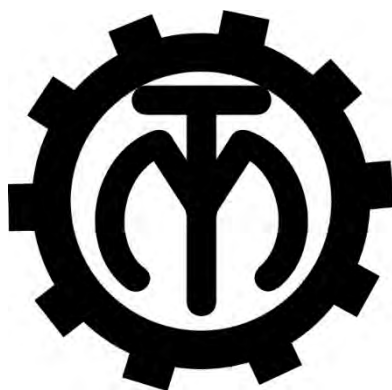


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технология машиностроения»

# МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов направления подготовки  
15.03.06 «Мехатроника и робототехника»  
дневной формы обучения*



Могилев 2019

УДК 621.01:338.2  
ББК 34.4  
М 75

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технология машиностроения» «19» ноября 2018 г.,  
протокол № 6

Составители: д-р техн. наук, проф. Г. Ф. Шатуров;  
канд. техн. наук, ст. преподаватель Д. Г. Шатуров

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

В методических рекомендациях изложен порядок выполнения заданий к  
практическим занятиям.

Учебно-методическое издание

## МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ответственный за выпуск	В. М. Шеменков
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 46 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 24.01.2014.

Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет», 2019



## Содержание

Введение.....	4
1 Разработка математической модели размерного износа лезвия резца от времени резания.....	5
2 Разработка математической модели периода стойкости и ресурса работы лезвийного инструмента.....	10
3 Получение математической зависимости параметра оптимизации методом наименьших квадратов.....	13
4 Метод полного многофакторного эксперимента .....	17
5 Методика получения зависимости степенного вида.....	28
6 Методика исследований получения параметра оптимизации в виде полинома второй степени.....	33
7 Оценка точности обработки по методу Гаусса, Симпсона и равной вероятности.....	36
Список литературы.....	42
Приложение А.....	43



## Введение

Современный инженер-технолог машиностроительного предприятия в своей практической деятельности для принятия правильного решения по оценке технологического процесса вынужден проводить различные эксперименты. Эти эксперименты позволяют определить для каждого конкретных условий оптимальное решение по назначению режимов обработки.

В соответствии с учебным планом подготовки инженеров для студентов направления подготовки 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» предусматривается преподавание учебной дисциплины «Методы экспериментальных исследований».

При изучении данной дисциплины студенты постигают теоретические основы, приобретают знания и практические навыки по измерению различных физических величин, осваивают методы математической обработки и статистического анализа экспериментальных данных для формирования заключения по результатам исследований.

В предлагаемых методических рекомендациях излагаются методики оценки и проведения статистического и регрессионного анализа экспериментальных данных технологического процесса.

Студент выполняет задание, вариант которого определяет преподаватель, и представляет отчёт в тетради в требуемом содержании (указано в задании) по проделанной работе.



# 1 Разработка математической модели размерного износа лезвия резца от времени резания

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта величины размерного износа лезвия резца от режимов обработки.

При обработке поверхностей валов на токарных станках величина их диаметральных размеров по мере перемещения резца вдоль оси обрабатываемой заготовки переменна и зависит от износа инструмента. Больше всего из поверхностей, образующих лезвия резца, изнашивается его задняя поверхность, имеющая, по сравнению с передней, в 2...4 раза большую скорость взаимного перемещения инструмента и заготовки.

Размерный износ лезвия призматического резца может быть представлен следующей математической моделью, определенной системой уравнений [3]

$$\delta_p = h_3 \cdot K_p; \quad (1.1)$$

$$h_3 = a_c \cdot \tau^{n_0}, \quad (1.2)$$

где  $\delta_p$  – величина размерного износа резца, мкм;

$h_3$  – текущая величина износа задней поверхности резца, мкм;

$K_p$  – коэффициент перевода линейного износа задней поверхности резца в радиальный (размерный) износ лезвия,  $K_p = \operatorname{tg} \alpha_3$ ;

$\alpha_3$  – задний угол заточки резца;

$a_c$  – коэффициент, учитывающий величину износа задней поверхности за время  $\tau = 1$  мин.

Величина износа задней поверхности резца (рисунок 1.1) определяется из следующей зависимости [3]:

$$h_3 = a_c \cdot \tau^{n_0} = \frac{\delta_0}{T_0^{n_0}} \cdot \tau^{n_0}, \quad (1.3)$$

где  $\delta_0$  – оптимальная величина износа задней поверхности резца, мкм;

$\tau$ ,  $T_0$  – время резания и период стойкости резца, мкм;

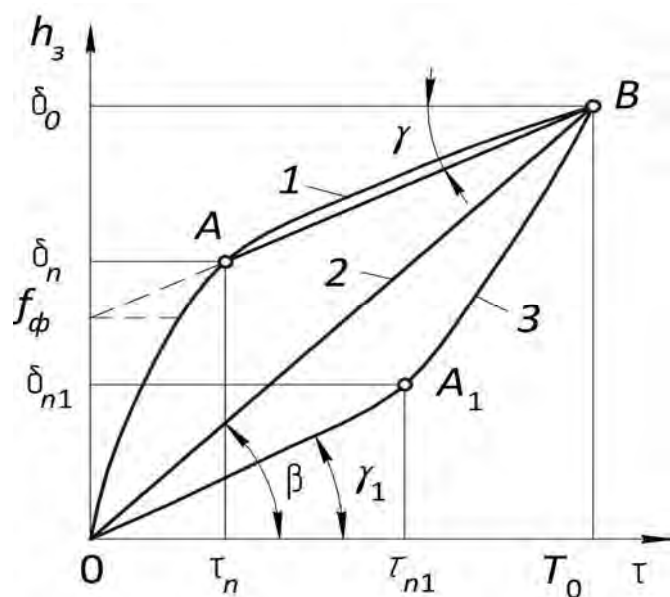
$n_0$  – показатель степени.

Текущую скорость изнашивания задней поверхности резца можно определить из (1.3) через производную  $dh_3 / d\tau$  [3]:

$$V_{из} = \frac{\delta_0}{T_0^{n_0}} \cdot n_0 \cdot \tau^{n_0-1}, \quad (1.4)$$

где  $V_{из}$  – текущая скорость изнашивания лезвия, мкм/мин.





1 –  $n_0 < 1,0$ ; 2 –  $n_0 = 1,0$ ; 3 –  $n_0 > 1,0$

Рисунок 1.1 – Зависимости износа резца от времени резания

Используя зависимость (1.4), легко определяются средняя скорость изнашивания за период стойкости резца, величины периода приработки и установившегося (нормального) износа лезвия, величина износа лезвия и средняя скорость изнашивания за эти периоды [3]:

$$V_0 = \frac{\delta_0}{T_0}; \quad (1.5)$$

$$V_1 = \frac{\delta_0}{T_0} \cdot \frac{1}{n_0} = V_0 \cdot \frac{1}{n_0}; \quad (1.6)$$

$$V_2 = \frac{\delta_0}{T_0} \cdot n^{0,6} = V_0 \cdot n^{0,6}; \quad (1.7)$$

$$\tau_n = T_0 \cdot n_0^{\frac{1}{1-n_0}}; \quad (1.8)$$

$$\tau_H = T_0 \cdot \left( 1 - n_0^{\frac{1}{1-n_0}} \right) = T_0 - \tau_n; \quad (1.9)$$

$$\delta_n = \delta_0 \cdot n_0^{\frac{1}{1-n_0}}; \quad (1.10)$$

$$\delta_H = \delta_0 \cdot \left( 1 - n_0^{\frac{1}{1-n_0}} \right) = \delta_0 - \delta_n, \quad (1.11)$$

где  $V_1, V_2, V_0$  – средние скорости изнашивания задней поверхности резца за период приработки, установившегося (нормального) износа (при  $n_0 < 1,0$ ) и период стойкости инструмента, мкм/мин;

$\tau_n$  – продолжительность периода приработки при  $n_0 < 1,0$  и периода установившегося износа при  $n_0 > 1,0$ ;

$\tau_n$  – продолжительность периода установившегося износа при  $n_0 < 1,0$  и ускоренного износа лезвия при  $n_0 > 1,0$ ;

$\delta_n$  – величина износа задней поверхности резца за период приработки при  $n_0 < 1,0$  и за период установившегося износа при  $n_0 > 1,0$ ;

$\delta_n$  – величина износа задней поверхности резца за период установившегося износа при  $n_0 < 1,0$  и ускоренного износа при  $n_0 > 1,0$ .

При  $n_0 = 1,0$  имеем равенство скоростей изнашивания за период приработки и установившегося износа, т. е. величина износа от времени резания – это прямая линия под углом  $45^\circ$  относительно оси абсцисс.

При  $n_0 < 1,0$  вначале имеем так называемый период приработки, а затем следует период установившегося износа лезвия. При  $n_0 > 1,0$ , наоборот, вначале имеем период установившегося износа, а затем период ускоренного износа лезвия. Величина размерного износа лезвия определяется по зависимости (1.1).

**Пример** – В результате токарной обработки поверхности вала из стали 45 резцом Т15К6, имеющим следующие геометрические параметры:  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\varphi_1 = 10^\circ$ ,  $\alpha_3 = 10,76^\circ$ , на режимах: глубина резания  $t = 1,0$  мм, подача  $S = 0,5$  мм/об,  $V = 115$  м/мин были получены следующие данные по износу задней поверхности резца (представлены в таблице 1.1).

Таблица 1.1 – Экспериментальные данные по износу задней поверхности резца (величина оптимального износа задней поверхности резца принята  $\delta_0 = 500$  мкм)

$\tau$ , мм	2	4	6	$S = 0,5$ мм/об $t = 1,0$ мм $V = 115$ м/мин $K_p = 0,19$
$h_z$ , мкм	22	36	50	

Необходимо дать полную характеристику процесса изнашивания резца.

