# ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПУАССОНА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

**А.Ф. Проневич**



Рассмотрим гамильтонову дифференциальную систему с $n$ степенями свободы

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(t,q,p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\,\partial_{q_i} H(t,q,p), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $q = (q_1,\ldots,q_n)$ и $p = (p_1,\ldots,p_n)$ – точки из пространства $\mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, а дважды непрерывно дифференцируемая на области $D = T \times G$, $T \subset \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ функция $H\colon D \to \mathbb{R}$.

Среди общих методов построения первых интегралов системы Гамильтона (1) особое значение имеет метод Пуассона. Он дает возможность по двум первых интегралам системы (1) находить третий первый интеграл этой системы, а значит, в определенных случаях строить интегральный базис системы (1). Благодаря этому свойству метод Пуассона вошел практически во все монографии и учебники по аналитической механике (см., например, [1, с. 240; 2, 184; 3, с. 100]) и сформулирован в виде следующего утверждения.

**Теорема 1** (теорема Пуассона). *Пусть функции* $\mathrm{g}_k \in C^2(D')$, $k = 1,2$, *являются первыми интегралами на области* $D' \subset D$ *гамильтоновой системы (1). Тогда скобка Пуассона*

$$\mathrm{g}_{12}\colon (t,q,p) \to [\mathrm{g}_1(t,q,p), \mathrm{g}_2(t,q,p)] \quad \forall (t,q,p) \in D' \tag{2}$$

*от функций* $\mathrm{g}_1$ *и* $\mathrm{g}_2$ *будет первым интегралом гамильтоновой системы (1).*

В данной работе изучен вопрос о том, какие именно интегральные характеристики гамильтоновой системы (1) определяет скобка Пуассона (2) в случае, когда функции $\mathrm{g}_1$ и $\mathrm{g}_2$ определяют интегральные многообразия гамильтоновой системы (1).

Основной результат работы содержит

**Теорема 2** (обобщенная теорема Пуассона). *Пусть функции* $\mathrm{g}_k \in C^2(D')$, $k = 1,2$, *определяют интегральные многообразия гамильтоновой системы* (1) *такие, что*

$$\mathfrak{G}\mathrm{g}_k(t,q,p) = \Phi_k(t,q,p), \quad \Phi_k(t,q,p)\big|_{\mathrm{g}_k(t,q,p)=0} = 0 \quad \forall (t,q,p) \in D' \subset D, \quad k = 1,2,$$

*где оператор*

$$\mathfrak{G}(t,q,p) = \partial_t + \sum_{i=1}^{n} \bigl(\partial_{p_i} H(t,q,p)\partial_{q_i} - \partial_{q_i} H(t,q,p)\partial_{p_i}\bigr) \quad \forall (t,q,p) \in D.$$

*Тогда функция*

$$\mathrm{g}\colon (t,q,p) \to [\mathrm{g}_1(t,q,p), \mathrm{g}_2(t,q,p)] - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \quad \forall (t,q,p) \in D'$$

*будет первым интегралом системы* (1), *если и только если имеет место тождество*

$$[\mathrm{g}_1(t,q,p),\Phi_2(t,q,p)]-[\mathrm{g}_2(t,q,p),\Phi_1(t,q,p)]=\varphi(t)\quad\forall(t,q,p)\in D',\quad \varphi\in C(T).$$

Из теоремы 2 при $\varphi(t)=0\ \ \forall t\in T$ получаем основной результат работы [4].

**Литература**

1. Якоби К. *Лекции по динамике.* Л.; М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936.

2. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974.

3. Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике.* М.: Наука, 1966.

4. Pranevich A. The generalized Jacobi–Poisson theorem of building first integrals for Hamiltonian systems // Qualitative Theory of Differential Equations: proceedings of International Workshop QUALITDE–2018 / Editorial board I. Kiguradze, R.P. Agarwal, R. Hakl et al. Tbilisi, 2018. P. 147–149.