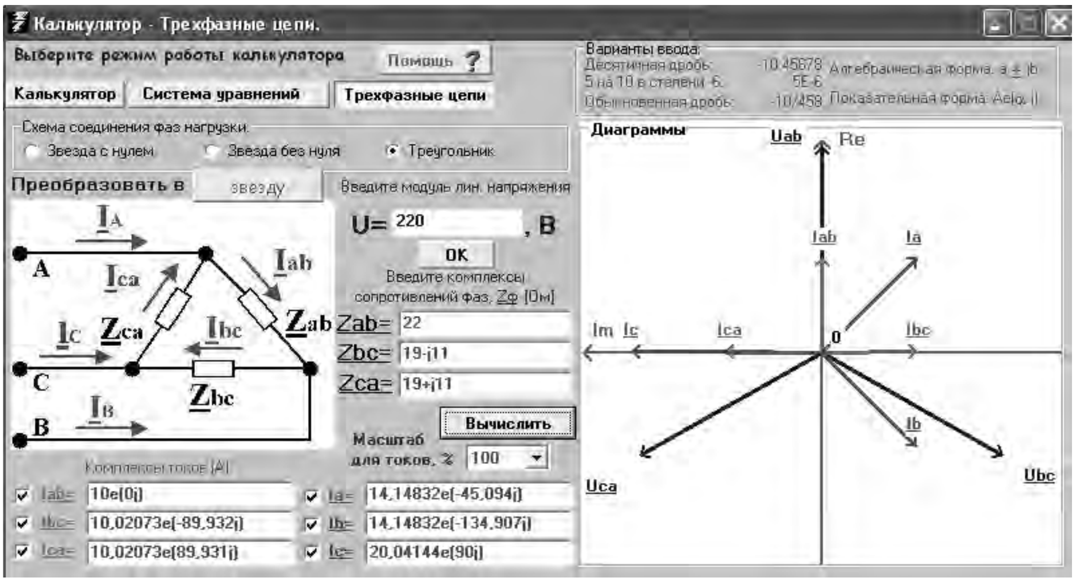


Рисунок 5.4 – Программа *Калькулятор* для расчёта трёхфазных цепей к задаче 1

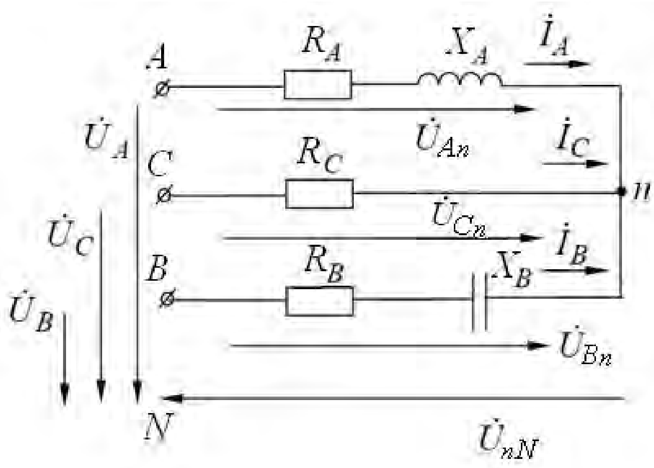


Рисунок 5.5 – Трехфазная электрическая цепь к задаче 2

Решение

Комплексные проводимости фаз:

$$\underline{Y}_A = 1/\underline{Z}_A = 1/\left(R_A + jX_A\right) = 1/\left(8 + j6\right) = 0{,}08 - j0{,}06;$$

$$\underline{Y}_B = 1/\underline{Z}_B = 1/\left(R_B + jX_B\right) = 1/\left(8 - j6\right) = 0{,}08 + j0{,}06;$$

$$\underline{Y}_C = 1/\underline{Z}_C = 1/R_C = 1/25 = 0{,}04 \text{ См}.$$

Фазные напряжения генератора

$$U_A = U_B = U_C = U_{AB}/\sqrt{3} = 208/\sqrt{3} = 120 \text{ В}.$$

Значения фазных напряжений в комплексной форме:

$$\dot{U}_A = 120 \text{ В}; \; \dot{U}_B = U_B \cdot e^{-j120^\circ} = 120 \cdot e^{-j120^\circ} = -60 - j104;$$

$$\dot{U}_C = U_C \cdot e^{-j240^\circ} = 120 \cdot e^{-j240^\circ} = -60 + j104.$$