Расчёт параметров износа будем осуществлять по следующему алгоритму:

$$n_0 \rightarrow T_0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \tau_n \rightarrow \tau_n \rightarrow \delta_n \rightarrow \delta_n \rightarrow \delta_{pn} \rightarrow \delta_{pn} \rightarrow \delta_p. \quad (1.12)$$

1 Определяем интенсивность изнашивания лезвия, т. е. показатель степени  $n_0$ . Если построить в логарифмических координатах график зависимости износа от времени  $\lg h_z = f(\lg \tau)$ , то это будет прямая, угол  $\alpha$  наклона которой относительно оси абсцисс будет характеризовать интенсивность изнашивания лезвия  $n_0$ .



$$\operatorname{tg} \alpha = n_0 = \frac{\lg h_{zi} - \lg h_{i-1}}{\lg \tau_i - \lg \tau_{i-1}}; \quad (1.13)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = n_0 = \frac{\lg 50 - \lg 22}{\lg 6 - \lg 2} = 0,747 \approx 0,75.$$

2 Определяем период стойкости резца  $T_0$  (1.14). Величина оптимального (допустимого) износа  $\delta_0 = 500$  мкм.

$$\lg T_0 = \frac{\lg \delta_0 - (\lg h_{zi} - n_0 \lg \tau_i)}{n_0} = \frac{\lg \delta_0 - \lg h_{zi}}{n_0} + \lg \tau_i; \quad (1.14)$$

$$\lg T_0 = \frac{\lg 500 - \lg 22}{0,75} + \lg 2 = 2,1097.$$

Откуда  $T_0 = 10^{2,1097} = 128,7 \approx 128$  мин.

3 Определяем средние скорости изнашивания задней поверхности резца за периоды изнашивания, используя зависимости (1.5)–(1.7).

$$V_0 = \frac{\delta_0}{T_0} = \frac{500}{128} = 3,9 \text{ мкм/мин};$$

$$V_1 = V_0 \cdot \frac{1}{n_0} = \frac{3,9}{0,75} = 5,2 \text{ мкм/мин};$$

$$V_2 = V_0 \cdot n^{0,6} = 3,9 \cdot 0,75^{0,6} = 3,28 \text{ мкм/мин}.$$

4 Определяем время приработки и установившегося износа задней поверхности резца, используя зависимости (1.8) и (1.9).

$$\tau_n = T_0 \cdot n_0^{\frac{1}{1-n_0}} = 128 \cdot 0,75^{\frac{1}{0,25}} = 40,5 \text{ мин};$$

$$\tau_n = T_0 \cdot \left( 1 - n_0^{\frac{1}{1-n_0}} \right) = 128 \cdot \left( 1 - 0,75^{\frac{1}{0,25}} \right) = \tau_0 - \tau_n = 87,5 \text{ мин}.$$

5 Определяем величину износа задней поверхности резца и величину размерного износа лезвия за время приработки и установившегося износа, используя зависимости (1.10), (1.11) и (1.1).

$$\delta_n = \delta_0 \cdot n_0^{\frac{1}{1-n_0}} = 500 \cdot 0,75^{\frac{0,75}{0,25}} = 211 \text{ мкм};$$



$$\delta_n = \delta_0 \cdot \left( 1 - n_0^{\frac{1}{1-n_0}} \right) = 500 \cdot \left( 1 - 0,75^{\frac{1}{0,25}} \right) = \delta_0 - \delta_n = 289 \text{ мкм};$$

$$\delta_{pn} = \delta_n \cdot K_p = 211 \cdot 0,19 = 41 \text{ мкм};$$

$$\delta_{pn} = \delta_n \cdot K_p = 289 \cdot 0,19 = 55 \text{ мкм};$$

$$\delta_p = \delta_0 \cdot K_p = 500 \cdot 0,19 = 95 \text{ мкм}.$$

Таким образом, за период приработки, это примерно 32 % от периода стойкости, размерный износ лезвия составляет 43 % от допустимого. Для повышения точности обработки за время приработки лезвия необходима дополнительная поднастройка резца на размер. Например, поднастройка резца на размер при  $\tau = 20$  мин от начала обработки обеспечит повышение точности на 21 %.

### Задание 1

Осуществить анализ работы призматического резца Т15К6 на режимах: глубина резания  $t = 1,0$  мм, подача  $S = 0,5$  мм/об при различных скоростях резания (таблица 1.2) резцом с  $\alpha_3 = 10,76^\circ$ . Оптимальный износ  $\delta_0 = 500$  мкм.

Содержание отчёта.

- 1 Расчёты размерного износа лезвия резца за периоды работы инструмента.
- 2 График зависимости размерного износа резца от времени резания.

Таблица 1.2 – Значения экспериментальных данных по изнашиванию задней поверхности резца ( $t = 1,0$  мм, подача  $S = 0,5$  мм/об)

Номер опыта	Параметр	$\tau$ , мин					$V$ , м/мин	$T_0$	$n_0$
		1	2	4	6	10			
1	$h_z$ , мкм	69	92	124	147	–	105		
2		–	6,5	13	19	–	122		
3		–	0,44	1,3	2,5	5,5	140		
4		–	0,32	1,0	2,0	4,5	148		
5		–	9,0	18,5	28	–	175		
6		88	119	160	190	–	200		
7		229	266	310	340	–	220		

### Контрольные вопросы

- 1 Как влияет показатель степени  $n_0$  на величину периода приработки и стойкости резца?
- 2 Как влияет показатель степени  $n_0$  на величину скорости изнашивания лезвия?



## 2 Разработка математической модели периода стойкости и ресурса работы лезвийного инструмента

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта величины скоростей резания, соответствующих максимальному периоду стойкости и максимальному ресурсу работы инструмента.

При обработке конструкционных и легированных сталей и других сплавов инструментами из однокарбидных и двухкарбидных твёрдых сплавов связь между скоростью резания  $V$  и периодом стойкости  $T_0$  инструмента представляется в виде плавной куполообразной кривой с двумя точками  $B$  и  $B_1$  перегиба и точкой  $A$  максимума (рисунок 2.1), координаты которых находят по математической модели, представленной в форме уравнений (2.1)–(2.3) [4].

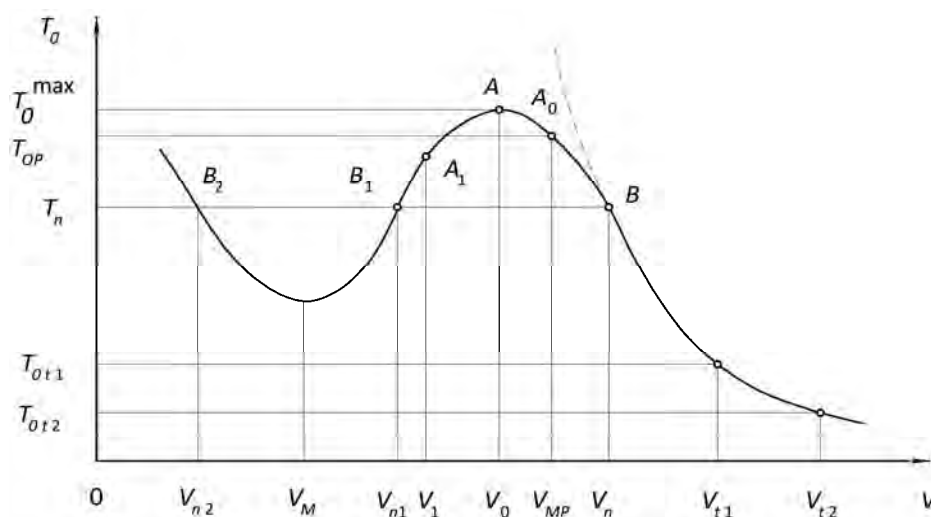


Рисунок 2.1 – Изменение периода стойкости от скорости резания

Правая точка перегиба имеет координаты  $B (V_n, T_n)$ , которые определяются из уравнений

$$V_n = C^{1,25} \cdot \left( \frac{U_0}{1000\delta_0 \cdot K_p} \right)^{0,25}; \quad (2.1)$$

$$T_n = \frac{1000 \cdot \delta_0 \cdot K_p}{V_n \cdot U_0}, \quad (2.2)$$

где

$$C = \frac{C_v \cdot K_v}{t^x \cdot S^y}, \quad (2.3)$$

$$K_v = K_m \cdot K_n \cdot K_h,$$

где  $V_n$  – скорость резания, соответствующая точке  $B$  перегиба, м/мин;  
 $T_n$  – период стойкости инструмента при скорости резания  $V_n$ , мин;  
 $U_0$  – относительный радиальный (размерный) износ инструмента;  
 $U_0 = 5 \dots 7$  мкм/км – для стали;  
 $\delta_0$  – оптимальный (допустимый) износ задней поверхности резца, мкм;  
 $K_p$  – коэффициент перевода линейного износа задней поверхности в размерный;  $K_p = \operatorname{tg} \alpha_3$  (где  $\alpha_3$  – задний угол заточки резца);  
 $t$  – глубина резания, мм;  
 $S$  – подача, мм/об;  
 $C_v, K_v$  – коэффициенты (даны в [5]);  $C_v = 420$  (350, 340);  
 $x, y$  – постоянные показатели степени, определяются из [5];  $x = 0,15$ ;  
 $y = 0,2(0,25; 0,43)$ ;

$K_m, K_n, K_h$  – коэффициенты, характеризующие прочностные характеристики обрабатываемого материала, состояние поверхности заготовки и марку твёрдого сплава инструмента соответственно ([5]).

Период стойкости  $T_0$  для правой части кривой, лежащей правее точки  $B$ , при  $V \geq V_n$  определяется из следующих равнозначных зависимостей [4]:

$$T_0 = \left( \frac{C}{V} \right)^{\frac{1}{m}} = \left( \frac{C}{V} \right)^5; \quad (2.5)$$

$$T_0 = T_n \cdot \left( \frac{V_n}{V} \right)^5, \quad (2.6)$$

где  $m$  – показатель относительной стойкости,  $m = 0,2$  (для стали).

Период стойкости для части кривой, расположенной левее точки  $B$  ( $V_n, T_n$ ), при  $V_m \leq V \leq V_n$  (см. рисунок 2.1) определяется из зависимости

$$T_0 = \frac{T_n \sqrt{e}}{e^{\frac{1}{2} \left( \frac{V}{V_n} - 4 \right)^2}}. \quad (2.7)$$

При анализе выражения (2.7) получаем

$$V_0 = \frac{4}{5} V_n; \quad (2.8)$$

$$T_0^{\max} = T_n \sqrt{e} = 1,65 T_n, \quad (2.9)$$

где  $V_0$  – скорость резания, соответствующая максимальному периоду стойкости инструмента, м/мин;

$T_0^{\max}$  – максимальный период стойкости лезвийного инструмента, мин.

