СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. М. Пецевич, А. О. Селивёрстова

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 +$$
$$+ (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00},$$
$$y'^2 = x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00}, \qquad (1)$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0. \qquad (2)$$

Запись $P \neq 0$, здесь и далее означает, что коэффициенты полинома P одновременно не обращаются в нуль в некоторой области D.

Исключая из системы (1) компоненту x, относительно компоненты y построим уравнение

$$(2y'y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0)^2 = \beta_8(y')^8 + \beta_6(y')^6 + \beta_4(y')^4 + \beta_2(y')^2 + \beta_0,$$

где a_i, β_j однозначно определяются через коэффициенты системы (1). Требуя выполнение леммы из [1, 2], для наличия свойства Пенлеве получим 27 условий на коэффициенты системы (1). Разрешая их, найдем, что для наличия свойства Пенлеве у решений системы (1) с условиями (2) необходимо, чтобы она принимала один из следующих видов:

$$x'^2 = (K_2y^2 + K_1y + x)(a_{03}x^2 + a_{02}x + a_{01}), \quad y'^2 = K_2y^2 + K_1y + x,$$

где $K_2 \neq 0$ (здесь и в дальнейшем $K_i \in \mathbb{C}$ будем считать произвольными постоянными), $|a_{03}| + |a_{02}| + |a_{01}| \neq 0$;

$$x'^2 = (x + K_1y)((a_{13}x^2 + a_{12}x + a_{11})y + a_{03}x^2 + a_{02}x + a_{01}), \quad y'^2 = K_1y + x,$$

где $K_1 \neq 0$, $|a_{13}| + |a_{12}| + |a_{11}| \neq 0$;

$$x'^2 = (a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x)y^2 + (a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x)y + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x, \quad y'^2 = x,$$

где $|a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| \neq 0$.

С помощью метода малого параметра, метода резонансов, метода сравнения с классическими уравнениями P-типа, показываем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы дифференциальная система (1) при условии (2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием* x, y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к одному из следующих видов:*

$$x'^2 = a_{02}(K_2y^2 + x)(x + K_1), \quad y'^2 = K_2y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0$, $a_{02} \neq 0$;

$$x'^2 = a_{01}(K_2y^2 + x), \quad y'^2 = K_2y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0$, $a_{01} \neq 0$;

$$x' = \varepsilon\sqrt{a_{02}}(x + K_1y), \quad y'^2 = x + K_1y,$$

где $K_1 \neq 0$, $a_{02} \neq 0$, $\varepsilon^2 = 1$;

$$x'^2 = \frac{xy^2(x + K_1)}{(K_2t + K_3)^2}, \quad y'^2 = x,$$

где $|K_2| + |K_3| \neq 0$. *В последнем случае решения выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве.*

Литература

1. Cosgrove C. M., Scoufis G. *Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree* // Stud. Appl. Math. 1993. V. 88. P. 25–87.

2. Пецевич В. М., Пронько В. А. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2 (35). С. 69–75.