Напряжение между нейтральными точками генератора и нагрузки

$$U_{nN} = \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

$$U_{nN} = \frac{120 \cdot \left(0{,}08 - j0{,}06\right) + \left(-60 - j104\right) \cdot \left(0{,}08 + j0{,}06\right) + \left(-60 + j104\right) \cdot 0{,}04}{0{,}08 - j0{,}06 + 0{,}08 + j0{,}06 + 0{,}04} =$$

$$= 43{,}2 - j74{,}8 = 86{,}3 \cdot e^{-j60^\circ}.$$

Фазные напряжения нагрузки:

$$\dot{U}_{An} = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = 120 - 43{,}2 + j74{,}8 = 76{,}8 + j74{,}8 = 107{,}2 \cdot e^{j44^\circ};$$

$$\dot{U}_{Bn} = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN} = -60 - j104 - 43{,}2 + j74{,}8 = -103{,}2 - j28{,}2 = 107{,}2 \cdot e^{-j165^\circ};$$

$$\dot{U}_{Cn} = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN} = -60 + j104 - 43{,}2 + j74{,}8 = -103{,}2 + j178{,}8 = 206{,}4 \cdot e^{-j60^\circ}.$$

Комплексные линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{An} \cdot \underline{Y}_A = \left(76{,}8 + j74{,}8\right) \cdot \left(0{,}08 - j0{,}06\right) = 10{,}63 + j1{,}38 = 10{,}7 \cdot e^{j7{,}4^\circ};$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{Bn} \cdot \underline{Y}_B = \left(-103{,}2 - j28{,}2\right) \cdot \left(0{,}08 + j0{,}06\right) = -6{,}5 - j8{,}53 = 10{,}7 \cdot e^{-j127^\circ};$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{Cn} \cdot \underline{Y}_C = \left(-103{,}2 + j28{,}2\right) \cdot 0{,}04 = -4{,}13 + j7{,}15 = 8{,}25 \cdot e^{-j60^\circ}.$$

Проверка:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

$$10{,}63 + j1{,}38 - 6{,}5 - j8{,}53 - 4{,}13 + j7{,}15 = 0.$$

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование её работы в среде Multisim. Сопротивления в фазах нагрузки: R_a = 8 Ом, $L_a = X_a/\omega$ = 19,1 мГн, R_b = 8 Ом, $C_b = 1/\omega{\cdot}X_b$ = 530,8 мкФ, R_c = 25 Ом.

В качестве источника питания используем источник *Three phase wye* из группы *Sources*, установив действующее значение фазного напряжения *L-n, RMS* и частоту *F* (рисунок 5.6). Измерительные приборы переводим в режим *AC*. При этом они осуществляют индикацию действующих значений фазных и линейных токов I_a, I_b, I_c, напряжения между нейтральными точками генератора и нагрузки U_{nN} и фазных напряжений нагрузки U_{an}, U_{bn}, U_{cn}. Результаты моделирования соответствуют расчётным с небольшой погрешностью.

