МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Экономика и управление»

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направления подготовки 27.03.05 «Инноватика» дневной формы обучения

Могилев 2019

УДК 303.732:519.816
ББК 65.в6
С 63

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Экономика и управление» «8» октября 2018 г., протокол № 3

Составитель ст. преподаватель Т. Ф. Ращеня

Рецензент канд. экон. наук, доц. Н. С. Желток

Методические рекомендации к лабораторным работам предназначены для студентов направления подготовки 27.03.05 «Инноватика» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Ответственный за выпуск	И. В. Ивановская
Технический редактор	С. Н. Красовская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Постановка и решение задачи линейного программирования графическим методом

Цель работы: закрепить графический метод решения задач линейного программирования и выполнить проверку знаний, умений и навыков по данной теме.

Задача линейного программирования в общей постановке формулируется следующим образом: найти совокупность неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых линейная целевая функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

достигает наибольшего (или наименьшего) значения, причем эти числа удовлетворяют системе линейных ограничений

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots \; + a_{ln}x_n \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_l, \; i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.2}$$

и условиям неотрицательности

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \; \ldots, \; n. \tag{1.3}$$

Совокупность неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих системе ограничений (1.2) и условиям неотрицательности (1.3), называется допустимым решением или планом задачи, а вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется допустимым вектором.

Задача линейного программирования может иметь одно или бесконечное множество оптимальных решений, в этом случае она называется разрешимой. Задача может не иметь ни одного оптимального решения, тогда она называется неразрешимой.

Каждое из ограничений задает на плоскости некоторую полуплоскость. Полуплоскость представляет собой выпуклое множество. Так как пересечение любого числа выпуклых множеств также является выпуклым множеством, то область допустимых планов рассматриваемой задачи есть выпуклое множество.

В задачах линейного программирования (ЗЛП) допустимые планы представлены в виде некоторого многогранного выпуклого множества на плоскости. Такое представление в литературе получило название первой геометрической интерпретации ЗЛП.

Основные свойства ЗЛП:

– область допустимых планов представляет собой выпуклый многоугольник;

– вершины выпуклого многоугольника являются угловыми точками, причем их число конечно;

– экстремум целевой функции в ЗЛП достигается в крайней точке области допустимых рушений. Решением может быть либо одна точка, либо множество точек, соответствующих грани многоугольника. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся линейной комбинацией этих точек.

В общем случае графически задача линейного программирования решается следующим образом:

– строится множество допустимых решений с учетом системы ограничений;

– строится произвольная линия уровня целевой функции;

– строится вектор градиентного направления;

– при решении задачи на max перемещаем прямую $Z(x)$ в направлении градиента, чтобы она заняла крайнее положение; при решении задач на min перемещаем прямую $Z(x)$ в направлении антиградиента;

– определяется оптимальный план.

Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Решить задачу линейного программирования графическим методом согласно варианту.

4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.

2 В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?

3 Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?

4 На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?

5 Какие задачи линейного программирования можно решать графическим способом?

2 Интерпретация и решение задач линейного программирования в пакете Excel

Цель работы: приобретение практических навыков решения задач линейного программирования в пакете Excel.

Пример – Предприятие изготавливает и продает краску двух видов: для внутренних и внешних работ. Для производства краски используется два исходных продукта *A* и *B*. Расходы продуктов *A* и *B* на 1 т соответствующих красок и запасы этих продуктов на складе приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Исходные данные

Исходный продукт	Расход продуктов, в тоннах на 1 т краски		Запас продукта на складе, т
	Краска для внутренних работ	Краска для внешних работ	
A	1	2	3
B	3	1	3

Продажная цена за 1 т краски для внутренних работ составляет 2 000 у. е., краска для наружных работ продается по 1 000 у. е. за 1 т. Требуется определить, какое количество краски каждого вида следует производить предприятию, чтобы получить *максимальный доход*.

Составление математической модели задачи.

Переменные задачи:

x_1 – количество производимой краски для внутренних работ;

x_2 – соответствующее количество краски для наружных работ.

Ограничения, которым должны удовлетворять переменные задачи:

x_1 , $x_2 \geq 0$;

по расходу продукта *A*: $x_1 + 2x_2 \leq 3$;

по расходу продукта *B*: $3x_1 + x_2 \leq 3$.

Целевая функция задачи. Обозначим *Z* доход от продажи краски (в условных единицах), тогда целевая функция задачи записывается как: $\max Z(x) = 2x_1 + x_2$.

Так как переменные задачи x_1 и x_2 входят в целевую функцию и ограничения задачи линейны, то соответствующая задача оптимизации называется *задачей линейного программирования* (ЗЛП).

