

УДК 531

Л. Л. Сотник, С. И. Русан, Л. А. Сиваченко

## ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ЭКСЦЕНТРИКОМ

UDC 531

L. L. Sotnik, S. I. Rusan, L. A. Sivachenko

## STUDY OF THE INTERACTION OF THE MATERIAL POINT WITH A CYLINDRICAL ECCENTRIC

### Аннотация

Приведены результаты исследования взаимодействия материальной точки с цилиндрическим эксцентриком. Проведен анализ уравнений движения точки. Определены параметры скорости и ускорения материальной точки и выполнен их анализ. Исследована сила инерции материальной точки. Проанализированы особенности взаимодействия точки с ребристым эксцентриковым валком.

### Ключевые слова:

материальная точка, скорость, ускорение, сила инерции, эксцентрик, валок.

### Abstract

The results of studying the interaction of the material point with a cylindrical eccentric are presented. An analysis of the equations of the point motion was carried out. Parameters of the velocity and acceleration of the material point were determined and their analysis was performed. The force of inertia of the material point was investigated. The interaction of the point with a ribbed eccentric roller was analyzed.

### Key words:

material point, velocity, acceleration, force of inertia, eccentric roller.

### Введение

Скоростные потоки движения материалов при их дроблении в эксцентриковых валках оказывают существенное влияние не только на величину сдвиговых деформаций, но и на выходные показатели процесса в целом. Поэтому анализ скоростей и ускорений, возникающих в процессе измельчения, является актуальной задачей.

Под эксцентриком (рис. 1) будем понимать цилиндр, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O$ , что не совпадает с его геометрической осью  $O_1$ . Расстояние  $e$  между осями  $O$  и  $O_1$  будем называть эксцентриситетом. Материальной точкой в исследовании моделирует-

ся твердое тело малых размеров, которое выполняет поступательное движение.

Результаты исследования могут быть использованы при проектировании объектов техники, предназначенных, в частности, для дробления материалов. Один из таких объектов описан в [1–5].

### Основная часть

*Вывод уравнения движения точки  $M$ .* Предположим, что в начальном положении  $M_0$  точка соприкасается с цилиндром. При повороте цилиндра на угол  $\varphi$  точка удаляется от оси  $O$  по горизонтальному диаметру  $d-d$  в произвольное положение  $M$ , определяемое координатой  $x = OM$  (рис. 2), где



$OM = OM_1$ . Найдем  $x$ . Согласно рис. 2 получаем

$$M_1M' = x \sin \varphi; \quad M_1M' = r \sin \varphi_1; \quad (1)$$

$$O_1M' = r \cos \varphi_1; \quad O_1M' = x \cos \varphi + e. \quad (2)$$

Отбросим левые части равенств (1) и (2):