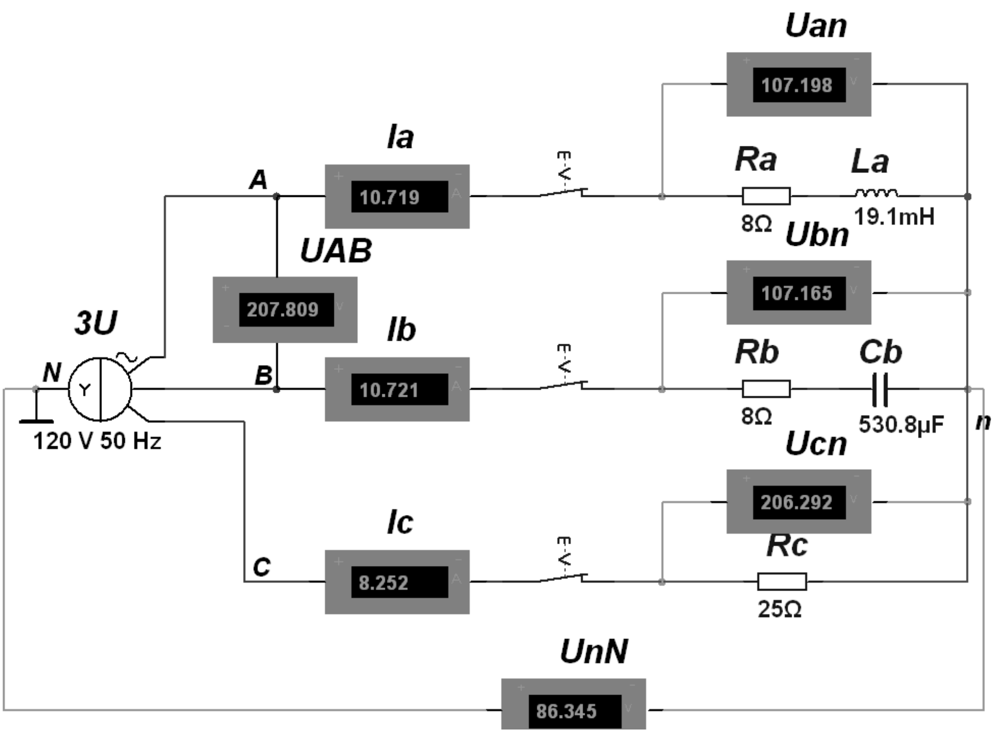


Рисунок 5.6 – Модель трехфазной электрической цепи в Multisim к задаче 2

Правильность решения задачи можно проверить с помощью *Калькулятора*. При этом задаются модуль линейного напряжения *U* и комплексные сопротивления фаз нагрузки $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_b$, $\underline{Z}_c$ (рисунок 5.7). Программа позволяет построить векторную диаграмму токов и напряжений.

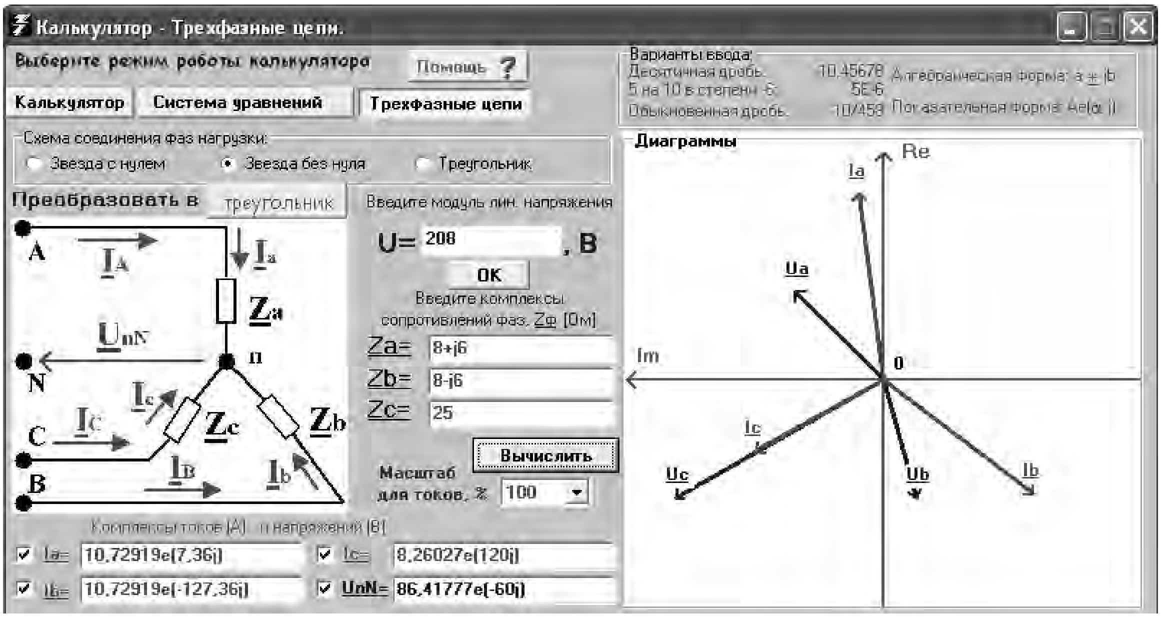


Рисунок 5.7 – Программа *Калькулятор* для расчёта трёхфазных цепей к задаче 2

6 Расчёт переходных процессов при подключении цепи с конденсатором и резистором к источнику постоянного напряжения классическим методом

6.1 Основные теоретические сведения

Расчёт переходного процесса в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами сводится к решению линейного дифференциального уравнения n-го порядка, полученного на основании законов Кирхгофа. Порядок дифференциального уравнения n определяется количеством реактивных элементов в схеме и способом их соединения. Для всех вариантов схем $n = 2$.