Рассмотрим последовательность действий при решении задачи распределения ресурсов в пакете Microsoft Excel:

1) ввод данных примера в таблицу Excel (рисунок 2.1).

В ячейку *D*4 вводится формула для вычисления целевой функции задачи (дохода) $Z = 2x_1 + x_2$. Целевая функция вычисляется с помощью мастера функций f_x. В появившемся окне выбрать раздел «Математические» и функцию «СУММПРОИЗВ». В окне мастера функций нажать «Далее», в появившемся окне (рисунок 2.2) в поле «массив 1» необходимо ввести адреса изменяемых ячеек *B*3:*C*3. В поле «массив 2» вводятся адреса ячеек, содержащих цены на краски, – *B*4:*C*4, после нажать «Готово».

	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2	Имя	Краска 1	Краска 2	Доход	
3					
4		2	1		
5	Ограничения				
6	Ресурс			Расход	Запасы
7	A	1	2		3
8	B	3	1		3

Рисунок 2.1 – Ввод исходных данных

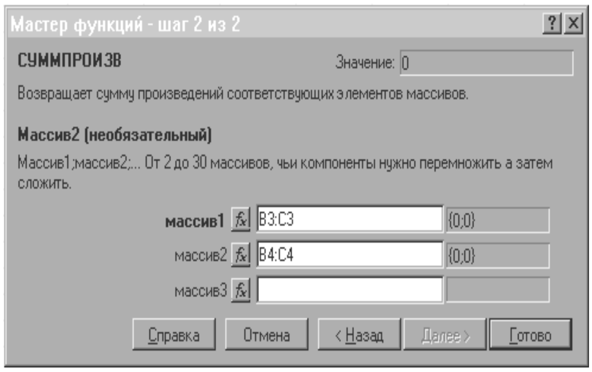

Рисунок 2.2 – Диалоговое окно «Функция СУММПРОИЗВ»

В ячейку *D*7 вводится формула для вычисления израсходованного количества продукта *A*: $x_1 + 2x_2$, а в ячейку *D*8 – для израсходованного количества продукта *B*: $3x_1 + x_2$;

2) работа в окне «Поиск решения».

В меню «Сервис» выбираем процедуру «Поиск решения». В появившемся окне нужно установить адрес целевой ячейки – *D*4, значение целевой ячейки – максимальное и адреса изменяемых ячеек – *B*3:*C*3;

3) для решения задачи в диалоговом окне «Поиск решения» нажать кнопку «Выполнить».

Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.
3 Составить экономико-математическую модель задачи согласно варианту.
4 Решить задачу в пакете Excel.
5 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Дайте определение линейного программирования.
2 Что называется математической моделью экономической задачи и как она строится?

3 Какие виды ограничений могут содержаться в задаче линейного программирования?

4 Как перейти от неравенств к уравнениям?

3 Решение задачи линейного программирования в многомерном пространстве

Цель работы: приобретение практических навыков решения задач линейного программирования в многомерном пространстве в пакете Excel.

Пример – Предприятие может изготовлять четыре вида продукции 1, 2, 3 и 4. Сбыт любого ее объема обеспечен. Предприятие располагает в течение квартала трудовыми ресурсами в 100 человеко-смен, полуфабрикатами массой 260 кг, станочным оборудованием в 370 станко-смен. Нормы расхода ресурсов и прибыль от единицы каждого вида продукции представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные

Ресурс	Продукция				Объем ресурса
	1	2	3	4	
Трудовые ресурсы, человеко-смен	4	2	2	8	4 800
Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2 400
Станочное оборудование, станко-смен	1	0	2	1	1 500
Прибыль от единицы продукции, д. е.	65	70	60	120	
План выпуска	x_1	x_2	x_3	x_4	

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором достигается максимум прибыли.

Целью работы является максимизация прибыли предприятия, поэтому целевая функция выглядит следующим образом: $\max Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4$.

Коэффициентами целевой функции являются прибыль от единицы продукции соответствующего вида, а x_1, x_2, x_3 и x_4 – это объем выпускаемой продукции 1, 2, 3 и 4 вида.

Переменные x_1, x_2, x_3 и x_4 являются управляемыми переменными задачи, т. к. изменяя их значение оптимизируется критерий оценки эффективности функционирования объекта исследования (целевая функция).

Рассмотрим последовательность действий при решении задачи распределения ресурсов в прикладном пакете Microsoft Excel.

Ввод данных примера в таблицу (рисунок 3.1).