Координаты левой точки  $B_1$  ( $V_{n1}, T_{n1}$ ) определяются из выражений



$$T_{n1} = T_n; \quad V_{n1} = 0,6V_n. \quad (2.10)$$

Под мерой количественной оценки ресурса работы инструмента чаще всего понимается максимальная длина рабочего пути резания  $L$  за период его стойкости. Тогда математическая модель ресурса работы имеет вид:

$$L = VT_0. \quad (2.11)$$

Из анализа зависимости (2.11), с учётом (2.7), получим

$$V_{mp} = \left(0,4 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)V_n = 0,847V_n; \quad (2.12)$$

$$T_{0p} = 1,603T_n, \quad (2.13)$$

где  $V_{mp}$  – скорость резания, соответствующая максимальному ресурсу работы инструмента, м/мин;

$T_{0p}$  – период стойкости, соответствующий скорости  $V_{mp}$ , мин.

### Задание 1

Определить скорости резания, соответствующие максимальному периоду стойкости и максимальному ресурсу работы инструмента, при следующих условиях обработки: материал – сталь 45, резец Т15К6, глубина резания  $t = 1,2$  мм, подача  $S = 0,5$  мм/об,  $\delta_0 = 800$  мкм,  $U_0 = 7$  мкм/км,  $K_p = \operatorname{tg}\alpha_3$ ,  $\alpha_3 = 8^\circ$ ,  $C_v = 350$ ,  $K_v = 1,0$ ,  $x = 0,15$ ,  $y = 0,35$ ,  $m = 0,2$ .

Содержание отчёта.

1 Расчёты скорости резания и периода стойкости для точки перегиба кривой  $T_0 = f(V)$ .

2 Расчёты скоростей резания, соответствующих максимальному периоду работы инструмента.

### Контрольные вопросы

1 Как влияют координаты расположения точки  $B (V_n, T_n)$  на ресурсную стойкость инструмента?

2 Назовите область изменения скорости резания, при увеличении которой стойкость инструмента возрастает.

### 3 Получение математической зависимости параметра оптимизации методом наименьших квадратов

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта коэффициентов регрессионной зависимости между аргументом и функцией отклика с установлением тесноты их связей.

Математическое моделирование и оптимизация технологического процесса могут быть осуществлены на основе статистической обработки экспериментальных данных, собранных в режиме нормальной работы оборудования в производственных условиях (метод пассивного эксперимента), и путём активного эксперимента, чаще всего в лабораторных условиях (метод активного эксперимента).

Корреляционная связь может быть представлена в аналитической, табличной и графической формах.

Аналитически корреляционная связь записывается обычно в виде уравнения

$$\bar{Y}_x = f(x), \quad (3.1)$$

где  $x$  – значение аргумента;

$\bar{Y}_x$  – условное среднее арифметическое значение ряда распределения, соответствующее данному значению аргумента  $x$ .

Уравнение (3.1) называется уравнением регрессии  $y$  от  $x$  или корреляционным уравнением.

Регрессионная зависимость может быть аппроксимирована прямой линией, параболой, гиперболой, логарифмической, степенной или показательной функцией, полиномом первой или второй степени и т. д.

Предположим, что на освоение экспериментальных данных получено  $n$  значений функций  $y$  при соответствующих значениях аргумента  $x$ .

На основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих экспериментальным значениям, выбирается функция  $Y = f(x, a, b, c)$ . Остаётся подобрать входящие в неё параметры  $a, b, c$  так, чтобы она наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс. Линия, проходящая через точки на графике, – это так называемая линия регрессии. Линия регрессии может быть построена и определена с использованием метода наименьших квадратов (МНК), суть которого заключается в том, чтобы сумма квадратов разности экспериментально полученного значения  $Y_i$  для точки  $x_i$  и рассчитанного по подбираемому выражению (величинам коэффициентов  $a, b, c$ ) была бы равна нулю или стремилась к минимуму (min).

$$\sum_i^n (Y_i - f(x, a, b, c))^2 \rightarrow \min \quad (3.2)$$

или



$$Q = \sum_i^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \min, \quad (3.3)$$

где  $Y_i$  – фактические координаты линии;  
 $\bar{Y}$  – среднее значение с абсциссой  $x$ .

Поиск коэффициентов сводится к решению системы уравнений с числом их, равным числу неизвестных коэффициентов. Для того чтобы условие (3.3) выполнялось, необходимо приравнять к нулю первые производные функции  $Q$  по каждому из коэффициентов  $a, b, c, \dots$ . Таким образом, получают столько уравнений, сколько постоянных коэффициентов в уравнении (3.3). Решая эту систему уравнений, получают значения коэффициентов  $a, b, c, \dots$ .

Если предположить, что зависимость между переменными линейна и выражается уравнением

$$y = ax + b, \quad (3.4)$$

где  $a, b$  – постоянные коэффициенты, то по условию (3.3) будем иметь

$$Q = \sum_i^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i^n (y - ax - b)^2 = \min. \quad (3.5)$$

Очевидно, что выражение (3.5) эквивалентно сумме

$$\begin{aligned} Q &= \sum [(y - ax) - b]^2 = \sum [(y - ax)^2 - 2(y - ax)b + b^2] = \\ &= \sum [y^2 - 2axy + a^2x^2 - 2yb + 2axb + b^2]. \end{aligned}$$

Взяв частные производные, используя зависимость (3.5),

$$\frac{dQ(ab)}{da} = 0, \quad \frac{dQ(ab)}{db} = 0; \quad (3.6)$$

$$\frac{dQ(ab)}{da} = -2 \sum xy + 2a \sum x^2 + 2b \sum x = 0;$$

$$\frac{dQ(ab)}{db} = -2 \sum y + 2a \sum x + 2 \sum b = 0,$$

получим систему уравнений

$$a \sum_i^n x_i^2 + b \sum_i^n x_i = \sum_i^n y_i x_i; \quad (3.7)$$



$$a \sum_i^n x_i + bn = \sum_i^n y_i,$$

где  $n$  – число опытов (объём выборки).

Решив её, можно получить значения коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Обычно их вычисляют по выражениям

$$a = \frac{n \sum_i^n x_i y_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n y_i}{n \sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}; \quad (3.8)$$

$$b = \frac{\sum_i^n y_i}{n} - \frac{a \sum_i^n x_i}{n}. \quad (3.9)$$

В результате получаем уравнение линии прямой – это так называемая линия регрессии, характеризующая экспериментальные данные.

После получения уравнения (3.4) необходимо убедиться в его достоверности. Для этого существуют определённые критерии. В технологии машиностроения для нормирования широко используется коэффициент корреляции  $r$ , показывающий степень тесноты связи  $x$  и  $y$  и определяемый отношениями:

$$r = \frac{\sum_i^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_i^n x_i \sum_i^n y_i}{\sqrt{\left[ \sum_i^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i^n x_i)^2 \right] \left[ \sum_i^n y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i^n y_i)^2 \right]}}. \quad (3.10)$$

Величина  $r$  изменяется от  $+1$  до  $-1$ . Обычно берётся по абсолютной величине. Считается, что корреляция при:

$r < 1$  – пренебрежимо мала;

$0,1 \leq r < 0,3$  – слабая;

$0,3 \leq r < 0,7$  – существенная;

$0,7 \leq r < 0,9$  – большая;

$0,9 \leq r$  – очень большая.

Модуль коэффициента  $r$  является мерой линейной зависимости. Чем ближе значения к прямой, тем в большей степени модуль  $r$  приближается к единице.

Некоторые значения по коэффициенту  $r$ .

1 Если две величины не зависят друг от друга, то они не коррелированы и  $r = 0$ ; если пары значений  $(x_i, y_i)$  лежат на прямой, то  $r = 1$ .

2 Необходимо учитывать, что  $r$  зависит от объёма выборки. При  $n = 2$  всегда  $r = 1,0$ . При  $n = 2$  на графике изображается точка. Использование  $r$  в качестве статистической зависимости при  $n = 2$  недопустимо.



**Пример** – Определить уравнение зависимости температуры от скорости резания при точении стали 45, а также коэффициент корреляции при следующих экспериментальных данных (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Исходные данные

Скорость, м/мин	$x_i$	70	127	169	200
Температура, °С	$y_i$	97	221	350	400
		100	240	400	500

В целях упрощения расчёт оформляем в виде таблицы 3.2.

Таблица 3.2 – Расчёт коэффициентов

Номер эксперимента	$V$ , м/мин $x_i$	$T$ , мин $y_i$	$V^2$ $(x_i^2)$	$T^2$ $(y_i^2)$	$VT$ $(x_i y_i)$
1	70	97	4900	9409	6790
2	127	221	16129	48841	28067
3	169	350	28561	122500	59150
4	200	400	40000	160000	80000
$\Sigma$	566	1068	89590	340750	174007

Коэффициент корреляции

$$r = \frac{174007 - \frac{1}{4} 566 \cdot 1068}{\sqrt{\left[89590 - \frac{1}{4} 566^2\right] \left[340750 - \frac{1}{4} 1068^2\right]}} = \frac{22885}{22982,57} = 0,996.$$

Так как коэффициент корреляции получился близким к + 1, то можно утверждать, что между скоростью резания и температурой существует тесная связь. Эта связь близка к линейной.

Рассчитаем коэффициенты линейной регрессии, используя выражения (3.8) и (3.9):

$$a = \frac{4 \cdot 174007 - 566 \cdot 1068}{4 \cdot 89590 - 566^2} = \frac{91540}{38004} = 2,4;$$

$$b = \frac{1068}{4} - 2,4 \frac{566}{4} = -72,6.$$

Теоретическая регрессионная зависимость имеет вид:

$$T = -72,6 + 2,4V.$$





### Задание 1

Определить уравнение зависимости температуры от скорости резания при точении стали 45, а также коэффициент корреляции при экспериментальных данных таблицы 3.1, используя формулы (3.8)–(3.10).

Содержание отчёта.

1 Расчёт коэффициентов уравнения регрессии.