Классический метод расчёта предполагает нахождение решения в виде суммы свободной и принуждённой составляющих [2]:

$$X(t) = X_{пр}(t) + X_{св}(t), \tag{6.1}$$

где $X_{пр}(t)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (принуждённая составляющая);

$X_{св}(t)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (свободная составляющая).

В электротехнической практике в качестве частного решения обычно используют значение $X_{пр}(t)$, получаемое из расчёта рассматриваемой схемы в установившемся режиме.

Общее решение $X_{св}(t)$ определяется видом корней характеристического уравнения p:

– если характеристическое уравнение имеет два действительных и разных корня $p_1 \neq p_2$, то

$$X_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \qquad (6.2)$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования;

– если корни действительные и равные $p_1 = p_2 = p$, то

$$X_{св}(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{p \cdot t}; \qquad (6.3)$$

– если корни комплексно-сопряжённые $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega'$, то

$$X_{св}(t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega' \cdot t + \nu). \qquad (6.4)$$

Для получения характеристического уравнения достаточно составить выражение для входного сопротивления схемы после коммутации в комплексной форме $Z_{вх}(j\omega)$, заменить $j\omega$ на p и приравнять к нулю это выражение, либо матрицу контурных сопротивлений, либо матрицу узловых проводимостей схемы. При определении $Z_{вх}$ все источники ЭДС в схеме закорачиваются, а источники тока отбрасываются с сохранением в схеме их внутренних сопротивлений.

Для нахождения A_1 и A_2 либо A и ν (при комплексных корнях) необходимо вычислить значение искомой величины $X(0_+)$ и её производной $\left.\dfrac{dX}{dt}\right|_{t=0_+}$ в момент времени непосредственно после коммутации $(t = 0_+)$, используя законы Кирхгофа для послекоммутационной схемы и законы коммутации.

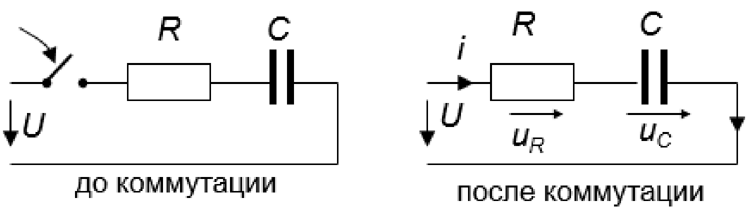
При этом не изменяющиеся мгновенно токи в индуктивностях и напряжения на ёмкостях определяются из расчёта схемы до коммутации.

Основным недостатком классического метода является необходимость определения постоянных интегрирования A. Этого недостатка лишён операторный метод расчёта переходных процессов.

6.2 Примеры решения задач

Задача 1. Задана цепь с последовательным соединением R и C на постоянное напряжение (рисунок 6.1). Величины U, R, C известны.

Определить $i\,(t)$ и $u_C\,(t)$ при переходном процессе.



$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

Рисунок 6.1 – Цепь с последовательным соединением R и C на постоянное напряжение

Решение

Производим коммутацию и запускаем переходный процесс. Уравнение 2-го закона Кирхгофа $U = u_R + u_L$.

Аналитическое решение

1 Составляем дифференциальное уравнение по 2-му закону Кирхгофа для цепи, образовавшейся после коммутации:

$$u_R + u_C = Ri + u_C = 0,$$

где $i = C\dfrac{du_C}{dt}$.

Тогда $U = CR\left(\dfrac{du_C}{dt}\right) + u_C$.

Заметим, что в цепях с емкостью дифференциальное уравнение составляется относительно неизвестного напряжения на емкости u_C.

2 Общий интеграл этого уравнения $u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}$.

Здесь принужденная составляющая $u_{Cпр} = u_{Cуст} = U$.

Свободная составляющая

$$u_{Cсв} = Ae^{pt},$$

где A – постоянная интегрирования;

p – корень характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение цепи $CRp + 1 = 0$.

Его корень $p = -\dfrac{1}{CR}$.

3 Промежуточный ответ: $u_C = U + Ae^{pt} = U + Ae^{-\frac{1}{CR}t}$.

4 Постоянную A определяем при $t = 0$: $u_C(0+) = U + A$.

Тогда $A = u_C(0+) - U$.

Для данного примера $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$.