Ресурсы	Продукция				Объем ресурса	Расход ресурса
	1	2	3	4		
Трудовые ресурсы, человеко-смен	4	2	2	8	4 800	0
Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2 400	0
Станочное оборудование, станко-смен	1	0	2	1	1 500	0
Прибыль от единицы продукции, ден.ед.	65	70	60	120		
План выпуска	0	0	0	0		
Целевая функция Max Z	0					

Рисунок 3.1 – Ввод исходных данных

На рисунке 3.1 «План продукции» обозначает объем выпуска продукции 1, 2, 3 и 4 видов (ячейки *C*10-*F*10). Эти ячейки называются рабочими или изменяемыми ячейками. В изменяемые ячейки ничего не заносится и в результате решения задачи в этих ячейках будут оптимальные значения переменных.

В ячейку *C*12 вводится формула для вычисления целевой функции задачи (прибыли). Целевую функцию можно вычислить с помощью мастера функций f_x. В появившемся диалоговом окне выбрать раздел «Математические» и функцию «СУММПРОИЗВ». В поле «массив 1» необходимо ввести адреса изменяемых ячеек *C*10:*F*10 (рисунок 3.2), в поле «массив 2» вводятся адреса ячеек, содержащих прибыль от единицы продукции – *C*9:*F*9, после нажать «Готово».

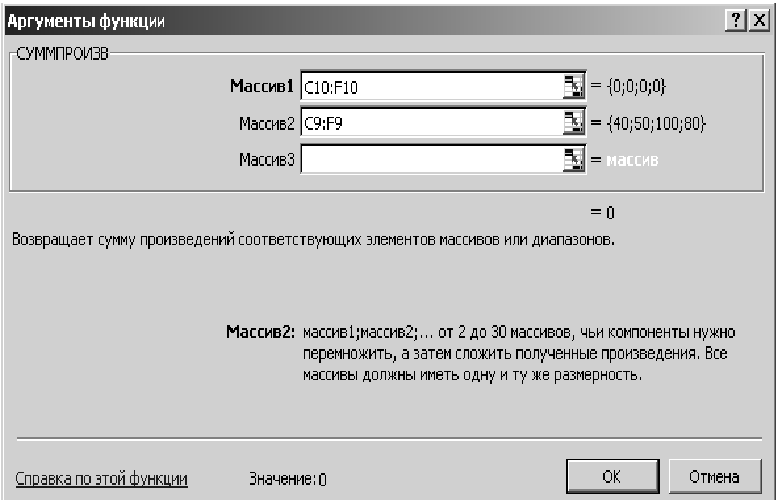

Рисунок 3.2 – Диалоговое окно функции «СУММПРОИЗВ»

Работа в диалоговом окне «Поиск решения». В меню «Сервис» выбираем процедуру «Поиск решения». Для решения задачи в диалоговом окне «Поиск решения» нажать кнопку «Выполнить».

Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Составить экономико-математическую модель задачи согласно варианту и решить задачу в пакете Excel.

4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Какие возможности предоставляет среда MS Excel для решения задач линейного программирования?

2 Назовите основные подходы к построению методов поиска решений.

3 Какие переменные называются дополнительными и какой коэффициент соответствует им в линейной функции задачи линейного программирования?

4 Применение симплекс-метода для решения задач линейного программирования

Цель работы: закрепить метод решения задач линейного программирования симплекс-методом и выполнить проверку знаний, умений и навыков по данной теме.

Симплекс-метод – это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных *основных* (*базисных*) переменных и $n–m$ *неосновных* (небазисных, или *свободных*) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, т. е. являются положительными числами.

Алгоритм симплекс-метода

1 Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на минус 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком «плюс», если в исходном неравенстве знак «меньше или равно», и со знаком «минус», если «больше или равно»).

2 Если в полученной системе m уравнений, то m переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соот-

ветствующее базисное решение.

3 Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным – решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.

4 Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят её в основные.

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Принятие решений на основе методов линейного программирования».

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Решите задачу симплексным методом и в прикладном пакете Microsoft Excel с помощью утилиты «Поиск решения».

4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?

2 Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования?

3 Перечислите условия оптимальности опорного плана.

4 Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?

5 Какой элемент называется разрешающим?

5 Решение двойственных задач линейного программирования

Цель работы: закрепить метод решения двойственных задач линейного программирования.

Каждой задаче линейного программирования (ЛП) может быть поставлена в соответствие другая вполне определенная задача ЛП, такая, что при решении одной из них одновременно решается и другая. Эти задачи были названы *парой взаимодвойственных задач*.

В *прямой задаче* ищется максимум функции цели (линейной формы), а в *двойственной задаче* – минимум.