$$r \sin \varphi_1 = x \sin \varphi;$$

$$r \cos \varphi_1 = x \cos \varphi + e. \quad (3)$$

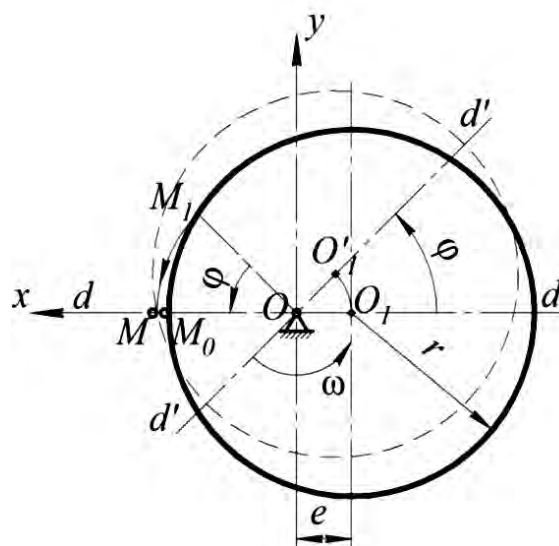


Рис. 1. Схема сечения вала

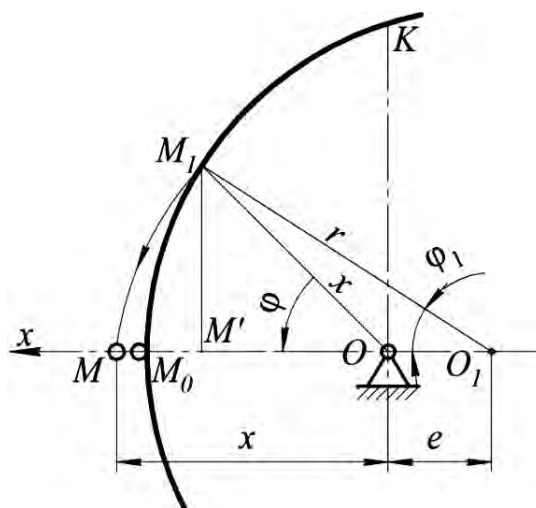


Рис. 2. Схема для определения уравнения движения  $x(\varphi)$

Возведем в квадрат левые и правые части соотношений (3) и сложим результат:

$$\begin{aligned} r^2(\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) &= \\ &= x^2 \sin^2 \varphi + (x \cos \varphi + e)^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x^2 \sin^2 \varphi + x^2 \cos^2 \varphi + 2x \cos \varphi e + e^2 = r^2$$

или

$$x^2 + bx - c = 0, \quad (4)$$



где  $b = 2e \cos \varphi$ ;  $c = r^2 - e^2$ .

Реальный корень уравнения (4)

$$x = x_1 = -e \cos \varphi + \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + c}.$$

Приведем его к следующему виду:

$$x = -e \cos \varphi + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (5)$$

*Определение скорости и ускорения движения точки.* Получив уравнение движения (5), по формулам кинематики  $v = \dot{x}$ ,  $a = \dot{v} = \ddot{x}$  находим его скорость  $v$  и ускорение  $a$ .

Поскольку эксцентрик вращается равномерно, то в формуле (5)  $\varphi = \omega t$ . Определим

$$\begin{aligned} v &= e\omega \sin \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 2e^2 \omega \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= e\omega \sin \varphi - \frac{e^2 \omega \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$v = e\omega \sin \varphi \left( 1 - \frac{e \cos \varphi}{\sqrt{z}} \right). \quad (6)$$

Аналогично, путем дифференцирования функции  $v$ , находим

$$a = \frac{e\omega^2 (4 \cos \varphi z \sqrt{z} - 4e \cos 2\varphi z - e^3 \sin^2 2\varphi)}{4z\sqrt{z}}, \quad (7)$$

где  $z = r^2 - e^2 \sin^2 \varphi$ .

*Анализ скорости точки.* Траекторией движения точки  $M$  по уравнению (5) является отрезок оси  $Ox$  длиной  $2e$ . Исследуем скорость движения. Сначала найдем ее максимальное значение. Для этого проведем исследование функции (6) на экстремум. Как видно из соответствующей формулы, она представляет собой произведение двух

множителей ( $v = f_1(\varphi) \cdot f_2(\varphi)$ ) и достигает наибольшей величины при том значении  $\varphi = \varphi_k$ , при котором каждый из множителей,  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$ , принимает максимум (при общем  $\varphi_k$ ).

Исследуем доминирующий множитель  $f_1(\varphi) = e\omega \sin \varphi$ .

Находим производную:

$$\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = e\omega \cos \varphi;$$

приравниваем ее к нулю:

$$e\omega \cos \varphi_k = 0.$$

Отсюда  $\varphi_k = \pi/2$ .

Определяем характер экстремума:

$$\frac{d^2 f_1(\varphi)}{d\varphi^2} = -e\omega \sin \varphi < 0.$$

Приходим к выводу: при  $\varphi = \pi/2$  множитель  $f_1(\varphi)$  принимает максимальное значение (при общем  $\varphi_k$ ). Легко убедиться, что при этом и функция  $f_2(\varphi_k) = f_2(\pi/2) = 1$ , т. е. достигает максимума. Таким образом,  $v_{\max} = v(\pi/2)$ .