Следовательно, $A = -U$.

5 Окончательный ответ: $u_C = U - Ue^{-\frac{1}{CR}t} = U\left(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$.

Проверка: при $t = 0$ $u_C(0+) = U(1-1) = 0$;

при $t = \infty$ $u_C(\infty) = u_{Cуст} = U(1-0) = U$.

6 Ток цепи (в емкости)

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(U - Ue^{-\frac{1}{CR}t}\right) = C\left[(-U)\left(-\frac{1}{CR}\right)e^{-\frac{1}{CR}t}\right] = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}.$$

Проверка: при $t = 0$ $i_C(0+) = \dfrac{U}{R}$; при $t = \infty$ $i_C(\infty) = 0$.

В цепи с одним накопителем энергии кривые тока и напряжения изменяются монотонно; колебательные процессы отсутствуют (рисунок 6.2).

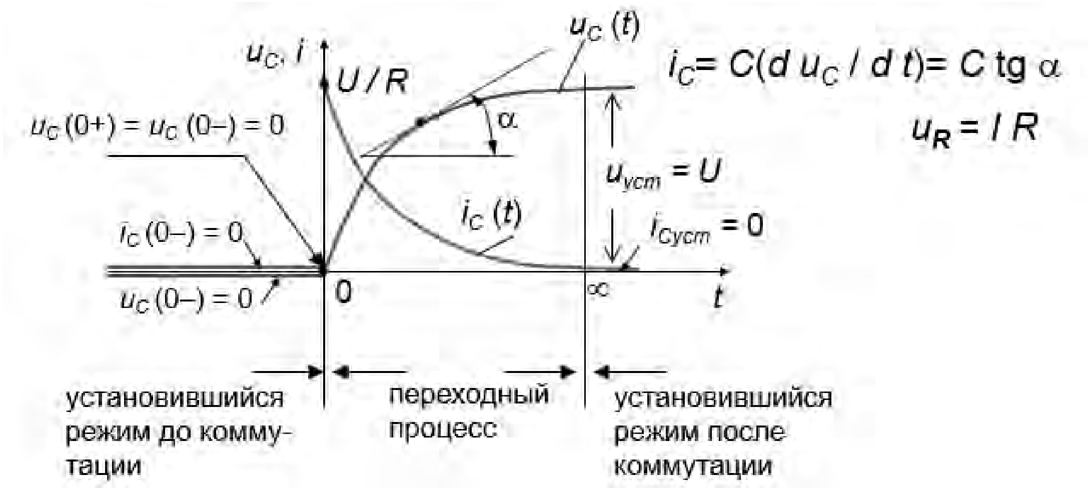


Рисунок 6.2 − Физика переходного процесса в цепи с последовательным соединением *R* и *C* на постоянное напряжение

Задача 2. Замыкание цепи с последовательным соединением *R* и *C* накоротко. Дано: *U*, *R*, *C*.

Определить: $i(t)$ и $u_C(t)$ при переходном процессе (рисунок 6.3).

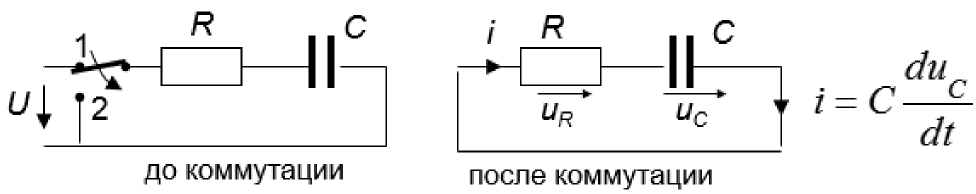


Рисунок 6.3 – Цепь с последовательным соединением *R* и *C* накоротко

Решение

Производим коммутацию и запускаем переходный процесс. Уравнение 2-го закона Кирхгофа $U = u_R + u_L$.

Аналитическое решение

1 Составляем дифференциальное уравнение по 2-му закону Кирхгофа для цепи, образовавшейся после коммутации:

$$u_R + u_C = Ri + u_C = CR\frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

2 Его общий интеграл u_C имеет одну составляющую:

$$u_C = u_{Cсв} = Ae^{pt},$$

где A – постоянная интегрирования;

p – корень характеристического уравнения: $CRp + 1 = 0$.

Следовательно, $p = -\frac{1}{CR}$.

3 Промежуточный ответ: $u_C = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$.

