АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ k-ГО ПОРЯДКА

В.А. Акимов

В результате опыта работы с дифференциальными операторами [1] автор приходит к следующим утверждениям.

Теорема 1. *Частное решение дифференциального уравнения произвольного порядка* $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ *имеет вид:* $f^*(x) = A_k x^k \sin\delta_n x$, *если* k *– четное и* $f^*(x) = A_k x^k \cos\delta_n x$, *если* k *– нечетное натуральное число.*

Доказательство данной теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Если* $1 \leqslant m \leqslant k-1$, *то* $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * [x^m \cos\delta_n x] = 0$.

Доказательство леммы базируется на том, что после однократного применения оператора, стоящего в круглых скобках, степень полинома понижается на единицу.

Доказательство основной теоремы проведем по индукции, считая для определенности k нечетным. При $k=1$ исходное уравнение имеет вид $(d_x^2/\delta_n^2+1) * f(x) = \sin\delta_n x$. Так как

$$(d_x^2/\delta_n^2+1)*[A_1 x\cos\delta_n x] = A_1[-(2/\delta_n)\sin\delta_n x - x\cos\delta_n x + x\cos\delta_n x] = -(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x,$$

то получим $-(2A_1/\delta_n)\sin\delta_n x = \sin\delta_n x$, откуда определяем $A_1 = -\delta_n/2$.

Предположим теперь, что данное высказывание верно для произвольного натурального нечетного числа k : $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * [A_k x^k \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x$. Легко показать, что тогда оно верно и для $k+2$, т.е.

$$(d_x^2/\delta_n^2+1)^{k+2} * [A_k x^{k+2} \cos\delta_n x] = \sin\delta_n x,$$

где $A_k = -\delta_n^k/(2^k k!)$.

Здесь было учтено, что на основании леммы первое слагаемое в квадратных скобках обращается в нуль после воздействия на него оператора, степень которого больше чем степень x. На основании теоремы 1 можно сформулировать теорему 2.

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения* $(d_x^2/\delta_n^2+1)^k * f(x) = \sin\delta_n x$ *имеет вид*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_m x) + A_k x^k \sin\delta_n x,$$

если k *– четное и*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{m=k-1} x^m (C_m \sin\delta_n x + D_m \cos\delta_m x) + A_k x^k \cos\delta_n x,$$

если k *– нечетное натуральное число, причем* $A_k = (-1)^k \delta_n^k/(2^k k!)$.

Доказательство этой теоремы основано на решении однородного уравнения

$$\left(\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+1\right)^k * f(x)=0. \tag{1}$$

Так как соответствующее характеристическое уравнение имеет чисто комплексные корни $\pm i\delta_n$ кратности k, то в соответствии с [2], решение уравнения (1) имеет вид

$$\overline{f}(x)=\sum_{m=0}^{m=k-1} x^m(C_m\sin\delta_n x+D_m\cos\delta_n x),$$

что и доказывает первую часть нашего утверждения. Доказательство второй части теоремы, т.е. нахождение частного решения, полностью основано на теореме 1. Попутно заметим, что именно в этом и заключается роль первой теоремы, так как нахождение частного решения, например, методом вариации произвольной постоянной [2], носит весьма проблематичный характер.

Литература

1. Акимов В. А. *Операторный метод решения задач теории упругости.* Мн.: УП «Технопринт», 2003.

2. Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* Т. 2. М., 1974.