По формуле (6) находим  $v_{\max} = e\omega$ . Соответствующая координата точки  $M$   $x(\pi/2) = \sqrt{r^2 - e^2} = OK$  (см. рис. 2). Подчеркиваем, что здесь проведено приближенное исследование на экстремум по доминирующему множителю  $f_1(\varphi)$ . Результат уточним при построении графиков.

Построим график изменения скорости  $v(\varphi)$  на интервале  $\varphi = (0 \dots \pi)$  радиан. Чтобы придать ему обобщенный вид (без конкретизации в числах геометрических параметров эксцентрика), приводим уравнение (6) к следующему виду:

$$v = \mu r \omega \sin \varphi \left( 1 - \frac{\mu \cos \varphi}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \varphi}} \right),$$

где  $\mu = \frac{e}{r}$ .

Построенный график скорости при  $\mu = 0,1$  показан на рис. 3, а. Левая его часть, что начинается от  $\varphi = \pi/2$ , будет соответствовать реальному движению точки при условии, что она продолжает оставаться в контакте с эксцентриком.

Это возможно при наличии сдерживающего сопротивления движению. Свободная же материальная точка, достигнув скорости  $v_{\max}$ , отделяется от эксцентрика и продолжает свое движение уже по инерции со скоростью  $v = v_{\max}$ . Соответствующий участок графика скорости показан на рис. 3, а пунктиром. Естественно, что ускорение на этом участке равно нулю.

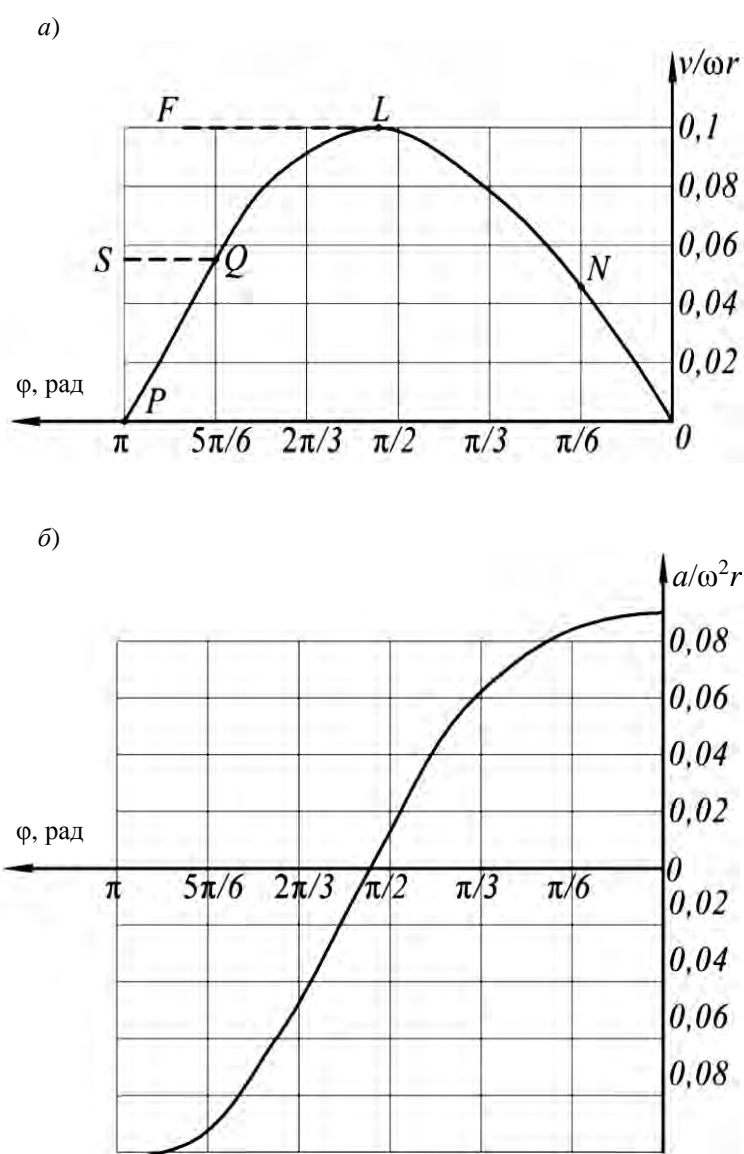


Рис. 3. График скорости (а) и ускорения (б) точки М



Ранее исследовалось движение точки  $M$  с начального положения  $M_0$ , где она находится на минимальном расстоянии  $OM_0$  от оси вращения эксцентрика. Найденные и описанные для нее кинематические характеристики справедливы и для любой другой точки, находящейся на окружности радиусом  $OM_0$ .