2 Расчёт коэффициента корреляции и оценка зависимости тесноты между аргументом и функцией.

### Контрольные вопросы

1 Влияние объёма выборки на корреляционную зависимость.

2 При каком значении коэффициента корреляции регрессионная зависимость считается адекватной?

## 4 Метод полного многофакторного эксперимента

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта коэффициентов уравнения регрессии первого порядка и определить условия его адекватности.

Планирование эксперимента связано с изучением зависимости критериев оптимизации (функции отклика) от величины управляющих (входных) параметров и выражается формулой

$$y = \varphi(x_1; x_2 \dots x_n), \quad (4.1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – независимые переменные факторы.

При планировании эксперимента учитывают, что неизвестная исследователю функция отклика (4.1) аппроксимируется полиномом той или иной степени.

Для двух факторов уравнение первой степени имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2. \quad (4.2)$$

Для трех факторов

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (4.3)$$

Установление статистических зависимостей (4.2), (4.3) осуществляется с использованием разработанных планов экспериментальных исследований.

Применение известных планов удобно тем, что:

– отпадает необходимость в тщательном обдумывании техники проведения каждого опыта;

– фактически автоматически проводится статистический анализ как каж-



дого опыта, так и всего эксперимента в целом;

- сразу получается аналитическое выражение для описания исследуемого объекта;

- облегчен графический анализ влияющих факторов.

Последовательность построения математических зависимостей следующая.

1 Выявление необходимых оптимизирующих параметров ( $t, S, V$ ) или других ( $h_z, T_0, \delta_p$ ) и т. д.

2 Выбор основных факторов, определяющих значения оптимизирующих параметров.

3 Выбор разумных интервалов и уровней варьирования факторов.

Следует учитывать, что увеличение интервала варьирования затрудняет возможность линейной аппроксимации функции отклика и увеличивает количество экспериментов.

Для удобства записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных уровни варьирования факторов кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний –1, а основной 0. Обычно при записи цифра 1 опускается и кодовая запись уровней факторов имеет вид «+», «-», «0».

Кодированное значение фактора  $x_i$  определяют по выражению

$$x_i = \frac{C_i - C_{0i}}{\varepsilon_i}, \quad (4.4)$$

где  $x_i$  – кодированное значение фактора (безразмерная величина);

$C_i$  – натуральное значение  $i$ -го фактора;

$C_{0i}$  – натуральное значение  $i$ -го фактора на основном уровне;

$\varepsilon_i$  – натуральное значение интервала варьирования  $i$ -го фактора.

4 Выбор плана эксперимента.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом (ПФЭ), а результаты оцениваются посредством статистического анализа. Если число уровней каждого фактора  $m$ , а число факторов  $k$ , то число  $N$  всех возможных сочетаний уровней факторов, а следовательно, и число опытов в ПФЭ определяется выражением

$$N = m^k. \quad (4.5)$$

Цель первого этапа планирования эксперимента – это получение *линейной модели*. Он предусматривает варьирование факторов на двух уровнях. Возможное количество сочетаний уровней факторов в этом случае равно  $2^k$ .

Факторный эксперимент осуществляется с помощью матрицы эксперимента, в которой используют кодированные значения факторов.

В таблице 4.1 представлена матрица эксперимента для числа факторов от двух до трёх.



Таблица 4.1 – Матрица эксперимента для трёх факторов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	+	+	+	+
2	+	–	+	+
3	+	+	–	+
4	+	–	–	+
5	+	+	+	–
6	+	–	+	–
7	+	+	–	–
8	+	–	–	–

5 Выбор уровней и интервалов варьирования факторов.

6 По матрице эксперимента и уровням факторов строят матрицу планирования и рабочую матрицу эксперимента (таблица 4.2). Так, например, для уравнения (4.2) от двух факторов матрица планирования экспериментов представлена в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Матрица планирования эксперимента и результаты

Номер опыта	План			Взаимодействие	Отклик $Y_u$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	
1	+	+	+	+	
2	+	–	+	–	
3	+	+	–	–	
4	+	–	–	+	
5	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	

Опыты 5–7 – это опыты в нулевой (основной) точке, предназначенные для оценки однородности (адекватности) результатов.

7 После реализации плана эксперимента рассчитывают коэффициенты уравнения (4.3).

Расчет коэффициентов производят по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^n Y_u}{N}, \quad (4.6)$$

где  $N$  – число опытов в плане без учета опытов в нулевой точке (для рассматриваемого двухфакторного эксперимента  $N = 4$ );



$$b_i = \frac{1}{N} \sum_1^N X_{iu} \cdot Y_u; \quad (4.7)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_1^N X_{iu} \cdot X_{ju} \cdot Y_u, \quad (4.8)$$

где  $Y_u$  – значение (величина) отклика;

$X_{iu}$  – значение  $i$ -го фактора в  $i$ -м опыте;

$X_{ju}$  – значение  $j$ -го фактора в  $i$ -м опыте.

Для каждой колонки плана производят умножение кодированного значения фактора (+1, -1) на полученное значение отклика ( $Y_u$ ). После суммирования данных по колонкам и деления на соответствующее число опытов получают коэффициенты.

8 Статистический анализ в нулевых точках.

Определяют среднее арифметическое значение оптимизирующего параметра:

$$\bar{Y}_0 = \frac{\sum_{n_0}^{n_0} Y_{0u}}{n_0}, \quad (4.9)$$

где  $Y_{0u}$  – значение оптимизирующего параметра в нулевой точке;

$n_0$  – число опытов в нулевой точке.

Оценивают дисперсию воспроизводимости, когда опыты повторяются только в нулевой точке (дисперсия ошибки опыта):

$$S_{\bar{Y}} = S_0^2 = \frac{\sum_1^{n_0} (\bar{Y}_0 - Y_{0i})^2}{f}; \quad (4.10)$$

$$f = n_0 - 1,$$

где  $f$  – степень свободы.

Определяют среднее квадратическое отклонение в нулевой точке:

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{S_0^2} = \sqrt{\frac{\sum_1^{n_0} (\bar{Y}_0 - Y_{0i})^2}{n_0 - 1}}. \quad (4.11)$$

9 Полученные результаты служат основанием для установления значимости коэффициентов.

Оценка значимости коэффициентов регрессии связана с построением доверительных интервалов. Коэффициент уравнения регрессии значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала. Доверительный интервал



$$P(b_i - \Delta b_i \leq \beta_i \leq b_i + \Delta b_i) = \alpha,$$

где  $\alpha$  – доверительная вероятность;

$\Delta b_i$  – доверительный интервал.

Проверку значимости коэффициентов можно производить двумя способами:

1) сравнением абсолютной величины коэффициентов с доверительным интервалом;

2) с помощью  $t$ -критерия Стьюдента.

При проверке значимости коэффициентов первым способом для определения доверительного интервала вычисляют дисперсии коэффициентов регрессии по выражению

$$S^2\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}^2}{N}, \quad (4.12)$$

где  $S^2\{b_i\}$  – дисперсия  $i$ -го коэффициента регрессии;

$N$  – число опытов в плане без учета опытов в нулевой точке.

Из формулы (4.12) следует, что дисперсии всех коэффициентов равны. Затем определяют среднюю квадратическую ошибку в определении коэффициентов:

$$S\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}}{\sqrt{N}}. \quad (4.13)$$

Доверительный интервал  $\Delta b_i$  находят по формуле

$$\Delta b_i = \pm t S\{b_i\}, \quad (4.14)$$

где  $t$  – табличное значение критерия Стьюдента при принятом уровне значимости и числе степеней свободы  $f$ , с которым определялась дисперсия  $S_{\bar{Y}}^2$ .

Значения  $t$ -критерия Стьюдента приведены в таблице 4.3. Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала, т. е.  $b_i > \Delta b_i$ .

При проверке значимости коэффициентов вторым способом вычисляют расчетное значение  $t_p$ -критерия Стьюдента по выражению

$$t_p = \frac{|b_i|}{S\{b_i\}}. \quad (4.15)$$

Для каждого коэффициента уравнения (4.2) составляют расчетное и табличное значения критерия Стьюдента (см. таблицу 3.3). Коэффициент  $b_i$  значим, если  $t_p > t$  для принятого уровня значимости и числа степеней свободы  $f = n_0 - 1$ , с которым определялась дисперсия  $S_{\bar{Y}}^2$ . Критерий  $t_p$  вычисляют для каждого коэффициента регрессии. Если расчетное значение меньше таблич-

ного, то соответствующий коэффициент считается равным нулю, а член уравнения отбрасывается. Таким образом, получаем уравнение (4.2) в измененном виде при условии исключения какого-то коэффициента.

10 После отбрасывания ряда коэффициентов оценивают новое уравнение на приемлемость его для оптимизации рассматриваемого процесса, т. е. оценивают адекватность нового уравнения.

Определяют дисперсию адекватности:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{f_{ad}} \sum_{i=1}^N (Y_u - Y_{up})^2, \quad (4.16)$$

где  $S_{ad}$  – дисперсия адекватности;

$Y_u$  – фактическая величина отклика или критерия оптимизации (эксперимент);

$Y_{up}$  – расчетное число критерия оптимизации, полученное из уравнения после исключения коэффициентов;

$f_{ad}$  – число степеней свободы при оценке дисперсии адекватности.

$$f_{ad} = N - (K + 1), \quad (4.17)$$

где  $N$  – число опытов (без учета в нулевых точках);

$K$  – число факторов.

Или

$$f_{ad} = N - m,$$

где  $m$  – число значимых коэффициентов с учетом коэффициента  $b_0$ .

11 Определяют расчетное значение Фишера:

$$F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_{\bar{Y}}^2} \quad - \text{если} \quad S_{ad}^2 > S_{\bar{Y}}^2; \quad (4.18)$$

$$F_p = \frac{S_{\bar{Y}}^2}{S_{ad}^2} \quad - \text{если} \quad S_{\bar{Y}}^2 > S_{ad}^2.$$

Если расчетное значение  $F_p \leq F_T$  (таблица А.2), то полученное уравнение адекватно и оно пригодно для оценки оптимизации исследуемых параметров.