Коэффициенты при переменных в функции цели *прямой задачи* являются свободными членами системы ограничений *двойственной задачи*, и наоборот, свободные члены системы ограничений *прямой задачи* – коэффициентами при переменных в функции цели *двойственной задачи*.

В каждой задаче система ограничений задаётся в виде неравенств, причём все они одного смысла, а именно: при нахождении максимума функции цели (*прямая задача*) эти неравенства записываются со знаком «меньше или равно», а при нахождении минимума (*двойственная задача*) – со знаком «больше или равно».

Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются матрицами, которые являются транспонированными относительно друг друга.

Число неравенств в системе ограничений *прямой задачи* совпадает с числом переменных *двойственной задачи*. Условия неотрицательности переменных сохраняются как в *прямой*, так и в *двойственной задаче*.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным выше условиям, называются симметричными взаимно-двойственными задачами.

Правила составления задачи, двойственной по отношению к исходной.

1 Приводят все неравенства системы ограничений исходной задачи к неравенствам одного смысла (т. е. с одним и тем же знаком): если в исходной задаче ищется максимум функции цели (линейной формы) – они записываются со знаком «меньше или равно», если же минимум – со знаком «больше или равно». Для этого неравенства, в которых это требование не выполняется, умножают на минус единицу.

2 Выписывают матрицу A коэффициентов при переменных исходной задачи, полученных после преобразований, описанных в предыдущем пункте, и составляют матрицу A', транспонированную относительно матрицы A.

3 Составляют систему ограничений двойственной задачи, взяв в качестве коэффициентов при переменных элементы матрицы A', а в качестве свободных членов – коэффициенты при переменных в функции цели исходной задачи и записывают неравенства противоположного смысла (т. е. меняют знак) по сравнению с неравенствами, полученными в п. 1;

4 Составляют функцию цели (линейную форму) двойственной задачи, приняв за коэффициенты при переменных свободные члены системы ограничений исходной задачи, полученные в пункте 1.

5 Указывают, что необходимо найти при решении двойственной задачи, а именно: минимум функции цели, если в исходной задаче ищется максимум; и максимум, если в исходной задаче ищется минимум.

6 Записывают условие неотрицательности переменных двойственной задачи.

Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Составить математическую модель двойственной задачи.

4 Используя теорию двойственности, выписать оптимальное решение двойственной задачи.

5 Решить двойственную задачу с помощью утилиты прикладного пакета Microsoft Excel «Поиск решения».

6 Дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач и составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте правило составления двойственной задачи ЛП по отношению к исходной.

2 Как связаны между собой экстремальные значения целевых функций двойственной и исходной задач?

6 Решение задач линейного программирования в пакете Mathcad

Цель работы: закрепить практические навыки решения задач линейного программирования в пакете MathCAD.

Пример – Предприятие может выпускать n видов продукции $П_j$ (j = 1, m), используя для этого n видов ресурсов P_i. Общий объем ресурсов a_i (i = 1, n) и нормы их расхода представлены в таблице 6.1, где c_{ij} – расход i-го вида ресурса на единицу j-го вида продукции. Там же приведены цены реализации b_j единицы каждой продукции. Необходимо определить оптимальный ассортимент продукции, доставляющий предприятию максимум выручки (см. таблицу 6.1).

Решение задач линейного программирования в MathCAD осуществляется с помощью функций **maximize** и **minimize**, которые можно набирать вручную или вставлять с помощью команды вставки функции (рисунок 6.1).

Таблица 6.1 – Исходные данные

Ресурс	Продукция				Объем ресурса a_i
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
P_1	2	1	0,5	4	2 400
P_2	1	5	3	0	1 200
P_3	3	0	6	1	3 000
Цена реализации b_j	75	30	60	120	
План выпуска x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	