Представим, что точка  $M$  при  $\varphi = 0$  находится на расстоянии  $OM > OM_0$ . Тогда поверхность эксцентрика при вращении достигнет точки  $M$  только после поворота на некоторый угол  $\varphi$ , и контакт с ним начнется ударом. Его эффект зависит от физических свойств материалов эксцентрика и точки  $M$ . Если допустить, что точка  $M$  дальше не отделяется от эксцентрика, то его скорость будет определяться частью построенного графика. Например, как эксцентрик достигнет точки  $M$  при  $\varphi = \pi/6$ , то его скорости соответствует участок  $NL$ , далее –  $LF$  или  $LP$  (см. рис. 3, *a*). Если соприкосновение состоится при  $\varphi = 5\pi/6$ , то движение будет определяться графиком  $QS$  или  $QP$ .

*Ускорение точки и сила инерции.* Для вычисления ускорения используем формулу (7) и введенные соотношения  $\mu$ . Тогда в формуле (7)  $e = \mu r$ ,  $z = (1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)r^2$ . Соответствующий формуле график представлен на рис. 3, *б*. Как и для скорости, левая часть графика ускорения (где оно отрицательное) соответствует реальному положению точки только при условии, что во время движения она остается в контакте с цилиндром. При отсутствии контакта точка движется равномерно (по инерции).

Из курса физики известно, что при неравномерном движении точки массы  $m$  возникает сила инерции  $\vec{F}_i = -m\vec{a}$  в направлении, противоположном ускорению. Характер изменения силы  $F_i$  описывается тем же графиком, что и

ускорение  $a$ . Сила инерции приложена к эксцентрику. По аксиоме о равенстве действия и противодействия такая же реактивная сила  $R$  со стороны эксцентрика приложена и к точке  $M$ .

*Особенности взаимодействия пункта с ребристым эксцентриком.* Для более активного взаимодействия цилиндра с материальной точкой на его поверхности вдоль образующих могут устанавливаться выступы – ребра, которые имеют форму стержней. На рис. 4 в поперечном сечении цилиндра схематично показаны ребра 1, 2, 3, 4; их расстояния от оси вращения обозначены буквами  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ . Будем считать, что материальная точка  $M$  свободна и ее движение определяется силами взаимодействия с цилиндром и силой тяжести  $p$  (ранее предполагалось, что сила тяжести точки уравнивается связью).

Вначале точка неподвижна и находится в четверти  $xOy$  вертикальной плоскости. Захваченная ребром 1, она приобретает скорость  $v_1 = \omega\rho_1$  и ускорение  $a_1 = \omega^2\rho_1$ . Под действием центростремительной силы  $F_1 = ma_1$  материальная точка соскальзывает с ребра 1 и попадает на участок 1–2 поверхности цилиндра и затем на ребро 2; а может попасть и сразу на участок 2–3 и ребро 3 – это зависит от величины  $\omega$ , длин участков и других факторов. Последним выступом, с которым соприкасается материальная точка, может быть (но не обязательно) ребро 4. Далее она движется только под действием силы тяжести  $p$ .

Пусть в момент ухода из ребра 4 точка  $M$  займет положение  $M_0$  (см. рис. 4) с координатами  $x_0, y_0$  на расстоянии  $\rho_4 = r + e$  от оси вращения. Величина ее скорости в этот момент  $v_0 = \omega\rho_1$ . Уравнение параболы, которую описывает затем материальная точка, определяется из системы дифференциальных уравнений  $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g$  с начальными условиями  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0$ ,

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Скорость и ускорение точки в произвольном положении

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad a = a_y = -g,$$

где  $v_x = \dot{x}$ ;  $v_y = \dot{y}$ .

