ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ БЕЗ ПОДВИЖНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, В.А. Пронько

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Рассмотрим систему

$$x' = P(x,y,z), \quad y'' = Q(x,y,z), \tag{1}$$

где

$$P(x,y,z) = \left(\sum_{i=0}^{m+s} a_i x^{m+s-i} y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^{m-j} y^j\right)^{-1},$$

$$Q(x,y,z) = \left(\sum_{i=0}^{m+s} \alpha_i x^{m+s-i} y^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j x^{m-j} y^j\right)^{-1},$$

a_i, b_j, α_i, β_j, – аналитические функции по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (1). Пенлеве-анализ системы (1) при $s = 1$ выполнен в [1].

Пусть $s = 0$. Выполнив в (1) замену $x = \varepsilon X$, $y = \varepsilon Y$, $z = z_0 + \varepsilon t$, при $\varepsilon = 0$ получим упрощенную систему

$$\dot{X} = P(X,Y,z_0), \quad \ddot{Y} = 0. \tag{2}$$

Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы (2), необходимо чтобы она имела вид

$$\dot{X} = \frac{e_0X^2 + e_1XY + e_2Y^2}{Y^2}, \quad \ddot{Y} = 0, \tag{3}$$

где $e_k \in \mathbb{C}$, $k = 0,1,2$. Из второго уравнения системы (4) найдем: $Y = C(t-t_0)$, где C, t_0 – произвольные постоянные, а уравнение для X примет вид

$$\dot{X} = \frac{e_0}{C^2(t-t_0)^2}X^2 + \frac{e_1}{C(t-t_0)}X + e_2. \tag{4}$$

Пусть $e_0 \neq 0$. Положим в (4) $X = -\dfrac{C^2(t-t_0)^2}{e_0}\dfrac{\dot{u}}{u}$. Для u получим уравнение

$$\ddot{u} = \frac{e_1 - 2C}{C(t-t_0)}\dot{u} - \frac{e_0e_2}{C^2(t-t_0)^2}u,$$

общее решение которого

$$u = (t-t_0)^{(e_1-C)/(2C)}(K_1(t-t_0)^{\sqrt{(e_1-C)^2-4e_0e_2}/(2C)} + K_2(t-t_0)^{-\sqrt{(e_1-C)^2-4e_0e_2}/(2C)}),$$

где K_1, K_2 – произвольные постоянные. Точка $t = t_0$ не является точкой ветвления для функции X, только если $e_1 = e_2 = 0$.

Пусть $e_0 = 0$. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$X = \frac{e_2 C(t-t_0)}{C-e_1} + K(t-t_0)^{e_1/C}, \qquad (5)$$

где K – произвольная постоянная. Для однозначности функции X необходимо требовать $e_1 = 0$.

Пусть $s \geqslant 2$. Выполнив в (1) замену $x = \varepsilon^{-1}X$, $y = \varepsilon^{-1}Y$, $z = z_0 + \varepsilon^{s-1}t$, при $\varepsilon = 0$ получим упрощенную систему (2). Для наличия свойства Пенлеве, необходимо чтобы она имела вид

$$\dot{X} = e_0 Y^{s-2}X^2 + e_1 Y^{s-1}X + e_2 Y^s, \quad \ddot{Y} = 0,$$

где $e_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2$. Таким образом, справедлива

Теорема. *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений системы* (1) *необходимо, чтобы при* $s = 0$ *она имела один из двух видов:*

$$x' = a(z), \quad y'' = Q(x, y, z)$$

или

$$x' = a(z)\frac{x^2}{y^2}, \quad y'' = Q(x, y, z),$$

а при $s \geqslant 2$ *имела вид*

$$x' = c_0(z)y^{s-2}x^2 + c_1(z)y^{s-1}x + c_2(z)y^s, \quad y'' = Q(x, y, z),$$

где $a(z)$, $c_k(z)$, $k = 0, 1, 2$ *– аналитические функции по* z *в некоторой области* $D \subset \mathbb{C}$.

Далее проводится Пенлеве-анализ полученных систем при $s = 0$.

Литература

1. Андреева Т. К., Березкина Н. С., Пронько В. А. *Об одном классе систем двух дифференциальных уравнений первого и второго порядков со свойством Пенлеве* // Еругинские чтения–2018. XVIII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям: матер. конф. Гродно, 15–18 мая 2018 г., ГрГУ им. Я.Купалы, 2018. С. 3–4.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/