12 Перевод полученного уравнения из использования кодированных факторов в именованные, применяя соотношение (4.4).

**Пример** – Определить зависимость тангенциальной составляющей  $P_z$  силы резания от изменения переднего  $\gamma_s$  и заднего  $\alpha_s$  углов призматического резца.

Режимы обработки: скорость резания  $V = 100$  м/мин, глубина резания



$t = 0,8$  мм, подача  $S = 0,4$  мм/об.

После анализа литературных данных выбираем интервалы варьирования фактов.

Предполагаем, что в выбранных интервалах варьирования тангенциальная составляющая  $P_z$  силы резания изменяется линейно. Выбираем двухфакторный план первого порядка (таблица 4.3). Уравнение имеет вид выражения (4.2)  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$ .

Таблица 4.3 – Уровни и интервалы варьирования факторов

Фактор	Кодовое обозначение	Интервал варьирования факторов, град	Уровень варьирования		
			Верхний +1	Основной 0	Нижний -1
$\gamma_3$ – передний угол заточки, град	$x_1$	5	10	5	0
$\alpha_3$ – задний угол заточки, град	$x_2$	4	10	6	2

Проводим эксперимент и полученные результаты сводим в таблицу 4.4.

Таблица 4.4 – План проведения эксперимента и результаты

Номер опыта	План в кодах		План в значениях		Результат $Y_u$ , Н
	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	
1	+	+	10	10	565
2	–	+	0	10	680
3	+	–	10	2	620
4	–	–	0	2	770
5	0	0	5	6	640
6	0	0	5	6	650
7	0	0	5	6	660

Используя результаты экспериментов (см. таблицу 4.4), составляем таблицу 4.5 для расчета коэффициентов уравнения.

Таблица 4.5 – Расчет коэффициентов уравнения

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$Y_u$
1	565	565	565	565
2	–680	680	–680	680
3	620	–620	–620	620
4	–770	–770	770	770
5	0	0	0	640
6	0	0	0	650
7	0	0	0	660
Сумма	–265	–145	35	4585

Используя зависимости (4.6)–(4.8), проводим расчет коэффициентов:

$$b_0 = \frac{1}{4}(565 + 680 + 620 + 770) = \frac{2635}{4} = 658; \quad b_1 = -\frac{265}{4} = -66,25 \approx -66,3;$$

$$b_2 = -\frac{145}{4} = -36,25 \approx -36,3; \quad b_{12} = \frac{35}{4} = 8,75. \quad (4.19)$$

В результате обработки экспериментальных данных получено следующее уравнение:

$$Y_u = 658 - 66,3x_1 - 36,3x_2 + 8,75x_1x_2. \quad (4.20)$$

Проводим статистический анализ в нулевой точке. Определяем среднее арифметическое значение оптимизирующего параметра, используя (4.9):

$$\bar{Y}_0 = \frac{640 + 650 + 660}{3} = \frac{1950}{3} = 650.$$

Определяем дисперсию опыта в нулевой точке по формуле (4.10) (дисперсия ошибки опыта):

$$S_{\bar{Y}}^2 = S_0^2 = \frac{(650 - 640)^2 + (650 - 650)^2 + (650 - 660)^2}{(3 - 1) = 2} = 100,$$

$$S_{\bar{Y}} = 10.$$

Определяем среднее квадратическое отклонение в нулевой точке по формуле (4.11):

$$S_{\bar{Y}} = \sqrt{100} = 10.$$

Определяем среднюю квадратичную ошибку в значениях коэффициентов по формуле (4.12):

$$S\{b_i\} = \frac{S_{\bar{Y}}}{\sqrt{N}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5.$$

Результаты анализов в нулевой точке сводим в таблицу 4.6.

Оцениваем значимость коэффициентов по критерию Стьюдента по формуле (4.15):

$$t_{p1} = \frac{658}{5} = 131,6; \quad t_{p2} = \frac{66,3}{5} = 13,26; \quad t_{p3} = \frac{36,3}{5} = 7,26; \quad t_{p12} = \frac{8,75}{5} = 1,75.$$





Таблица 4.6 – Статистические характеристики опытов в нулевой точке

Среднее арифметическое $\bar{Y}_0$	658
Дисперсия $S_Y^2 = S_0^2$	100
Среднее квадратическое отклонение $S_Y$	10
Средняя квадратическая ошибка в определении коэффициентов $S_{\{b_i\}}$	5

Сравниваем расчетный критерий Стьюдента с табличными значениями (таблица 4.7) и результаты заносим в таблицу 4.8.

Таблица 4.7 – Значения критерия Стьюдента ( $t$ -критерия) для  $\alpha = 0,95$ 

Число измерений $n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число степеней свободы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Критерий Стьюдента	12,71	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23

Продолжение таблицы 4.7

Число измерений $n$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30–120
Число степеней свободы	11	12	13	14	15	16	17	18	19	29–119
Критерий Стьюдента	2,20	2,18	2,16	2,16	2,13	2,12	2,11	2,10	2,09	2,0

Таблица 4.8 – Анализ коэффициентов уравнения (4.20)

Параметры	Коэффициент уравнения			
	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_{12}$
Значения до анализа	658	-66,3	-36,3	8,75
Ошибка в определении коэффициентов уравнения	5	5	5	5
Расчетное значение критерия Стьюдента	131,6	13,26	7,26	1,75
Табличное значение критерия Стьюдента: $n_0 = 3$ ; $f = 2$	4,3	4,3	4,3	4,3
Значимость коэффициентов	658	-66,3	-36,3	0,00

Поскольку  $t_{p12} = 1,75$ ,  $t_p = 4,3$ ,  $1,75 < 4,3$ , то  $b_{12} = 0$ .

Таким образом, окончательное (уточненное) уравнение для описания модели

$$Y = 658 - 66,3x_1 - 36,3x_2. \quad (4.21)$$

Отрицательные значения коэффициентов  $b_1$  и  $b_2$  свидетельствуют о том, что увеличение значения углов уменьшает тангенциальную составляющую  $P_z$  силы резания. Поскольку коэффициент  $|b_1| > |b_2|$ , то изменение переднего угла в большей степени влияет (уменьшает) на величину силы  $P_z$ .

*Проверка уравнения (4.21) на адекватность.*

После отбрасывания ряда коэффициентов (в данном случае одного) необходимо оценить приемлемость полученного уравнения от уравнения, когда



были бы сохранены все коэффициенты, т. е. установить адекватность модели.

Для этого в каждом опыте рассчитывают по полученному уравнению величину отклика и находят квадрат разности рассчитанного значения отклика от фактического.

Определяют дисперсию адекватности по формуле (4.16):

$$S_{a\hat{d}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_u - \hat{Y}_{up})^2}{f_{a\hat{d}}},$$

где  $Y_u$  – значение критерия оптимизации (эксперимент);

$\hat{Y}_{up}$  – расчетное число критерия оптимизации (по полученному уравнению (4.21));

$f_{a\hat{d}}$  – число степеней свободы для линейной модели при оценке дисперсии адекватности по формуле (4.17).

В данном случае  $f_{a\hat{d}} = 4 - (2 + 1) = 1$ .

Используя результаты экспериментов (см. таблицу 4.4), составляем таблицу 4.9 для расчета дисперсии адекватности  $S_{a\hat{d}}^2$ .

Таблица 4.9 – Проверка пригодности уравнения

Номер опыта	Полученный результат		$Y_u - \hat{Y}_{up}$	$(Y_u - \hat{Y}_{up})^2$
	Опытный $Y_u$	Рассчитанный $\hat{Y}_{up}$		
1	565	555	10	100
2	680	688	8	64
3	620	628	8	64
4	770	760,6	9,4	88,3
5	640	658	18	324
6	650	658	8	64
7	660	658	2	4

$\sum 708,3$

Определяем дисперсию адекватности:

$$S_{a\hat{d}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_u - \hat{Y}_{up})^2}{f_{a\hat{d}}} = \frac{708,3}{1} = 708,3.$$

По таблице А.2 находим, что при числе степеней свободы  $f_{a\hat{d}} = 1$  большей дисперсии  $S_{a\hat{d}}^2$  и числе степеней свободы  $f = 2$  меньшей дисперсии  $S_{\bar{Y}}$  табличное значение критерия Фишера равно 19,51.

Расчетное значение критерия Фишера

$$F_p = \frac{S_{ay}^2}{S_{\bar{y}}^2}; \quad S_{\bar{y}}^2 = 100;$$

$$F_p = \frac{708,3}{100} = 7,08.$$

Поскольку  $F_p = 7,08$ ,  $F_T = 19,51$ ,  $7,08 < 19,51$ , то уравнение (4.21) адекватно.

Осуществим замену в уравнении (4.21) кодированных величин на именованные, используя выражение (4.4):

$$X_1 = \frac{\gamma_3 - 5}{5}; \quad X_2 = \frac{\alpha_3 - 6}{6}.$$

После подстановки кодированных величин в уравнение (4.21) получим

$$P_z = 760 - 13,26\gamma_3 - 6,05\alpha_3.$$

Таким образом, увеличение переднего угла  $\gamma_3$  приводит к большему уменьшению тангенциальной составляющей  $P_z$  силы резания, чем увеличение заднего угла  $\alpha_3$ .

### Задание 1

Определить зависимость радиальной составляющей  $P_y$  силы резания от изменения переднего  $\gamma_3$  и заднего  $\alpha_3$  углов призматического резца. Режимы обработки: скорость резания  $V = 100$  м/мин, подача  $S = 0,4$  мм/об, глубина резания  $t = 0,8$  мм. Интервалы изменения углов взять из таблицы 4.3. При проведении экспериментов (см. таблицу 4.4) имеем следующие значения радиальной составляющей  $P_y$  силы резания от углов  $\gamma_3$  и  $\alpha_3$  заточки резца (таблица 4.10).

Таблица 4.10 – Результаты эксперимента

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7
$Y_u(P_y)$ , Н	376	453	413	513	427	433	440

Содержание отчёта.

- 1 Расчёт коэффициентов уравнения регрессии для двух факторов.
- 2 Проверка уравнения первой степени на адекватность.

### Контрольные вопросы

- 1 Как определяется число опытов при ПФЭ?
- 2 Что определяет знак коэффициента в уравнении регрессии?