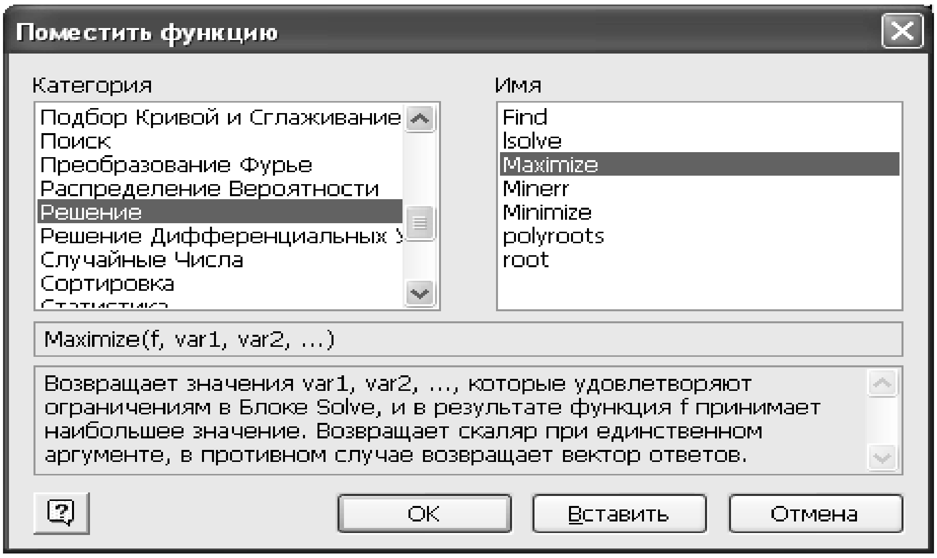

Рисунок 6.1 – Диалоговое окно вставки функции

При вызове функции **maximize** (**minimize**) ей необходимо передать имя целевой функции и имя вектора со значениями для начала счета. Функция возвратит вектор решений. Это можно набрать, например, следующим образом: $X = Maximize\ (F, x)$.

Щелчком правой кнопки мыши по имени функции **maximize** (**minimize**) вызывается контекстное меню, представленное на рисунке 6.2, с помощью которого при необходимости можно выбрать метод оптимизации.

Анализируя полученный результат, можно сделать вывод, что оптимальным планом выпуска будет 400 единиц продукции $П_3$ и 550 единиц продукции $П_4$. Продукцию $П_1$ и $П_2$ производить не следует. При этом будет получена максимальная выручка, равная 90 000 р.

Рисунок 6.2 – Контекстное меню для выбора метода оптимизации

Порядок выполнения работы

1 Ознакомиться с методическими рекомендациями.
2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.
3 Решить задачу линейного программирования в пакете Mathcad.
4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте правила объявления переменных в среде Mathcad.
2 Назвать способы создания масссивов.

7 Постановка и решение транспортной задачи на основе закрытой модели

Цель работы: закрепить практические навыки решения транспортной задачи на основе закрытой модели.

Транспортная задача относится к задачам линейного программирования, и ее можно было бы решить симплекс-методом. Но поскольку система ограничений транспортной задачи проще, то это дает возможность вместо использования объемных симплекс-таблиц применить более удобный метод, который состоит из следующих этапов:

1) составление первоначального плана перевозок;

2) последовательные улучшения плана перевозок (перераспределение поставок) до тех пор, пока план перевозок не станет оптимальным.

Стандартная постановка транспортной задачи следующая. Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, ..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны c_{ij} ($i = 1, 2, …, m$, $j = 1, 2, …, n$) – стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

В транспортной задаче предполагается, что суммарный груз поставщиков равен суммарному запросу потребителей. Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель – *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель – *открытой*.

Задание

Определить план перевозок продукции из трех пунктов отправления в пять пунктов назначения так, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

Запас, потребность и стоимость перевозки единицы продукции приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Исходные данные к индивидуальному заданию

Пункт отправления	Пункт назначения					Запас груза a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	k +5	7	11	8	180
A_2	8	12	k	6	5	240
A_3	k	20	15	10	11	50 + k
Потребность в грузе b_j	150	100	180	2(k +15)	75	–

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Постановка и решение транспортной задачи».

2 Построить начальный опорный план двумя методами (способом северо-западного угла и способом минимального элемента).

3 Решить задачу с помощью процедуры «поиск решения» в пакете Exsel.

4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Что называется транспортной задачей?

2 Что называется тарифом перевозки в транспортной задаче?

3 Какая транспортная задача называется закрытой?

4 В чем состоит схема решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов?

5 Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла?

8 Постановка и решение транспортной задачи на основе открытой модели

Цель работы: закрепить практические навыки решения транспортной задачи на основе открытой модели.

Для отрытых задач в случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов.

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления.

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных реальных перевозок, то фиктивные перевозки делают невыгодными, задавая их значения больше максимального из реальных тарифов, используемых в модели.

Пример решения задачи.

Необходимо решить задачу на назначение: распределить вакансии таким образом, чтобы минимизировать временные затраты на выполнение работ при условии, что каждый из претендентов получит одну и только одну из работ.

Рассмотрим поэтапное решение этой задачи с использованием процедуры «Поиск решения» Excel.

Этап 1. Проверка задачи на открытость/закрытость.

Количество вакансий равно количеству рабочих, поэтому задача закрытая, вводить фиктивную работу/исполнителя не требуется.

Этап 2. Составление математической модели задачи.