4 Определяем A, полагая в уравнении $t = 0$: $u_C(0+) = A$.

Для данного примера $u_C(0+) = u_C(0-) = U$. Таким образом, $A = U$.

5 Окончательный ответ: $u_C(t) = Ue^{-\frac{1}{CR}t}$.

Проверка: при $t = 0$ $u_C(0+) = U$; при $t = \infty$ $u_C(\infty) = u_{Cуст} = 0$.

6 Ток цепи (в емкости)

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(Ue^{-\frac{1}{CR}t}\right) = C\left[(U)\left(-\frac{1}{CR}\right)e^{-\frac{1}{CR}t}\right] = -\frac{U}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}.$$

Проверка: при $t = 0$ $i_C(0+) = -\frac{U}{R}$; при $t = \infty$ $i_C(\infty) = 0$.

С помощью электромагнитной постоянной времени τ определяют практическую длительность переходного процесса:

$$\tau = \left|\frac{1}{p}\right|.$$

Через время $t = (4\ldots5)\,\tau$ после начала переходного процесса этот переходный процесс почти завершается.

Тогда во всех примерах $e^{pt} = e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Ток цепи (в емкости) е $\approx$ 2,71 (неперово число).

Для построения графиков токов и напряжений по оси абсцисс (ось времени t) следует откладывать пять отрезков длиною τ (рисунок 6.4).

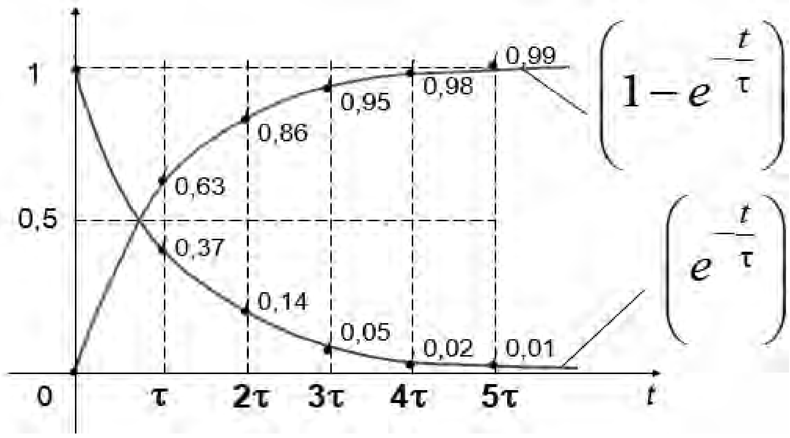


Рисунок 6.4 – Графики токов и напряжений в цепи с последовательным соединением *R* и *C*

Самостоятельная работа

Рассчитать переходные процессы в электрических цепях постоянного тока с одним накопителем энергии классическим методом по исходным данным, заданным преподавателем [9].

Список литературы

1 **Марченко, А. Л.** Электротехника и электроника : учебник в 2 т. Т. 1 : Электротехника / А. Л. Марченко, Ю. Ф. Опадчий. − Москва : ИНФРА-М, 2015. − 574 с.

2 **Миленина, С. А.** Электротехника, электроника и схемотехника : учебник и практикум для академ. бакалавриата / С. А. Миленина ; под ред. Н. К. Миленина. − Москва : Юрайт, 2015. – 399 с.

3 **Иванов, И. И.** Электротехника : учебник / И. И. Иванов, Г. И. Соловьев, В. А. Фролов. – 7-е изд., перераб. и доп. − Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 736 с.

4 **Марченко, А. Л.** Лабораторный практикум по электротехнике и электронике в среде Multisim : учебное пособие для вузов / А. Л. Марченко, С. В. Освальд. – Москва : ДМК Пресс, 2010. – 448 с.

5 **Рыбков, И. С.** Электротехника : учебное пособие / И. С. Рыбков. − Москва : РИОР ; ИНФРА-М, 2013. – 160 с.

6 **Марченко, А. Л.** Электротехника и электроника : курсовые работы с методическими указаниями и примерами / А. Л. Марченко, Ю. Ф. Опадчий. − Москва : ИНФРА-М, 2015. − 126 с.

7 **Касаткин, А. С.** Курс электротехники : учебник / А. С. Касаткин, М. В. Немцов. – 8-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 2005. – 541 с.

8 Сборник задач по электротехнике и электронике / Под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск : Вышэйшая школа, 2012. – 478 с.