## 5 Методика получения зависимости степенного вида

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта коэффициентов уравнения регрессии степенного вида и сделать проверку его на адекватность.

При исследовании процессов резания многие зависимости традиционно представляют уравнениями степенного вида.

Например, зависимость составляющих силы резания от элементов режима резания часто выражают уравнением

$$P = CS^x t^y V^z. \quad (5.1)$$

После логарифмирования уравнения (5.1) имеем линейную модель

$$\lg P = \lg C + x \lg S + y \lg t + z \lg V. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) можно выразить следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad (5.3)$$

где  $\lg P, x_1, x_2, x_3$  – кодированные значения  $S, t, V$ .

Кодированное значение  $x_i$  фактора определяется по выражению

$$x_i = \frac{2(\lg \tilde{x}_i - \lg \tilde{x}_{\text{вп}})}{\lg \tilde{x}_{\text{вп}} - \lg \tilde{x}_{\text{ин}}} + 1, \quad (5.4)$$

где  $x_i$  – кодированное значение  $i$ -го фактора;

$\tilde{x}_i$  – натуральное значение  $i$ -го фактора;

$\tilde{x}_{\text{вп}}$  – натуральное значение верхнего уровня  $i$ -го фактора;

$\tilde{x}_{\text{ин}}$  – натуральное значение нижнего уровня  $i$ -го фактора.

Для оценки коэффициентов уравнения (5.3) удобно использовать результаты многофакторного эксперимента. При этом результаты опытов обычно представляют полиномом вида

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (5.5)$$

Используя методику (4.2) для данного случая, рассмотрим на конкретном примере функцию отклика в виде полинома первой степени для трех факторов (5.5).

Рассмотрим определения зависимости тангенциальной составляющей  $P_z$  силы резания от режимов обработки, подачи  $S$ , глубины резания  $t$  и скорости резания  $V$ .

Устанавливаем уровни и интервалы варьирования факторов после анализа литературных данных (таблица 5.1).



Таблица 5.1 – Уровни и интервалы варьирования факторов

Фактор	Кодовое обозначение	Интервал варьирования	Уровень варьирования		
			-1	0	+1
Подача $S$ , мм/об	$x_1$	0,15	0,35	0,5	0,65
Глубина резания $t$ , мм	$x_2$	0,15	0,35	0,5	0,65
Скорость резания $V$ , м/с	$x_3$	1,0	3	4	5

Кодированные значения факторов  $x_1, x_2, x_3$  будут равны единице – на верхнем уровне, нулю – на основном уровне и минус единице – на нижнем уровне при натуральных значениях факторов, указанных в таблице 5.1.

Кодированные значения факторов определяются по выражению (5.4):

$$x_1 = \frac{2(\lg S - \lg 0,65)}{\lg 0,65 - \lg 0,35} + 1 = \frac{2(\lg S + 0,187)}{0,2688} + 1; \quad (5.6)$$

$$x_2 = \frac{2(\lg t - \lg 0,65)}{\lg 0,65 - \lg 0,35} + 1 = \frac{2(\lg t + 0,187)}{0,2688} + 1;$$

$$x_3 = \frac{2(\lg V - \lg 5)}{\lg 5 - \lg 3} + 1 = \frac{2(\lg V + 0,7)}{0,222} + 1.$$

Для проведения опытов составляем матрицу планирования и рабочую матрицу. Составляем таблицу 5.2, используя таблицу 5.1.

Таблица 5.2 – Матрица планирования и рабочая матрица

Номер опыта	Матрица планирования								Рабочая матрица			Результат $y_u / \lg y_u$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$S$ , мм/об	$t$ , мм	$V$ , м/с	
1	+	+	+	+	+	+	+	+	0,65	0,65	5	1096/3,04
2	+	-	+	+	-	-	+	-	0,35	0,65	5	646/2,81
3	+	+	-	+	-	+	-	-	0,65	0,35	5	631/2,8
4	+	-	-	+	+	-	-	+	0,35	0,35	5	380/2,58
5	+	+	+	-	+	-	-	-	0,65	0,65	3	660/2,82
6	+	-	+	-	-	+	-	+	0,35	0,65	3	398/2,6
7	+	+	-	-	-	-	+	+	0,65	0,35	3	380/2,58
8	+	-	-	-	+	+	+	-	0,35	0,35	3	229/2,36

Значения коэффициентов в уравнении (5.5) находили по формулам (4.7) и (4.8).

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_1^N x_0 y_u; \quad b_i = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i y_u; \quad b_{ii} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i y_i y_u, \quad (5.7)$$

где  $N$  – число опытов,  $N = 8$ .



$$b_0 = \frac{1}{8}(3,04 + 2,81 + 2,8 + 2,58 + 2,82 + 2,6 + 2,58 + 2,36) = \frac{21,59}{8} \approx 2,7;$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(3,04 - 2,81 + 2,8 - 2,58 + 2,82 - 2,6 + 2,58 - 2,36) = \frac{0,89}{8} \approx 0,11;$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(3,04 + 2,81 - 2,8 - 2,58 + 2,82 + 2,6 - 2,58 - 2,36) = \frac{0,95}{8} \approx 0,12;$$

$$b_3 = \frac{1}{8}(3,04 + 2,81 + 2,8 + 2,58 - 2,82 - 2,6 - 2,58 - 2,36) = \frac{0,88}{8} \approx 0,11;$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}(3,04 - 2,81 - 2,8 + 2,58 + 2,82 - 2,6 - 2,58 + 2,36) = 0,00125;$$

$$b_{13} = \frac{1}{8}(3,04 - 2,81 + 2,8 - 2,58 - 2,82 + 2,6 - 2,58 + 2,36) = \frac{0,01}{8} = 0,00125;$$

$$b_{23} = \frac{1}{8}(3,04 + 2,81 - 2,8 - 2,58 - 2,82 - 2,6 + 2,58 + 2,36) = -0,00125;$$

$$b_{123} = \frac{1}{8}(3,04 - 2,81 - 2,8 + 2,58 - 2,82 + 2,6 + 2,58 - 2,36) = 0,00125.$$

Получили следующее уравнение:

$$y = 2,7 + 0,11x_1 + 0,12x_2 + 0,11x_3 + 0,00125x_1x_2 + 0,00125x_1x_3 - \\ - 0,00125x_2x_3 + 0,00125x_1x_2x_3. \quad (5.8)$$

Дисперсию  $S_y^2$  параметра оптимизации (4.10) вычисляли по результатам четырех опытов в центре плана:  $S = 0,5$  мм/об,  $t = 0,5$  мм,  $V = 4$  м/с. Результаты опытов представлены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 – Вспомогательная таблица для расчета  $S_y^2$

Номер опыта	$y_u$	$\bar{y}_u$	$y_u - \bar{y}$	$(y_u - \bar{y})^2$	$S_y^2$
1	2,73	$\frac{\sum_{u=1}^4 y_u}{4} = 2,745$	0,015	$\frac{2,25}{104}$	$\frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1} = \frac{5,5}{10^4 \cdot 3} = \frac{1,83}{10^4}$
2	2,75		0,005	$\frac{2,5}{10^5} = \frac{0,25}{10^4}$	
3	2,74		0,005	$\frac{0,25}{104}$	
4	2,76		0,015	$\frac{2,25}{10^4}$	
$\sum_{u=1}^4 y_u = 10,98$			$\sum_{u=1}^4 (y_u - \bar{y})^2 = \frac{5,5}{10^4}$	$n_0$ – ЧИСЛО ОПЫТОВ В центре плана	



Определяем дисперсию коэффициентов регрессии по формуле (4.12):

$$S^2(b_i) = \frac{S_y^2}{N} = \frac{1,83}{10^4 \cdot 8} = \frac{0,22875}{10^4}.$$

Доверительный интервал коэффициентов находим по формуле (4.14):

$$\Delta b_i = \pm t S(b_i) = \pm 3,18 \sqrt{\frac{0,22875}{104}} = \pm \frac{0,4782}{10^2} \cdot 3,18 = \pm \frac{1,52}{100} = \pm 0,0152,$$

где  $t$  – табличное значение критерия Стьюдента, равное  $t = 3,18$  при 5-процентном уровне значимости и числе степеней свободы  $f = n_0 - 1 = 4 - 1 = 3$  (см. таблицу 4.7).

Коэффициенты уравнения (5.8), которые меньше доверительного интервала  $b_i < \Delta b_i$ , являются незначимыми, т. е. равными нулю. Тогда уравнение (5.8) примет следующий вид:

$$y = 2,7 + 0,11x_1 + 0,12x_2 + 0,11x_3. \quad (5.9)$$

Для проверки гипотезы адекватности модели, представленной уравнением (5.9), находим дисперсию адекватности:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{f_{ad}}, \quad (5.10)$$

где  $y_i$  – экспериментальное значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте;

$\hat{y}_i$  – значение параметра оптимизации в  $j$ -м опыте, определяется по формуле (5.9);

$f_{ad}$  – число степеней свободы.

$$f_{ad} = N - (k + 1) = 8 - (3 + 1) = 4, \quad (5.11)$$

где  $k$  – число факторов,  $k = 3$ .

Для вычисления суммы, входящей в выражение (5.10), составляем вспомогательную таблицу 5.4. Дисперсию адекватности определяем по формуле (5.10):

$$S_{ad}^2 = \frac{2}{10^4 \cdot 4} = \frac{0,5}{10^4} \quad (f_{ad} = 4).$$

Дисперсия воспроизводимости равна по таблице 5.3 выражению

$$S_y^2 = \frac{1,83}{10^4} \quad (f = 3).$$



Проверку гипотезы адекватности модели (5.9) проводили по  $F$ -критерию Фишера (см. формулы (4.18) и (4.19)).

$$F_p = \frac{S_{\bar{y}}^2}{S_{ad}^2} = \frac{1,83}{0,5} = 3,66.$$

Таблица 5.4 – Вспомогательная таблица для расчета  $S_{ad}^2$

Номер опыта	$y_i$	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	3,04	3,04	0	0
2	2,81	2,82	0,01	0,0001
3	2,8	2,81	-0,01	0,0001
4	2,58	2,58	0	0
5	2,82	2,82	0	0
6	2,6	2,6	0	0
7	2,58	2,58	0	0
8	2,36	2,36	0	0

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{2}{10^4}$$

При 5-процентном уровне значимости и числах свободы для числителя  $f_1 = 3$  и знаменателя  $f_2 = 4$  табличное значение критерия Фишера  $F_T = 6,59$ . Так как  $F_p = 3,66$ ,  $F_T = 6,59$ ,  $3,66 < 6,59$ , то модель, представленная уравнением (5.9), адекватна.