1 Введем переменные x_{ij}, принимающие значение 1 в случае, когда i-ю работу выполняет j-й исполнитель, и значение 0 во всех остальных случаях, i, j = 1, 5.

В задаче содержится 25 переменных.

2 Ограничения на переменные задачи. Очевидно, что все переменные задачи должны быть двоичными числами, т. е.

$$\begin{cases} x_{ij} - \text{двоичные числа;} \\ i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Кроме этого, должны удовлетворяться условия о том, что одну работу может выполнять только один исполнитель, и о том, что один исполнитель будет выполнять только одну работу.

3 Целевая функция. Совокупные временные затраты необходимо минимизировать: $Z(X) = 3x_{11} + 7x_{12} + \ldots + 5x_{54} + 1x_{55} \to \min$.

Этап 3. Нахождение оптимального решения транспортной задачи.

1 Ввод данных и формул (рисунок 8.1).

2 Заполнение окна процедуры «Поиск решения» (рисунок 8.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Работы						
3	Исполнители	1	2	3	4	5		Z
4	Сеченов	3	7	3	3	0		=СУММПРОИЗВ(B4:F8;B11:F15)
5	Кудрявцев	5	5	5	9	5		
6	Попкова	2	9	2	8	3		
7	Танин	7	8	8	6	5		
8	Воловик	1	2	6	5	1		
9								
10		1	2	3	4	5		
11	Сеченов						=СУММ(B11:F11)	
12	Кудрявцев						=СУММ(B12:F12)	
13	Попкова						=СУММ(B13:F13)	
14	Танин						=СУММ(B14:F14)	
15	Воловик						=СУММ(B15:F15)	
16		=СУММ(B11:B15)	=СУММ(C11:C15)	=СУММ(D11:D15)	=СУММ(E11:E15)	=СУММ(F11:F15)		

Рисунок 8.1 – Ввод данных

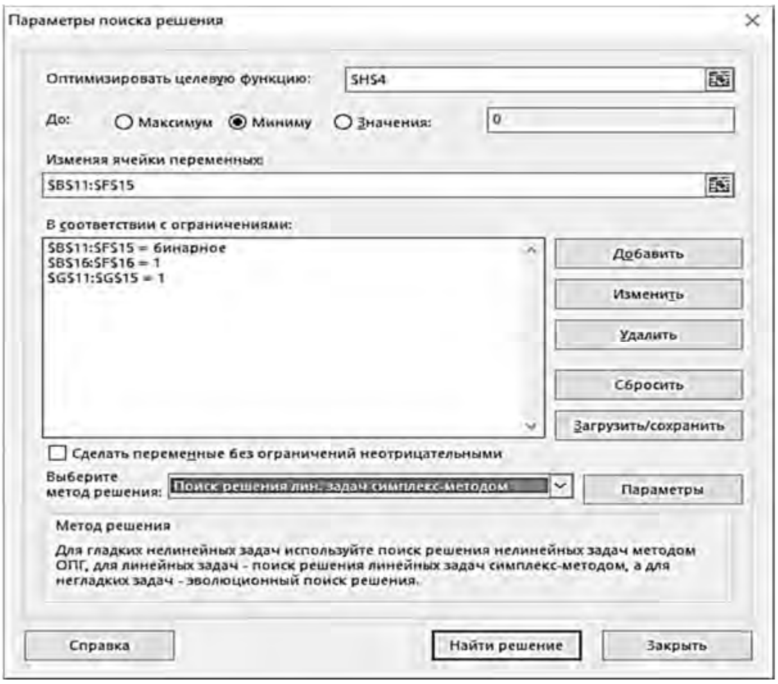

Рисунок 8.2 – Диалоговое окно процедуры «Поиск решения»

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Постановка и решение транспортной задачи».

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Решить транспортную задачу с помощью процедуры «поиск решения» в пакете Exsel.

4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Какая транспортная задача называется открытой?

2 В чем состоит процедура закрытия открытой транспортной задачи?

3 Что называется фиктивным поставщиком?

4 Что называется фиктивным потребителем?

5 Какой план перевозок называется вырожденным?

9 Постановка и решение задачи целочисленного программирования

Цель работы: освоить метод Гомори и метод «ветвей и границ» решения задач целочисленного линейного программирования.

Теоретические сведения.

Алгоритм Гомори состоит из следующих этапов.

1 Решается задача с отброшенным условием целочисленности.

2 Полученное оптимальное решение (если оно существует) проверяется на целочисленность. Если условие целочисленности выполняется по всем переменным, то оптимальное решение целочисленной задачи совпадает с оптимальным решением обыкновенной ЗЛП. Если это условие не выполняется хотя бы по одной переменной, то переходят к третьему этапу.

