

УДК: 624.072.21.7

ВЕРИФИКАЦИЯ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО ПОДХОДА  
АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ  
«БАЛОЧНАЯ ПЛИТА – СЛОИСТОЕ ОСНОВАНИЕ»

О. В. КОЗУНОВА

Учреждение высшего образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»  
Гомель, Беларусь

В работе представлена верификация вариационно-разностного подхода (ВРП) для решения контактных задач нелинейной теории упругости (плоская деформация) применительно к расчету нелинейно упругого слоистого основания под балочной плитой. Верификация осуществляется путем сравнения результатов линейных и нелинейных расчетов с использованием ВРП и результатов, полученных аналитическим путем для однородного основания с использованием модели упругого полупространства.

Множество задач для балок и плит на основании Винклера рассчитал в аналитическом виде великий русский механик, профессор С. П. Тимошенко [1]. В своих расчетах он использовал прямой метод решения вариационных задач – «метод Ритца». Осесимметричную задачу для круглой пластины на упругом полупространстве методом Ритца рассмотрел A.P.S. Selvadurai [2]. Позднее этот подход с некоторыми изменениями был использован в работах С. В. Босакова [3, 4] при решении некоторых контактных задач теории упругости и строительной механики. Ряд работ по решению контактных задач вариационными методами освещен в коллективной монографии [5].

Учет физической, геометрической или конструктивной нелинейности контактирующих тел в связи с цикличностью итерационного алгоритма усложняет расчеты на порядок. Для упрощения расчетов, но без потери точности, в нелинейной теории упругости предпочтение отдается приближенным методам решения задач о деформировании твердых тел.

В предлагаемой работе проверяются нелинейные расчеты контактной задачи «балочная плита – слоистое основание» аналитическим расчетом (нулевая итерация) с использованием модели упругого полупространства. Каждый слой упругого основания описывается, как *нелинейно деформируемая* однородная среда. Для  $k$ -того слоя упругого основания выбирается модель упругого слоя конечной толщины с *переменным модулем упругости*  $E_k$ , который изменяется функционально в неявном виде и входит в закон нелинейно упругого деформирования основания.

Нелинейный расчет балочной плиты на нелинейно-упругом неоднородном основании методом упругих решений А. А. Ильюшина [6], предполагает итерационный процесс. При каждой итерации модуль деформации в  $i$ -той точке упругого слоя основания изменяется, поэтому при

вычислениях используется переменный (касательный) модуль деформации, определяемый в следующем виде

$$E_k^{(n)} = (\sigma_{yk} / \varepsilon_i^{(n-1)}) \times \text{th} (E_{0k} \times \varepsilon_i^{(n-1)} / \sigma_{yk}). \quad (1)$$

В первом приближении сформулированная задача нелинейного расчета решается в линейной постановке (нулевая итерация). По вычисленным значениям перемещений  $i$ -той узловой точки  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$  определяются интенсивность деформаций и интенсивность напряжений в центрах сеточных ячеек.

Имея значения напряжений и перемещений, полученных в результате решения задачи в первом приближении, определяется касательный модуль деформации для каждой  $j$ -той сеточной ячейки и задача решается во втором и последующих приближениях (первая и вторая итерация соответственно). Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать требуемой точности решения задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – М. : Наука. 1971. – 807 с.
2. Selvadurai, A.P.S. The interaction between a uniformly loaded circular plate and a isotropic elastic halfspace: a variational approach / A. P. S. Selvadurai «J. Struct. Mech» – 1979. –V. 7(3). – P. 231–246.
3. Босаков, С. В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости / С. В. Босаков. – Минск : БГПА, 2000. –143 с.
4. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 108 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – М. : Наука. 1976. – 493 с.
6. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 398 с.