О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ЯБЛОНСКОГО–ВОРОБЬЕВА

В.И. Громак

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

В настоящей работе мы рассматриваем свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве [1–4]

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} \equiv \left(\frac{d}{dz}+2w\right)\widetilde{L}_N[w'-w^2]-zw-\alpha=0, \quad N=1,2,\ldots \tag{1}$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u]=\left(\frac{d^3}{dz^3}+(4u+\beta_N)\frac{d}{dz}+2u_z\right)\widetilde{L}_N[u], \quad \widetilde{L}_1[u(z)]=u(z), \quad N=1,2,\ldots \tag{2}$$

Первый член этой иерархии, т.е. уравнение $\widetilde{P}_2^{[2]}$, есть второе уравнение Пенлеве $w''= = 2w^3+zw+\alpha$, а последующие уравнения называют высшими аналогами второго уравнения Пенлеве. Иерархия (1), (2) обобщает известную иерархию второго уравнения Пенлеве [5–8], получаемую при $\beta_1=0$, $\beta_2=0$, $\ldots$, $\beta_{N-1}=0$ в (2), и связана с иерархией уравнения Кортевега–де Фриза. В уравнении (1) α и β – комплексные параметры.

Решение уравнения (1) может иметь лишь простые полюсы с вычетами $\pm1,\pm2,\ldots$ $\ldots,\pm N$. Из характера разложений в окрестностях полюсов следует, что рациональное решение необходимо имеет вид

$$w^{[N]}(z)=\sum_{k=1}^{N}k\left(\sum_{j=1}^{l_k^+}\frac{1}{z-z_{kj}}-\sum_{i=1}^{l_k^-}\frac{1}{z-z_{ki}}\right)=\sum_{k=1}^{N}k\left(\frac{\mathbf{P}_k'(z)}{\mathbf{P}_k(z)}-\frac{\mathbf{Q}_k'(z)}{\mathbf{Q}_k(z)}\right), \tag{3}$$

где $l_k^{\pm}\in\mathbb{Z}_+$ – количество полюсов z_{kj}, z_{ki} рационального решения $w^{[N]}(z)$ с вычетами k и $-k$ соответственно, а полиномы $\mathbf{P}_k(z)$ и $\mathbf{Q}_k(z)$ не имеют общих множителей и представимы в виде

$$\mathbf{P}_k(z)=\prod_{j=1}^{l_k^+}(z-z_{kj}), \quad \mathbf{Q}_k(z)=\prod_{i=1}^{l_k^-}(z-z_{ki}). \tag{4}$$

Относительно рациональных решений уравнения (1) справедлива*

Теорема 1. *Для существования рациональных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha=n\in\mathbb{Z}$ *и для каждого целого* α *и фиксированного* β *рациональное решение единственно.*

Рациональное решение уравнения (1) при $\alpha=n\in\mathbb{N}$ также может быть представлено в виде $(Q_n(z):=Q_n^{[N]}(z))$

$$w^{[N]}(z)=\frac{Q_{n-1}'(z)}{Q_{n-1}(z)}-\frac{Q_n'(z)}{Q_n(z)}=\frac{d}{dz}\left(\ln\frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}\right), \tag{5}$$

а для $\alpha=-n$, $n\in\mathbb{N}$, $w(z,\alpha,\beta)=-w(z,-\alpha,\beta)$, $w(z,0,\beta)=0$. Представление (5) называют представлением Яблонского–Воробьева. Относительно обобщенных полиномов $Q_n(z)$ Яблонского–Воробьева, которые в общем случае не являются взаимно простыми, доказаны следующие утверждения.

*Здесь и далее $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{N-1})$.

Теорема 2. *Полиномы $Q_n(z)$, дающие представление рационального решения (5) при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ с начальными полиномами $Q_0 = 1$, $Q_1 = z$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$Q_{n-1}Q'_{n+1} - Q'_{n-1}Q_{n+1} = (2n+1)Q_n^2, \qquad (6)$$

$$Q_{n+1}Q_{n-1} = zQ_n^2 - 2Q_n^2\widetilde{L}_N[2Q_n^{-2}(Q_nQ''_n - (Q'_n)^2)]. \qquad (7)$$

Доказано, что полиномы $Q_n(z)$ могут быть определены из соотношения (7) с начальными полиномами $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z$. При этом построено уравнение, которому удовлетворяют полиномы $Q_n(z)$. Также доказано, что степень полинома $Q_n(z)$ равна $m = n(n+1)/2$ и не зависит от N, т.е. от выбора уравнения из иерархии (1).

Теорема 3. *Полиномы Яблонского–Воробьева для обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве имеют структуру*

$$Q_n^{[N]}(z) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}_k^{(k^2-k)/2}\mathbf{Q}_k^{(k^2+k)/2}.$$

Число полюсов рационального решения (5) уравнения (1) при $\alpha = n$ с различными вычетами определяется постоянными $l_k^{\pm} \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=1}^{N} k(l_k^+ - l_k^-) = -\alpha, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2(l_k^+ + l_k^-) = \alpha^2.$$

При этом достаточно рассмотреть только положительные α, так как при отрицательных α число полюсов рациональных решений такое же, как и при положительных, а вычеты меняются на противоположные.

Введем в рассмотрение серию B-полиномов, заданных рекуррентным соотношением

$$B_n^{[N]}(\beta) = k_n^{-1}\,\mathrm{Resultant}\,[Q_{n-1}(z), Q_n(z), z], \quad B_0^{[N]} = 1, \quad \alpha = n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $k_n \neq 0$ – нормирующие постоянные. Ясно, что полиномы $B_n^{[N]}(\beta)$ определяют значения параметра β, при которых полиномы $Q_{n-1}(z)$, $Q_n(z)$ имеют общие корни, что равносильно наличию у рационального решения $w(z, n, \beta)$ полюсов с вычетами из множества $\{\pm 2, \pm 3, \ldots, \pm N\}$. Имеет место следующая

Теорема 4. *Если $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, а для параметра β выполнено условие $B_{|n|}^{[N]}(\beta) \neq 0$, то рациональное решение $w(z, n, \beta)$ не имеет полюсов с вычетами из множества $\{\pm 2, \pm 3, \ldots, \pm N\}$, при этом справедливо распределение $l_1^+ = \alpha(\alpha-1)/2$, $l_1^- = \alpha \times$ $\times (\alpha+1)/2$, $l_k^{\pm} = 0$, $k \in \{2, \ldots, N\}$.*

Литература

1. Kudryashov N.A. *Amalgamations of the Painlevé equations* // J. of Math. Phys. 2003. V. 44. № 12. P. 6160–6178.

2. Sakka A. *Linear problems and hierarchies of Painlevé equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. 025210. P. 1–19.

3. Громак В.И. *О решений уравнений Пенлеве высших порядков* // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. науч. семинара. 11–14 сент. 2012 г. Минск, Беларусь / под ред. С.В. Рогозина. Мн., 2012. С. 27.

4. Голубева Л.Л., Зенченко А.С. *Некоторые свойства решений уравнения* $({}_4\widetilde{P}_2)$ // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 2. С. 54–56.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

5. Airault H. *Rational Solutions of Painlevé equations* // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.

6. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

7. Clarkson P.A., Joshi N., Pickering A. *Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach* // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 175–187.

8. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane.* Berlin, New-York: De Gruyter Studies in Mathematics 28, 2002.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/