3 Строится дополнительное ограничение, отсекающее часть области, в которой содержится оптимальное решение задачи без ограничения целочисленности и не содержится ни одного допустимого решения целочисленной задачи.

Если после очередной итерации окажется, что в оптимальном плане нецелочисленной задачи имеется несколько нецелых координат, то для построения отсекающей плоскости целесообразно выбрать строку, содержащую свободный член с наибольшей дробной частью.

Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в симплексной таблице хотя бы одной строки с дробным свободным членом и целыми остальными коэффициентами, т. к. в этом случае уравнение не имеет решения в целых числах.

4 Последний этап предусматривает возвращение к ЗЛП с отброшенным условием целочисленности, но с расширенной системой ограничений, в которую включено дополнительное ограничение, полученное на третьем шаге. К расширенной системе ограничений вновь применяется симплексная процедура. Если найденное таким образом решение будет опять нецелым, то формируется новое дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяется.

Алгоритм Гомори позволяет за конечное число шагов прийти к оптимальному целочисленному решению, если оно существует.

Если полученное оптимальное решение оказывается допустимым для целочисленной задачи, то его следует зафиксировать как наилучшее.

Задание

На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено B_1 д. е. Оборудование должно быть размещено на площади в B_2 м^2. Предприятие может заказать машины типа A стоимостью A_{11} д. е., занимающие площадь (с учетом проходов) A_{21} м^2 и выпускающие C_1 единиц продукции за смену; и машины типа *Б* стоимостью A_{12} д. е., занимающие площадь A_{22} м^2 и обеспечивающие выпуск C_2 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа *А* можно заказать не более B_3 шт. Все необходимые числовые данные приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – Параметры машин типа А и типа Б

Параметры	Номер задачи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_1	30	20	272	36	80	49	50	48	24	72
B_2	850	660	27	672	5200	2128	3875	2604	984	1968
B_3	4	3	8	5	7	5	9	11	10	7
A_{11}	5	5	17	6	8	7	5	4	2	8
A_{12}	3	2	52	3	5	3	3	3	4	4
A_{21}	85	55	3	32	208	112	155	124	41	82
A_{22}	111	102	3	91	505	228	543	363	322	191
C_1	9	8	6	7	10	10	8	7	4	10
C_2	7	5	9	10	13	12	13	12	14	13

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Принятие решений на основе методов целочисленного программирования».

2 Составить экономико-математическую модель, пользуясь которой, можно найти план приобретения машин, учитывающий возможности предприятия и обеспечивающий наивысшую производительность нового участка.

3 Пользуясь методами целочисленного линейного программирования, найти оптимальный план приобретения оборудования.

4 Составить отчет.

Контрольные вопросы

1 Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?

2 Сформулируйте задачу целочисленного программирования.

3 В чем состоит метод Гомори?

10 Постановка и решение задачи нелинейного программирования

Цель работы: изучить и применить на практике численные методы решения задач нелинейного программирования.

Нелинейное программирование – случай математического программирования, в котором целевой функцией или ограничением является нелинейная функция.

Задачи нелинейного программирования по сравнению с задачами линейного программирования обладают большим многообразием. Решение задач нелинейного программирования может давать два или более экстремума, тогда как решение линейного программирования дает один экстремум.

Свойства задач нелинейного программирования:

– область допустимых планов может иметь очень сложную структуру;

– точки экстремума в задачах с нелинейной целевой функцией могут лежать как внутри области, так и на ее границе, причем локальных экстремумов может быть несколько;

– целевая функция может быть недифференцируемой, что затрудняет применение классических методов математического анализа.

Указанными особенностями обусловлено отсутствие общих методов, подобных симплексному методу, позволяющих решать любые задачи нелинейного программирования.

Если в задаче нелинейного программирования ограничения имеют вид уравнений, отсутствуют условия неотрицательности переменных, число ограничений меньше числа переменных, то для ее решения могут быть применены классические методы, в частности, метод неопределенных множителей Лагранжа.

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Принятие решений на основе методов нелинейного программирования».

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Разработать алгоритм реализации задания в соответствии с вариантом.

4 Оформить отчет о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1 В чем отличительные особенности задач нелинейного программирования от задач ЛП?

2 Дайте классификацию задач нелинейного программирования.

3 Что является необходимым условием существования экстремума для задачи безусловной оптимизации?

4 Дайте понятие седловой точки функции Лагранжа для задачи линейного программирования.

11 Постановка и решение задачи динамического программирования

Цель работы: изучить теорию и методы решения задач динамического программирования; приобрести навыки решения задач динамического программирования на ЭВМ.