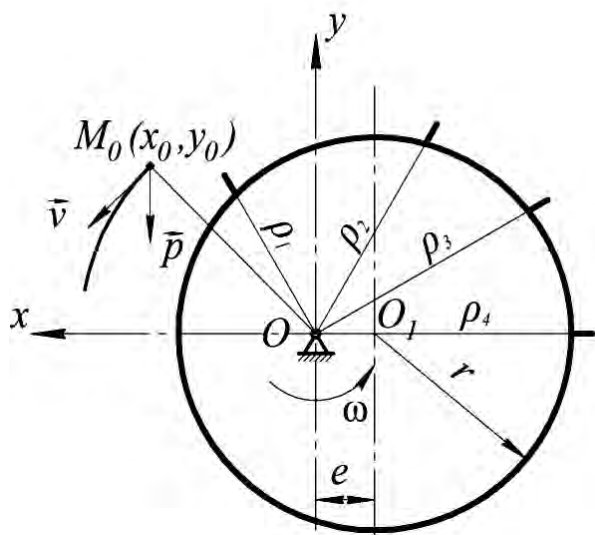


Рис. 4. Ребристый эксцентриковый валок

### Заключение

В приведенном исследовании анализируется движение материальной точки под действием гладкого кругового эксцентричного цилиндра. Получены формулы для скорости и ускорения точки, построены и описаны их графики; найдена сила инерции. Задача рас-

сматривается в более простой постановке. Оценена возможность анализа взаимодействия материальной точки с ребристым цилиндром. При углублении исследования необходимо учесть шероховатость поверхностей цилиндра и тела, моделируемых материальным пунктом, упругость материалов, силы тяжести и удара.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сиваченко, Л. А. Анализ работы подшипниковых узлов эксцентрикового вала вибровалкового измельчителя / Л. А. Сиваченко, Л. Л. Сотник // Вестн. БарГУ. Сер. Технические науки. – 2017. – Вып. 5. – С. 87–92.
2. Сиваченко, Л. А. Основы проектирования вибровалкового агрегата для дезинтеграторной обработки минеральных материалов / Л. А. Сиваченко, Л. Л. Сотник, И. А. Богданович // Научные технологии и инновации : сб. докл. Междунар. науч.-практ. конф. Ч. 4. Энергосберегающие технологические комплексы и оборудование для производства строительных материалов. – Белгород, 2016. – С. 179–185.
3. Сотник, Л. Л. Кинематический анализ эксцентрикового вибровалкового измельчителя / Л. Л. Сотник, С. И. Русан, Л. А. Сиваченко // Ударно-вибрационные системы и машины для строительной и горной отраслей : материалы VI Междунар. науч. симпозиума. – Орел, 2017. – С. 233–241.
4. Сиваченко, Л. А. Оценка эффективности дробления вибровалкового измельчителя / Л. А. Сиваченко, А. Н. Хустенко, Л. Л. Сотник // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2017. – № 4 (57). – С. 89–97.



5. **Сотник, Л. Л.** Исследование влияния отдельных факторов на степень измельченности в вибро-валковом измельчителе методом математического планирования эксперимента / Л. Л. Сотник, Л. А. Сиваченко // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 3. – С. 4–12.

*Статья сдана в редакцию 20 декабря 2018 года*

**Леонид Леонидович Сотник**, ст. преподаватель, Барановичский государственный университет. Тел.: +375-298-03-45-28.

**Сергей Иванович Русан**, канд. техн. наук, Барановичский государственный университет.

**Леонид Александрович Сиваченко**, д-р техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет. Тел.: +375-447-92-86-83.

**Leonid Leonidovich Sotnik**, senior lecturer, Baranovichi State University. Phone: +375-298-03-45-28.

**Sergei Ivanovich Rusan**, PhD, (Engineering), Baranovichi State University. Phone: +375-298-03-45-28.

**Leonid Aleksandrovich Sivachenko**, DSc, (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University. Phone: +375-447-92-86-83.