Для перехода от кодированных значений факторов к натуральным в уравнении (5.9) подставляем значения факторов  $x_1, x_2, x_3$  по выражению (5.6). В результате определили

$$\lg P_z = 2,3263 + 0,82 \lg S + 0,89 \lg t + 0,1 \lg V.$$

После потенцирования получим силу

$$P_z = 212 S^{0,82} \cdot t^{0,89} \cdot V^{0,1}. \quad (5.12)$$

### Задание 1

Определить зависимость радиальной составляющей  $P_y$  силы резания от режимов обработки: подачи  $S$ , глубины резания  $t$ , скорости резания  $V$ . Уровни и интервалы варьирования факторов взять из таблиц 5.1 и 5.2. При проведении экспериментов получили следующие значения силы  $P_y$  (таблица 5.5).

При обработке на режимах, соответствующих центру плана (на нулевом уровне), получили следующие значения силы  $P_y$  (таблица 5.6).





Таблица 5.5 – Значения силы  $P_y$ 

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_y$ , Н	230	158	132	91	268	185	154	106

Таблица 5.6 – Значения силы  $P_y$  на нулевом уровне

Номер опыта	1	2	3	4
$P_y$ , Н	166	172	162	164

Содержание отчёта.

- 1 Расчёт коэффициентов уравнения линейной модели для трёх факторов.
- 2 Проверка уравнения на адекватность.
- 3 Переход от нормированных значений факторов к натуральным.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Каким образом уравнения степенного вида преобразуются в линейную модель?
- 2 Какие значения имеет расчёт доверительного интервала коэффициентов?
- 3 Что такое потенцирование?

## **6 Методика исследований получения полинома второй степени в зависимости от входных параметров**

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта уравнения второй степени от входных параметров: скорости резания и глубины резания.

Планирование второго порядка используют на практике в тех случаях, когда линейного приближения недостаточно для математического описания результатов исследований с нужной точностью. В итоге возникает необходимость в построении модели в виде полинома второй степени.

Если из литературных источников известно, что зависимость – функция отклика – аппроксимируется полиномом второго порядка без влияния смешанных факторов. Тогда:

– для двух факторов имеем уравнение

$$y = b_0 + bx_1 + b_1x_2 + ax_1^2 + a_1x_2^2 ; \quad (6.1)$$

– для трех факторов

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2. \quad (6.2)$$



Последовательность построения математической модели представлена в разд. 4.

Особенности планирования второго порядка рассмотрим на конкретном примере.

**Пример** – Необходимо определить величину тангенциальной составляющей силы резания  $P_z$  призматического резца от глубины резания  $t$  и скорости резания  $V$ .

После анализа литературных данных убеждаемся, что отсутствует влияние произведения факторов на функцию отклика или их влияние незначительно, что им можно пренебречь.

После анализа литературных данных выбираем интервалы и уровни варьирования факторов (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Уровни и интервалы варьирования факторов ( $S = 0,5$  мм/об)

Фактор	Код	Интервал варьирования	Уровень варьирования		
			-1	0	+1
Глубина резания $t$ , мм	$x_1$	0,5	0,5	1,0	1,5
Скорость резания $V$ , м/мин	$x_2$	40	120	160	200

Составляем матрицу экспериментов и результаты экспериментальных данных заносим в таблицу 6.2.

На основании таблицы 6.2 составляем уравнения второго порядка (6.1) для двух факторов.

$$446 = a \cdot 0,5^2 + b \cdot 0,5 + c_1; \quad (6.3)$$

$$833 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c_1;$$

$$1200 = a \cdot 1,5^2 + b \cdot 1,5 + c_1. \quad (6.4)$$

Таблица 6.2 – Результаты экспериментальных данных

Номер опыта	$x_1$ ( $t$ , мм)	$x_2$ ( $V$ , м/мин)	$Y_1(P_z, H)$ , мкм	Подача $S$ , мм/об
1	0,5	160	446	0,5
2	1,0		833	
3	1,5		1200	
4	1,0	120	1374	
5		160	833	
6		200	583	

Решая совместно два верхних (6.3), а затем два нижних (6.4) путём вычитания нижнего из верхнего, получим следующие уравнения:



$$\begin{aligned} -387 &= -0,75a - 0,5b; \\ -367 &= -1,25a - 0,5b, \end{aligned} \quad (6.5)$$

решая которые, имеем  $a = -40$ ;  $b = 834$ .

Таким образом, можно записать

$$P_z = -40t^2 + 834t + C_1.$$

Основываясь на результатах опытов 4, 5 и 6 (см. таблицу 6.2), можно составить следующие уравнения:

$$1374 = a_1 \cdot 120^2 + b_1 \cdot 120 + c_2; \quad (6.6)$$

$$833 = a_1 \cdot 160^2 + b_1 \cdot 160 + c_2;$$

$$583 = a_1 \cdot 200^2 + b_1 \cdot 200 + c_2. \quad (6.7)$$

Решая совместно вначале два первых (6.6), а затем два вторых (6.7), как и в предыдущем случае, получим два следующих равенства:

$$541 = -11200a_1 - 40b_1; \quad (6.8)$$

$$250 = -14400a_1 - 40b_1,$$

решая которые, имеем  $a_1 = 0,091$ ;  $b = -39,0$ .

Тогда можно записать

$$P_z = 0,091V^2 - 39V + C_2. \quad (6.9)$$

Поскольку в центре плана для двух вариантов имеем одинаковые условия эксперимента, то составим уравнение для центра плана:

$$P_z = -40t^2 + 834t + 0,091V^2 - 39V + b_0 = 833.$$

После подстановки величин  $t = 1,0$  мм,  $V = 160$  м/мм получим значение  $b_0 = 3950$  (есть и другие способы получения значения  $b_0$ ).

Теперь можно написать уравнение отклика при изменении  $t$  и  $V$  в пределах проведения экспериментов:

$$P_z = -40t^2 + 834t + 0,091V^2 - 39V + 3950. \quad (6.10)$$



### Задание 1

Необходимо определить величину тангенциальной силы резания  $P_z$  призматического резца от подачи  $S$  и скорости резания  $V$ . Значения величин подачи  $S$ , скорости  $V$  и результаты экспериментов представлены в таблице 6.3.

Таблица 6.3 – Результаты экспериментальных данных

Номер опыта	$x_1$ ( $S$ , мм/об)	$x_2$ ( $V$ , м/мин)	$Y_1(P_z, H)$	$t$ , мм
1	0,1	160	250	1,0
2	0,5		833	
3	0,9		1200	
4	0,5	120	1100	
5		160	833	
6		200	600	

Содержание отчёта.

1 Расчёт коэффициентов полинома второй степени от скорости и глубины резания.

#### Контрольные вопросы

1 Как влияют скорость и глубина резания на тангенциальную силу резания?

2 Что означает знак при коэффициентах глубины резания и скорости резания?

### 7 Оценка точности обработки по методу Гаусса, Симпсона и равной вероятности

**Цель работы:** приобрести навыки расчёта величины случайных погрешностей в случае их нормального распределения.

Оценку качества продукции, или оценку точности технологических операций, наиболее часто проводят методами статистического анализа. Существует ряд законов, которым подчиняются случайные погрешности, возникающие в процессе механической обработки деталей.

*Закону нормального распределения (закон Гаусса)* подчиняются все случайные величины, на которые оказывает влияние большое число факторов. Как правило, этот закон оказывается справедлив при механической обработке заготовок с точностью 8–10-го квалитетов и грубее. При более точной обработке распределение размеров в большинстве случаев подчиняется другим законам: закону Симпсона (закон равнобедренного треугольника), закону равной



вероятности, закону эксцентриситета (Релея, Масквелла), закону модуля разности. Во многих случаях опытные кривые распределения близки к теоретическим кривым нормального распределения (кривым Гаусса).

Статистическая оценка точности деталей позволяет управлять технологическими процессами их изготовления, то есть управлять влиянием случайных погрешностей на точность обработки.

Основными характеристиками любого закона распределения параметров техпроцесса являются среднее значение  $\bar{X}$  и среднее квадратическое отклонение  $S$ . Рассмотрим, как, имея эти характеристики, сделать заключение о точности той или иной операции по количеству вероятного брака. Среднее значение  $\bar{X}$  является центром группирования исследуемого параметра, а среднее квадратическое отклонение  $S$  характеризует размах (рассеяние) данного параметра. При этом поле рассеяния контролируемого параметра определяется соотношением

$$\omega = l \cdot S, \quad (7.1)$$

где  $l$  – коэффициент, зависящий от закона распределения значений параметров.

Для закона Гаусса  $l = 6$ ; для закона Симпсона  $l = 4,90$ ; для закона равной вероятности  $l = 3,46$ .

Знание статистических характеристик позволяет в первую очередь определить вероятное количество брака (рисунок 7.1). Брак невозможен в том случае, если допуск какого-либо параметра  $TD$  больше поля рассеяния этого параметра, вызванного действием случайных факторов, т. е.  $TD \geq \omega$ .

Это справедливо только в том случае, если среднее значение  $\bar{X}$  совпадает с серединой поля допуска исследуемого параметра. На практике часто случается, что  $\bar{X}$  не совпадает с серединой поля допуска. Имеет место смещение  $E$ . Тогда, несмотря на то, что  $TD \geq \omega$ , возможно появление как исправимого, так и неисправимого брака, в зависимости от того, положительное или отрицательное это смещение.

В общем случае необходимо анализировать положение середины поля допуска по значениям  $D_{cp}$  и центра группирования  $\bar{X}$ .