Некоторые задачи математического программирования обладают специфическими особенностями, которые позволяют свести их решение к рассмотрению множества более простых «подзадач». В результате вопрос о глобальной оптимизации целевой функции сводится к поэтапной оптимизации некоторых промежуточных целевых функций.

Пусть, например, на период времени T, состоящий из m лет, планируется деятельность группы промышленных предприятий. В начале планируемого периода на развитие предприятий выделяются основные средства Q_0, которые необходимо распределить между предприятиями. В процессе функционирования предприятий выделенные им средства частично расходуются. Однако каждое из этих предприятий за определенный период времени (хозяйственный год) получает прибыль, зависящую от объема вложенных средств. В начале каждого года имеющиеся средства могут перераспределяться между предприятиями. Требуется определить, сколько средств надо выделить каждому предприятию в начале каждого года, чтобы суммарный доход от всей группы предприятий за весь период времени T был максимальным.

Эта задача является многошаговой. Шагом управления здесь будет хозяйственный год. Управление процессом состоит в перераспределении средств в начале каждого хозяйственного года.

Обычно методами динамического программирования оптимизируют работу управляемых систем, эффект которой оценивается аддитивной целевой функцией.

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Принятие решений на основе методов динамического программирования».

2 Получить у преподавателя исходные данные задания.

3 Решить задачу динамического программирования.

4 Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Для каких оптимизационных задач применяется метод динамического программирования?
2 В чем заключается суть метода динамического программирования?
3 Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
4 Что является целевой функцией в задаче о кратчайшем маршруте?
5 Какой параметр определяет состояние системы на каждом шаге?

12 Постановка и решение матричных игр

Цель работы: изучить и применить на практике методы решения задач теории игр и принятия решений.

Чтобы описать игру, необходимо сначала выявить ее участников. Различают игры двух лиц и игры многих лиц. Игры двух лиц являются наиболее исследованной моделью. Игры, в которых имеется один активный игрок, называются играми с природой и рассматриваются, в основном, в теории статистических решений.

Игры охватывают, как правило, несколько периодов, в течение которых игроки предпринимают последовательные или одновременные действия. Эти действия обозначаются термином «ход». Действия могут быть связаны с ценами, объемами продаж, затратами на научные исследования и разработки и т. д. Периоды, в течение которых игроки делают свои ходы, называются этапами игры. Выбранные на каждом этапе ходы в конечном счете определяют «платежи» (выигрыш или убыток) каждого игрока, которые могут выражаться в материальных ценностях или деньгах (преимущественно дисконтированная прибыль).

Стратегия игрока – это возможные действия, позволяющие игроку на каждом этапе игры выбирать из определенного количества альтернативных вариантов такой ход, который представляется ему «лучшим ответом» на действия других игроков. Относительно концепции стратегии следует заметить, что игрок определяет свои действия не только для этапов, которых фактически достигла конкретная игра, но и для всех ситуаций, включая и те, которые могут и не возникнуть в ходе данной игры.

Решение матричных игр в чистых стратегиях.

Выигрыш игрока обозначается через h_i (x), а соответствие между набором ситуаций и выигрышем игрока i называется *функцией выигрыша* (*или платежной функцией*) этого игрока H_i.

В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде *матрицы выигрышей*, где строки представляют стратегии одного игрока, столбцы – стратегии другого игрока. В клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков в каждой из ситуаций.

В качестве основного допущения в теории игр предполагается, что каждый игрок стремится обеспечить себе максимально возможный выигрыш при любых действиях партнера.

Порядок выполнения работы

1 Повторить теоретический материал по теме «Принятие решений в условии конфликтной ситуации».

2 Получить у преподавателя индивидуальное задание.

3 Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Каким образом определяется, решается ли матричная игра в чистых стратегиях?

2 Покажите алгоритм решения матричной игры в смешанных стратегиях.

3 Приведите примеры применения теории игр для решения экономических задач.

Список литературы

1 Административно-управленческий портал AUP.RU [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.aup.ru/books. – Дата доступа: 20.10.2018.

2 **Волкова, В. Н.** Теория систем и системный анализ : учебник для бакалавров / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2013. – 616 с.

3 **Дайитбегов, Д. М.** Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике : монография / Д. М. Дайитбегов. – 3-е изд., доп. – Москва : ИНФРА-М ; Вузовский учебник, 2013. – 587 с.

4 **Орлова, И. В.** Экономико-математическое моделирование : практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Вузовский учебник ; ИНФРА-М, 2013. – 140 с.

5 Экономический портал [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http:// institutiones.com/general/1224-ekonometrika.html. – Дата доступа: 20.10.2018.