О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФУКСА

В.В. Амелькин, М.Н. Василевич

Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ – комплексная проективная прямая, $M = \{1, i, -1, -i\}$ – множество точек прямой X.

На открытом множестве $X \setminus M$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left(\frac{U_1}{z-1} + \frac{U_2}{z-i} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z+i}\right) Y\, dz \tag{1}$$

с постоянными матрицами

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$\xi_4 = -\sum_{j=1}^{3} \xi_j, \tag{3}$$

а

$$\sum_{j=1}^{3} \theta_j = 0. \tag{4}$$

Условия (4), (4) означают (согласно теореме о сумме вычетов), что точки $z = \infty$ нет среди особых точек матричного уравнения (1).

Отметим, что уравнение (1) является модельным уравнением при решении одной из задач аналитической теории дифференциальных уравнений, связанной с задачей Римана–Гильберта о построении на сфере Римана уравнения Фукса по заданным особым точкам и заданной группе монодромии.

Теорема 1. *Уравнение (1) с матрицами-вычетами (2) вполне интегрируемо.*

Теорема 2. *Если собственные значения матриц-вычетов (2) уравнения (1) удовлетворяют условию (4), где $\xi_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,3}$, а параметры θ_j, $j = \overline{1,3}$, удовлетворяют соотношению (4), то фундаментальная матрица $\Phi(z)$ уравнения (1) имеет вид*

$$\Phi(z) = E + \sum_{j=1}^{4} \phi_j(z) U_j,$$

где

$$\phi_j(z) = v(z) \int \frac{dz}{(z-\alpha_j) v(z)}, \quad j = \overline{1,4},$$

$$v(z) = \prod_{j=1}^{4} (z - \bar{\alpha}_j)^{\xi_j},$$

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -i$, *и является нормированной в точке* $z_0 = \infty$.