Середину поля допуска определяют по предельным размерам деталей –  $D_{max}$  и  $D_{min}$ :

$$D_{cp} = \frac{D_{max} + D_{min}}{2}. \quad (7.2)$$

Центр группирования  $\bar{X}$  (центр распределения) определяют при известных значениях  $E$  и  $D_{cp}$  по соотношению

$$\bar{X} = D_{cp} \pm E. \quad (7.3)$$

В этой зависимости величина  $E$  смещения  $\bar{X}$  от  $D_{cp}$  принимается обязательно с учетом знака.



На рисунке 7.1 показан случай появления брака, когда имеют место как смещение  $E$ , так и невыполнение условия  $TD \geq \omega$ . Это приводит к тому, что количество бракованных изделий справа больше, чем слева. Вся площадь под кривой, ограниченная по оси абсцисс допуском, характеризует собой годные детали.

Процент брака может быть определен как табличным методом [1, 4], так и по формулам

$$q_A = \left[ 0,5 - \Phi \left( \frac{D_{\max} - \bar{X}}{S} \right) \right] \cdot 100 \% ; \quad (7.4)$$

$$q_B = \left[ 0,5 - \Phi \left( \frac{D_{\min} - \bar{X}}{S} \right) \right] \cdot 100 \% , \quad (7.5)$$

где  $q_A$  – вероятный процент брака, исправимого для охватываемых и неисправимого для охватывающих поверхностей;

$q_B$  – вероятный процент брака, исправимого для охватывающих и неисправимого для охватываемых поверхностей.

Если обозначить  $\frac{D_{\max} - \bar{X}}{S} = t$ ,  $\frac{D_{\min} - \bar{X}}{S} = t_1$ , где  $t$  и  $t_1$  – аргументы функции

Лапласа (функции распределения), то можно по таблице А.1 найти значения этой функции  $\Phi(t)$  и определить общий процент бракованных деталей, который определяется суммой

$$Q = q_A + q_B . \quad (7.6)$$

Для законов Симпсона и равной вероятности процент брака нельзя определять с помощью функции Лапласа. В этих случаях величины  $q_A$  и  $q_B$  определяются на основе анализа подобия треугольников и прямоугольников.

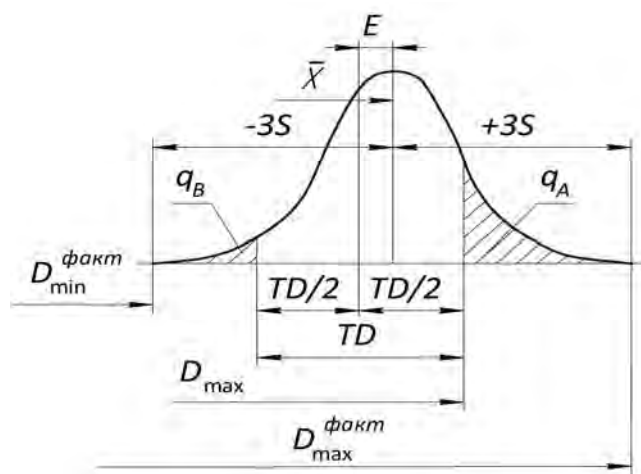


Рисунок 7.1 – Схема для определения вероятного количества брака

**Пример** – Определить число годных деталей, исправимого и неисправимого брака при растачивании отверстий диаметром  $D = 130^{+0,1}$  мм в партии корпусных деталей 200 шт., если среднее квадратическое отклонение  $S = 0,025$  мм и смещения кривой распределения размеров относительно середины поля допуска не происходит (закон Гаусса).

*Решение*

Определим, имеет ли место брак.

Поле рассеяния  $\omega = 6S$ .  $\omega = 6 \cdot 0,025 = 0,15$  мм.  $TD = 0,1$  мм, т. е.  $\omega > TD$ . Брак имеет место, а так как смещения кривой относительно середины поля допуска нет, то  $q_A = q_B$ .

Среднее значение  $\bar{X}$  лежит на середине поля допуска:

$$\bar{X} = D_{\text{cp}} = \frac{D_{\text{max}} + D_{\text{min}}}{2} = \frac{130,1 + 130}{2} = 130,05 \text{ мм.}$$

Следовательно,

$$\Phi(t) = \Phi\left(\frac{130,1 - 130}{0,025}\right) = \Phi(2).$$

По таблице значений функции Лапласа (см. таблицу А.1) находим  $\Phi(2) = 0,4772$ . Тогда  $q_A = (0,5 - 0,4772) \cdot 100 = 2,28$  %.

Аналогично найдем  $\Phi(t_1) = \Phi(2)$ . Значение  $t_1$  принимаем по модулю. Поэтому, как и в предыдущем случае,  $\Phi(2) = 0,4772$ . Тогда  $q_B = (0,5 - 0,4772) \cdot 100 = 2,28$  %.

Таким образом, общий процент брака составит  $q = 2,28 + 2,28 = 4,56$  %.

Для определения количества бракованных деталей составим пропорцию, приняв 200 деталей за 100 %:

$$200 - 100 \%$$

$$q_{A,B} - 4,56 \%$$

$$\text{Отсюда } q_{A,B} = (200 \cdot 4,56) / 100 = 9,12 \text{ деталей.}$$

Количество исправимого брака (определится для внутренних поверхностей показателем  $q_B$ )

$$200 - 100 \%$$

$$q_B - 2,28 \%$$

Следовательно,  $q_B = 4,56$ . Принимаем  $q_B = 5$  деталей.

Количество неисправимого брака (определится для внутренних поверхностей показателем  $q_A$ )

$$200 - 100 \%$$

$$q_A - 2,28 \%$$

Отсюда  $q_A = 5$  деталей.

Окончательно имеем: число годных деталей – 190; неисправимый брак – 5 деталей; исправимый брак – 5 деталей.



### Задание 1

Определить число годных деталей, исправимого и неисправимого брака при обработке партии деталей на настроенном станке, если задано среднее квадратическое отклонение  $S$ , мм, и смещения кривой распределения размеров относительно середины поля допуска (закон Гаусса). Исходные данные приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Задания для статистического анализа точности партии деталей

Номер варианта	Выдерживаемый размер, мм	Величина партии, шт.	Смещение центра группирования $E$ , мм	Среднее квадратическое отклонение $S$ , мм	Вид поверхности
1	40 <sub>-0,16</sub>	400	+0,02	0,05	Вал
2	30 <sub>-0,1</sub>	300	+0,02	0,06	Вал
3	130 <sup>+0,1</sup>	250	-0,02	0,03	Отверстие
4	120 <sup>+0,046</sup>	200	0	0,02	Отверстие
5	30 <sub>-0,15</sub>	450	+0,01	0,05	Вал
6	25 <sub>-0,1</sub>	400	+0,01	0,05	Вал
7	180 <sup>+0,2</sup>	300	-0,005	0,06	Отверстие
8	50 <sub>-0,2</sub>	330	+0,008	0,06	Вал
9	65 <sup>+0,08</sup>	350	-0,04	0,03	Отверстие
10	80 <sup>+0,06</sup>	400	-0,08	0,03	Отверстие

Содержание отчёта.

- 1 Расчёт среднего размера диаметра отверстия корпусной детали.
- 2 Расчёт величины исправимого и неисправимого брака.

### Контрольные вопросы

- 1 Назовите основные характеристики закона распределения по методу Гаусса.
- 2 В каком случае отсутствует погрешность обработки?
- 3 Для какого качества точности справедлив закон Гаусса?





## Список литературы

1 **Горохов, В. А.** Основы экспериментальных исследований и методика их проведения : учебное пособие / В. А. Горохов. – Минск ; Москва : Новое знание ; ИНФА-М, 2016. – 655 с.

2 **Рыжков, И. Б.** Основы научных исследований и изобретательства : учебное пособие / И. Б. Рыжков. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2013. – 224 с.

3 **Шатуров, Д. Г.** Технологические особенности чистовой токарной обработки валов / Д. Г. Шатуров, Г. Ф. Шатуров, А. А. Жолобов. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2015. – 192 с.

4 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технологических систем : учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание, 2013. – 584 с.

5 Справочник технолога-машиностроителя : в 2 т. / Под ред. А. Г. Косиловой, Р. К. Мещерякова. – Москва : Машиностроение, 1985. – Т. 2. – 496 с.



## Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Значение функции Лапласа  $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0909	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1555	1591	1628	1664	1700	1735	1776	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2045	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3551	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4235	4251	4265	4279	4292	4306	4219
1,5	4332	4345	43-57	4370	4382	4394	4405	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4171	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4509	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4945	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4966	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4985	4985	4985	4986	4986
3,0	9865	9869	9874	9878	9882	9886	9889	9893	9896	9900
3,1	9903	9906	9909	9912	9916	9918	9921	9924	9926	9929
3,2	9931	9934	9933	9938	9940	9942	9944	9946	9948	9950



Окончание таблицы А.1

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,3	9952	9954	9955	9957	9958	9960	9961	9962	9964	9965
3,4	9966	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9976

*Примечание* – Значение 0 для  $\Phi_0(z)$  опущено, а для  $z = 3,0\dots 3,9$  опущено 0,4 (помещены десятичные значения, начиная со второго знака после запятой).  
Например:  $z = 3,25$ ;  $\Phi_0(z) = 0,4294$

Таблица А.2 – Значения критерия Фишера ( $F$ -критерия) при доверительной вероятности 0,95

Число степеней свободы для меньшей дисперсии	Число степеней свободы для большей дисперсии					
	1	2	3	4	5	6
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28

Таблица А.3 – Значения вероятностей  $S_n(t_c)$  для распределения Стьюдента

$t_c$	$n_1$									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
2,0	0,852	0,908	0,930	0,942	0,949	0,954	0,957	0,960	0,962	0,965
2,2	0,864	0,921	0,942	0,954	0,960	0,965	0,968	0,970	0,972	0,975
2,4	0,874	0,931	0,952	0,963	0,969	0,973	0,976	0,978	0,980	0,982
2,6	0,883	0,938	0,960	0,970	0,976	0,980	0,982	0,984	0,986	0,988
2,8	0,891	0,946	0,966	0,976	0,981	0,984	0,987	0,988	0,990	0,991
3,0	0,898	0,952	0,971	0,980	0,985	0,988	0,990	0,992	0,992	0,994

